معكوس المشتقة

ملخص القوانين

ESAM SHIKH
0796300625

تعريف :
إذا كان ق اقترانًا متصلاً على الفترة [أ، ب] فإن م(س) يسمى معكوسًا لمشتقة الاقتران ق(س) إذا كان
$م'(س) = ق(س)$ لكل س ∈ (أ، ب)

مثال
بين أن الاقتران $م(س) = س^{٥} + ٤س^{٢} + ٢$ هو معكوس لمشتقة الاقتران
$ق(س) = ٥س^{٤} + ٨س$
الحل:
ق متصل على ح لأنه كثير حدود
$م'(س) = ٥س^{٤} + ٨س$
⇐ م معكوس لمشتقة ق(س)

مثال
بين أن الاقتران $م(س) = س^{٤} - جاس - \frac{١}{٢}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران
$ق(س) = ٤س^{٣} - جتاس$
الحل:
ق(س) متصل لأنه طرح اقترانين متصلين
$م'(س) = ٤س^{٣} - جتاس$
⇐ م معكوس لمشتقة ق(س).

مثال
بين أن الاقتران $م(س) = \frac{س}{س+١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران
$ق(س) = (س+١)^{-٢}$ ، س ≠ −١
الحل:
ق متصل على مجاله لأنه معرف على مجاله

$$م'(س) = \frac{(س+١)(١) - س(١)}{(س+١)^{٢}}$$

$$= \frac{س+١-س}{(س+١)^{٢}}$$

$$= \frac{١}{(س+١)^{٢}} = (س+١)^{-٢}$$

⇐ م هو معكوس لمشتقة ق(س)

مثال
بين أن الاقتران $م(س) = جا^{٢}س$ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = جا٢س
الحل:
ق(س) متصل على مجاله
م'(س) = ٢جاس جتاس
= جا٢س
= ق(س)
⇐ م(س) هو معكوس لمشتقة ق(س)

مثال
إذا كان $م(س) = س^{٣} + ٥س^{٢} - ٣س + جـ$ معكوسًا لمشتقة الاقتران ق جد ق(−٢)
الحل:
$م'(س) = ٣س^{٢} + ١٠س - ٣ = ق(س)$
$ق(-٢) = ٣ \times ٤ + ١٠ \times -٢ - ٣$
$= ١٢ - ٢٠ - ٣$
$= -٨ - ٣ = -١١$

مثال
إذا كان $م(س) = ٢س^{٤} + \sqrt{س^{٢}+٣}$ معكوسًا

عصام الشيخ ماجستير رياضيات

لمشتقة الاقتران ق ، جد ق(١)

الحل:

$م'(س) = ٨س^{٣} + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+٣}} = ق(س)$

$ق(١) = ٨ + \frac{٢}{٢\sqrt{٤}}$

$= ٨ + \frac{٢}{٤} = ٨ + \frac{١}{٢} = ٨\frac{١}{٢}$

مثال

إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق حيث ق(س) = ظتاس + ١ جد

$م''(\frac{\pi}{٤})$

الحل:

$م'(س) = ق(س)$

$م''(س) = ق'(س)$

$\Leftarrow$

$ق'(س) = -قتا^{٢}س = م''(س)$

$م''(\frac{\pi}{٤}) = -قتا^{٢}\frac{\pi}{٤}$

$= -٢$

ملاحظة : للاقتران ق يوجد أكثر من معكوس كما يلي :

$ق(س) = ٣س^{٢}$

$م_{١}(س) = س^{٣}$

$م_{٢}(س) = س^{٣} + ٥$

$م_{٣}(س) = س^{٣} - ٥$

$م_{٤}(س) = س^{٣} + جـ$

وهكذا.

ملاحظة:

الفرق بين أي معكوسين لمشتقة اقتران معين يساوي عدداً ثابتاً.

مثال:

إذا كان الاقترانات م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) وكان $ل(س) = م(س) - هـ(س)$ جد $ل'(٤)$

الحل:

$ل(س) = جـ$

$ل'(س) = صفر$

$ل'(٤) = صفر$

مثال

اذا كان الاقترانات م(س) ، ل(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) وكان $ل(س) = ٣م(س) - ٥هـ(س)$ جد $ل'(س)$ بدلالة ق(س)

الحل:

$ل'(س) = ٣م'(س) - ٥هـ'(س)$

$ل'(س) = ٣ق(س) - ٥ق(س)$

$= -٢ق(س)$

مثال

جد معكوساً لمشتقة ق(س) = جاس

الحل:

$م(س) = -جتاس + جـ$

مثال

جد معكوساً لمشتقة ق(س) = قاس ظاس

الحل:

م(س) = قاس + جـ

مثال

جد معكوساً للمشتقة ق(س) = ٩ $س^{٨}$

الحل:

م(س) = $س^{٩}$ + جـ .

مثال

جد معكوساً للمشتقة ق(س) = $-\frac{١}{س^{٢}}$

الحل:

م(س) = $\frac{١}{س}$ + جـ .

مثال

جد معكوساً للمشتقة ق(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

الحل:

م(س) = $\sqrt{س}$ + جـ .

مثال

جد معكوساً للمشتقة ق(س) = قاس جتاس

الحل:

ق(س) = $\frac{١}{جتاس}$ × جتاس = ١

م(س) = س + جـ .

مثال

جد معكوساً للمشتقة ق(س) = ٥ + ٥ $ظا^{٢}$س

الحل:

ق(س) = ٥ (١ + $ظا^{٢}$س)

ق(س) = ٥ $قا^{٢}$س

م(س) = ٥ ظاس + جـ

تعريف

إذا كان م معكوساً للمشتقة الاقتران ق على الفترة [أ، ب] فإن الصورة العامة لأي معكوس هي م(س) + جـ حيث جـ عدد وذلك لأن

$\frac{د}{دس}$ (م(س) + جـ) = م'(س) = ق(س)

ونسمي أي معكوس للمشتقة بالتكامل غير المحدود ويكتب

∫ ق(س) دس

وتقرأ تكامل ق بالنسبة للمتغير س.

مثال

جد ∫ ٥ $س^{٤}$ دس

الحل: $س^{٥}$ + جـ .

مثال

جد ∫ $قتا^{٢}$س دس

الحل:

- ظتاس + جـ .

مثال

إذا كان ق(س) = ٣ $س^{٢}$ جد م معكوساً للمشتقة الاقتران ق علماً بأن م(٢) = ٥

ق₁(س) = ∫ ق(س) دس

= ∫ ٣س² دس

= س³ + جـ

ق₁(٢) = ٨ + جـ

٥ = ٨ + جـ

جـ = -٣

⇐ ق₁(س) = س³ - ٣

مثال

إذا كان الاقترانان م₁(س) ، م₂(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان
م₁(س) = ٣س² - ٢س + ٥ ، م₂(٢) = ٤
فجد قاعدة م₂(س).

الحل:

م₁'(س) = ٦س - ٢ = ق(س)

م₂(س) = ∫ ٦س - ٢ دس

= ٣س² - ٢س + جـ

م₂(٢) = ٣×٤ - ٢×٢ + جـ

٤ = ١٢ - ٤ + جـ

٤ = ٨ + جـ ⇐ جـ = -٤

⇐

م₂(س) = ٣س² - ٢س - ٤

ملاحظات:

① ∫ ق(س) دس = م(س) + جـ

② ∫ م'(س) دس = م(س) + جـ

③ د/دس ∫ ق(س) دس = م'(س)

④ د/دس ∫ ق(س) دس = ق(س)

مثال

إذا كان ∫ ق(س) دس = س² - جتاس + ٢
فجد ق(س) ، ق'(س).

الحل:

ق(س) = ٢س + جاس

ق'(س) = ٢ + جتاس

مثال

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله
وكان ∫ ق(س) جا (٣π/٢) دس = ١ + س³
فجد ق(س).

الحل:

ق(س) × -١ = ٣س²

ق(س) = -٣س²

مثال

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على ح وكان
∫ (ق(س) + ٢) دس = س³ + ب س² + ٩
ق(١) = ٧ ، فجد قيمة الثابت ب.

الحل:

ق(س) + ٢ = ٣س² + ٢ب س

ق(١) + ٢ = ٣ + ٢ب

٧ + ٢ = ٣ + ٢ب

٩ = ٣ + ٢ب

٦ = ٢ب ⇐ ب = ٣

مثال

إذا كان $\text{ص} = \int \sqrt[٥]{٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١٢}\ \text{دس}$

فجد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-٢}$

الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt[٥]{٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١٢}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-٢} = \sqrt[٥]{٣\times٤ - ٤\times-٢ + ١٢}$

$= \sqrt[٥]{١٢ + ٨ + ١٢}$

$= \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

مثال

إذا كان $\int \text{ق(س)}\ \text{دس} = \text{س}^٣ - \text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١$

فجد $\text{قَ}(-٣)$

الحل:

$\text{ق(س)} = ٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٢$

$\text{قَ(س)} = ٦\text{س} - ٢$

$\text{قَ}(-٣) = ٦ \times -٣ - ٢$

$= -١٨ - ٢ = -٢٠$

مثال

إذا كان $\int \text{ق(س)}\ \text{دس} = \text{جاس} - \text{جتاس} + ٣$

فأثبت أن

$\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) - \text{قَ}(\frac{\pi}{٢}) = ٢$

الحل:

$\text{ق(س)} = \text{جتاس} + \text{جاس}$

$\text{قَ(س)} = -\text{جاس} + \text{جتاس}$

$\Leftarrow$

$\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) = \text{جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{جا}\frac{\pi}{٢} = ١$

$\text{قَ}(\frac{\pi}{٢}) = -\text{جا}\frac{\pi}{٢} + \text{جتا}\frac{\pi}{٢} = -١$

$\Leftarrow \text{ق}(\frac{\pi}{٢}) - \text{قَ}(\frac{\pi}{٢}) = ١ - (-١) = ٢$

مثال

إذا كان $\int \text{قَ(س)}\ \text{دس} = \text{جا}^٢\text{س} - \text{أ}\ \text{جتاس} + ١$

$\text{قَ}(\frac{\pi}{٤}) = \text{صفر}$ ، جد قيمة الثابت أ

الحل:

$\text{قَ(س)} = ٢\ \text{جاس}\ \text{جتاس} + \text{أ}\ \text{جاس}$

$= \text{جا}٢\text{س} + \text{أ}\ \text{جاس}$

$\text{قَ}(\frac{\pi}{٤}) = \text{جا}\frac{\pi}{٢} + \text{أ}\ \text{جا}\frac{\pi}{٤}$

$\text{صفر} = ١ + \text{أ} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow \frac{\text{أ}}{\sqrt{٢}} = -١ \Leftarrow \text{أ} = -\sqrt{٢}$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(١) (معكوس المشتقة) ماجستير رياضيات

الأسئلة الوزارية:

٢٠٠٨ شتوي

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على مجاله وكان

∫ ق(س) دس = جتا^{٢}س − ٢س + جـ

فإن قَ($\frac{\pi}{2}$) =

أ) ٢ ب) صفر جـ) −٢ د) ٣ − π

٢٠٠٨ صيفي

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على ح وكان

∫ ق(س) دس = س^{٢} − جتاس + ٢

فإن قَ(٠) =

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

٢٠٠٩ شتوي

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على مجاله وكان

∫ (ظا^{٢}س − قا^{٢}س) ق(س) دس = ٣ − س^{٣}

فإن ق(س) =

أ) −٢س ب) ٣ − س^{٢} جـ) ٣س د) س^{٢} − ٣

٢٠١٠ شتوي

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على مجاله وكان

∫ جا($\frac{3\pi}{2}$) ق(س) دس = ١ + س^{٢}

فإن ق(س) =

أ) ٢س ب) ١ + س^{٢} جـ) −٢س د) −١ − س^{٢}

٢٠١٠ صيفي

إذا كانت ل، ق، هـ ثلاثة اقترانات متصلة

بحيث لَ(س) = ق(س) ، قَ(س) = هـ(س)

فأي العبارات الآتية صحيحة:

أ) ∫ لً(س) دس = هـ(س) + جـ

ب) ∫ هـ(س) دس = لَ(س) + جـ

جـ) ∫ ل(س) دس = ق(س) + جـ

د) ل(س) − هـ(س) = جـ

٢٠١٣ شتوي

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على ح وكان

∫ (ق(س) + ٢) دس = س^{٣} + أس^{٢} + ٩

وكان ق(١) = ٧ فإن قيمة الثابت أ =

أ) −١ ب) ٢ جـ) ٦ د) ٣

٢٠١٣ صيفي (٣ علامة)

إذا كان ∫ ق(س) دس = س^{٢} + ٤س − ٤ فإن

قَ(٣) تساوي

■ ٢ ■ ٤ ■ ٨ ■ $\frac{٥٦}{٣}$

٢٠١٦ صيفي (٦ علامات)

إذا كان

∫ ٢ قَ(س) دس = ٢س + جاس − ∫ جتاس قَ(س) دس

فجد قَ(٠).

الحل:

٢ قَ(س) = ٢ + جتاس − جتاس قَ(س)

٢ قَ(٠) = ٢ + جتا٠ − جتا٠ . قَ(٠)

٢ قَ(٠) = ٢ + ١ − ١ × قَ(٠)

٣ قَ(٠) = ٣ ⟸ قَ(٠) = ١

٢٠١٧ شتوي (٥ علامات)

إذا كان س ق(س) − ∫ ٣س ق(س) دس = ∫ قَ(س) دس

التخصص(العلمي) الوحدة(١)(التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(١)(معكوس المشتقة) ماجستير رياضيات

وكان ق(٢) = ٤ فجد قَ(٣).

الحل:

س قَ(س) + ق(س) (١) − ٣س ق(س) = قَ(س)

٢ قَ(٢) + ق(٣) − ٣×٢ ق(٣) = قَ(٢)

٢قَ(٢) + ٤ − ٦ × ٤ = قَ(٢)

٢ قَ(٢) + ٤ − ٢٤ = قَ(٢)

٢ قَ(٢) − قَ(٢) = ٢٠

قَ(٢) = ٢٠

٢٠١٨ شتوي قديم (علامتان)

إذا كان $\int$ (ق(س) − ١) دس = س جا($\frac{\pi}{2}$ س)

فإن ق(٢) تساوي

أ) ١ − π ب) ١ + π ج) − π د) ٢

الحل:

ق(س) − ١ = س جتا $\frac{\pi}{2}$ س × $\frac{\pi}{2}$

\+ جا $\frac{\pi}{2}$ س × ١

ق(٢) − ١ = $\cancel{2}$ جتا π × $\frac{\pi}{\cancel{2}}$ + جا π × ١

= − ١ × π + ٠

ق(٢) − ١ = − π

⇐ ق(٢) = ١ − π

٢٠١٨ شتوي جديد (٣ علامات)

إذا كان

$\int$ (قَ(س) + س) دس = س^{٣} + ك س^{٢} + ١

وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س)

عند النقطة (١، ٣) يساوي ٥ فإن قيمة ك:

أ) ١ ب) ٦٫٠ ج) ١٫٥ د) ٤٫٥

الحل:

قَ(س) + س = ٣س^{٢} + ٢ك س

قَ(١) = ٥

٥ + ١ = ٣ + ٢ك

٦ = ٣ + ٢ك

٣ = ٢ك

ك = $\frac{٣}{٢}$ = ١٫٥

٢٠١١ شتوي

إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانان بدائيان للاقتران المتصل ق(س) فإن

$\int$ (٢م − هـ)َ دس =

أ) ق(س) ب) قَ(س) ج) صفر د) ٢

الحل:

٢مَ(س) − هـَ(س)

= ٢ق(س) − ق(س) = ق(س)

٢٠١٣ شتوي

إذا كان م(س) اقتران بدائي لـ ق(س) بحيث م(س) = ظتاس + ١ فإن

ق($\frac{\pi}{4}$) =

أ) −٤ ب) −٢ ج) ٢ د) ٤

الحل:

مَ(س) = − قتا²س

ق(س) = − قتا²س

ق($\frac{\pi}{4}$) = − قتا² $\frac{\pi}{4}$ = −٢