الفرع العلمي
المستوى الرابع
التكامل

الجزء الأول

نهج التميز في الرياضيات

الأستاذ رامي السعدي

ماجستير الرياضيات

0799782233

الدرس الأول: الاقتران البدائي:

*تعريف: اذا كان ق(س) متصل وكان م(س) يسمى اقتران بدائي للاقتران ق(س) اذا كان:
م'(س) = ق(س).

* يسمى الاقتران م(س) = س³ + س + جـ اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) = ٣س² + ١ لأن م'(س) = ق(س) (ق(س) متصل)

ونعبر عن العلاقة بين الاقترانين م(س)، ق(س) بالشكل التالي:

∫ (٣س² + ١) دس = س³ + س + جـ

∫ ق(س) دس = م(س)

* ∫ ق(س) دس: يعني ما هو الاقتران الذي مشتقته ق(س) عند اشتقاقه بالنسبة إلى س.

مثال تمهيدي:
اذا كان ق(س) = ٢س، أوجد اقتران بدائي للاقتران ق(س)؟

الحل:
م١(س) = لأن
م٢(س) = لأن
م٣(س) = لأن

* من المثال السابق نستنتج أن:
١) يوجد عدد لانهائي من الاقترانات البدائية.
٢) الفرق بين أي اقترانين بدائيين يساوي دائماً مقداراً ثابتاً.

مثال ١: بيّن أن م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) فيما يلي:

[١] م(س) = س³ + ٤س
ق(س) = ٣س² + ٤

[٢] م(س) = √(س² + ٦س)
ق(س) = (س + ٣) / √(س² + ٦س)

[٣] م(س) = جا³٢س + س² − ١
ق(س) = ٦جا٢س جتا٢س + ٢س

0799782233

* ملاحظة: م(س) = ∫ ق(س) . ءس

مثال ٢: أوجد الاقتران البدائي م(س) لكل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) = ٤س² − ٥س + ١

٢) ل(س) = ١ / س² ، حيث م(٣) = ١

٣) ق(س) = جا٣س + ظا²س − ١

٤) ق(س) = ٥√س − ٧ / س³ + ٨

مثال ٣: إذا كان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) حيث م(س) = (س − ١) / (س² + ٣)

فأوجد ∫ (٢ق(س) − ٦س²) . ءس .

مثال ٤: إذا كان:
∫ ق(س) . ءس = س² − ٥س + ١
وكان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س)
فأوجد قيمة م(٢)؟

مثال ١ : اذا كان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) حيث م(س) = $س^{٣}$ + أ $س^{٢}$ − ١ وكان ق(٢) = ٢٤ ، فأوجد قيمة أ ؟

مثال ٢ : اذا كان $م_{١}$(س) ، $م_{٢}$(س) اقترانين بدائيين للاقتران ق(س) المتصل على ح ، وكان هـ(س) = $م_{١}$(س) − $م_{٢}$(س) أوجد هـ′(س) ؟

ورقة عمل (١)

س ! ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

١) أحد الاقترانات الآتية هو اقتران بدائي للاقتران ق(س) = ٦ جتا ٣ س :

أ) ٢ جا ٣ س − س ب) جتا ٣ س + ١

ج) ٦ جا ٣ س + $\frac{١}{٢}$ د) −٢ جا ٣ س + ٤

٢) اذا كان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) المتصل على مجاله حيث:
م(س) = $س^{٣}$ − ٢ س + ١ فإن ق(٤) يساوي :

أ) ٥٧ ب) ٢٤ ج) ٤٦ د) غير ذلك

٣) اذا كان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) المتصل على مجاله حيث م(س) = $س^{٢}$ + أ $س^{٣}$ − ٢ وكان ق′(٢) = ٥ ، فما قيمة الثابت أ يساوي :

أ) $\frac{١}{١٢}$ ب) $\frac{١}{٤}$ ج) $\frac{٣}{٨}$ د) صفر

٤) اذا كان ∫ ق(س) . دس = $س^{٣}$ − ٥ س + ب
وكان هـ(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) حيث هـ(−١) = ٨ ، فما قيمة الثابت ب يساوي :

أ) ٤ ب) −٤ ج) ٦ د) −٦

٥) اذا كان م ، هـ اقترانين بدائيين للاقتران ق(س) المتصل على مجاله ، وكان ل(س) = م(س) − هـ(س) + $س^{٢}$
فما قيمة ل′(١) يساوي :

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) غير ذلك

الإجابات :

١) ب ٢) ج ٣) ب

٤) أ ٥) ج

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

الدرس الثاني: التكامل غير المحدود:

أفكار الدرس:
- قواعد التكامل غير المحدود
- تكامل الاقترانات الدائرية
- ايجاد قاعدة ق(س) اذا علمت ق(س)، ق''(س)...
- مشتقة التكامل غير المحدود.
- تطبيقات فيزيائية.

مقدمة:
- يرمز لتكامل الاقتران ق(س) بالرمز:
$\int$ ق(س) . دس
وتقرأ تكامل الاقتران ق(س) دال سين.
والرمز (دس) يعني: نريد أن نكامل الاقتران ق(س) بالنسبة للمتغير س.
$\int$ ق(ص) . دص : نريد تكامل الاقتران ق(ص) بالنسبة للمتغير ص.

- التكامل عكس التفاضل:
مثال: $\int$ ٢س . دس = س^{٢} + جـ
لأن مشتقة (س^{٢} + جـ) = ٢س
ويسمى جـ ثابت التكامل المحدود.

مثال:
$\int$(٦س^{٢} − ٤س + ٥) . دس =
٢س^{٣} − ٢س^{٢} + ٥س + جـ
لأن مشتقة (٢س^{٣} − ٢س^{٢} + ٥س + جـ)
تساوي ٦س^{٢} − ٤س + ٥ .

أولاً: قواعد التكامل غير المحدود:

* قاعدة (١): $\int$ أ . دس = أس + جـ

(تكامل الثابت = الثابت × المتغير + جـ)

مثال: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

[١] $\int$ ٣ . دس =

[٢] $\int \frac{٥}{٢}$. دس =

[٣] $\int \pi$. دص =

[٤] $\int$ أ . دع = أ: ثابت.

[٥] $\int$ دس =

[٦] $\int$ م . دن = م: ثابت

* قاعدة (٢):
$\int$ س^{ن} . دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ
حيث ن ≠ −١ .

مثال٢: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

[١] $\int$ س^{٢} . دس =

[٢] $\int$ س^{٩} . دس =

[٣] $\int$ س$^{-٤}$. دس =

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

٤) $\int \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \cdot \text{دس} =$

٥) $\int \text{س}^{\frac{٤}{٧}} \cdot \text{دس} =$

٦) $\int \text{س}^{\frac{-٥}{٢}} \cdot \text{دس} =$

٧) $\int \text{س}^{\frac{-٨}{٩}} \cdot \text{دس} =$

- ملاحظة: لاستخدام قاعدة (٢) يجب أن يكون الاقتران مكتوب على الصورة $\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{ن}}$

لذلك: $\frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{-\text{ن}}$ ، $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

٨) $\int \frac{١}{\text{س}^{٦}} \cdot \text{دس} =$

٩) $\int \frac{١}{\text{س}^{٤}} \cdot \text{دس} =$

١٠) $\int \sqrt[٥]{\text{س}^{٣}} \cdot \text{دس} =$

١١) $\int \sqrt{\text{س}^{٧}} \cdot \text{دس} =$

١٢) $\int \sqrt{\text{س}} \cdot \text{دس} =$

١٣) $\int \frac{١}{\sqrt[٤]{\text{س}^{٣}}} \cdot \text{دس} =$

١٤) $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س}}} \cdot \text{دس} =$

١٥) $\int \text{ع}^{٢} \cdot \text{دع} =$

١٦) $\int \text{م}^{٣} \cdot \text{دس} =$

١٧) $\int \pi^{٥} \cdot \text{دس} =$

* قاعدة (٣):

١) $\int \text{أ} \times \text{ق(س)} \cdot \text{دس} = \text{أ} \times \int \text{ق(س)} \cdot \text{دس}$

٢) $\int \left(\text{ق}_{١}\text{(س)} \mp \text{ق}_{٢}\text{(س)} \mp \dots \mp \text{ق}_{\text{ن}}\text{(س)}\right) \text{دس}$

$= \int \text{ق}_{١}\text{(س)} \cdot \text{دس} \mp \int \text{ق}_{٢}\text{(س)} \cdot \text{دس} \mp \dots \mp \int \text{ق}_{\text{ن}}\text{(س)} \cdot \text{دس}$

(توزيع التكامل على الجمع والطرح).

مثال ٣ : أوجد قيمة التكاملات الآتية :

١) $\int ٢ س^{٤} \, . ءس =$

٢) $\int ٣ س^{٧} \, . ءس =$

٣) $\int \frac{٧}{٢} \sqrt{س} \, . ءس =$

٤) $\int \frac{٥}{س^{٩}} \, . ءس =$

٥) $\int \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^{٣}}} \, . ءس =$

٦) $\int (س^{٣} - ٥س^{٢} + ٧س - ١) \, . ءس =$

٧) $\int (س^{٦} + \frac{١}{س^{٣}} - \sqrt[٥]{س^{٢}}) \, ءس =$

٨) $\int (٣ - \pi س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}) \, . ءس =$

٩) $\int س^{٤} (٣س - ١) \, . ءس$

١٠) $\int (س - ١) \times \sqrt{س} \, . ءس$

١١) $\int \frac{س^{٣} + ٥س^{٢} - ٤}{س^{٢}} \, . ءس$

١٢) $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س}} \, . ءس$

١٣) $\int (١ + ٤ص)(٢ + ص) \, . ءص$

١٤) $\int (٢ + ٣ع)^{٢} \, . ءع$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

ثانياً: تكامل الاقترانات الدائرية:

* قواعد تكامل الاقترانات الدائرية:

1) $\int$ جاس . ءس = − جتاس + جـ
2) $\int$ جتاس . ءس = جاس + جـ
3) $\int$ قا²س . ءس = ظاس + جـ
4) $\int$ قتا²س . ءس = − ظتاس + جـ
5) $\int$ قاس ظاس . ءس = قاس + جـ
6) $\int$ قتاس ظتاس . ءس = − قتاس + جـ

* ملاحظة:

$\int$ جا(أس + ب) . ءس = $-\frac{1}{أ}$ جتا(أس + ب) + جـ

ويقاس عليها باقي الاقترانات الدائرية وتنطبق هذه القاعدة فقط اذا كانت الزاوية على شكل اقتران خطي.

* لإيجاد تكامل: جا²س، جتا²س، ظا²س، ظتا²س نستخدم المتطابقات الآتية:

1) جا²س = $\frac{1}{2}$ (1 − جتا2س)
2) جتا²س = $\frac{1}{2}$ (1 + جتا2س)
3) ظا²س = قا²س − 1
4) ظتا²س = قتا²س − 1

* متطابقات وقوانين يجب حفظها:

1) جا²س + جتا²س = 1
2) 1 + ظا²س = قا²س
3) 1 + ظتا²س = قتا²س
4) جا2س = 2جاس جتاس
5) جتا2س = جتا²س − جا²س
   = 2جتا²س − 1
   = 1 − 2جا²س
6) جا(أ ∓ ب) = جاأ جتاب ∓ جتاأ جاب
7) جتا(أ ∓ ب) = جتاأ جتاب ± جاأ جاب
8) ظا(أ ∓ ب) = $\frac{\text{ظاأ} \mp \text{ظاب}}{1 \pm \text{ظاأ ظاب}}$
9) جاأ جتاب = $\frac{1}{2}$ (جا(أ+ب) + جا(أ−ب))
10) جتاأ جتاب = $\frac{1}{2}$ (جتا(أ+ب) + جتا(أ−ب))
11) جاأ جاب = $\frac{1}{2}$ (جتا(أ−ب) − جتا(أ+ب))
12) قاس = $\frac{1}{\text{جتاس}}$
13) قتاس = $\frac{1}{\text{جاس}}$
14) ظتاس = $\frac{1}{\text{ظاس}}$

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

مثال ٤: (تدريب مباشر على القوانين)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$\boxed{١}$ ∫ (٣ جاس + ٢س) . دس

$\boxed{٢}$ ∫ (٣ + قاس ظاس − ٤ جتاس) . دس

$\boxed{٣}$ ∫ (قتا^{2}س − ٧ قتاس ظتاس) . دس

$\boxed{٤}$ ∫ (٢ قا^{2}س − جاهـ) . دس   هـ: ثابتة

$\boxed{٥}$ ∫ ٢ جا٣س . دس

$\boxed{٦}$ ∫ جتا (٢س + ١) . دس

$\boxed{٧}$ ∫ قا^{2} ($\frac{س}{٣}$ − ١) . دس

$\boxed{٨}$ ∫ قتا٥س ظتا٥س . دس

$\boxed{٩}$ ∫ قتا^{2} ($\frac{٣}{٥}$س + ٧) . دس

$\boxed{١٠}$ ∫ قا (أس + ب) ظا (أس + ب) . دس

$\boxed{١١}$ ∫ جا^{2}س . دس

$\boxed{١٢}$ ∫ جتا^{2}س . دس

$\boxed{١٣}$ ∫ ظا^{2}س . دس

$\boxed{١٤}$ ∫ ظتا^{2}س . دس

مثال ٥: (لعيقد على المتطابقات والقوانين)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$\boxed{١}$ ∫ جا^{3}س . دس

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

٢) $\int$ جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$. ءس

٣) $\int$ ظا^{٢} ٧س . ءس

٤) $\int$ ٢جاس جتاس . ءس

٥) $\int$ جا $\frac{س}{٢}$ جتا $\frac{س}{٢}$. ءس

٦) $\int$ ٦جا٥س جتا٥س . ءس

٧) $\int$ جا٣س جتا٥س . ءس

٨) $\int$ جتا٤س جا٥س . ءس

٩) $\int$ جا٣س جتا٨س . ءس

١٠) $\int$ جا٤س جا٥س . ءس

١١) $\int$ ٢جا^{٢}س + ٢جتا^{٢}س . ءس

١٢) $\int$ ٥ − ٥جتا^{٢} ٣س . ءس

١٣) $\int$ ٣ + ٣ظا^{٢}س . ءس

١٤) $\int$ ٥ + ٥ظتا^{٢}س . ءس

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

١٥ $\int (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}) \cdot \text{دس}$

١٦ $\int (٥\,\text{جا}^{٢}\text{س} - ٥\,\text{جتا}^{٢}\text{س}) \cdot \text{دس}$

١٧ $\int (٤\,\text{جتا}^{٢}\text{س} - ٢) \cdot \text{دس}$

١٨ $\int (٣ - ٦\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}) \cdot \text{دس}$

١٩ $\int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}) \cdot \text{دس}$

٢٠ $\int \frac{٢}{\text{قا}\,٤\text{س}} \cdot \text{دس}$

٢١ $\int \frac{٥}{\text{جتا}\,٣\text{س}\ \text{ظتا}\,٣\text{س}} \cdot \text{دس}$

٢٢ $\int \text{ظتا س جا س} \cdot \text{دس}$

٢٣ $\int \frac{\text{ظا س}}{\text{جتا س}} \cdot \text{دس}$

٢٤ $\int \text{جا}^{٥}\text{س} \cdot \text{دس}$

٢٥ $\int \frac{\text{دس}}{١ - \text{جا س}}$

٢٦ $\int \frac{١}{٢ - ٢\,\text{جتا}^{٢}\,٥\text{س}} \cdot \text{دس}$

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

٢٧) $\int \frac{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}\ \text{جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}} \cdot \text{ءس}$

٢٨) $\int \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{جتا٢س}} \cdot \text{ءس}$

٢٩) $\int \frac{\text{١}}{\text{جتا٢س} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} \cdot \text{ءس}$

٣٠) $\int \frac{\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س} - \text{٥}}{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} \cdot \text{ءس}$

٣١) $\int \frac{\text{١} + \text{جتا}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{١} + \text{جتا٢س}} \cdot \text{ءس}$

٣٢) $\int \frac{\text{١} + \text{جتا}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{١} + \text{جتاس}} \cdot \text{ءس}$

٣٣) $\int \frac{\text{١} + \text{٢جاس} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} \cdot \text{ءس}$

بسم الله الرحمن الرحيم

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

$\boxed{\text{٣٤}}$ $\int \frac{\text{١ − ظتا س}}{\text{١ + جتا س}} \cdot \text{ء س}$

$\boxed{\text{٣٥}}$ $\int \frac{\text{١}}{\text{١ + جا س}} \cdot \text{ء س}$

$\boxed{\text{٣٦}}$ $\int \frac{\text{١ − جا ٢ س}}{\text{جا س − جتا س}} \cdot \text{ء س}$

$\boxed{\text{٣٧}}$ $\int \frac{\text{ظتا ٣ س}}{\text{جتا س}} \cdot \text{ء س}$

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

ثالثاً: ايجاد قاعدة ق(س) اذا علمت قاعدة ق′(س) ، ق″(س) ....

* تمهيد: ∫ ٢س . ءس = س٢ + ج

اذا اعتبرنا أن ق(س) = س٢ فإن

ق′(س) = ٢س

وعليه يكون ∫ ق′(س) . ءس = ق(س) + ج

كذلك ∫ (٣س٢ − ٥س) . ءس = س٣ − ٥/٢ س٢ + ج

اذا اعتبرنا أن ق(س) = س٣ − ٥/٢ س٢ فإن

ق′(س) = ٣س٢ − ٥س

وعليه يكون ∫ ق′(س) . ءس = ق(س) + ج .

وبالتالي فإن:

∫ ق′(س) . ءس = ق(س) + ج

∫ ق″(س) . ءس = ق′(س) + ج

∫ ق‴(س) . ءس = ق″(س) + ج

∫ ميل المماس . ءس = ق(س) + ج

مثال٦: اذا كان ق′(س) = ٢س − ٣

وكان ق(١) = ٢ ، أوجد قاعدة ق(س) ؟.

مثال٧: اذا كان ق′(س) + جاس = ٢س

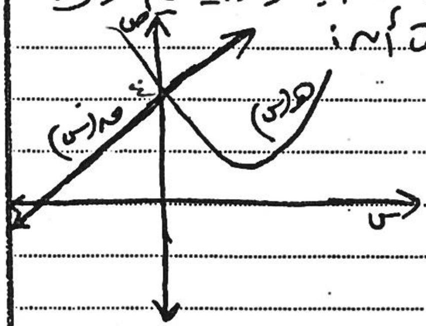
فجد ق(س) حيث ق(π/٢) = ٤ ؟.

مثال٨: يمثل الشكل المجاور بياني الاقترانين ق ، هـ ، اذا علمت أن:

ق(س) = ٣س + ٤

هـ′(س) = ٢س − ٣

فجد قاعدة هـ(س) ؟



الأستاذ رامي السعدي

0799782233

مثال ٩: اذا كانت النقطة (١،١) نقطة حرجة للاقتران ق(س) كثير الحدود من الدرجة الثالثة وكانت ق''(س) = ٣س + ١، أوجد ق(س)؟

مثال ١١: اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص = ق(س) عند النقطة (١، -١) يساوي ١٠ فأوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن:

د²ص / دس² = ١٨س − ٨ .

مثال ١٠: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي: ٥س⁴ + ٢س + ٣ جد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(٢) = ٣ ؟

رابعاً: مشتقة التكامل غير المحدود:

* تمهيد: ق(س) = ∫ (٢س − ٥) . دس ، أوجد ق'(س) ؟

الحل: بإجراء التكامل فإن:

ق(س) = س² − ٥س + جـ

⇐ ق'(س) = ٢س − ٥

نلاحظ أن ق'(س) = ما داخل التكامل دون اشتقاقه .

وبالتالي فإن اذا كان

ق(س) = ∫ هـ(س) . دس فإن ق'(س) = هـ(س)

مشتقة التكامل غير المحدود تساوي ما داخل التكامل دون اشتقاقه.

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

مثال ١٣ :

1) $\text{ق(س)} = \int (\text{٤س} + ٧) \,.\, \text{دس}$ ، جد قَ(س)؟

2) $\text{ق(س)} = \int \text{س}^{٢} + \text{٥س} \,.\, \text{دس}$ ، جد قَ(س)؟

3) $\text{ق(س)} = \int \frac{٣}{١ - \text{جاس}} \,.\, \text{دس}$ ، جد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

4) اذا كان $\text{ص} = \int \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + \text{٣س} + ٥} \,.\, \text{دس}$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=٣}$

مثال ١٤ :

1) اذا كان $\int \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{٢س} + ١$

اوجد $\text{قَ}(-٣)$.

2) اذا كان $\int \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = \text{جا}^{٢}\text{س} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

أوجد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٤}\right)$.

3) $\int \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = \text{س}^{٤} + \text{س} + ٤$

اوجد $\text{ق}(١)$ ، $\text{قَ}(١)$ ؟

4) اذا كان $\int \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = \text{جاس} - \text{جتاس} + ٢$

فاثبت أن $\text{ق}\left(\frac{\pi}{٢}\right) - \text{قَ}\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٢$

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

مثال ١٥ :

$\boxed{١}$ اذا كان

$\int$ (ق(س) + ٢س) ء س = س^{٣} + أ س^{٢} + ١

وكان ق'(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧ ، أوجد قيمة كل من: أ ، ق(٠) ، ق'(٤) .

$\boxed{٢}$ $\int$ ق'(س) ء س = س^{٢} + ٤س + ٣

ق(١) = ٢ ، أوجد ق(٤) ؟

$\boxed{٣}$ اذا كان ق'(س) = س^{٣} − س^{٢} + ١

أوجد ق(٣) − ق(١) ؟ .

$\boxed{٤}$ $\int$ ق(٣س) ء س = س^{٣} + ٥س^{٢} − ١

أوجد ق'(٦) ؟ .

خامساً : تطبيقات فيزيائية :

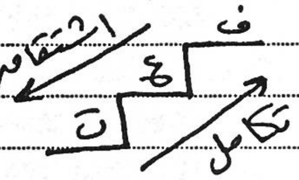
* مقدمة : نعلم أن :

ع(ن) = ف َ(ن)

ت(ن) = ع َ(ن)

وعليه يكون : ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن

ع(ن) = ∫ ت(ن) . دن



* تذكير : ع ابتدائية = ع(٠)

- عندما يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع فإن ع = صفر
- عندما يتحرك الجسم من السكون فإنه لا يوجد سرعة ابتدائية أي أن ع(٠) = صفر .

مثال ١٦ : إذا كان تسارع جسم بعد ن ثانية يساوي ٦ م/ث٢ ، أوجد سرعته بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن سرعته الابتدائية ٢ م/ث

مثال ١٧ : إذا كان تسارع جسم (ت) بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ت = ٦ن + ٤ أوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٣ ثواني من بدء حركته علماً بأن السرعة الابتدائية ٢ م/ث وأنه قطع ١٢ متر في أول ثانيتين من بدء حركته ؟

مثال ١٥ : قذف جسم رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م/ث وبتسارع مقداره (−١٠ م/ث٢) إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي (٨٠) م جد أقصى ارتفاع يصل إليه عن سطح الأرض ؟

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

مثال ١٩ : قذف جسم رأسياً للأعلى من قمة برج يرتفع ٣٠م عن سطح الأرض فكانت سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة :
ع = ٤٠ - ١٠ن ، أوجد ارتفاع هذا الجسم عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء الحركة ؟

مثال ٢٠ : انطلق جسم من النقطة (٤ ، ٠) باتجاه محور السينات الموجب وبسرعة ابتدائية مقدارها ٣ كم/ث وبتسارع ثابت مقداره ٦ كم/ث² ، أوجد بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ؟

مثال ٢١ : يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن سرعته عند أي لحظة (ن) تعطى بالعلاقة :
ع = ٤ جتا ٢ن ، أوجد المسافة التي يقطعها الجسم من ن = ٠ إلى أن يسكن لحظياً لأول مرة ؟

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

ورقة عمل (٢)

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

$\boxed{١}$ إذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = \text{س}^{٣}$

فإن $\text{ق}'(\text{س})$ يساوي:

أ) $\text{س}^{٣}$ ب) $٣\text{س}^{٢}$ ج) ٦س د) ٦

$\boxed{٢}$ إذا كان $\int (\text{ق}(\text{س}) + ٤\text{س})\,.\,\text{دس} = \text{س}^{٣} + \text{أ}\,\text{س}^{٢}$

وكانت $\text{ق}'(٩) = ١٥$ فإن قيمة الثابت أ =

(علماً بأن $\text{س} > ٠$)

أ) ١٦ ب) ٨ ج) $\frac{٥}{٦}$ د) ٣٤

$\boxed{٣}$ $\int \text{قاس}(\text{ظاس} + \text{قاس})\,.\,\text{دس} =$

أ) $\text{قاس} + \text{س} + \text{ج}$ ب) $\text{قاس} + \text{ج}$

ج) $\text{قاس}\,\text{ظاس} + \text{ج}$ د) $\text{قاس} + \text{جاس} + \text{ج}$

$\boxed{٤}$ $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{جا}^{٢}\text{س}}\,.\,\text{دس} =$

أ) $٢\,\text{ظتا}٢\text{س} + \text{ج}$ ب) $-٢\,\text{ظتا}٢\text{س} + \text{ج}$

ج) $٢\,\text{قتا}٢\text{س} + \text{ج}$ د) $-٢\,\text{قتا}٢\text{س} + \text{ج}$

$\boxed{٥}$ $\int \frac{\text{دس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٤}\text{س}}\,.\,\text{دس} =$

أ) $-٢\,\text{ظتا}٢\text{س} + \text{ج}$ ب) $٤\,\text{ظتا}٢\text{س} + \text{ج}$

ج) $-٢\,\text{جتا}٢\text{س} + \text{ج}$ د) $٢\,\text{جا}٢\text{س} + \text{ج}$

$\boxed{٦}$ إذا كان $\int (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))\,.\,\text{دس} = \text{جا}٢\text{س} + \text{س}^{٢} - ١$

وكان $\text{هـ}'(\frac{\pi}{٤}) = ٥$ ، فإن $\text{ق}'(\frac{\pi}{٤}) =$

أ) -٢ ب) $(\frac{\pi}{٢} - ٥)$ ج) -٧ د) -٣

الإجابات: ١) ج ٢) ب ٣) أ

٤) د ٥) أ ٦) ج

س٢: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$\boxed{١}$ $\int \frac{\text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}\,.\,\text{دس}$

$\boxed{٢}$ $\int \frac{١ + \text{جاس}}{١ - \text{جاس}}\,.\,\text{دس}$

س٣: أوجد معادلة المنحنى الذي يكون ميل المماس له عند أي نقطة (س،ص) تعطى بالعلاقة:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤}$ ، والذي يقطع

محور السينات عند النقطة س = ٣ ؟

س٤: أوجد معادلة المنحنى الذي يكون ميل المماس له عند أي نقطة (س،ص) يتناسب عكسياً مع مربع الإحداثي السيني لهذه النقطة علماً بأن المنحنى يمر بالنقطتين (١،٥)، (٣،١) ؟

(مساعدة: ميل المماس = $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{س}^{٢}}$)

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

الدرس الثالث: التكامل المحدود:

* أفكار الدرس:
- مفهوم التكامل المحدود
- خصائص التكامل المحدود
- تكامل الاقترانات المتشعبة
- مشتقة التكامل المحدود.

أولاً: مفهوم التكامل المحدود:

* تعريف: التكامل المحدود للاقتران ق(س) في الفترة [أ، ب] هو:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) \cdot دس = ق(س) \Big]_{أ}^{ب}$$

$$= ق(ب) - ق(أ).$$

ويسمى أ: الحد السفلي للتكامل المحدود

ب: الحد العلوي للتكامل المحدود.

وإذا أمكن إيجاد قيمة $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) . دس فإن ق يكون قابلاً للتكامل على [أ، ب]

مثال ١: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

١) $\int_{١}^{٣} س^٢ . دس$

٢) $\int_{-١}^{٢} ٦ س^٢ . دس$

٣) $\int_{١}^{٣٢} \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^٣}} . دس$

٤) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{\sqrt{س^٦}} . دس$

٥) $\int_{١}^{١٦} \sqrt{س} . دس$

٦) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} جاس . دس$

٧) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٦}} قاس ظاس . دس$

[٨] $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جاس جتاس} \cdot \text{دس}$

[٩] $\int_{1}^{2} (\text{س}^2 + 3\text{س}) \cdot \text{دس}$

[١٠] $\int_{1}^{2} (\text{س}^2 - \text{س}^3) \cdot \text{دس}$

[١١] $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جتاس} - \text{جاس}) \cdot \text{دس}$

[١٢] $\int_{0}^{1} (4\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 8\text{س} - 2) \cdot \text{دس}$

[١٣] $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{\text{س}^3} + \frac{2}{\sqrt{\text{س}}} - 1\right) \cdot \text{دس}$

[١٤] $\int_{1}^{2} \left(\text{س}^2 + 2\int_{1}^{2} \text{ص} \cdot \text{دص}\right) \cdot \text{دس}$

[١٥] اذا كان $\int_{1}^{3} \left(3\text{س}^2 - 2\int_{1}^{\text{ج}} 3\text{م}^2 \cdot \text{دم}\right) \cdot \text{دس} = -20$

أوجد قيمة الثابت ج ؟

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

مثال ٢ : اذا كان (ن) عدداً صحيحاً موجباً فما هي مجموعة قيم (ن) التي تجعل المساواة :

$\int_{-1}^{1} \text{س}^{\text{ن}} \cdot d\text{س} = 2 \int_{0}^{1} \text{س}^{\text{ن}} \cdot d\text{س}$

صحيحة دائماً .

مثال ٣ : اوجد كثير حدود من الدرجة الأولى بحيث يكون :

$\int_{-1}^{1} \text{ق}(\text{س}) \cdot d\text{س} = 4$ ، $\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س}) \cdot d\text{س} = 2$

مثال ٤ : اذا كان ق(٢) = ٧ ، ق(٦) = ١٠

أوجد $\int_{2}^{6} (\text{ق}'(\text{س}) + 2) \cdot d\text{س}$.

مثال ٥ : أوجد الاقتران البدائي م(س) للاقتران

ق(س) = $3\text{س}^2 - 5\text{س} + 7$ ، س ∈ [١، ٤] .

مثال ٦ : اذا كان م(س) = $\text{س}^2 - 3\text{س} + \text{جـ}$

اقتران بدائي للاقتران ق(س) المتصل على [٢، ٥]

أوجد $\int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س}) \cdot d\text{س}$ ؟

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

مثال ٧: اذا كان م(س) اقتران بدائي للاقتران ه(س) المتصل على [٢، ٥] وكان:

م(٢) = ٣ ، م(٥) = ٧

أوجد: ١) $\int_{2}^{5}$ ه(س) . دس

٢) $\int_{5}^{2}$ (٤ ه(س) + ١) . دس

مثال ٨: اذا كان م، هـ اقترانين بدائيين للاقتران ه(س) المتصل على [٣، ٥] وكان

$\int_{3}^{5}$ (م(س) − هـ(س)) . دس = ٨

أوجد $\int_{5}^{3}$ (س م(س) − س هـ(س)) . دس ؟

قاعدة: $\int_{أ}^{ب}$ جـ . دس = جـ (ب − أ)

حيث جـ ∈ ح .

مثال ٩: أوجد قيمة كل مما يلي:

١) $\int_{3}^{8}$ ٧ . دس

٢) $\int_{-1}^{4}$ −٩ . دس

٣) $\int_{-4}^{-1}$ $\frac{1}{2}$. دس

مثال ١٠: أوجد قيمة الثابت أ فيما يلي:

١) $\int_{1}^{7}$ أ . دس = ١٢

٢) $\int_{أ}^{2}$ ٢أ . دس = −٣٠

٣) $\int_{أ+1}^{2+3أ}$ ٥ . دس = ٤٠

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

ثانياً: خصائص التكامل المحدود:

* خاصية (١): (الخواص الخطية)

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ج} \times \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = \text{ج} \times \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس}$

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\right)\,.\,\text{دس} =$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,.\,\text{دس}$

مثال ١١:

$\boxed{1}$ اذا كان $\int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 4$ احسب $\int_{2}^{5} 3\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس}$.

$\boxed{2}$ اذا كان $\int_{3}^{7} 2\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 16$ ، أوجد:

أ) $\int_{3}^{7} 3\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس}$.

ب) $\int_{3}^{7} \left(5\,\text{ق}(\text{س}) + 2\right)\,.\,\text{دس}$

$\boxed{3}$ اذا كان $\int_{2}^{3} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 6$
$\int_{2}^{3} \text{ج}\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 8$ ، أوجد قيمة الثابت ج ؟

مثال ١٢: اذا كان $\int_{5}^{7} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 6$ وكان $\int_{5}^{7} 3\,\text{هـ}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 9$ ، احسب مايلي:

$\boxed{1}$ $\int_{5}^{7} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right)\,.\,\text{دس}$

$\boxed{2}$ $\int_{5}^{7} \left(\text{هـ}(\text{س}) - 2\text{س} + 4\right)\,.\,\text{دس}$.

مثال ١٣: اذا كان $\int_{1}^{4} \left(\text{ق}(\text{س}) - 2\text{س}\right)\,.\,\text{دس} = 20$
أوجد قيمة $\int_{1}^{4} 3\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس}$.

مثال ١٤: إذا كان $\int_{1}^{3} \left(٢ق(س) + \frac{1}{س^2} - ٦\right) ءس = ١٢$

أوجد قيمة $\int_{1}^{3} \left(\frac{ق(س)}{٢} - ٣س^2\right) ءس$ ؟

مثال ١٥: إذا كان $\int_{٢}^{٥} \left(ق(س) + ٢ هـ(س)\right) ءس = ١٧$

وكان $\int_{٢}^{٥} هـ(س) ءس = ٦$ ، أوجد $\int_{٢}^{٥} \left(٣ - ق(س)\right) ءس$ ؟

مثال ١٦: $م = \int^{\pi} جا^2 س \, ءس$

$ن = \int^{\pi} جتا^2 س \, ءس$ ، أوجد قيمة م+ن ؟ .

خاصية (٣):

1) $\int_{أ}^{أ} ق(س) \, ءس = صفر$.

2) $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, ءس = - \int_{ب}^{أ} ق(س) \, ءس$

مثال ١٧: أوجد قيمة كل مما يلي:

1) $\int_{٣}^{٣} (س^2 - ٥س + ١) \, ءس$.

2) $\int_{٥}^{٥} \frac{٢س - ١}{س^2 + ٧} \, ءس$.

مثال ١٨:

1) إذا كان $\int_{1}^{ج} س \, ءس = صفر$ ، أوجد قيمة ج ؟

0799782233

٢ إذا كان $\int_{1}^{جـ} (٢س^{٢} + ٦س) \cdot دس = صفر$
أوجد قيمة جـ ؟

مثال ١٩ : أوجد قيمة الثابت جـ في كل مما يلي :

١ $\int_{٨}^{٤س} ق(س) \cdot دس = جـ س^{٢} + ٥س + ٢$

٢ $\int_{س}^{جـ} ق(س) \cdot دس = -جاس + \frac{1}{2}$
أوجد أصغر قيمة للثابت جـ بالتقدير الدائري .

مثال ٢٠ :

١ إذا كان $\int_{٣}^{٤} ق(س) \cdot دس = ٥$
أوجد قيمة $\int_{٤}^{٣} ق(س) \cdot دس$.

٢ إذا كان $\int_{-١}^{-٣} ق(س) \cdot دس = \frac{٧}{٢}$
أوجد قيمة $\int_{-٣}^{-١} ق(س) \cdot دس$.

مثال ٢١ : إذا كان $\int_{٢}^{٦} ق(س) \cdot دس = ٧$
أوجد قيمة $\int_{٦}^{٢} ٣ق(س) \cdot دس$.

مثال ٢٢ : إذا كان $\int_{١}^{٤} ٢ق(س) \cdot دس = -٨$
أوجد قيمة $\int_{٤}^{١} ٣ق(س) \cdot دس$.

مثال ٢٣ : اذا كان $\int_{2}^{5} 2\,\text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} = 6$

أجد قيمة $\int_{5}^{2} (\text{ق}(\text{س}) - 2)\cdot \text{دس}$.

مثال ٢٤ : اذا كان $\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} = 6$

$\int_{1}^{3} 2\,\text{هـ}(\text{س})\cdot \text{دس}$ أجد قيمة :

$\int_{3}^{1} (\text{هـ}(\text{س}) - 2\,\text{ق}(\text{س}) + 2\text{س} - 4)\cdot \text{دس}$

مثال ٢٥ : اذا كان :

$\int_{1}^{4} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} = 5$ ، $\int_{4}^{7} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} = -8$

أوجد قيمة $\int_{1}^{7} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس}$.

مثال ٢٦ : اذا كان :

$\int_{3}^{4} 2\,\text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} = 3$ ، $\int_{5}^{4} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} = 9$

احسب $\int_{3}^{5} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس}$.

مثال ٢٧ : اذا كان :

$\int_{3}^{6} 2\,\text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} = 14$ ، $\int_{9}^{6} (\text{ق}(\text{س}) + 2)\cdot \text{دس} = 4$

احسب $\int_{9}^{3} 3\,\text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس}$.

خاصية (٣) : (خاصية الإضافة)

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\cdot \text{دس}$$

- ملاحظة : ليس شرطاً أن يقع العدد (جـ) بين العددين أ ، ب .

- تدريب :

- $\int_{2}^{4} \text{ق} + \int_{4}^{9} \text{ق} = \int_{2}^{9} \text{ق}$
- $\int_{-1}^{5} \text{ق} + \int_{7}^{-1} \text{ق} = \int_{7}^{5} \text{ق}$
- $\int_{2}^{6} \text{ق} - \int_{9}^{6} \text{ق} = \int_{2}^{6} \text{ق} + \int_{6}^{9} \text{ق} = \int_{2}^{9} \text{ق}$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

مثال ٢٨ : إذا كان : $\int_{-١}^{٢} (٣\,\text{ق}(\text{س}) - ٤)\,.\text{دس} = ٤$ ، $\int_{٤}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس} = ٦$

أوجد $\int_{-١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس}$.

مثال ٢٩ : إذا كان :

$\int_{٢}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس} - \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس} = -\int_{٤}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس}$

أوجد قيمة الثابتين م، ب ؟ .

مثال ٣٠ : اثبت أن :

$\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس} + \int_{٥}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس} + \int_{٧}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس} - \int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,.\text{دس} = \text{صفر}$

مثال ٣١ : أوجد قيمة :

$\int_{٢}^{٣} (٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥)\,.\text{دس} + \int_{٣}^{٤} (٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥)\,.\text{دس}$

خاصية (٤): (خاصية المقارنة)

1) اذا كان ق(س) ≥ هـ(س) لكل س ∈ [أ، ب]
فإن: $\int_{أ}^{ب}$ ق(س).دس ≥ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س).دس

2) اذا كان ق(س) ≥ صفر لكل س ∈ [أ، ب]
فإن: $\int_{أ}^{ب}$ ق(س).دس ≥ صفر.

3) اذا كان ق(س) ≤ صفر لكل س ∈ [أ، ب]
فإن: $\int_{أ}^{ب}$ ق(س).دس ≤ صفر.

* لمعرفة إشارة التكامل دون اجراء عملية التكامل نبحث في اشارة الاقتران ق(س)، فإذا كان ق(س) موجباً فإن التكامل موجب، واذا كان ق(س) سالباً فإن التكامل يكون سالب.

مثال ٣٢: ابحث في اشارة التكاملات الآتية دون اجراء عملية التكامل:

1) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$ (س^2 − ١).دس

2) $\int_{0}^{3}$ (س^4 − ١).دس

3) $\int_{3}^{1}$ (٤س − س^2).دس

4) $\int_{3}^{5} \frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 3}$.دس

مثال ٣٣: دون اجراء عملية التكامل أثبت أن:

1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (س^2 + جاس) \, . \, دس > صفر$.

2) $\int^{\frac{\pi}{4}} جتا \sqrt{س} \, . \, دس \geq صفر$.

مثال ٣٤: اذا كان ق(س) اقترانا متزايدا على [١، ٤]، حيث ق(١) = ٣

ابحث في إشارة:

أ) $\int_{1}^{4} ق(س) \, . \, دس$ ب) $\int_{1}^{4} ق'(س) \, . \, دس$

مثال ٣٥: دون اجراء عملية التكامل أثبت أن:

1) $\int_{1}^{2} س \, . \, دس \leq \int_{1}^{2} س^2 \, . \, دس$

2) $\int_{3,5}^{6} \frac{س^2}{س+2} \, . \, دس > \int_{3,5}^{6} \frac{9}{س+2} \, . \, دس$

مثال ٣٦: اذا كان ق(س) معرفاً على [١، ٣] وكان ٢ ≤ ق(س) ≤ ٣ ، فأوجد العددين م، ن بحيث أن م ≤ $\int_{1}^{3}$ ق(س) . دس ≤ ن .

مثال ٣٧:

١) اذا كان ق(س) ≥ ٦ ، س ∈ [٢، ٥]
أوجد أقل قيمة للمقدار $\int_{2}^{5}$ ق(س) . دس .

٢) اذا كان ق(س) ≤ ٩ ، س ∈ [١، ٣]
أوجد اكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{3}$ ٤ق(س) . دس

ملاحظة: حتى نحصر التكامل بين عددين نقوم بحصر الاقتران ق(س) بين عددين وذلك بايجاد اكبر قيمة للاقتران وأصغر قيمة ويتم ذلك بعدة طرق وهي:

- الرسم البياني
- المتباينات
- استخدام القيم القصوى المطلقة باختبار اشارة ق′(س) .

مثال ٣٨: اثبت دون اجراء عملية التكامل مايلي:

١) ٦ ≤ $\int_{1}^{3}$ (٢س+١) . دس ≤ ١٤

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

٢) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-س^{2}}\,.\,دس$ ينحصر بين: ؟

٣) $٩ \leq \int^{٣} (٢جتا^{٣}س + ٥)\,.\,دس \leq ٢١$

ثالثاً : تكامل الاقترانات المتشعبة:

مثال ٣٩ : اذا كان ،

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س - ١ ، & ٠ \leq س \leq ٢ \\ ٣ - ٤س ، & ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$$

أوجد : ١) $\int^{٤} ق(س)\,.\,دس$ ٢) $\int_{١}^{٣} ق(س)\,.\,دس$

٣) $\int_{٢}^{٣} ق(س)\,.\,دس$.

مثال٤٠ : انطلق جسم في خط مستقيم من نقطة الأصل، فإذا كانت سرعته تعطى بالقاعدة :

$$ع = \begin{cases} ٣ن^{٢} ، & ٠ \leq ن < ٢ \\ ١٦ - ٢ن ، & ٢ \leq ن < ٨ \end{cases}$$

أوجد بُعد الجسم عن نقطة الأصل عندما ن = ٥ ثواني

مثال٤١ : أوجد قيمة كل مما يلي :

$\boxed{١}$ $\int_{-٢}^{٣} |٤ - ٢س| \, . \, دس$.

$\boxed{٢}$ $\int_{١}^{٤} |س^{٢} - ٩| \, . \, دس$

$\boxed{٣}$ $\int_{-١}^{١} س \times |س| \, . \, دس$.

مثال٤٢ : أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$\boxed{١}$ $\int_{١}^{٧} [\frac{١}{٣}س - ٢] \, . \, دس$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

2] $\int_{1}^{5} س \times \left[\frac{س}{٣}\right] . د س$

3] $\int_{1}^{3} \left(س - [٥ - ٢س]\right) . د س$

مثال ٤٣ : أوجد $\int^{ن} [س] . د س$ ، ن ∈ ص+ .

مثال ٤٤ : إذا كان :

1] $\int_{1}^{أ} [س - ٣] . د س = ٧$ ، أوجد الثابت أ حيث أ > ٠ ؟

2] $\int_{1}^{ج} \left[\frac{1}{٣} س + ١\right] . د س = ١٢$ ، أوجد ج ∈ ح ؟

رابعاً : مشتقة التكامل المحدود :

* قاعدة : $\frac{د}{د س}\left(\int_{أ}^{ب} ق(س) . د س\right) = صفر$.

وذلك لأن التكامل المحدود = ثابت دائماً .

مثال ٤٥ : أوجد ق'(س) فيما يلي :

1] $ق(س) = \int_{٢}^{٧} (ع^{٢} - ٥س) . د س$

2] $ق(س) = س^{٢} - ٣ \int_{٢}^{٤} \sqrt{س^{٢} + ١} . د س$

ورقة عمل (٣) ٣٥

س١ : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

[١] $\int_{٢}^{٤}$ (س − ٢) . دس =

أ) ١٤ ب) ٦ جـ) صفر د) ٥

[٢] ما قيمة $\int_{١}^{٣}$ |٢س − ١| . دس

أ) ٦ ب) ٢ جـ) −٦ د) −٢

[٣] اذا كان ق(س) = [٢ − س] ، فإن $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) . دس =

أ) −٦ ب) −٥ جـ) −٤ د) −٣

[٤] $\int^{\frac{\pi}{٤}}$ قا²س . دس =

أ) ظاس + جـ ب) ١ جـ) ⅓ قا³س + جـ د) −١

[٥] اذا كان $\int_{١}^{٢}$ ق(س) . دس = ٤ ، $\int_{٣}^{٢}$ ٢ق(س) . دس = −٤

فإن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) . دس =

أ) صفر ب) ٨ جـ) ٢ د) ٦

[٦] $\int_{٢}^{٧} \frac{٤س + ١}{س^٢ + ٧}$. دس + $\int_{٧}^{٢} \frac{٤س + ١}{س^٢ + ٧}$. دس يساوي

أ) ٢ ب) صفر جـ) ٧ د) غير ذلك

[٧] اذا كان ق(س) = $\int_{١}^{٤} \frac{س^٢ + ١}{٥س + ٢}$. دس

فإن قَ(س) يساوي :

أ) صفر ب) ٢ جـ) $\frac{س^٢ + ١}{٥س + ٢}$ د) غير ذلك

[٨] ق(س) = س² − $\int_{١}^{س^٣}$ $\sqrt{س^٤ + ١}$. دس + $\int$ $\sqrt{س^٤ - ٥}$. دس

فإن قَ(٣) يساوي :

أ) ٦ ب) ١١ جـ) ٨ د) ٤

[٩] اذا كان $\int_{٢}^{أ}$ (٢س − ٢) . دس = ٣ ، فإن قيم أ تساوي :

أ) ٣ ب) −١ جـ) {−١ ، ٣} د) غير ذلك

[١٠] اذا كان $\int_{١}^{س^٣ - ٧}$ ق(س) . دس = أس² + ٥س + ٦ ، فإن أ =

أ) ٨ ب) ٢ جـ) −٤ د) −٢,٥

[١١] اذا كان $\int_{٢}^{٥}$ (ق(س) + ٢س) . دس = ٣٧ ،

$\int_{٢}^{٣}$ ق(س) . دس = ٧ ، فإن قيمة $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) . دس =

أ) ٩ ب) ٢٣ جـ) ٣٠ د) ٤٤

[١٢] اذا كان ق(س) متصلاً على ح وكان ،

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) . دس − $\int_{٥}^{٣}$ ق(س) . دس = $\int_{٣}^{١}$ ق(س) . دس

فإن قيمة كل من أ ، ب على الترتيب تساوي :

أ) ٥ ، ١ ب) ١ ، ٥ جـ) ١ ، ٣ د) ٣ ، ٥

[١٣] اذا كان ق(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ متصلاً على [−٢ ، ٢]

وكان م ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ق(س) . دس ≤ ن

فإن قيم م ، ن على الترتيب هي :

أ) −٢ ، ٢ ب) صفر ، ٢ جـ) −٢ ، صفر د) صفر ، ٨

[١٤] اذا كان $\sqrt{١ - س^٢}$ قابلاً للتكامل على [−١ ، ١]

فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{١}$ $\sqrt{١ - س^٢}$. دس هي :

أ) ١ ب) −٢ جـ) ٢ د) صفر

س٢ : أوجد قيمة التكاملات الآتية :

[١] $\int_{١}^{٣}$ |س| × [س] . دس [٢] $\int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٢}}$ |جاس| . دس

س٣ : دون اجراء التكامل أثبت أن :

$\int_{٢}^{٥}$ س² . دس > $\int_{٢}^{٥}$ (٧س − ٦) . دس

الإجابات :

س١ : ١) جـ ٢) أ ٣) ب ٤) ب ٥) د ٦) ب

٧) أ ٨) جـ ٩) أ ١٠) أ ١١) د ١٢) جـ ١٣) جـ ١٤) جـ

س٢ : ١) $\frac{١٣}{٢}$ ٢) ٣