المدرس : مشتقة الاقتران الأسي :

① $f(x) = e^x \Leftarrow f'(x) = e^x$

② $f(x) = e^{5x} \Leftarrow f'(x) = 5e^{5x}$

③ $f(x) = e^{x^2+3x} \Leftarrow f'(x) = (2x+3) \times e^{x^2+3x}$

مثال) إذا كان $y = \frac{e^{3x}}{x^2+1}$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(3e^{3x}) - (e^{3x})(2x)}{(x^2+1)^2}$$

مثال) إذا كان $f(x) = e^{3x}$ جد $f'(x)$

الحل: $f'(x) = 3e^{3x}$

$f''(x) = 3(3e^{3x}) = 9e^{3x}$

مثال) إذا كان $f(x) = e^{5-3x}$ جد $f'(x)$

الحل:

$f'(x) = (-3)e^{5-3x}$

$f''(x) = (-3)(-3e^{5-3x}) = 9e^{5-3x}$

الدرس: مشتقة الاقتران اللوغاريتمي

① $ق(س) = \log_{هـ} س \Leftarrow ق'(س) = \frac{1}{س}$

② $ق(س) = \log_{هـ}(٥س+٣) \Leftarrow ق'(س) = \frac{٥}{٥س+٣}$

③ $ق(س) = \log_{هـ}(٤س-٣س^{٢}) \Leftarrow ق'(س) = \frac{٤-٦س}{٤س-٣س^{٢}}$

مثال) إذا كان $ص = \log_{هـ}(س^{٢}+١٠)$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -٢$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{س^{٢}+١٠}$

$\frac{دص}{دس}_{س=-٢} = \frac{٢ \times -٢}{(-٢)^{٢}+١٠} = \frac{-٤}{٤+١٠} = \frac{-٤}{١٤} = \frac{-٢}{٧}$

مثال) إذا كان $ق(س) = \log_{هـ}(ب س+٣)$ وكان $ق'(-٢) = ١$ فجد قيمة $ب$

الحل: $ق'(س) = \frac{ب}{ب س+٣}$

$ق'(-٢) = \frac{ب}{-٢ب+٣}$

$١ = \frac{ب}{-٢ب+٣} \Leftarrow -٢ب+٣ = ب$

$\Leftarrow ٣ = ٣ب$

$\Leftarrow ب = ١$

مثال) إذا كان $ق(س) = \log_{هـ}(٢س+١) + هـ^{٢س}$ فجد $ق'(١)$

الحل:

$ق'(س) = \frac{٢}{٢س+١} + ٢هـ^{٢س}$

$ق''(س) = \frac{-٢ \times ٢}{(٢س+١)^{٢}} + ٢(٢هـ^{٢س})$

$ق''(١) = \frac{-٤}{(٣)^{٢}} + ٤هـ^{٢} = \frac{-٤}{٩} + ٤هـ^{٢}$

رياضيات (الأدبي) الوحدة (التكامل) عصام محمد الشيخ

الفصل (٣) العنوان (ملخص الوحدة) ماجستير رياضيات

الدرس: التكامل غير المحدود:

المشتقة والتكامل:

١ ص = ∫ ٥ـس س جـ ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ـس

مثال) ق(س) = ∫ لوهـ س جـ ق(١)

الحل:

ق(س) = لوهـ س ⇐ ق(١) = لوهـ ١ = صفر

٢ ∫ ق(س) س = ٦ـس^٢

⇐

ق(س) = ١٨ـس^٢ ، ق(س) = ٣٦ـس ق''(س) = ٣٦

∫ ق(س) س = ٥ جاس

⇐ ق(س) = ٥ جتاس ، ق'(س) = -٥ جاس

قواعد التكامل غير المحدود

١) ∫ ١ د س = س + جـ ٢) ∫ س^ن س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ ن ≠ -١

٣) ∫ جاس س = -جتاس + جـ ٤) ∫ جتاس س = جاس + جـ

٥) ∫ قاس س = ظاس + جـ ٦) ∫ هـ^س د س = هـ^س + جـ

٧) ∫ $\frac{١}{س}$ س = لوهـ|س| + جـ ٨) ∫ $\frac{١}{جتاس}$ س = ∫ قاس س = ظاس + جـ

٩) ∫ جتاس ظاس س = ∫ $\frac{جتاس \times جاس}{جتاس}$ س = ∫ جاس س = -جتاس + جـ

رياضيات (الادبي) الوحدة (التكامل) عصام محمد الشيخ

الفصل (٢) العنوان (ملخص الوحدة) ماجستير رياضيات

(١٠) تكامل اكبنور

$\int \frac{1}{\sqrt{س}}\, س = \int س^{-\frac{1}{2}}\, س = \frac{1}{\frac{1}{2}} س^{\frac{1}{2}} + ج$

$\int \sqrt[3]{س^2}\, س = \int س^{\frac{2}{3}}\, س = \frac{1}{\frac{5}{3}} س^{\frac{5}{3}} + ج$

$\int \sqrt[7]{س^5}\, س = \int س^{\frac{5}{7}}\, س = \frac{1}{\frac{12}{7}} س^{\frac{12}{7}} + ج$

☒ حضائص :

(١) $\int$ عدد × اقتران = العدد × $\int$ الاقتران .

(٢) التكامل يوزع على الجمع والطرح .

الأمثلة :

(١) $\int$ جـ $\int$ (قاس - $\frac{3}{\sqrt{س}}$ - ظاس) س

الحل $\int$ قاس س - $\int \frac{3}{\sqrt{س}}$ س - $\int$ ظاس س

= ظاس - ٣ لو|س| + قاس + جـ

(٢) جـ $\int$ (قتاس - ٣ + $\frac{5}{س^5}$ - $\sqrt[3]{س^2}$) س

= $\int$ قتاس س - $\int$ ٣ س + $\int 5 س^{-5}$ س - $\int س^{\frac{2}{3}}$ س

= ظاس - ٣س + $\frac{5}{-4} س^{-4}$ - $\frac{1}{\frac{5}{3}} س^{\frac{5}{3}}$ + جـ

✱ التكامل بالضرب

① $\int س(٢س-١)\,د س = \int (٢س^{٢}-س)\,د س = \frac{٢}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢} + ج$

② $\int (س-٣)(٤-٥س)\,د س = \int (٤س - ٢٥س^{٢} - ١٢ + ١٥س)\,د س$

$= \int (١٩س - ٥س^{٢} - ١٢)\,د س$

$= \frac{١٩}{٢}س^{٢} - \frac{٥}{٣}س^{٣} - ١٢س + ج$

③ $\int (س-٣)^{٢}\,د س = \int (س^{٢} - ٦س + ٩)\,د س$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س^{٢} + ٩س + ج$

☒ التكامل مع المسمة

① القسمة على حد :

$$\int \frac{س^٤ - ٥س^٣}{س^٣} \, دس = \int \left(\frac{س^٤}{س^٣} - \frac{٥س^٣}{س^٣} \right) دس$$

$$= \int (س - ٥) \, دس = \frac{س^٢}{٢} - ٥س + ج$$

$$\int \frac{س^٣ - ٧ جتا س}{س^٢} \, دس = \int \left(\frac{س^٣}{س^٢} - \frac{٧ جتا س}{س^٢} \right) دس$$

$$= \int \left(س - ٧ س^{-٢} جتا س \right) دس$$

$$= \frac{س^٢}{٢} + ٧ س^{-١} جتا س + ج$$

② التحليل والاختصار

$$\int \frac{س^٣ + ٤س^٢}{س + ٤} \, دس = \int \frac{س^٢ (س + ٤)(س^٢ - ٤س + ١٦)}{(س + ٤)} \, دس$$

$$= \int (س^٣ - ٤س^٢ + ١٦س) \, دس + ج$$

$$\int \frac{س^٣ + ٦س + ٨}{(س + ٢)} \, دس = \int \frac{(س + ٢)(س^٢ + ٤)}{(س + ٢)} \, دس = \frac{س^٣}{٣} + ٤س + ج$$

* الدرس : التكامل المحدود :

١ $\int_{م}^{ب} \text{مَ}س\, س = \text{ف}(ب) - \text{ف}(م)$

٢ تكامل العدد $\int_{م}^{ب} جـ\, س = جـ(ب - م)$.

* ملاحظة : مشتقة التكامل المحدود = صفر دائماً .

الأمثلة :

① $\int_{٤}^{٩} (٣\sqrt{س} - \sqrt[٣]{س})\, س$

الحل : $\frac{٣}{٢}س^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}}$ $\Big|_{٤}^{٩}$

$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{س^{٢}} - \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{س^{٤}}$ $\Big|_{٤}^{٩}$

$\left(٨١ - \frac{٣}{٤}(\sqrt[٣]{٩^{٤}})\right) - \left(١٦ - \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{٤^{٤}}\right)$

$٨١ - \frac{٣}{٤} \times ٢٧ - (١٦ - \frac{٣}{٤} \times ٨)$

$٨١ - ١٨ - (١٦ - \frac{١٦}{٣})$

$٦٣ - \frac{٤٨ - ١٦}{٣}$

$٦٣ - \frac{٣٢}{٣}$

$\frac{١٨٩ - ٣٢}{٣} = \frac{١٥٧}{٣}$

(٣) اذا كان $f(-1)=3$ ، $f(2)=5$

جـ $\int_{-1}^{2} 4 f'(x)\,dx$

الحل:

$4\int_{-1}^{2} f'(x)\,dx = 4\,(f(2)-f(-1))$

$= 4(5-3) = 4\times 2 = 8$

(٣) $\int_{1}^{b} 6x^2\,dx = 9$ جد قيمة الثابت ب

الحل: $\int_{1}^{b} 6x^2\,dx = 9$

$(2b^3-2)=9$

$2b^3=12$

$b^3=6 \Rightarrow b=\sqrt[3]{6}$

(٤) $\int_{0}^{1} (3x^2-2x)\,dx =$ صفر جد قيمة جـ

الحل $\int_{0}^{1} 3x^2-2x\,dx =$ صفر

$1-1-(c^3-c^2)=$ صفر

$c^3-c^2+c-1=$ صفر

$c^2(c-1)+1(c-1)=$ صفر

$(c-1)(c^2+1)=$ صفر

$c=1$ ، $c^2=-1$ مرفوض

الدرس : خصائص التكامل المحدود

(١) $\int_{م}^{م} د(س)\,ه س = $ صفر

(٢) $\int_{م}^{ب} د(س)\,ه س = -٧ \Leftarrow \int_{ب}^{م} د(س)\,ه س = ٧$

(٣) خاصية الاضافة

$\int_{م}^{جـ} د(س)\,ه س = \int_{م}^{ب} د(س)\,ه س + \int_{ب}^{جـ} د(س)\,ه س$

الأمثلة :

(١) $\int_{-٢}^{٢} (٧س^٢ + جا س)\,ه س = $ صفر

(٢) اذا كان $\int_{-٢}^{٥} د(س)\,ه س = ٣$ جد $\int_{٥}^{-٢} ٢د(س)\,ه س$

الحل $\int_{٥}^{-٢} ٢د(س)\,ه س = ٢ \times -٣ = -٦$

(٣) إذا كان $\int_{-١}^{٢} ٤د(س)\,ه س = ٥$ ، $\int_{-١}^{٢} ٣د(س)\,ه س = -٢$

جد $\int_{-١}^{٢} (٣٤(س) - ٣د(س) - ٢س)\,د س$

الحل: $\int_{-١}^{٢} ٣٤(س)\,د س - \int_{-١}^{٢} ٣د(س)\,د س - \int_{-١}^{٢} ٢س\,د س$

$= ٣ \times ٥ - ٣ \times -١ - [س^٢]_{-١}^{٢}$

$= ١٥ + ٣ - (٤ - ١)$

$= ١٥ + ٣ - ٣ = ١٥$

(٤) اذا كان $\int_{٣}^{٥} (ق(س) - ١)\,س = ٦$ ، $\int_{٨}^{٥} ق(س)\,س = ١٠$

فجد $\int_{٣}^{٨} (٢ق(س) - ٣س)\,س$

الحل:

$$\int_{٣}^{٨} (ق(س) - ٣س)\,س$$

$$\int_{٣}^{٥} ق(س)\,س + \int_{٥}^{٨} ق(س)\,س - \int_{٣}^{٨} ٣س\,س$$

$$(٦) + (١٠) - (٩ - ٦٤)$$

$$١٦ + ١٠ - (٥٥)$$

$$٢٦ - ٥٥$$

$$-٤٣$$

$$\int_{٣}^{٥} ق(س)\,س = ٦$$

$$\int_{٥}^{٨} ق(س)\,س = ١٠ - ٢ = ٨$$

$$\int_{٣}^{٥} ق(س)\,س = ٦$$

$$\int_{٣}^{٨} ق(س)\,س = ٦ + ٨ = ١٤$$

الدرس : التكامل بالتعويض :

① * $\int (٥س+٣)^{٤}\,دس = \frac{(٥س+٣)^{٥}}{٥ \times ٥} + جـ$

$\int (٣-٤س)^{٢}\,دس = \frac{(٣-٤س)^{٣}}{٤- \times ٣} + جـ$

① ** $\int (٢س+٧)(س^{٢}+٧س)^{٢}\,دس$

الحل: $ص = س^{٢}+٧س$

$دص = (٢س+٧)\,دس$

$\int (٢س+٧)(ص)^{٢}\frac{دص}{٢س+٧} = \int ص^{٢}\,دص = \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ$

$= \frac{(س^{٢}+٧س)^{٣}}{٣} + جـ$

$\int \frac{٣-٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢}-٣س+٥}}\,دس$

الحل: $\int (٣-٢س)(س^{٢}-٣س+٥)^{-\frac{١}{٣}}\,دس$

$ص = (س^{٢}-٣س+٥)$

$دص = (٢س-٣)\,دس$

$\int (٣-٢س)(ص)^{-\frac{١}{٣}}\frac{دص}{٢س-٣} = -\int ص^{-\frac{١}{٣}}\,دص = -\frac{ص^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + جـ$

$= -\frac{٣}{٢}(س^{٢}-٣س+٥)^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

*(١) (٣) $\int س^{٧} \, د س = \frac{س^{٧+١}}{٧} + ج$

$\int س^{-٥} \, د س = \frac{س^{-٥+١}}{-٤} + ج$

** (١) $\int (٢س+٧)^{٣+٧س+س^{٢}} \, د س$

الحل: $ص = س^{٢} + ٧س + ٣$

$د ص = (٢س + ٧) \, د س$

$\frac{د ص}{٢س+٧} = د س$

$\int (٢س+٧) \, ص \, \frac{د ص}{٢س+٧} = \int ص \, د ص = \frac{ص^{٢}}{٢} + ج$

$= \frac{(٣+٧س+س^{٢})^{٢}}{٢} + ج$

$\int (١٤-٤س)^{٣-٧س-س^{٢}} \, د س$

الحل: $ص = ٣ + ٧س - س^{٢}$

$د ص = (-٧ - ٢س) \, د س$

$\frac{د ص}{-٧-٢س} = د س$

$\int (١٤-٤س) \, ص \, \frac{د ص}{-٧-٢س}$

(١) $\int -٢ \, ص \, د ص = -٢ \int ص \, د ص$

$= -٢ \, \frac{ص^{٢}}{٢} + ج$

$= -(٣+٧س-س^{٢}) + ج$

(١) *

$\int \frac{1}{س^2+3} \, دس = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ظا}^{-1}\left(\frac{س}{\sqrt{3}}\right) + ج$

$\int \frac{4}{16-س^2} \, دس = 4 \times \frac{1}{2(4)} \ln\left|\frac{4+س}{4-س}\right| + ج$

$= \frac{1}{8} \ln\left|\frac{4+س}{4-س}\right| + ج$

(٣) **

$\int \frac{2س+7}{س^2+7س+5} \, دس$

$ص = س^2+7س+5$

$دص = (2س+7) \, دس$

$\int \frac{2س+7}{ص} \, دس = \int \frac{1}{ص} \, دص = \ln|ص| + ج$

$= \ln|س^2+7س+5| + ج$

$\int \frac{14-4س}{-س^2-7س+3} \, دس$

$ص = -س^2-7س+3$

$دص = (-2س-7) \, دس$

$\int \frac{14-4س}{ص} \, دس = \int \frac{-2(-2س-7)}{ص} \, دس$

$= -2 \ln|ص| + ج$

$= -2 \ln|-س^2-7س+3| + ج$

(٤) ① * $\int جا ٧س \, دس = \frac{-جتا ٧س}{٧} + ج$

$\int قا^{٢} ٣س \, دس = \frac{ظا ٣س}{٣} + ج$

$\int جتا (٣-٥س) \, دس = \frac{جا(٣-٥س)}{-٥} + ج$

** ②

$\int (١٤-٤س) قا^{٢}(س^{٢}-٧س) \, دس$

الحل:

$ص = س^{٢}-٧س$

$دس = \frac{دص}{٢س-٧}$

$\int (١٤-٤س) قا^{٢} ص \frac{دص}{٢س-٧}$

$\int ٢(٧-٢س) قا^{٢} ص \frac{دص}{٢س-٧}$

$\int -٢ قا^{٢} ص \, دص$

$-٢ ظا ص + ج$

$-٢ ظا(س^{٢}-٧س) + ج$

$\int (٣+٧س+٢س^{٢})(٧+٣س) جتا(س^{٣}+٧س^{٢}+٣س) \, دس$

الحل:

$ص = س^{٣}+٧س^{٢}+٣س$

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢}+١٤س+٣}$

$\int (٣س^{٢}+١٤س+٣)(٧+٣س) جتا ص \frac{دص}{٣س^{٢}+١٤س+٣}$

$\int جتا ص \, دص$

$جا ص + ج$

$جا(س^{٣}+٧س^{٢}+٣س) + ج$

$\int س^{٢} جا(٤س^{٣}+٥) \, دس$

الحل:

$ص = ٤س^{٣}+٥$

$دس = \frac{دص}{٤س^{٢}}$

$\int س^{٢} جا ص \frac{دص}{٤س^{٢}}$

$\frac{١}{٤} \int جا ص \, دص = \frac{-١}{٤} جتا ص + ج = \frac{-١}{٤} جتا(٤س^{٣}+٥) + ج$

(٥) *

$م(٧) = ٩$ $م(٣) = -٢$

جد $\int_{١}^{٢} ق'(٥ - ٢س)\, دس$

الحل: $ص = ٥ - ٢س$ $س = ١ \leftarrow ص = ٣$ $س = -١ \leftarrow ص = ٧$

$دس = \frac{دص}{-٢}$

$\int_{٣}^{٧} ق'(ص)\, \frac{دص}{-٢} = -\frac{١}{٢}(م(٧) - م(٣))$

$= -\frac{١}{٢}(٩ - (-٢)) = -\frac{١}{٢}(٩ + ٢) = -\frac{١١}{٢}$

**

$م(٩) = ٥$ $م(-٥) = ١٣$

جد $\int_{-١}^{١} (٢س + ٧)\, ق'(س^{٢} + ٧س + ١)\, دس$

الحل: $ص = س^{٢} + ٧س + ١$ $س = -١ \leftarrow ص = -٥$ $س = ١ \leftarrow ص = ٩$

$دس = \frac{دص}{٢س + ٧}$

$\int_{-٥}^{٩} \frac{(٢س + ٧)\, ق'(ص)\, دص}{٢س + ٧}$

$= م(٩) - م(-٥)$

$= ٥ - ١٣ = -٨$

رياضيات (الأدبي) الوحدة (التكامل) عصام محمد الشيخ

الفصل (٣) العنوان (ملخص الوحدة) ماجستير رياضيات

الدرس: تطبيقات هندسية

مثال) اذا كان ميل المماس $٦-٢س+٩س^{٢}$ حيث قاعدة الاقتران حيث ق(٠) = ٥

الحل:

$$ق(س) = \int ٦-٢س+٩س^{٢}\, دس$$

$$= ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٤} + ج$$

$$ق(١) = ٠ - ٠ + ٠ + ج$$

$$٥ = ج$$

$$ق(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٤} + ٥$$

مثال اذا كان $ل'(س) = ٢س(٤-٣س)$ حيث ل(١) = ٣

الحل:

$$ل(س) = \int ٨س - ٦س^{٢}\, دس$$

$$= ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ج$$

$$٣ = ٠ - ٠ + ج$$

$$٣ = ج$$

$$ل(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣$$

$$ل(١) = ٤ - ٢ + ٣$$

$$= ٢ + ٣ = ٥$$

الدرس : تطبيقات فيزيائية

مثال) اذا كان ع(ن) = ٦ - ٢ن + ٦ن² حيث ف(٠) = ٤ جد المسافة (أو موقع الجسم) بعد مرور ٣ ثواني.

الحل:

ف(ن) = ∫ ٦ - ٢ن + ٦ن² دن

= ٦ن - ن² + ٢ن³ + ح

ف(٠) = ٠ - ٠ + ٠ + ح

٤ = ح

∴ ف(ن) = ٦ن - ن² + ٢ن³ + ٤

ف(٣) = ٦×٣ - (٣)² + ٢×(٣)³ + ٤

= ١٨ - ٩ + ٢٧×٢ + ٤

= ٩ + ٥٤ + ٤ = ١٣ + ٥٤ = ٦٧ .

مثال) اذا كان ت(ن) = -١٢ م/ث² ع(٠) = ٥ ، ف(٠) = ٣ جد

① سرعة الجسم بعد مرور ٤ ثواني

② موقع الجسم بعد مرور ٣ ثواني.

الحل:

ع(ن) = ∫ -١٢ دن

= -١٢ن + ح

ع(٠) = ٠ + ح

٥ = ح

ع(ن) = -١٢ن + ٥

ع(٤) = -١٢×٤ + ٥

= -٤٨ + ٥

= -٤٣

ف(ن) = ∫ -١٢ن + ٥ دن

= -٦ن² + ٥ن + ح

ف(٠) = ٠ + ٠ + ح

٣ = ح

ف(ن) = -٦ن² + ٥ن + ٣

ف(٣) = -٦×٩ + ٣×٥ + ٣

= -٥٤ + ١٥ + ٣

= -٥٤ + ١٨

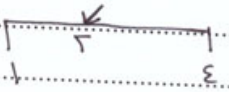
= -٣٦

الدرس: المساحة

① جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س³ - ٣س
ومحور السينات في الفترة [-١، ٤]

الحل:

ق(س) = ٠
س³ - ٣س = ٠
س(س² - ٣) = ٠
س = ٠ ، س = ٣



$$م = \int_{-١}^{٣} |س^٣ - ٣س| \, دس + \int_{٣}^{٤} س^٣ - ٣س \, دس$$

$$= \left| \frac{س^٤}{٤} - \frac{٣س^٢}{٢} \right|_{-١}^{٣} + \left[\frac{س^٤}{٤} - \frac{٣س^٢}{٢} \right]_{٣}^{٤}$$

$$= \left| \left(\frac{٨١}{٤} - \frac{٢٧}{٢}\right) - \left(\frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢}\right) \right| + \left(٦٤ - \frac{٤٨}{٢}\right) - \left(\frac{٨١}{٤} - \frac{٢٧}{٢}\right)$$

$$= \left| \frac{٨١}{٤} - \frac{١٧}{٤} \right) - \left(\frac{١}{٤} - \frac{٦}{٤}\right) \Big| + \left(٦٤ - \frac{٤٨}{٢}\right) - \left(\frac{٨١}{٤} - \frac{٢٧}{٢}\right)$$

$$= \left| \frac{-٤}{٤} - \frac{-٥}{٤} \right| + \frac{١٦}{٣} - \frac{-٤}{٢}$$

$$= \left| \frac{-٥}{٤} \right| + \frac{٥٠}{٣}$$

$$= \frac{٥}{٤} + \frac{٥٠}{٣} = \frac{٥٧}{٣}$$

(٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س٢ - ١٢
والمستقيمين س = -١ ، س = ٢

الحل:

٣س٢ - ١٢ = ٠
٣س٢ = ١٢
س٢ = ٤
س = ±٢

$$م = \int_{-١}^{٢} |٣س^{٢} - ١٢| \, دس$$

$$= |س^{٣} - ١٢س|_{-١}^{٢}$$

$$= |(٨ - ٢٤) - (-١ + ١٢)|$$

$$= |-١٦ - ١١|$$

$$= |-٢٧|$$

$$= ٢٧$$

---

(٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س٢ - ٢س - ٣
ومحور السينات

الحل:

س٢ - ٢س - ٣ = صفر

(س - ٣)(س + ١) = صفر

س = ٣ ، س = -١

$$م = \int_{-١}^{٣} |س^{٢} - ٢س - ٣| \, دس$$

$$= |\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} - ٣س|_{-١}^{٣}$$

$$= |(٩ - ٩ - ٩) - (-\frac{١}{٣} - ١ + ٣)|$$

$$= |-٩ - (-\frac{١}{٣} + ٢)|$$

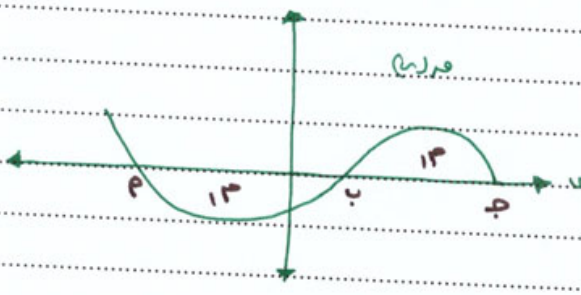
$$= |-٩ - (\frac{٦}{٣} - \frac{١}{٣})|$$

$$= |-٩ - \frac{٥}{٣}|$$

$$= |\frac{-٢٧ - ٥}{٣}| = |\frac{-٣٢}{٣}| = \frac{٣٢}{٣}$$

(٤) بالاعتماد على الشكل الذي يمثل $د(س)$ اذا علمت أن

$م(أ) = ٨$ ، $م(ج) = ٥$



جد

① $\int_{أ}^{ب} د(س)\,س = -٨$

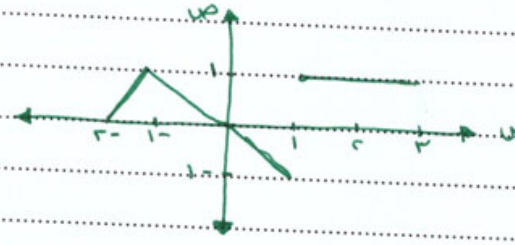
② $\int_{ب}^{ج} د(س)\,س = ٥$

③ $\int_{أ}^{د} د(س)\,س = \int_{أ}^{ب} د(س)\,س + \int_{ب}^{ج} د(س)\,س + \int_{ج}^{د} د(س)\,س$

$= -٨ + ٥ = -٣$

---

(٥) معتمداً الشكل جد



① $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,س$

② جد المساحة في الفترة $[-٢، ٢]$

الحل:

① $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,س = \int_{-٢}^{-١} د(س)\,س + \int_{-١}^{١} د(س)\,س + \int_{١}^{٣} د(س)\,س$

$= ١ + -\frac{١}{٢} + ٢$

$= ٣ - \frac{١}{٢} = \frac{٦-١}{٢} = \frac{٥}{٢}$

② المساحة $= ١ + \frac{١}{٢} + ٢$

$= ٣ + \frac{١}{٢} = \frac{٦+١}{٢} = \frac{٧}{٢}$

التمرين: النمو والاضمحلال

① اذا كان عدد سكان بلده يخضع لقانون النمو ويتزايد بانتظام واستمرار بمعدل ٢٪ سنوياً وكان عدد سكانها ٤٠ ألف عام ١٩٩٠ فكم سيبلغ عدد السكان عام ٢٠٤٠.

الحل:

ن = ٢٠٤٠ - ١٩٩٠ = ٥٠

$ع_ن = ع_{صفر} \times هـ^{\frac{ر}{١٠٠} \times ن}$

$= ٤٠٠٠ \times (٢,٧)^{\frac{٢}{١٠٠} \times ٥٠}$

$= ٤٠٠٠ \times (٢,٧)^{١}$

$= ٤٠٠٠ \times ٢٧ = ١٠٨٠٠٠$

② تتزايد سعر قطعة أرض وفق قانون النمو بمرور الزمن وبصورة مستمرة منتظمة فإن ازداد سعرها من ٤٠٠٠٠ إلى ٨٠٠٠٠ خلال ١٠ سنوات فجد سعرها بعد مرور ٣٠ سنه.

الحل:

$ع_{١٠} = ع_{صفر} \times هـ^{\frac{ر}{١٠٠} \times ن}$

$٨٠٠٠٠ = ٤٠٠٠٠ \times هـ^{\frac{ر}{١٠٠} \times ١٠}$

$٢ = هـ^{\frac{ر}{١٠}}$

$ع_{٣٠} = ع_{صفر} \times هـ^{\frac{ر}{١٠٠} \times ن}$

$= ٤٠٠٠٠ \times (هـ^{\frac{ر}{١٠}})^{٣٠}$

$= ٤٠٠٠٠ \times (٢)^{٣}$

$= ٤٠٠٠٠ \times ٨ = ٣٢٠٠٠٠$

③ تناقص ثمن عقار بمرور الزمن بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال بمعدل ٥٪ فإذا كان ثمنه الاصلي ٨٠٠٠٠ دينار فكم يصبح بعد مرور ٤٠ سنه

الحل: $ع_ن = ع_{صفر} \times هـ^{\frac{-ر}{١٠٠} \times ن}$

$= ٨٠٠٠٠ \times (٢,٧)^{\frac{-٥}{١٠٠} \times ٤٠}$

$= ٨٠٠٠٠ \times (٢,٧)^{-٢}$