بسم الله الرحمن الرحيم

النموذج الأول(المنهاج الجديد)

الأستاذ عصام الشيخ (ماجستير رياضيات)

امتحان الثانوية العامة لعام ٢٠١٨ / الدورة الشتوية

المبحث: الرياضيات / المستوى الثالث — الفرع : العلمي والصناعي

ملحوظة عدد الأسئلة (٥) وعدد الصفحات (٣) .

السؤال الأول :

أ) جد كل مما يأتي

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٩}{س^٢ + ٤\sqrt{٣س - ١٥}}$

ESAM SHIKH
0796300625

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{١ + جتا \pi س}{(١ - س)^٢}$

ب) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |س^٢ + س| & ، س < ٢ \\ [س + ٤] & ، س = ٢ \\ \sqrt{س - ٢} + \frac{١٢}{س} & ، س > ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢ .

السؤال الثاني :

أ) إذا كان ق(س) = $\frac{٤}{س^٢} - \sqrt{س - ١}$ ، فجد $ق'$(س) باستخدام التعريف العام للمشتقة.

ب) إذا كان $(س - ص)^٥ = \frac{٣س^٢}{٢ص + ٣}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (٣، -١) .

ج) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} - بس & ، س \geq ٢ \\ ٤ - بس^{٣} + أس & ، س < ٢ \end{cases}$ وكان ق اقترانا قابلا للاشتقاق عند س = ٢ ، فجد كلا من الثابتين أ ، ب .

ESAM SHIKH
0796300625

السؤال الثالث:

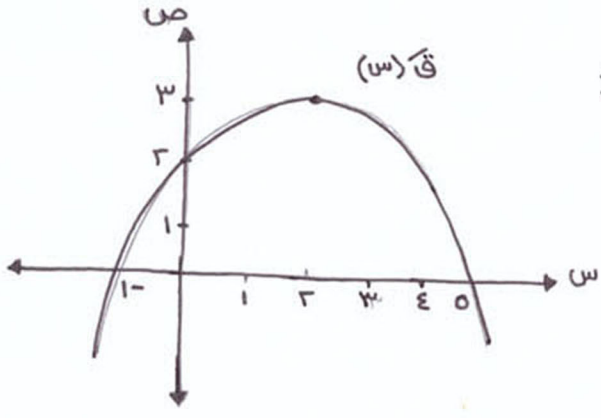
أ) إذا كان ص = جا س + س ص ، فأثبت أن

$$ص'' + ص = \frac{٢ص'}{١ - س}$$

ب) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س}$ عند نقطة تماسه مع منحنى الاقتران هـ(س) = $س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + \frac{٣}{٢}$.

ج) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |٢س - ٣| & ، ٠ \leq س < ٢ \\ [س + ١] & ، ٢ \leq س < ٦ \end{cases}$ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

السؤال الرابع:



أ) يمثل الشكل منحنى المشتقة الأولى لكثير الحدود ق(س) جد :

١. النقط الحرجة للاقتران ق .

٢. فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق .

٣. قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية وبين نوعها .

٤. فترات التقعر لمنحنى ق .

٥. قيم س التي يكون عندها للاقتران نقطة انعطاف .

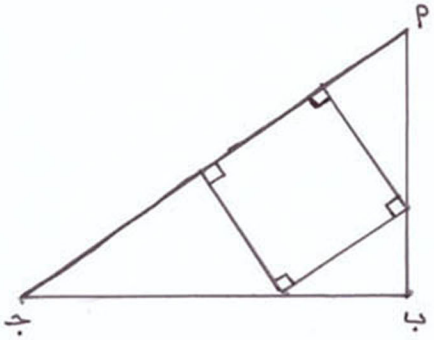
ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢جا^{٢}($\frac{ن}{٢}$) + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ن ، حيث ن∈[٠، $\frac{\pi}{٢}$]

ف: المسافة بالأمتار ، ن : الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{٣}$ م/ث .

السؤال الخامس:

أ) قمع على شكل مخروط دائري قائم ، قاعدته للأعلى ، فإذا كان ارتفاع القمع ١٦ سم ، وطول نصف قطر قاعدته ٨ سم ، صب فيه سائل بمعدل ١٢ سم٣ / ث ، جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨ سم .

ب) يمثل الشكل مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كل منهما على ضلعي القائمة جد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن .



ESAM SHIKH
0796300625

حل ① (P)

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{س^4 - 9}{س^2 + 3\sqrt{س^2} - 10}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{س^4 - 9}{(س^2 - 10) + 3\sqrt{س^2}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{س^4 - 9}{(س^2 - 10) + 3\sqrt{س^2}} \times \frac{(س^2 - 10) - 3\sqrt{س^2}}{(س^2 - 10) - 3\sqrt{س^2}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س^4 - 9)\left((س^2 - 10) - (12)\right)}{(س^2 - 10)^2 - 9س^2}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س^4 - 9)(-32)}{س^4 - 20س^2 + 225 - 9س^2}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س^4 - 9)(-32)}{س^4 - 29س^2 + 225}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س^4 - 9)(-32)}{(س^2 - 3)(س^2 - 75)}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س^2 + 3)(س^2 + 3)(-32)}{(س^2 + 3)(س^2 - 75)}$$

$$= \frac{(-32)(3+3)}{(-72)} = \frac{6}{3} = 2$$

② نهـا $\dfrac{1 + \text{جتا}\pi س}{(1 - س)^2}$ ، $س \to 1$

$ص = س - 1 \Leftarrow س = ص + 1$

$س \to 1 \Leftarrow ص \to 0$

$$\text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{1 + \text{جتا}\pi(ص + 1)}{(-ص)^2}$$

$$\text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{1 + \text{جتا}(\pi ص + \pi)}{ص^2}$$

$$\text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{1 + \text{جتا}\pi ص \text{ جتا}\pi - \text{جا}\pi ص \text{ جا}\pi}{ص^2}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\pi ص}{ص^2}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\pi ص}{ص^2} \times \frac{1 + \text{جتا}\pi ص}{1 + \text{جتا}\pi ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 \pi ص}{ص^2 \times 2}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}^2 \pi ص}{2ص^2}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}\pi ص}{2ص} \times \frac{\text{جا}\pi ص}{ص}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \pi = \frac{\pi^2}{2}$$

ESAM SHIKH
0796300625

(ب) $م(س) = \begin{cases} س^{٢} + س & ٠ < س < ٢ \\ ٦ & س = ٢ \\ \sqrt{س - ١} + \frac{١٦}{س} & س > ٢ \end{cases}$

$م(٢) = ٦$ ، ذهـا $_{س \to ٢^-}$ $م(س) = ٤ + ٢ = ٦$ ، ذهـا $_{س \to ٢^+}$ $م(س) = صفر + \frac{١٦}{٢} = ٦$

$\Leftarrow$ ذهـا $_{س \to ٢}$ $م(س) = ٦$

$م(٢) = ٦ =$ ذهـا $_{س \to ٢}$ $م(س)$ $\Leftarrow$ م متصل عند $س = ٢$

(ج) $م(س) = \frac{\sqrt[٣]{١ - س}}{س^{٤}}$

ESAM SHIKH
0796300625

$م'(س) =$ ذهـا $_{ع \to س}$ $\frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$

$= $ ذهـا $_{ع \to س}$ $\frac{\left(\frac{\sqrt[٣]{١ - ع}}{ع^{٤}}\right) - \left(\frac{\sqrt[٣]{١ - س}}{س^{٤}}\right)}{ع - س}$

$= \frac{\frac{\sqrt[٣]{١ - ع}}{ع^{٤}} - \frac{\sqrt[٣]{١ - س}}{س^{٤}}}{ع - س} - \frac{\sqrt[٣]{١ - ع} - \sqrt[٣]{١ - س}}{ع - س}$

$= $ ذهـا $_{ع \to س}$ $\frac{٤س^{٤} - ٤ع^{٤}}{ع^{٤} س^{٤}} \times \frac{١}{ع - س}$ $-$ ذهـا $_{ع \to س}$ $\frac{\sqrt[٣]{١ - ع} - \sqrt[٣]{١ - س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt[٣]{(١ - ع)^{٢}} + \sqrt[٣]{١ - ع}\sqrt[٣]{١ - س} + \sqrt[٣]{(١ - س)^{٢}}}{\sqrt[٣]{(١ - ع)^{٢}} + \sqrt[٣]{١ - ع}\sqrt[٣]{١ - س} + \sqrt[٣]{(١ - س)^{٢}}}$

$= $ ذهـا $_{ع \to س}$ $\frac{٤(س - ع)(س + ع)}{ع^{٤} س^{٤}} \cdot \frac{١}{(ع - س)}$ $-$ ذهـا $_{ع \to س}$ $\frac{١ - ع - (١ - س)}{(ع - س)\left(\sqrt[٣]{(١ - ع)^{٢}} + \sqrt[٣]{١ - ع}\sqrt[٣]{١ - س} + \sqrt[٣]{(١ - س)^{٢}}\right)}$

$= $ ذهـا $_{ع \to س}$ $\frac{-٤(س + ع)}{ع^{٤} س^{٤}}$ $-$ ذهـا $_{ع \to س}$ $\frac{-(ع - س)}{(ع - س)\left(\sqrt[٣]{(١ - ع)^{٢}} + \sqrt[٣]{١ - ع}\sqrt[٣]{١ - س} + \sqrt[٣]{(١ - س)^{٢}}\right)}$

$= \frac{-٤ \times ٢س}{س^{٤}} - \frac{-١}{\sqrt[٣]{(١ - س)^{٢}}} = \frac{-٨}{س^{٣}} + \frac{١}{\sqrt[٣]{(١ - س)^{٢}}}$

ج) ب) $(س - هـ)^{٥} = \frac{٣ - ٤س}{٢هـ + ٣}$

$٥(س - هـ)^{٤}(١ - هـ') = \frac{(٢هـ + ٣)(٦ - س) - (٣ - ٤س)(٢هـ')}{(٢هـ + ٣)^{٢}}$

(٣،١) ⇐

$٥(٤)^{٤}(١ - هـ') = \frac{١ \times ١٨ - ٢٧ \times ٢هـ'}{١}$

$٥ \times ٢٥٦(١ - هـ') = ١٨ - ٥٤هـ'$

$١٣٢٠ - ١٣٢٠هـ' = ١٨ - ٥٤هـ'$

$-١٣٢٠هـ' + ٥٤هـ' = ١٨ - ١٣٢٠$

$-١٢٦٦هـ' = -١٣٠٢$

$هـ' = \frac{١٣٠٢}{١٢٦٦}$

$هـ' = \frac{٦٦٩}{٦٣٣} = \frac{٢٢٣}{٢١١}$

ESAM SHIKH
0796300625

ج) ج) بما أن م قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐ هـ متصل عند ٢ ⇐

نهـا هـ(س) = ذهـا م(س)
س→٢+ س→٢-

$٤ - ٨ب + ٢م = ٤م - ٢ب$

$٢م + ٦ب = ٤$

$م + ٣ب = ٢$ ← ①

م(س) = { ٢م س - ب س ≤ ٢
       { -٣ب س² + م س > ٢

بما أن م قابل للاشتقاق عند س = ٢

⇐ م'(٢) = م'(٢)
+ -

⇐ $-١٢ب + م = ٤م - ب$

⇐ $-١١ب - ٣م = صفر$ ← ②

$م + ٣ب = ٢$ × ٣

$+ \quad -٣م - ١١ب = صفر$

$-٢٠ب = ٦$

$ب = -٣$

$م + ٣ \times -٣ = ٢$ ⇐

$م - ٩ = ٢$ ⇐ $م = ١١$

(٣) (أ)

$ص = جا س + س ص$

$ص' = جتا س + س ص' + ص$

$ص'' = -جا س + س ص'' + ص' + ص'$

$ص'' - س ص'' = -جا س + ٢ ص'$

بكن $جا س = ص - س ص$ من الفرض

$\Rightarrow -جا س = س ص - ص$

$ص'' - س ص'' = س ص - ص + ٢ ص'$

$ص'' - س ص'' = س ص + ص = ٢ ص'$

$ص''(١-س) + ص(-س+١) = ٢ ص'$

$ص''(١-س) + ص(١-س) = ٢ ص'$

$(ص'' + ص)(١-س) = ٢ ص'$

$ص'' + ص = \frac{٢ ص'}{١-س}$

وهو المطلوب .

(ب) $ه(س) = \sqrt{س}$

$ه(س) = س^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢} س + \frac{١}{٢}$

$ه' = ه$ عند نقطة التماس

$\frac{١}{٢ \sqrt{س}} = س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢}$ (×٢)

$\frac{١}{\sqrt{س}} = ٢ س - ١$ ربع الطرفين

$\frac{١}{س} = (٢ س - ١)^٢$

$\frac{١}{س} = ٤ س^٢ - ٤ س + ١$

$١ = ٤ س^٣ - ٤ س^٢ + س$

$٤ س^٣ - ٤ س^٢ + س - ١ = صفر$

نفرض ١ يكون ناتج صفر

$\Rightarrow س - ١$ من العوامل ، نقسم كـ $س - ١$

$(س - ١)(٤ س^٢ - ٤ س + ١) = صفر$

$(س - ١)(٢ س - ١)(٢ س - ١) = صفر$

$س = ١ ، س = \frac{١}{٢}$

$ه = ه$ عند نقطة التماس

$\Rightarrow س = ١$ ✓

$س = \frac{١}{٢}$ مرفوضة $\because ه \neq ه$

$\Rightarrow$ الميل $= \frac{١}{٢}$ عند $(١ ، ١)$

$\Rightarrow$ معادلة المماس على الصورة

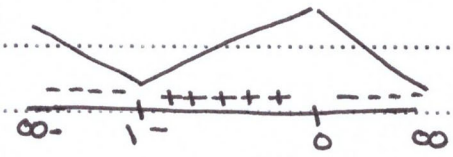
$ص - ١ = -٢ (س - ١)$

ESAM SHIKH
0796300625

ب) $م(س) = \begin{cases} ٢س - ٣ & ٠ \leq س \leq ١٫٥ \\ ٣ - ٢س & ١٫٥ < س < ٢ \\ ٣ & ٢ \leq س < ٣ \\ ٤ & ٣ \leq س < ٤ \\ ٥ & ٤ \leq س < ٥ \end{cases}$

$\frac{\Delta م}{\Delta س} = \frac{م(٤) - م(١)}{٤ - ١} = \frac{٥ - -١}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$

ع ن (٢)



(١) النقط الحرجة $(-١، م(-١))$

$(٥ ، م(٥))$

(٢) $(-\infty، -١]$ م متناقص

$[-١، ٥]$ م متزايد

$[٥، \infty)$ م متناقص

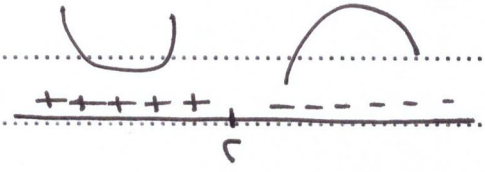
ESAM SHIKH
0796300625

(٣)

عند $س = -١$ يوجد قيمة صغرى محلية

عند $س = ٥$ يوجد قيمة عظمى محلية

(٤)



$(-\infty، ٢)$ م مقعر لاعلى

$(٢، \infty)$ م مقعر لأسفل

(٥) $(٢، م(٢))$ نقطة انطفاف .

بند (ب) هـ(ن) = ٢ جا^{٢}ن + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ن

هـ(ن) = ٢×٢ جا ن جتا ن × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هـ(ن) = ٢ جا ن جتا ن + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هـ(ن) = جا ن + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ت(ن) = جتا ن

$\sqrt{٣}$ = جا ن + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = جا ن

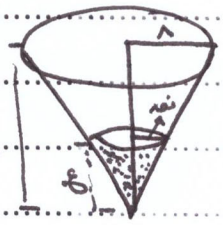
⇐ ن = $\frac{\pi}{٣}$ ⇐ ت ($\frac{\pi}{٣}$) = جتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$.

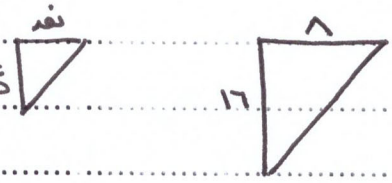
ESAM SHIKH
0796300625

س (٩)

$\frac{د ح}{د ن} = ١٢$

عند $ع = ٨$ المطلوب $\frac{د م}{د ن}$





$م = \pi$ نق^{٢}

$\frac{د م}{د ن} = ٢ \pi$ نق $\frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن} = ٢ \times \pi \times ٤ \times \frac{١٢}{\pi \times ١٦}$

$= \frac{٤}{١٦}$

$= ٣ ٤ / ث$

$\frac{نق}{٨} = \frac{ع}{١٦}$

$٨ع = ١٦$ نق

$ع = ٢$ نق

عندما $ع = ٨ \Rightarrow$ نق $= ٤$

$ح = \frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} ع

$ح = \frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} (٢نق)

$ح = \frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣}

$\frac{د ح}{د ن} = ٢ \pi$ نق^{٢} $\frac{د نق}{د ن}$

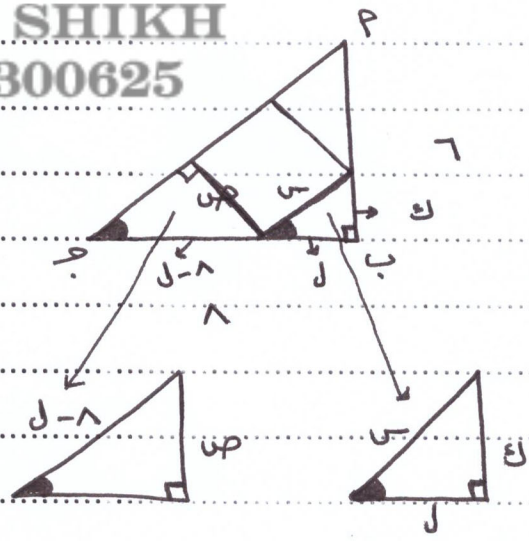
$١٢ = ٢ \times \pi \times ١٦ \times \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د نق}{د ن} = \frac{١٢}{٢ \times \pi \times ١٦}$

ESAM SHIKH
0796300625

ESAM SHIKH
0796300625

(ب) في $\triangle$ م ب ك



م = ي × ص ع

م = ع (٨ - ل)

م = $\frac{٣}{٤}$ ل (٨ - ل)

م = ٣ × ٢ ل - $\frac{٣}{٤}$ ل^{٢}

م = ٦ ل - $\frac{٣}{٤}$ ل^{٢}

م$'$ = ٦ - $\frac{٦}{٤}$ ل

٠ = ٦ - $\frac{٦}{٤}$ ل

$\frac{٦}{٤}$ ل = ٦

ل = ٤

$\frac{ك}{٨}$ = $\frac{ل}{٦}$

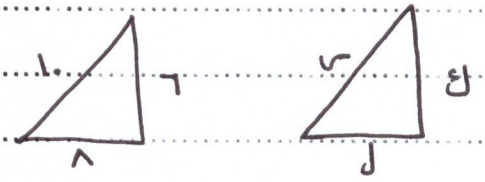
٨ ك = ٦ ل

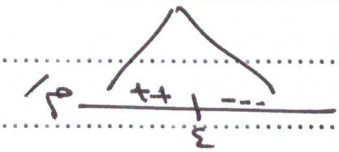
٤ ك = ٣ ل

ك = $\frac{٣}{٤}$ ل

$\frac{ص}{ع}$ = $\frac{ي}{٨-ل}$

ص ع = ك (٨ - ل)





$\Leftarrow$ ك = ٣

بحيث: ك^{٢} + ل^{٢} = ي^{٢}

٩ + ١٦ = ي^{٢}

ي^{٢} = ٢٥

ي = ٥

ص ع = ٣ (٨ - ٤)

ص ع = ٣ × ٤

ص = $\frac{١٢}{٥}$