رياضيات العلمي المستوى (٣) الوحدة (تطبيقات التفاضل)

الدرس (النقط الحرجة)

Esam ShikhMasterMath
0796300625

تعريف:

س$_{١}$ من مجال ق نقول أن

س$_{١}$ قيمة حرجة للاقتران ق

إذا

ق$'$(س$_{١}$) = صفر أو ق$'$(س$_{١}$) غير موجودة

(س$_{١}$، ق(س$_{١}$)) نقطة حرجة.

مثال

إذا كان ق(س) = |س^{٢} - ٢س|

س ∈ [١، ٣] جد النقط الحرجة

للاقتران ق.

الحل:

س^{٢} - ٢س = ٠

س(س - ٢) = ٠

٠ ، ٢ ٠ خارج الفترة

٢ ∈ [١، ٣]

ق(س) = { ٢س - س^{٢} ، ١ ≤ س ≤ ٢
س^{٢} - ٢س ، ٢ < س ≤ ٣

ق$'$(س) = { ٢ - ٢س ، ١ < س < ٢
٢س - ٢ ، ٢ < س < ٣
غير موجودة ، س = ٢، ١، ٣

(١، ١)
(٢، ٠) نقط حرجة.
(٣، ٣)

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣}

س ∈ [-٢، ٣]

الحل:

ق$'$(س) = ٦س - ٣س^{٢} س ∈ (-٢، ٣)

٠ = ٦س - ٣س^{٢}

٠ = ٣س(٢ - س)

س = ٠ ، س = ٢

(-٢، ٢٠)
(٠، ٠) نقط حرجة.
(٢، ٤)
(٣، ٠)

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

ق(س) = س^{٣} - ١٢س + ١

س ∈ [-٣، ٣].

الحل:

ق$'$(س) = ٣س^{٢} - ١٢ س ∈ (-٣، ٣)

٠ = ٣س^{٢} - ١٢

١٢ = ٣س^{٢}

س^{٢} = ٤

س = ±٢

(-٣، ١٠)
(-٢، ١٧) نقط حرجة
(٢، -١٥)
(٣، -٨)

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} - \frac{1}{٣}\,\text{جا}^{٣}\text{س}$

$\text{س} \in [٠ ، \pi]$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس} - \text{جا}^{٢}\text{س} \times \text{جتاس}$

$٠ = \text{جتاس} - \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتاس}$

$٠ = \text{جتاس}\,(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})$

$= \text{جتاس}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}$

$٠ = \text{جتا}^{٣}\text{س}$

$\Leftarrow \text{جتاس} = ٠ \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٢}$

$(٠ ، ٠)$

$(\frac{\pi}{٢} ، \frac{٢}{٣})$ نقط حرجة.

$(\pi ، ٠)$

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} - \text{جا}^{٢}\text{س}$

$\text{س} \in [٠ ، \pi]$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس} - ٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}$

$٠ = \text{جتاس}\,(١ - ٢\,\text{جاس})$

$\text{جتاس} = ٠$ $\quad$ $\text{جاس} = \frac{١}{٢}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢}$ $\quad$ $\text{س} = \frac{\pi}{٦} ، \frac{٥\pi}{٦}$

$\Leftarrow (٠ ، ٠)$

$(\frac{\pi}{٦} ، \ )$

$(\frac{٥\pi}{٦} ، \ )$ نقط حرجة

$(\pi ، \ )$

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{٤ - \text{س}^{٢}}$ $\quad$ $\text{س} \in [-٣ ، ٣]$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}}{٣\sqrt[٣]{(٤ - \text{س}^{٢})^{٢}}}$

$٠ = \frac{-٢\text{س}}{٣\sqrt[٣]{(٤ - \text{س}^{٢})^{٢}}}$

$-٢\text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = \text{صفر}$

~~٤~~ =

$٤ - \text{س}^{٢} = ٠$

$٤ = \text{س}^{٢} \Leftarrow \text{س} = \pm ٢$

$\Leftarrow$ النقط الحرجة

$(-٣ ، \sqrt[٣]{-٥})$ ، $(-٢ ، ٠)$ ، $(٠ ، \sqrt[٣]{٤})$

$(٢ ، ٠)$ ، $(٣ ، \sqrt[٣]{-٥})$

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ $\quad$ $\text{س} \in [-٢ ، ٢]$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢})^{٢}}}$

$٠ = \frac{٢\text{س}}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}} \Leftarrow ٢\text{س} = ٠$

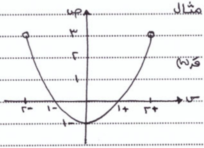
$\boxed{\text{س} = ٠}$

$\text{س}^{٤} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٠}$

$\Leftarrow$ النقط الحرجة هي

(٠،) ، (-٢،) ، (٢،) .

مثال



يمثل الشكل منحنى قَ(س) حيث ق(س) معرف على الفترة [-٣، ٣]

جد النقط الحرجة.

الحل:

س = +٢ ، +١ ، ٠ ، -١ ، -٢

⇐ النقط الحرجة هي

(٢، ق(٢)) ، (١، ق(١)) ، (٠، ق(٠))

(-١، ق(-١)) ، (-٢، ق(-٢))

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

ق(س) = $س^{٤}$ - ٤س + ١ ، س ∈ [-٢، ٢]

الحل:

قَ(س) = ٤$س^{٣}$ - ٤

٠ = ٤$س^{٣}$ - ٤

٤ = ٤$س^{٣}$

$س^{٣}$ = ١

س = ١

⇐ النقط الحرجة

(-٢، ٢٥)

(١، -٢)

(٢، ٩)

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠، ٢π]

الحل:

قَ(س) = جتاس - جاس

٠ = جتاس - جاس

جاس = جتاس

س = $\frac{π}{٤}$ ، $\frac{٢٢٥π}{١٨٠}$ = $\frac{٥π}{٤}$

⇐ النقط الحرجة

(٠، ١) ، ($\frac{π}{٤}$، $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$)

($\frac{٥π}{٤}$، $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$) ، (٢π، ١)

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

ق(س) = $س^{٤}$ |س - ١| ، س ∈ [-٣، ٢]

الحل:

ق(س) = { $س^{٤}$(١-س) ، -٣ ≤ س ≤ ١ ؛ $س^{٤}$(س-١) ، ١ < س ≤ ٢ }

قَ(س) = { $س^{٤}$ - $س^{٣}$ ، -٣ ≤ س ≤ ١ ؛ $س^{٣}$ - $س^{٤}$ ، ١ < س ≤ ٢ }

ق′(س) = { ٢س − ٣س^{٢} ، −٣ < س < ١
٣س^{٢} − ٢س ، ١ < س < ٢
غير موجودة ، −٣ ، ٢ ، ١

ق′(س) = ٠
٢س − ٣س^{٢} = ٠
س(٢ − ٣س) = ٠
س = ٠ ، $\frac{٢}{٣}$

⇐ النقط الحرجة

(−٣ ، ٣٦) (٠ ، ٠)
(٢ ، ٤) ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٢٧}$)
(١ ، ٠)

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

ه(س) = √جتا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

الحل:

ه(س) = |جتا س|

ه(س) = { جتا س ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{π}{٢}$
−جتا س ، $\frac{π}{٢}$ < س ≤ π

ه′(س) = { −جا س ، ٠ < س < $\frac{π}{٢}$
جا س ، $\frac{π}{٢}$ < س < π
غير موجودة ، س = $\frac{π}{٢}$ ، ٠ ، π

النقط الحرجة

(٠ ، ١) ، (π ، ١) ، ($\frac{π}{٢}$ ، ٠)

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

ه(س) = { س^{٢} + ١ ، −٢ ≤ س ≤ ١
٢س ، ١ < س ≤ ٢

الحل:

ق′(س) = { ٢س ، −٢ < س ≤ ١
٢ ، ١ < س < ٢
غير موجودة −٢ ، ٢

ه′(س) = ٠
٢س = ٠ ⇐ س = ٠
⇐ النقط الحرجة
(٠ ، ١) ، (−٢ ، ٥) ، (٢ ، ٤)

مثال

جد قيم أ ، ب التي تجعل للاقتران

ه(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ب س

نقطتين حرجتين عند س = −١ ، س = ٣

الحل:

ه′(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب

ه′(−١) = ٠

٠ = ٣ − ٢أ + ب

٢أ − ب = ٣ —— ①

ه′(٣) = ٠

٠ = ٢٧ + ٦أ + ب

−٦أ − ب = ٢٧ —— ②

⇐ ٢أ − ب = ٣

− −٦أ − ب = ٢٧

٨أ = −٢٤

أ = −٣

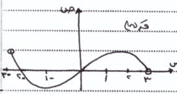
⇐ بعوض في ①

−٦ − ب = ٣

−٦ − ٣ = ب

−٩ = ب

مثال



ق معرف على [−٣، ٣]

جد النقط الحرجة

الحل:

−٣، −٢، ٠، ٣

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٣} + ١}$$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٣}+١)(٣\text{س}^{٢}) - (\text{س}^{٣}-١)(٣\text{س}^{٢})}{(\text{س}^{٣}+١)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\cancel{٣\text{س}^{٥}} + ٣\text{س}^{٢} - \cancel{٣\text{س}^{٥}} + ٣\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٣}+١)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٦\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٣}+١)^{٢}}$$

ق'(س) = ٠ ⇐ ٦س² = ٠

⇐ س = ٠

ق غير معرف عند −١ لذلك لا تعتبر نقطة حرجة

⇐ النقط الحرجة

(٠، −١)

رياضيات العلمي المستوى (٣) الوحدة (تطبيقات التفاضل)
الدرس (التزايد والتناقص)

تعريف

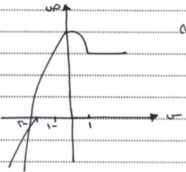
① كلما زادت س وزادت ق(س)
يكون الاقتران متزايد على الفترة

② كلما زادت س وقلت ق(س)
يكون الاقتران متناقص على الفترة

③ كلما زادت س وكانت ق(س) ثابت
يكون الاقتران ثابت على الفترة .

مثال

ق(س)



جد فترات التزايد والتناقص

الحل:

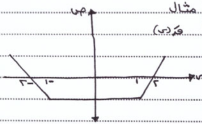
(-∞، ٠] ق متزايد
[٠، ١] ق متناقص
[١، ∞) ق ثابت

تعريف:

① ق'(س) + ⇐ ق متزايد على الفترة
② ق'(س) - ⇐ ق متناقص على الفترة
③ ق'(س) = ٠ ⇐ ق ثابت على الفترة .

مثال

ق'(س)



جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

الحل:

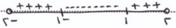
(-∞، -٢] ق متزايد
[-٢، ٢] ق متناقص
[٢، ∞) ق متزايد .

مثال

حدّد فترات التزايد والتناقص
للاقتران ق(س) = س^{٣} - ٣س
س ∈ [-٢، ٢]

الحل:

ق'(س) = ٣س^{٢} - ٣
٠ = ٣س^{٢} - ٣
٣ = ٣س^{٢}
١ = س^{٢} ⇐ س = ± ١



[-٢، -١] ق متزايد
[-١، ١] ق متناقص
[١، ٢] ق متزايد .

مثال

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} - ٢$

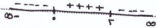
الحل:

$ق'(س) = ٦س - ٣س^{٢}$

$٠ = ٦س - ٣س^{٢}$

$٠ = ٣س(٢ - س)$

$س = ٠ ، س = ٢$



$(-∞، ٠]$ ق متناقص

$[٠، ٢]$ ق متزايد

$[٢، ∞)$ ق متناقص

مثال

حدد فترات التزايد وفترات التناقص

للاقتران $ق(س) = جتاس$ $س ∈ [٠، ٢π]$

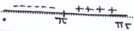
الحل:

$ق'(س) = -جاس$

$٠ = -جاس$

$\Leftarrow جاس = صفر \Leftarrow$

$س = π$



$[٠، π]$ ق متناقص

$[π، ٢π]$ ق متزايد

مثال

حدد فترات التزايد وفترات التناقص

للاقتران $ق(س) = جا^{٢}س$

$س ∈ [٠، ٢π]$

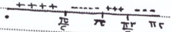
الحل:

$ق'(س) = ٢ جاس جتاس$

$٠ = ٢جاس جتاس$

$\Leftarrow جاس = ٠$ أو $جتاس = صفر$

$س = π$ $س = \frac{π}{٢} ، \frac{٣π}{٢}$



$[٠، \frac{π}{٢}]$ ق متزايد

$[\frac{π}{٢}، π]$ ق متناقص

$[π، \frac{٣π}{٢}]$ ق متزايد

$[\frac{٣π}{٢}، ٢π]$ ق متناقص

مثال

حدد فترات التزايد وفترات التناقص

للاقتران $ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٣} - ٦س^{٢}}$

الحل:

$$ق'(س) = \frac{٣س^{٢} - ١٢س}{٣\sqrt[٣]{(س^{٣} - ٦س^{٢})^{٢}}}$$

$٠ = ٣س^{٢} - ١٢س$

$٠ = ٣س(س - ٤)$

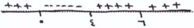
$س = ٠ ، س = ٤$

$ق'(س)$ غير موجودة عند اصفار المقام

$س^{٣} - ٦س^{٢} = \text{صفر}$

$س^{٢}(س - ٦) = \text{صفر}$

$س = ٠ ، س = ٦$



$(-\infty ، ٠]$ ق متزايد

$[٠ ، ٤]$ ق متناقص

$[٤ ، ٦]$ ق متزايد

$[٦ ، \infty)$ ق متزايد

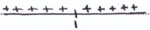
مثال

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $ق(س) = \sqrt[٣]{س - ١}$ ، $س \in ح$

الحل:

$$ق'(س) = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س-١)^{٢}}}$$

$ق'(س)$ غير موجودة عند $س = ١$



$(-\infty ، \infty)$ ق متزايد

مثال

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٦س + ٤ & س \leq ٠ \\ [س + ٤] & ٠ < س < ١ \\ |٣س + ١| & س \geq ١ \end{cases}$

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق على مجاله

الحل:

مجاله = ح

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٦س + ٤ & س \leq ٠ \\ ٤ & ٠ < س < ١ \\ ٣س + ١ & س \geq ١ \end{cases}$$

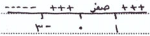
$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س + ٦ & س < ٠ \\ ٠ & ٠ < س < ١ \\ ٣ & س > ١ \end{cases}$$

غير موجودة $س = ٠ ، ١$

$ق'(س) = ٢س + ٦$

$٠ = ٢س + ٦$

$-٦ = ٢س \Leftarrow س = -٣$



$(-\infty ، -٣]$ ق متناقص

$[-٣ ، ٠]$ ق متزايد

$[١ ، \infty)$ ق متزايد

مثال

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = جتا^{٢}س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

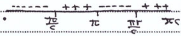
الحل:

$ق'(س) = ٢ جتاس \times -جاس$

$٠ = -٢$ جاس جتاس

جاس $= ٠$ ، جتاس $=$ صفر

$س = \pi$ $\quad$ $س = \frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}$



$[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ق متناقص

$[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ ق متزايد

$[\pi ، \frac{٣\pi}{٢}]$ ق متناقص

$[\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi]$ ق متزايد

مثال

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^٣ & س \le ١ \\ \frac{٣}{س} & س > ١ \end{cases}$

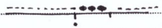
حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

الحل:

$ق'(س) = \begin{cases} -٣س^٢ & س \le ١ \\ \frac{-٣}{س^٢} & س > ١ \end{cases}$

$ق'(س) = ٠$

$-٣س^٢ = ٠ \Rightarrow س = ٠$



$(-\infty ، \infty)$ ق متناقص

مثال

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^٢ & -٣ \le س \le ١ \\ ٣ & ١ < س \le ٣ \end{cases}$

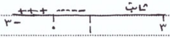
جد فترات التزايد والتناقص في الفترة $[-٣ ، ٣]$

الحل:

$ق'(س) = \begin{cases} -٢س & -٣ < س < ١ \\ \text{صفر} & ١ < س < ٣ \end{cases}$

غير معرفة $س = ١ ، -٣ ، ٣$

$ق'(س) = ٠ \Rightarrow -٢س = \text{صفر} \Rightarrow س = ٠$



$[-٣ ، ٠]$ ق متزايد

$[٠ ، ١]$ ق متناقص

$[١ ، ٣]$ ق ثابت

مثال

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = |س^٢ - ٩|$ $\quad$ $س \in [-٥ ، ٥]$

الحل:

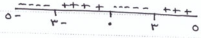
$ق(س) = \begin{cases} ٩ - س^٢ & -٣ < س < ٣ \\ س^٢ - ٩ & س < -٣ ، س > ٣ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} & -٥ \le س < -٣ \\ س^٢ - ٩ & ٣ < س \le ٥ \\ ٩ - س^٢ & -٣ \le س \le ٣ \end{cases}$

ق'(س) = { ٢س   -٥ < س < -٣
٢س   ٣ < س < ٥
-٢س   -٣ < س < ٣

غير موجودة   س = -٥، ٥، ٣، -٣

ق'(س) = ٠ ⟸ -٢س = ٠ ← س = ٠



[-٥، -٣] ق متناقص

[-٣، ٠] ق متزايد

[٠، ٣] ق متناقص

[٣، ٥] ق متزايد

مثال

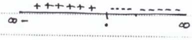
حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = { ٣ - س²   س ≤ ١
$\frac{٢}{س}$ س > ١

الحل:

ق'(س) = { -٢س   س ≤ ١
$\frac{-٢}{س^٢}$ س > ١

ق'(س) = ٠   -٢س = ٠ ⟸ س = ٠



(-∞، ٠] ق متزايد

[٠، ∞) ق متناقص

مثال

ق(س) = جتاس - $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

س ∈ [٠، ٢π]

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

الحل:

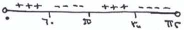
ق'(س) = -جاس + جا٢س

ق'(س) = -جاس + ٢جاس جتاس

٠ = -جاس (١ - ٢جتاس)

جاس = ٠   جتاس = $\frac{١}{٢}$

س = $\underset{\times}{٠}$، $\underset{\times}{\pi}$، $\underset{\times}{٢\pi}$ / س = ٦٠، ٣٠٠



[٠، ٦٠°] ق متزايد

[٦٠°، π] ق متناقص

[π، ٣٠٠] ق متزايد

[٣٠٠، ٢π] ق متناقص.

مثال

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = $\sqrt{٢٥ - س^٢}$ س ∈ [-٥، ٥]

الحل:

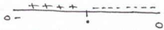
الحل:

$ق'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٢٥-س^٢}}$

$ق'(س) = \frac{-س}{\sqrt{٢٥-س^٢}}$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$

اصفار المقام $س = ±٥$



$[-٥، ٠]$ ق متزايد
$[٠، ٥]$ ق متناقص

مثال

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = \sqrt[٣]{(س-٤)^٢}$ $س \in ح$

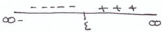
الحل:

$ق(س) = (س-٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣}(س-٤)^{\frac{-١}{٣}}$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(س-٤)}}$

اصفار المقام $س = ٤$



$(-\infty، ٤]$ ق متناقص

$[٤، \infty)$ ق متزايد

مثال

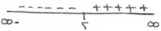
حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = (٢-س)^٤$ $س \in ح$

الحل:

$ق'(س) = -٤(٢-س)^٣$

$ق'(س) = صفر \Leftarrow س = ٢$



$(-\infty، ٢]$ ق متناقص
$[٢، \infty)$ ق متزايد

مثال

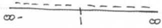
حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = (١-س)^٣$ $س \in ح$

الحل:

$ق'(س) = -٣(١-س)^٢$

$ق'(س) = صفر \Leftarrow س = ١$



(−∞ ، ∞) ق متناقص.

مثال

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = ٤س − $س^{٢}$ ، س ∈ ح

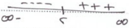
الحل:

ق'(س) = ٤ − ٢س

٠ = ٤ − ٢س

٢س = ٤

س = ٢



(−∞ ، ٢] ق متناقص

[٢ ، ∞) ق متزايد

مثال

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة [أ ، ب] وقابل للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان ق'(س) > صفر لكل س ∈ (أ ، ب) وكان هـ(س) = ق(س) + $س^{٣}$ فأثبت أن هـ(س) متزايد على الفترة [أ ، ب]

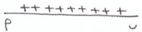
الحل:

هـ'(س) = ق'(س) + ٣$س^{٢}$

ق متزايد على [أ ، ب]

٣$س^{٢}$ دائماً +

⇐ هـ'(س)



⇐ هـ متزايد على [أ ، ب] .

الدرس (القيم القصوى)

* أنواع القيم القصوى
١) قيمة عظمى محليه
٢) قيمة عظمى مطلقه
٣) قيمه صغرى محليه
٤) قيمة صغرى مطلقه

* لكل نقطة حرجة يوجد قيمه قصوى إما عظمى أو صغرى.

مثال

ق(س) = ٤س − $س^{٣}$ ، س ∈ [−٣،٣]

جد القيم القصوى وحدد نوعها

الحل:

ق′(س) = ٤ − ٣$س^{٢}$

٠ = ٤ − ٣$س^{٢}$

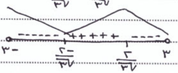
٣$س^{٢}$ = ٤

$س^{٢}$ = $\frac{٤}{٣}$

س = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

⇐ القيم الحرجة

س = −٣ ، $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ٣



ق(−٣) = −١٢ − −٢٧ = ١٥ عظمى مطلقه

ق($\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{-٨}{\sqrt{٣}} - \frac{-٨}{(\sqrt{٣})^{٣}}$ صغرى محليه

ق($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{٨}{\sqrt{٣}} - \frac{٨}{(\sqrt{٣})^{٢}}$ عظمى محليه

ق(+٣) = +١٢ − ٢٧ = −١٥ صغرى مطلقه

مثال

جد النقط الحرجة والقيم القصوى ان وجدت للاقتران

ق(س) = $س^{٣}$ − ٣$س^{٢}$ + ١ ، س ∈ [−٢،٤]

الحل:

ق′(س) = ٣$س^{٢}$ − ٦س

٠ = ٣$س^{٢}$ − ٦س

٠ = ٣س (س − ٢)

س = ٠ ، س = ٢

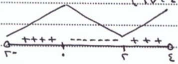
النقط الحرجة

(−٢، −١٩)

(٠ ، ١) نقط حرجة

(٢ ، −٣)

(٤ ، ١٧)



ق(−٢) صغرى مطلقه

ق(٠) عظمى محليه

ق(٢) صغرى محليه

ق(٤) عظمى مطلقه

مثال

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) للاقتران

ق(س) = ٦س^{٢} ـ س^{٣} − ٩س + ٢

س ∈ [−١، ٥] .

الحل:

ق'(س) = ١٢س − ٣س^{٢} − ٩

٠ = ١٢س − ٣س^{٢} − ٩

٠ = س^{٢} − ٤س + ٣

٠ = (س − ٣)(س − ١)

س = ٣ ، س = ١

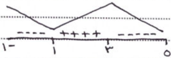
النقط الحرجة

(−١ ، ١٨)

(١ ، −٢)

(٣ ، ٢)

(٥ ، −١٨)



ق(−١) عظمى مطلقه

ق(١) صغرى محليه

ق(٣) عظمى محليه

ق(٥) صغرى مطلقه

مثال

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) للاقتران ق(س) = ٤س − س^{٢} + ١

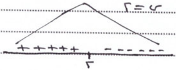
الحل:

ق'(س) = ٤ − ٢س

٠ = ٤ − ٢س

٢س = ٤

س = ٢



(٢، ٥) نقطة حرجة

ق(٢) قيمه محليه مطلقه

مثال

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) للاقتران

ق(س) = |١ − س^{٢}| س ∈ [−٣، ٤]

الحل:

ق(س) = { س^{٢} − ١ ، س ≥ ١ ، س ≤ −١

١ − س^{٢} ، −١ < س < ١

ق'(س) = { ٢س ، س > ١ ، س < −١

−٢س ، −١ < س < ١

غير موجودة ، س = −٣، ١، −١، ٤

ق'(س) = −٢س = ٠

⇐ س = ٠

رياضيات العلمي المستوى (٣) الوحدة (تطبيقات التفاضل)

الدرس (القيم القصوى)

النقط الحرجة

(−٣، ٨) قيمه عظمى

(−١، ٠) قيمه صغرى محليه مطلقه

(٠، ١) قيمه عظمى محليه

(١، ٠) قيمه صغرى محليه مطلقه

(٤، ١٥) قيمه عظمى مطلقه

مثال

جد القيم القصوى المحليه والمطلقه (إن وجدت) للاقتران

ق(س) = جتاس − $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س

س ∋ [٠، ٢π]

الحل:

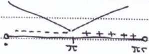
قَ(س) = −جاس − جتا^{٢}س (−جاس)

٠ = −جاس (١ − جتا^{٢}س)

٠ = −جاس × جا^{٢}س

٠ = −جا^{٣}س

⟸ س = π



النقط الحرجة

(٠، $\frac{٢}{٣}$) قيمه عظمى مطلقه

(π، $\frac{−٢}{٣}$) قيمه صغرى محليه مطلقه

(٢π، $\frac{٢}{٣}$) قيمه عظمى مطلقه

مثال

جد القيم القصوى المحليه (ان وجدت)

للاقتران ق(س) = س + ٢جاس

س ∋ [٠، π]

الحل:

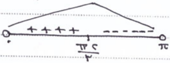
قَ(س) = ١ + ٢جتاس

٠ = ١ + ٢جتاس

٢جتاس = −١

جتاس = $\frac{−١}{٢}$

⟸ س = ١٢٠ = $\frac{٢π}{٣}$



(٠، ٠)

($\frac{٢π}{٣}$، $\frac{٢π}{٣}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) قيمه عظمى محليه

(π، π)

مثال

جد القيم القصوى المحليه والمطلقه (ان وجدت) للاقتران

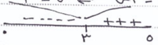
ق(س) = س^{٢} − ٦س + ٩ س ∋ [٠، ٥]

الحل:

قَ(س) = ٢س − ٦

٠ = ٢س − ٦

٦ = ٢س ⟸ س = ٣



(٠، ٩) قيمه عظمى مطلقه

(٣، ٠) قيمه صغرى محليه

(٥، ٤) قيمه عظمى

مثال

$ق(س) = س^{٣} - ١٢س$ ، $س \in [-٤، ٤]$

جد القيم القصوى المحليه والمطلقه (ان وجدت)

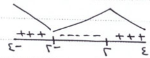
الحل :

$قَ(س) = ٣س^{٢} - ١٢$

$٠ = ٣س^{٢} - ١٢$

$١٢ = ٣س^{٢}$

$س^{٢} = ٤$ ، $س = \pm ٢$



(-٤، -١٦) قيمه عظمى مطلقه

(-٢، ١٦) قيمه صغرى مطلقه

(٢، -١٦) قيمه عظمى مطلقه

(٤، ١٦) قيمه صغرى مطلقه

مثال

$ق(س) = (س - ٢)^{٣}$ ، $س \in [٠، ٤]$

جد القيم القصوى المحليه والمطلقه ان وجدت .

الحل:

$ق(س) = ٨ + ٦س^{٢} - ١٢س - س^{٣}$

$\Leftarrow ق(س) = -س^{٣} + ٦س^{٢} - ١٢س + ٨$

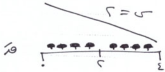
$قَ(س) = -٣س^{٢} + ١٢س - ١٢$

$٠ = -٣س^{٢} + ١٢س - ١٢$

$٠ = س^{٢} - ٤س + ٤$

$٠ = (س - ٢)(س - ٢)$

$س = ٢$



(٠، ٨) قيمه عظمى مطلقه

(٤، -٨) قيمه صغرى مطلقه

مثال

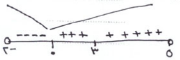
جد القيم القصوى المحليه والمطلقه للاقتران (ان وجدت)

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & -٢ \le س < ٣ \\ ٣س + ١ & ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$$

الحل :

$$قَ(س) = \begin{cases} ٢س & -٢ < س < ٣ \\ ٣ & ٣ < س < ٥ \\ \text{غير موجودة} & س = ٣، -٢، ٥ \end{cases}$$

$قَ(س) = ٠ \Leftarrow ٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠$



$(-٣ ، ٥)$ قيمه عظمى

$(٠ ، ١)$ قيمه صغرى محليه مطلقه

$(٥ ، ١٦)$ قيمه عظمى مطلقه

مثال

$\text{ق}(\text{س}) = |(\text{س} - ١)^{٣}| \quad \text{س} \in [-١ ، ٣]$

جد القيم القصوى المحليه والمطلقه ان وجدت

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -(\text{س} - ١)^{٣} & -١ \leq \text{س} \leq ١ \\ (\text{س} - ١)^{٣} & ١ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} -٣(\text{س} - ١)^{٢} & -١ < \text{س} \leq ١ \\ ٣(\text{س} - ١)^{٢} & ١ < \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$

$(-١ ، ٨)$ قيمه عظمى مطلقه

$(١ ، ٠)$ قيمه صغرى مطلقه

$(٣ ، ٨)$ قيمه عظمى مطلقه

مثال

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} \quad \text{س} \in [٠ ، ٣]$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}$

$٠ = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}$

$٠ = \text{س}^{٢}(\text{س} - ١)$

$\text{س} = ٠ ، \text{س} = ١$

$(٠ ، ٠)$ قيمه عظمى

$(١ ، \frac{-١}{١٢})$ قيمه صغرى مطلقه

$(٣ ، \frac{٤٥}{٤})$ قيمه عظمى مطلقه

مثال

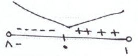
$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} \quad \text{س} \in [-٨ ، ١]$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{-\frac{١}{٣}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$

اصفار المقام $\text{س} = ٠$



$(-٨ ، ٤)$ قيمه عظمى مطلقه

$(٠ ، ٠)$ قيمه صغرى مطلقه

$(١ ،$ [illegible]$)$ قيمه عظمى

مثال

ق(س) = س + جاس ، س ∈ [٠، ٢π]

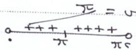
الحل :

قَ(س) = ١ + جتاس

٠ = ١ + جتاس

جتاس = −١

س = π



(٠، ٠) قيمة صغرى مطلقة

(٢π، ٢π) قيمة عظمى مطلقة

مثال

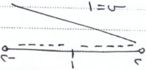
ق(س) = $(١ − س)^{٣}$ ، س ∈ [−٢، ٢]

الحل :

قَ(س) = −٣ $(١ − س)^{٢}$

٠ = −٣ $(١ − س)^{٢}$

س = ١



(−٢، ٢٧) قيمة عظمى مطلقة

(٢، −١) قيمة صغرى مطلقة

مثال

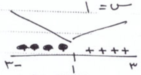
ق(س) = $(١ − س)^{٤}$ ، س ∈ [−٣، ٣]

الحل:

قَ(س) = −٤ $(١ − س)^{٣}$

٠ = −٤ $(١ − س)^{٣}$

س = ١



(−٣، ٢٥٦) قيمة عظمى مطلقة

(١، ٠) قيمة صغرى مطلقة

(٣، ١٦) قيمة عظمى

مثال

إذا كان للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢، ٣) بين أن للاقتران هـ(س) = $(١ − ق(س))^{٣}$ قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢، −٨)

الحل :  قَ

هـَ(س) = ٣ $(١ − ق(س))^{٢}$ × − قَ(س)

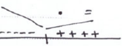
~~[illegible]~~

هـَ(٢) = صفر لأن

هـَ(٢) = −٣ $(١ − ق(٢))^{٢}$ × قَ(٢)

= −٣ $(١ − ٣)^{٢}$ × ٠

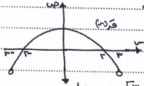
= ٠



بالاعتماد على إشارة قَ هـ(٢) = −٨

* رسمة ق'(س) :

مثال



معتمداً الشكل الذي يمثل ق'(س) حيث ق(س) معرف على الفترة [-٣، ٣] جد ما يلي

١) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق

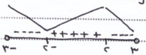
٢) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

٣) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محليه.

الحل:

١) س = {-٣، -٢، ٢، ٣}

٢)



[-٣، -٢] ق متناقص

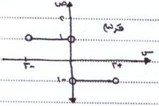
[-٢، ٢] ق متزايد

[٢، ٣] ق متناقص .

③ عند س = -٢ يوجد قيمة صغرى محلية

عند س = ٢ يوجد قيمة عظمى محلية.

مثال



معتمداً الشكل الذي يمثل ق'(س) حيث ق(س) معرف على [-٢، ٢]

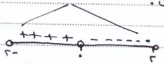
جد ما يلي

① مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق

② مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

③ قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية.

الحل:



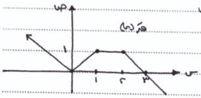
① {-٢، ٠، ٢}

② [-٢، ٠] ق متزايد

[٠، ٢] ق متناقص

③ عند س = ٠ يوجد قيمة عظمى محلية.

مثال



بالاعتماد على الشكل الذي يمثل المشتقة الاولى للاقتران ق المعرف على ح

جد

① النقط الحرجة

س = {٠، ٢، ٣}

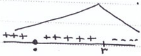
② مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

(-∞، ٠] ق متزايد

[٠، ٣] ق متزايد

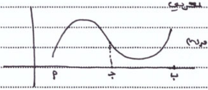
[٣، ∞) ق متناقص

③ قيم س التي عندها قيم قصوى محلية .



عند س=٣ يوجد قيمة عظمى محلية

تعريف



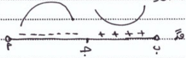
هـ: معرف على س في الفترة [أ، ب]

: قابل للاشتقاق في الفترة (أ، ب)

① يكون هـ مقعراً للأسفل في الفترة (أ، جـ) حيث جميع المماسات فوق هـ

② يكون هـ مقعراً للأعلى في الفترة (جـ، ب) حيث جميع المماسات تحت هـ

نظرية



هـ''(س) < ٠ في (أ، جـ) هـ مقعر للأسفل

هـ''(س) > ٠ في (جـ، ب) هـ مقعر للأعلى

تعريف

هـ متصل على فترة مفتوحة حول س١ وكان هـ يغير اتجاه تقعره عند س١ فإن (س١، هـ(س١)) تسمى نقطة انعطاف لمنحنى هـ

مثال

إذا كان $هـ(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ١$ جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران هـ

الحل:

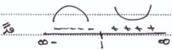
$$هـ'(س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٣$$

$$هـ''(س) = ٦س - ٦$$

$$٠ = ٦س - ٦$$

$$٦ = ٦س$$

$$س = ١$$



(-∞، ١] هـ مقعر للأسفل

[١، ∞) هـ مقعر للأعلى

مثال

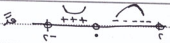
حدد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران $هـ(س) = س^{\frac{١}{٥}}$ حيث $س \in [-٢، ٢]$

الحل:

$$هـ'(س) = \frac{١}{٥} س^{\frac{-٤}{٥}}$$

$$هـ''(س) = \frac{-٤}{٢٥} \times س^{\frac{-٩}{٥}}$$

$$= \frac{-٤}{٢٥} \times \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٩}}}$$



[-٢، ٠] ق مقعر للأعلى

[٠، ٢] ق مقعر للأسفل

مثال

جد نقط الانعطاف لمنحنى ق حيث ق(س) = $س^٤$ - ٦$س^٢$ + ١ ، س ∈ ح

الحل:

ق'(س) = ٤$س^٣$ - ١٢س

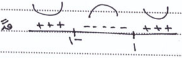
ق''(س) = ١٢$س^٢$ - ١٢

٠ = ١٢$س^٢$ - ١٢

١٢ = ١٢$س^٢$

١ = $س^٢$

⇐ س = ±١



(-١، -٤) نقطة انعطاف

(١، -٤) نقطة انعطاف

مثال

جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق حيث

ق(س) = $س^٤$ - ٦$س^٣$ + ١٢$س^٢$

س ∈ [-٥، ٥]

الحل:

ق'(س) = ٤$س^٣$ - ١٨$س^٢$ + ٢٤س

ق''(س) = ١٢$س^٢$ - ٣٦س + ٢٤

٠ = ١٢$س^٢$ - ٣٦س + ٢٤

٠ = $س^٢$ - ٣س + ٢

٠ = (س - ١)(س - ٢)

س = ١ ، س = ٢

(-٥، ١) ق مقعر لأعلى

(١، ٢) ق مقعر للأسفل

(٢، ٥) ق مقعر لأعلى

مثال

ليكن ق(س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$ جد مجالات التقعر لمنحنى الاقتران ق.

الحل:

ق(س) = $\sqrt[٣]{س^٢}$

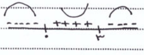
ق'(س) = $\frac{٢}{٣}$ $س^{\frac{-١}{٣}}$

ق''(س) = $\frac{-٢}{٩}$ $س^{\frac{-٤}{٣}}$

= $\frac{-٢}{٩} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{س^٤}}$

اصفار المقام : س = ٠

(-∞، ∞) ق مقعر للأسفل



س = ٠ ، ٣

(٠ ، ٠) نقطة انعطاف

(٣ ، ٨١) نقطة انعطاف

مثال

جد قيم س التي يكون لمنحنى الاقتران ق عندها نقط انعطاف حيث

ق(س) = ٢جاس + $\frac{١}{٢}$ جا٢س

س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل:

ق'(س) = ٢جتاس + جتا٢س

ق''(س) = -٢جاس - جا٢س × ٢

٠ = -٢جاس - ٢جا٢س

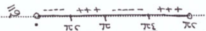
٠ = -٢جاس - ٢(٢جاس جتاس)

٠ = -٢جاس - ٤جاس جتاس

٠ = -٢جاس (١ + ٢جتاس)

⇐ جاس = ٠ أو جتاس = $-\frac{١}{٢}$

س = $\underset{\times}{٠}$ ، π ، $\underset{\times}{٢\pi}$ أو س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$



قيم س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ، π ، $\frac{٤\pi}{٣}$

مثال

إذا كان ق(س) = ٢جتاس + $\frac{١}{٢}$ جا٢س

س ∈ [٠ ، ٢π] جد نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق.

الحل:

ق'(س) = -٢جاس + جتا٢س

ق''(س) = -٢جتاس - جا٢س × ٢

= -٢جتاس - ٢جاس جتاس × ٢

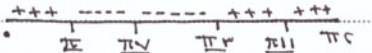
ق''(س) = -٢جتاس (١ + ٢جاس)

٠ = -٢جتاس (١ + ٢جاس)

جتاس = ٠ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

جاس = $-\frac{١}{٢}$ ⇐ س = ٢١٠ ، ٣٣٠

$\frac{٧\pi}{٦}$ $\frac{١١\pi}{٦}$



س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)

($\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٠)

مثال

حدد فترات التقعر إلى الأعلى والتقعر إلى الأسفل للاقتران

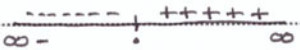
$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{٤}{\text{س}}$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = ١ - \frac{٤}{\text{س}^٢}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{٤ \times ٢\text{س}}{\text{س}^٤} = \frac{٨}{\text{س}^٣}$

اصفار المقام: $\text{س} = ٠$



$(-\infty ، ٠)$ ق مقعر الى الأسفل

$(٠ ، \infty)$ ق مقعر الى الاعلى

مثال

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{١٦ - \text{س}^٢}$ حدد فترات التقعر الى الاعلى والى الاسفل

$\text{س} \in [-٤ ، ٤]$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{١٦-\text{س}^٢}}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{\sqrt{١٦-\text{س}^٢} \times -١ - -\text{س} \times \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{١٦-\text{س}^٢}}}{١٦ - \text{س}^٢}$

$٠ = -\sqrt{١٦-\text{س}^٢} - \frac{٢\text{س}^٢}{٢\sqrt{١٦-\text{س}^٢}}$

$٠ = \frac{-(١٦-\text{س}^٢) - ٢\text{س}^٢}{٢\sqrt{١٦-\text{س}^٢}}$

$٠ = \text{س}^٢ - ١٦ - ٢\text{س}^٢$

$٠ = -\text{س}^٢ - ١٦$

$٠ = \text{س}^٢ + ١٦$ مرفوض

اصفار المقام: $\text{س} = \pm ٤$

$(-٤ ، ٤)$ ق مقعر للاسفل

مثال

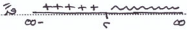
حدد فترات التقعر الى الاعلى وفترات التقعر للاسفل

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & \text{س} < ٢ \\ ٥ - \text{س} & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & \text{س} < ٢ \\ -١ & \text{س} > ٢ \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = ٢ \end{cases}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & \text{س} < ٢ \\ \text{صفر} & \text{س} > ٢ \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = ٢ \end{cases}$



$(-\infty ، ٢)$ ق مقعر للاعلى

مثال

حدد فترات التقعر للاعلى والتقعر للاسفل للاقتران

$\text{ق(س)} = \left(\frac{\text{س} - ١}{\text{س}}\right)^{٢}$

الحل:

$\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢}}$

$\text{ق(س)} = ١ - \frac{٢}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

$\text{قَ(س)} = \frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{١ \times ٢\text{س}}{\text{س}^{٤}}$

$\text{قَ(س)} = \frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٢}{\text{س}^{٣}}$

$\text{ق}''\text{(س)} = \frac{-٢ \times ٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} - \frac{٢ \times ٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}}$

$\text{ق}''\text{(س)} = \frac{-٤}{\text{س}^{٣}} - \frac{٦}{\text{س}^{٤}}$

$\text{ق}''\text{(س)} = \frac{-٤\text{س} - ٦}{\text{س}^{٤}}$

$٠ = \frac{-٤\text{س} - ٦}{\text{س}^{٤}}$

$٠ = -٤\text{س} - ٦$

$٦ = -٤\text{س}$

$\text{س} = \frac{-٦}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

اصفار المقام $= \text{س} = ٠$

$\text{ق}'' \quad +++ \underset{-\frac{٣}{٢}}{|} ------ \underset{٠}{|} - ---$

$(-\infty ، -\frac{٣}{٢})$ ه مقعر للاعلى

$(-\frac{٣}{٢} ، \infty)$ ه مقعر للاسفل

مثال

حدد فترات التقعر للاعلى وللاسفل للاقتران

$\text{ق(س)} = \text{جتاس} - \text{جاس} + ١$

$\text{س} \in [٠ ، \pi]$

الحل:

$\text{قَ(س)} = -\text{جاس} - \text{جتاس}$

$\text{ق}''\text{(س)} = -\text{جتاس} + \text{جاس}$

$٠ = \text{جاس} - \text{جتاس}$

$\text{جتاس} = \text{جاس}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٤}$

$\text{ق}'' \quad \underset{٠}{\circ} ----- \underset{\frac{\pi}{٤}}{|} ++++ \underset{\pi}{\circ}$

$(٠ ، \frac{\pi}{٤})$ ه مقعر للاسفل

$(\frac{\pi}{٤} ، \pi)$ ه مقعر للاعلى

مثال

حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران

$ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ٢$
حيث $س \in ح$.

الحل:

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩$

$ق''(س) = ٦س - ١٢$

$٠ = ٦س - ١٢$

$١٢ = ٦س$

$س = ٢$

$-\infty$ ------ ٢ ++++ ∞

$(٢ ، ٤)$ نقطة انعطاف

مثال

حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}}$
حيث $س \in ح$.

الحل:

$ق'(س) = \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}} - \frac{١}{٣} س^{\frac{-٢}{٣}}$

$ق''(س) = \frac{-٢}{٩} س^{\frac{-٤}{٣}} + \frac{٢}{٩} س^{\frac{-٥}{٣}}$

$٠ = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{س^{٤}}} + \frac{٢}{٩\sqrt[٣]{س^{٥}}}$

$٠ = \frac{-١٨\sqrt[٣]{س^{٥}} + ١٨\sqrt[٣]{س^{٤}}}{(٩\sqrt[٣]{س^{٤}})(٩\sqrt[٣]{س^{٥}})}$

$٠ = -١٨\sqrt[٣]{س^{٥}} + ١٨\sqrt[٣]{س^{٤}}$

$١٨\sqrt[٣]{س^{٥}} = ١٨\sqrt[٣]{س^{٤}}$

$\sqrt[٣]{س^{٥}} = \sqrt[٣]{س^{٤}}$

$س^{٥} = س^{٤}$

$س^{٥} - س^{٤} =$ صفر

$س^{٤}(س - ١) =$ صفر

$س = ٠$ ، $س = ١$

----- ٠ ------ ١ -----

لا يوجد

مثال

حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = س^{\frac{٣}{٥}}$ $س \in ح$

الحل:

$ق'(س) = \frac{٣}{٥} س^{\frac{-٢}{٥}}$

$ق''(س) = \frac{-٦}{٢٥} س^{\frac{-٧}{٥}}$

$ق''(س) = \frac{-٦}{٢٥\sqrt[٥]{س^{٧}}}$

اصفار المقام $س =$ صفر

$-\infty$ ++++ ٠ ------ ∞

$(٠ ، ٠)$ نقطة انعطاف

مثال

حدد نقط الانعطاف (ان وجدت)
للاقتران ق(س) = س − ظاس
حيث س ∈ [−$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]

الحل:

ق′(س) = ١ − قا^{٢}س
ق″(س) = صفر − ٢ قاس قاس ظاس
٠ = صفر − ٢ قا^{٢}س ظاس
−٢ قا^{٢}س ظاس = صفر

٢ (١+ظا^{٢}س) ظاس = صفر
٢ظا^{٣}س + ٢ظاس = صفر
٢ظاس (ظا^{٢}س + ١) = ٠
ظاس = ٠ ⟸ س = صفر

+ + + + + | − − − − − −
−$\frac{\pi}{٢}$ ٠ $\frac{\pi}{٢}$

(٠ ، ٠) نقطة انعطاف.

*** اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية :**

مثال :

إذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢$ جد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

الحل:

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٦س$

$٠ = ٣س^{٢} - ٦س$

$٠ = ٣س(س - ٢)$

$س = ٠$ ، $س = ٢$

(٠ ، ٢) نقطة حرجة

(٢ ، −٢) نقطة حرجة

$ق''(س) = ٦س - ٦$

$ق''(٠) = ٠ - ٦ = -٦$ عظمى

$ق(٠) = ٢$ قيمة عظمى محليه

$ق''(٢) = ١٢ - ٦ = ٦$

$\Leftarrow ق(٢) = -٢$ قيمة صغرى محلية.

مثال.

ليكن $ق(س) = س^{٣} - ١٢س + ٣$

جد نقط القيم القصوى المحليه للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية

الحل:

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٢$

$٠ = ٣س^{٢} - ١٢$

$١٢ = ٣س^{٢}$

$٤ = س^{٢}$

$س = \pm ٢$

(٢ ، −١٣)
(−٢ ، ١٩) نقط حرجه

$ق''(س) = ٦س$

$ق''(٢) = ١٢$

$\Leftarrow ق(٢) = -١٣$ قيمة صغرى محليه

$ق''(-٢) = -١٢$

$\Leftarrow ق(-٢) = ١٩$ قيمة عظمى محلية.

مثال

إذا كان $ق(س) = ٦س^{٣} - س^{٤}$ جد نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق إن وجدت

الحل:

$ق'(س) = ١٨س^{٢} - ٤س^{٣}$

$ق''(س) = ٣٦س - ١٢س^{٢}$

$٠ = ٣٦س - ١٢س^{٢}$

$٠ = ١٢س(٣ - س)$

$س = ٠$ ، $س = ٣$

مثال

جد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للاقتران $ق(س) = جاس - جتاس$

$س \in [٠، ٢\pi]$ مستخدماً اختبار المشتقة الثانية ان أمكن.

الحل:

$ق'(س) = جتاس + جاس$

$٠ = جتاس + جاس$

$-جتاس = جاس$

$س = ١٣٥°، ٣١٥°$

$ق''(س) = -جاس + جتاس$

$ق''(س) = جتاس - جاس$

$ق''(١٣٥) = جتا١٣٥ - جا١٣٥$

$\frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow ق(١٣٥) = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ قيمة عظمى محلية

$ق''(٣١٥) = جتا٣١٥ - جا٣١٥$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow ق(٣١٥) = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ قيمة صغرى محلية

مثال

جد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للاقتران $ق(س) = س^{٤}$، $س \in ح$

الحل:

$ق'(س) = ٤س^{٣}$

$٠ = ٤س^{٣}$

$س = ٠$

$ق''(س) = ١٢س^{٢}$

$ق''(٠) = ٠$

الاختبار فشل

مثال

$ق(س) = ٤|س-٢| - |س+١| + س$

$س \in ح$

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم الصغرى والقيم العظمى المحلية للاقتران (ان أمكن).

الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س - ٩ & س > ٢ \\ ٧ - ٤س & -١ \le س \le ٢ \\ ٩ - ٢س & س < -١ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٤ & س > ٢ \\ -٤ & -١ < س < ٢ \\ -٢ & س < -١ \end{cases}$$

$$ق''(س) = \begin{cases} ٠ & س > ٢ \\ ٠ & -١ < س < ٢ \\ & س < -١ \end{cases}$$

الاختبار فشل

مثال

جد القيم القصوى العظمى والصغرى المحلية للاقتران

$ق(س) = س^٢ + \frac{١٢٨}{س}$ ، $س \neq ٠$

مستخدماً اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن)

الحل:

$ق'(س) = ٢س - \frac{١٢٨}{س^٢}$

$٠ = ٢س - \frac{١٢٨}{س^٢}$

$\frac{١٢٨}{س^٢} = ٢س$

$٢س^٣ = ١٢٨$

$س^٣ = ٦٤ \Leftarrow س = ٤$

$ق''(س) = ٢ + \frac{١٢٨ \times ٢س}{س^٤}$

$ق''(س) = ٢ + \frac{٢٥٦}{س^٣}$

$ق''(٤) = ٢ + \frac{٢٥٦}{٦٤}$

$\Leftarrow = ٢ + \frac{٢٥٦}{٦٤}$

$٢ + ٤ = ٦$

$\Leftarrow ق(٤) = ١٦ + ٣٢ = ٤٨$

قيمة صغرى محلية.

مثال

$ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$

① جد مجالات التقعر

② جد نقط عدم الاتصال

③ جد نقط الانعطاف.

الحل:

② $س = ٠$ نقطة عدم اتصال

$ق'(س) = \frac{-١}{س^٢}$

$ق''(س) = \frac{+١ \times ٢س}{س^٤}$

$= \frac{+٢}{س^٣}$

~~[illegible] مقعر [illegible]~~

− − − − − − | + + + +
٠

$(-\infty ، ٠)$ مقعر للأسفل

$(٠ ، \infty)$ مقعر للأعلى

ق غير متصل حول ٠

$\Leftarrow$ لا يوجد نقطة انعطاف

مثال

$ق(س) = س^{\frac{١}{٣}}$

① جد مجالات التقعر
② جد نقط عدم الاتصال
③ جد نقط الانعطاف

الحل:

$ق'(س) = \frac{١}{٣} س^{\frac{-٢}{٣}}$

$ق''(س) = \frac{-٢}{٩} س^{\frac{-٥}{٣}}$

$$ق''(س) = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{س^٥}}$$

اصفار المقام = ٠

(−∞، ٠) ق مقعر للاعلى
(٠، ∞) ق مقعر للاسفل

ق متصل على ح .

(٠، ٠) نقطة انعطاف

مثال

عيّن قاعدة الاقتران
$ق(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + د$
أ ≠ ٠ ، ب، جـ، د أعداد حقيقية
الذي يمر منحناه بالنقطة (١، ٥)
ومعادلة المماس لمنحناه عند النقطة
(٢، ١) هي $ص + ٣س - ٧ = ٠$

الحل:

$ق(١) = ٥$
$ق(٢) = ١$ $\quad ص' + ٣ = ٠$
$ص' = -٣$
$ق'(٢) = -٣$

$ق''(٢) = ٠$

$\Leftarrow ق'(س) = ٣أ س^٢ + ٢ب س + جـ$
$ق''(س) = ٦أ س + ٢ب$
$٠ = ١٢أ + ٢ب$

$\boxed{٠ = ٦أ + ب}$

$\boxed{-٣ = ١٢أ + ٤ب + جـ}$

$\boxed{٥ = أ + ب + جـ + د}$

$\boxed{١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د}$

③ - ④

$\boxed{\text{٤ = -٧أ - ٣ب - جـ}}$ ⟵ ⑤

⑤ + ②

$\boxed{\text{١ = ٥أ + ب}}$ ⟵ ⑥

① - ⑥

-١ = أ

⇐ ١ = -٥ + ب

$\boxed{\text{٦ = ب}}$

نعوض في ②

-٣ = -١٢ + ٢٤ + جـ

-٣ = ١٢ + جـ

$\boxed{\text{-١٥ = جـ}}$

نعوض في ٣

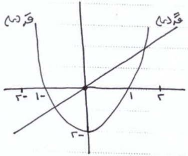
٥ = -١ + ٦ - ١٥ + د

٥ = -١٠ + د

$\boxed{\text{١٥ = د}}$

⇐ ق(س) = -س^{٣} + ٦س^{٢} - ١٥س + ١٥

مثال

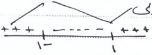


بالاعتماد على الشكل

① جد فترات التزايد والتناقص

(-∞، -١] ق متزايد
[-١، ١] ق متناقص
[١، ∞) ق متزايد

② جد قيم س التي عندها قيم قصوى محلية باستخدام المشتقة الأولى



س = -١ عندها قيمة عظمى محلية

س = ١ عندها قيمة صغرى محلية

③ جد قيم س التي عندها قيم قصوى محلية باستخدام المشتقة الثانية

ق''(-١) < صفر ⇐ عندها قيمة عظمى محلية
ق''(١) > صفر ⇐ عندها قيمة صغرى محلية

④ جد مجالات التقعر للاقتران هـ

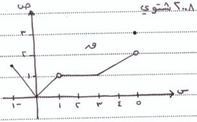
(-∞، ٠) هـ مقعر للاسفل
(٠، ∞) هـ مقعر للاعلى

⑤ عين نقط الانعطاف للاقتران هـ

عند س = صفر يوجد نقطة انعطاف للاقتران هـ(س).

الأسئلة الوزارية :

٢٠٠٨ شتوي



يمثل الشكل منحنى الاقتران ق على مجاله ما مجموعة قيم س التي يكون للاقتران ق عندها نقطاً حرجة ؟

أ) {-١، ٠، ١، ٣، ٥}

ب) {-١، ٠، ٥} ∪ [١، ٣]

[✓ ج)] {-١، ٠، ٥} ∪ (١، ٣]

د) {-١، ٥} ∪ (١، ٣]

٢٠٠٨ شتوي   ٥ علامات

ليكن ق(س) = ٤ - س + جاس

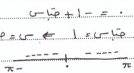
س ∈ [-π، π] جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متناقصاً .

الحل:

$ق'(س) = -١ + جتاس$

$٠ = -١ + جتاس$

جتاس = ١ ⟸ س = صفر



ق متناقص على [-π، π]

٢٠٠٨ صيفي   ٣ علامات

إذا كان ق(س) = ٤س - $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$

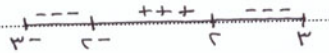
س ∈ [-٣، ٣] جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايداً .

الحل:

$ق'(س) = ٤ - س^{٢}$

$٠ = ٤ - س^{٢}$

$س^{٢} = ٤$ ⟸ س = ±٢



ق متزايد على [-٢، ٢]

٢٠٠٩ شتوي   ٤ علامات

إذا كان ق(س) = $س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ٢$

حيث س ∈ [٠، ٤] جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايداً .

الحل :

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩$

$٠ = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩$

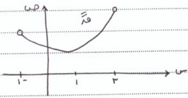
$٠ = س^{٢} - ٤س + ٣$

$٠ = (س - ١)(س - ٣)$

س = ١ ، س = ٣

ق متزايد على [٠، ١] ، [٣، ٤]

٢٠٠٩ صيفي



الشكل يمثل منحنى المشتقة الثانية للاقتران ق(س) المتصل على [-١ ، ٣] فإن الاقتران قَ يكون متزايداً في الفترة

أ) [-١ ، ٣] [✓ ب)] (-١ ، ٣)
جـ) (١ ، ٣) د) [١ ، ٣]

٢٠٠٩ صيفي ٤ علامات

إذا كان $ق(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - ٢س^{٢} + ٣$ حيث س ∈ (-∞ ، ٢) جد الفترة (الفترات التي يكون فيها ق متناقصاً

الحل:

$قَ(س) = س^{٣} - ٤س$

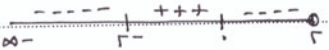
$٠ = س^{٣} - ٤س$

$٠ = س(س^{٢} - ٤)$

$٠ = س(س-٢)(س+٢)$

س = صفر ، ٢ ، -٢

س = ٢ تهمل س = ٠ ، -٢



ق متناقص على (-∞ ، -٢] ، [٠ ، ٢)

٢٠١٠ شتوي

إذا كان ق معرفاً على [١ ، ٥) وكان قَ(س) = ٢س - ١ حيث س ∈ (١ ، ٥) فإن مجموعة قيم س التي يكون للاقتران ق عند كل منها نقطة حرجة هي

أ) $\{\frac{١}{٢} ، ١ ، ٥\}$ ب) {١ ، ٥}
جـ) {١} [✓ د)] $\{\frac{١}{٢} ، ١\}$

٢٠١٠ شتوي ٤ علامات

إذا كان $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + ٢$ حيث س ∈ [-٢ ، ٣) جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران ق متزايداً .

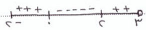
الحل:

$قَ(س) = س^{٢} - ٢س$

$٠ = س^{٢} - ٢س$

$٠ = س(س - ٢)$

س = ٠ ، ٢



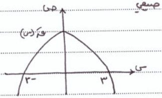
ق متزايد على [-٢ ، ٠] ، [٢ ، ٣)

٢٠١٠ صيفي

إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة فإن أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للاقتران ق(س) على الفترة [أ، ب] هو

أ) ٣   ب) ٤   [✓ جـ) ٦]   د) ٥

٢٠١٠ صيفي



إذا كان الشكل يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) فإن مجال التزايد للاقتران ق(س) هو

أ) [٠، ∞)   ب) (-∞، ٠]   [✓ جـ) [-٣، ٣]]
د) [٠، ٩]

٢٠١٠ صيفي   «٣ علامات»

إذا كان ق(س) = س (٤ - س)^{٣} حيث س ∈ [-١، ٥] جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران ق متناقصاً.

الحل:

ق'(س) = س × ٣(٤ - س)^{٢} × -١) + (٤ - س)^{٣}

= -٣س (٤ - س)^{٢} + (٤ - س)^{٣}

= (٤ - س)^{٢} (-٣س + ٤ - س)

ق'(س) = (٤ - س)^{٢} (-٤س + ٤)

٠ = (٤ - س)^{٢} (-٤س + ٤)

⇐ س = ٤ ، س = ١

ق متناقص على [١، ٤)، [٤، ٥]

٢٠١١ شتوي

إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق على الفترة (أ، ب) وكانت جميع المماسات المرسومة لمنحنى ق في الفترة (أ، ب) تصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأي العبارات التالية صحيحة بالنسبة للاقتران ق

[✓ أ) ق(س) متزايد على الفترة [أ، ب]]
ب) ق(س) متناقص على الفترة [أ، ب]
جـ) ق(س) مقعر للأسفل على الفترة [أ، ب]
د) ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [أ، ب]

٢٠١١ شتوي   ٥ علامات

إذا كان ق(س) = ٦س^{٢} - ٢س^{٣} حيث س ∈ (٠، ٤] جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران ق متناقصاً

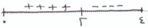
الحل:

ق'(س) = ١٢س - ٦س^{٢}

٠ = ١٢س - ٦س^{٢}

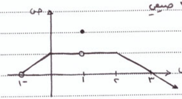
٠ = ٦س (٢ − س)

⟸ س = صفر ، س = ٢



ق متناقص على [٢، ٤] .

٢٠١١ صيفي

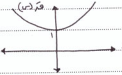


الشكل يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على (−١، ∞) فإن مجموعة جميع القيم في مجال ق والتي عندها ق َ(س) غير موجودة لأن المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار هي

أ) {−١}   ب) {٠}

جـ) {−١، ١}   [✓ د)] {٠، ٢}

٢٠١١ صيفي



الشكل يمثل منحنى ق َ(س) ان فترة التزايد للاقتران ق(س) هي

أ) [٠، ∞)   ب) (−∞، ٠]

جـ) [١، ∞)   [✓ د)] ح

٢٠١٢ شتوي   ٤ علامات

إذا كان ق(س) = س (س − ٣)^{٢} − ٢ ، س ∈ [−١، ٤] جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق(س) متزايداً.

الحل:

ق(س) = س (س^{٢} − ٦س + ٩) − ٢

ق(س) = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س − ٢

ق َ(س) = ٣س^{٢} − ١٢س + ٩

٠ = ٣س^{٢} − ١٢س + ٩

٠ = س^{٢} − ٤س + ٣

٠ = (س − ١)(س − ٣)

س = ١ ، ٣

ق متزايد على [−١، ١] ، [٣، ٤]

٢٠١٢ صيفي   ٥ علامات

إذا كان ق(س) = س + $\frac{٩}{س+٢}$ حيث س ∈ [−١، ٤]

جد الفترة (فترات) التزايد والتناقص

الحل:

$$ق َ(س) = ١ + \frac{(س+٢)(٠) - ٩(١)}{(س+٢)^{٢}}$$

$$ق َ(س) = ١ + \frac{-٩}{(س+٢)^{٢}}$$

$$٠ = ١ - \frac{٩}{(س+٢)^{٢}}$$

$$١ = \frac{٩}{(س+٢)^{٢}}$$

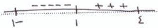
$(س+٢)^{٢} = ٩$

س+٢ = ± ٣

س+٢ = ٣ ، س+٢ = -٣

س = ١   س = -٥

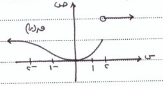
تهمل



ق متزايد على [١، ٤]

ق متناقص على [-١، ١] .

٢٠١٣ شتوي



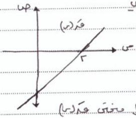
الشكل يمثل منحنى ق(س) المعرف على ح

إن ق(س) متزايد في الفترة .

أ) [٢، ∞)   [✓ ب)] [٠، ٢]

جـ) [-٢، ٠]   د) (-∞، -٢]

٢٠١٣ شتوي



الشكل يمثل منحنى قَ(س) حيث ق كثير حدود ان منحنى ق يكون متزايداً في الفترة .

أ) (-∞، ∞)   ب) (-∞، ٢]

[✓ جـ)] [٢، ∞)   د) [٠، ∞)

٢٠١٣ شتوي   ٦ علامات

إذا كان $ق(س) = ٢س^{٢} - \frac{١}{٤}س^{٤}$

س ∈ [-٣، ٣] جد الفترة (فترات) التزايد والتناقص للاقتران

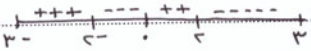
الحل:

$قَ(س) = ٤س - س^{٣}$

$٠ = ٤س - س^{٣}$

$٠ = س(٤ - س^{٢})$

س = صفر ، ٢ ، -٢



ق متزايد على [-٣، -٢] ، [٠، ٢]

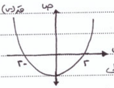
ق متناقص على [-٢، ٠] ، [٢، ٣]

٢٠١٣ صيفي

إذا كان ق(س) = $\sqrt{١ - س^٢}$ فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها قيم حرجة للاقتران ق هي

■ {-١، ١} [✓ ■ {-١، ٠، ١}]
■ {-١، ٠} ■ {٠، ١}

٢٠١٣ صيفي



إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق فإن منحنى ق يكون متناقصاً في الفترة

■ (-∞، ٠) ■ [٠، ∞)
■ [-٢، ٠] [✓ ■ [-٢، ٢]]

٢٠١٣ صيفي

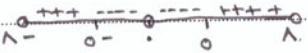
إذا كان ق(س) = س + $\frac{٢٥}{س}$
س ∈ [-٨، ٨] - {٠}
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

الحل:

قَ(س) = ١ - $\frac{٢٥}{س^٢}$

٠ = ١ - $\frac{٢٥}{س^٢}$

$\frac{٢٥}{س^٢}$ = ١ ⇐ س^٢ = ٢٥ ⇐ س = ±٥

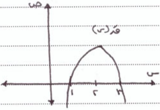


[-٨، -٥] متزايد
[-٥، ٠) متناقص
(٠، ٥] متناقص
[٥، ٨] متزايد.

المستوى (٣) **الوحدة** (تطبيقات التفاضل) **عصام الشيخ**

التخصص (العلمي) **الدرس** (التزايد والتناقص) **ماجستير رياضيات**

٢٠١٤ صيفي



بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى قَ(س) حيث ق(س) كثير حدود.

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

الحل:

(-∞، ١] متناقص

[١، ٣] متزايد

[٣، ∞) متناقص.

٢٠١٥ شتوي (٧ علامات)

إذا كان ق(س) = س - جا٢س

س ∈ [٠، π] فجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

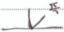
الحل:

قَ(س) = ١ - جتا٢س × ٢

∴ = ١ - ٢ جتا٢س

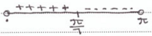
٢جتا٢س = ١

جتا٢س = $\frac{١}{٢}$



٢س = ٦٠

س = ٣٠ = $\frac{\pi}{٦}$



[٠، $\frac{\pi}{٦}$] متزايد

[$\frac{\pi}{٦}$، π] متناقص.

٢٠١٦ شتوي

إذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٢٧\text{س}}$

$\text{س} \in (-١٠ ، ١٠)$ جد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ه(س).

الحل:

$$\text{ه}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٢٧\text{س}}$$

$$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٢} - ٢٧}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^{٣} - ٢٧\text{س})^{٢}}}$$

$$٠ = \frac{٣(\text{س}^{٢} - ٩)}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^{٣} - ٢٧\text{س})^{٢}}}$$

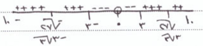
$\text{س} = \pm ٣$

ه'(س) غير موجودة عند اصفار المقام

$\text{س}^{٣} - ٢٧\text{س} = \text{صفر}$

$\text{س}(\text{س}^{٢} - ٢٧) = ٠$

$\text{س} = ٠ ، \pm\sqrt{٢٧}$



ه متناقص في $[-٣ ، ٣]$

ه متزايد في $(-١٠ ، -٣]$ ، $[٣ ، ١٠)$

٢٠١٦ صيفي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{١}{٣}}(\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٣}}$

$\text{س} \in [-١ ، ٥]$ فجد كلاً مما يأتي

١) الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران ه(س) متزايداً

٢) الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران ه(س) متناقصاً.

الحل:

$$\text{ه}'(\text{س}) = \text{س}^{\frac{١}{٣}}\left(\frac{١}{٣}(\text{س}-٢)^{\frac{-٢}{٣}}\right) + (\text{س}-٢)^{\frac{١}{٣}} \times \frac{١}{٣}\text{س}^{\frac{-٢}{٣}}$$

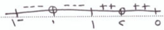
$$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}{٣(\text{س}-٢)^{\frac{٢}{٣}}} + \frac{(\text{س}-٢)^{\frac{١}{٣}}}{٣\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}$$

$$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س} + ٣(\text{س}-٢)}{٩\text{س}^{\frac{٢}{٣}}(\text{س}-٢)^{\frac{٢}{٣}}}$$

$$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{٦\text{س} - ٦}{٩\text{س}^{\frac{٢}{٣}}(\text{س}-٢)^{\frac{٢}{٣}}}$$

$\text{ه}'(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$

اصفار المقام : $\text{س} = ٠ ، \text{س} = ٢$



ه متزايد $[١ ، ٥]$

ه متناقص $[-١ ، ١]$

التخصص(العلمي) الوحدة(٣) (تطبيقات التفاضل) عصام الشيخ

المستوى(٣) الدرس(٤) (التزايد والتناقص) ماجستير رياضيات

٢٠١٧ شتوي

ليكن ق(س) = $س^{٣}$ − ١٢س

س ∈ [−٤، ٤] جد كلاً مما يأتي

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

الحل:

ق′(س) = ٣$س^{٢}$ − ١٢

٠ = ٣$س^{٢}$ − ١٢

١٢ = ٣$س^{٢}$

$س^{٢}$ = ٤

س = ±٢

+++ | − − − − | +++

−٤ −٢ ٢ ٤

ق متناقص على [−٢، ٢]

ق متزايد على [−٤، −٢] ، [٢، ٤]

٢٠١٧ صيفي

ليكن ق(س) = $س^{٣}$ + $\frac{٤٨}{س}$ ، س ≠ ٠

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

الحل:

ق′(س) = ٣$س^{٢}$ − $\frac{٤٨}{س^{٢}}$

٠ = ٣$س^{٢}$ − $\frac{٤٨}{س^{٢}}$

٠ = $\frac{٣س^{٤} − ٤٨}{س^{٢}}$

٣$س^{٤}$ − ٤٨ = صفر

٣($س^{٤}$ − ١٦) = صفر

٣($س^{٢}$ − ٤)($س^{٢}$ + ٤) = صفر

٣(س − ٢)(س + ٢)($س^{٢}$ + ٤) = صفر

س = ٢، −٢

اصفار المقام : س = ٠

+++ − − − − | − − − − | +++

−٢ ٠ ٢

ق متزايد (−∞، −٢] ، [٢، ∞)

ق متناقص [−٢، ٠) ، (٠، ٢]

الاسئلة الوزارية :

٢٠٠٨ شتوي ٧ علامات

اذا كان $ق(س) = -٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣٦س + ١٠$
جد القيم القصوى المحليه للاقتران ق
وبين نوعها.

الحل :

$ق'(س) = -٦س^{٢} - ٦س + ٣٦$

$٠ = -٦س^{٢} - ٦س + ٣٦$

$٠ = س^{٢} + س - ٦$

$٠ = (س+٣)(س-٢)$

$س = -٣ ، ٢$

$ق(-٣) = -٧١$ صغرى محليه

$ق(٢) = ٥٤$ عظمى محليه.

٢٠٠٨ صيفي

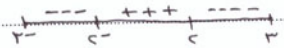
اذا كان $ق(س) = ٤س - \frac{١}{٣}س^{٣}$ ، $س \in [-٣،٣]$
جد
① القيم القصوى المطلقه للاقتران وبين نوعها
الحل :

$ق'(س) = ٤ - س^{٢}$

$٠ = ٤ - س^{٢}$

$س = ٢ ، -٢$

النقط الحرجة $\{-٣، -٢، ٢، ٣\}$



$ق(-٣) = -٣$

$ق(-٢) = -\frac{١٦}{٣}$ صغرى مطلقه

$ق(٣) = ٣$

$ق(٢) = \frac{١٦}{٣}$ عظمى مطلقه

٢٠٠٩ شتوي

اذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ٢$
$س \in [٠، ٤]$ جد القيم القصوى
المطلقه وبين نوعها.

الحل :

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩$

$٠ = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩$

$٠ = س^{٢} - ٤س + ٣$

$٠ = (س-٣)(س-١)$

$س = ٣ ، ١$

النقط الحرجة = $\{٠، ١، ٣، ٤\}$

$ق(٠) = ٢$ صغرى مطلقه

$ق(١) = ٦$ عظمى مطلقه

$ق(٣) = ٢$ صغرى مطلقه

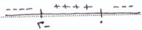
$ق(٤) = ٦$ عظمى مطلقه

٢٠٠٩ صيفي

اذا كان ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} - ٢س^{٢} + ٣
س ∈ (-∞، ٢) جد القيم القصوى
المطلقة للاقتران (ان وجدت) وبين نوعها

الحل:

قَ(س) = س^{٣} - ٤س
٠ = س^{٣} - ٤س
٠ = س (س^{٢} - ٤)
س = ٠، ٢، -٢
النقط الحرجة { ٠ ، -٢ }



ق(٠) = ٣ عظمى محليه
ق(-٢) = -١ صغرى محليه.

٢٠١٠ شتوي

اذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - س^{٢} + ٢
س ∈ [-٢، ٣) جد القيم القصوى
المطلقة وبين نوعها.

الحل:

قَ(س) = س^{٢} - ٢س
٠ = س^{٢} - ٢س
٠ = س (س - ٢)
س = صفر ، ٢

ق(-٢) = $-\frac{٢}{٣}$ ٤ صغرى مطلقة
ق(٠) = ٢ عظمى مطلقة
ق(٢) = $\frac{٢}{٣}$

٢٠١٠ صيفي

اذا كان ق(س) = س (٤ - س)^{٣}
س ∈ [-١، ٥] جد القيم القصوى المطلقة
للاقتران ق وبين نوعها.

الحل:

قَ(س) = س (٣(٤-س)^{٢} × -١) + (٤-س)^{٣}
قَ(س) = -٣س (٤-س)^{٢} + (٤-س)^{٣}
٠ = -٣س (٤-س)^{٢} + (٤-س)^{٣}
٠ = (٤-س)^{٢} (-٣س + (٤-س))
٠ = (٤-س)^{٢} (-٤س + ٤)
س = ٤، ١
النقط الحرجة { -١، ١، ٤، ٥ }

ق(-١) = -١٢٥ صغرى مطلقة
ق(١) = ٢٧ عظمى مطلقة
ق(٤) = ٠
ق(٥) = -٥

٢٠١١ شتوي

اذا كان ق(س) = ٦س^{٢} − ٢س^{٣} س ∈ [٠، ٤]
جد القيم القصوى وبين نوعها.

الحل:

ق′(س) = ١٢س − ٦س^{٢}

٠ = ١٢س − ٦س^{٢}

٠ = ٦س (٢ − س)

س = ٠ ، ٢

{٢ ، ٤} النقط الحرجة.

ق(٢) = ٨ عظمى مطلقة

ق(٤) = −٣٢ صغرى مطلقة

٢٠١١ صيفي

اذا كان ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣}
س ∈ [−١، ٤] جد القيم القصوى
للاقتران ق(س) وبين نوعها.

الحل:

ق′(س) = ٤س^{٣} − ١٢س^{٢}

٠ = ٤س^{٣} − ١٢س^{٢}

٠ = ٤س^{٢} (س − ٣)

س = ٠ ، ٣

النقط الحرجة {−١ ، ٠ ، ٣ ، ٤}

ق(−١) = ٥ عظمى مطلقة

ق(٠) = ٠

ق(٣) = −٢٧ صغرى مطلقة

ق(٤) = ٠

٢٠١٢ شتوي

اذا كان ق(س) = س(س − ٣)^{٢} − ٢
س ∈ [−١، ٤] جد القيم القصوى وبين نوعها

الحل:

ق(س) = س(س^{٢} − ٦س + ٩) − ٢

ق(س) = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س − ٢

ق′(س) = ٣س^{٢} − ١٢س + ٩

٠ = ٣س^{٢} − ١٢س + ٩

٠ = س^{٢} − ٤س + ٣

٠ = (س − ٣)(س − ١)

س = ٣ ، ١

النقط الحرجة {−١ ، ١ ، ٣}

ق(−١) = −١٨ صغرى مطلقة

ق(١) = ٢ عظمى مطلقة

ق(٣) = −٢ صغرى محلية

٢٠١٢ صيفي

اذا كان $ق(س) = س + \frac{٩}{س+٢}$

$س \in [-١، ٤]$

جد القيم القصوى المحليه والمطلقه

الحل:

$ق'(س) = ١ - \frac{٩}{(س+٢)^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{(س+٢)^{٢} - ٩}{(س+٢)^{٢}}$

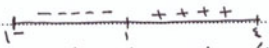
$ق'(س) = \frac{س^{٢} + ٤س + ٤ - ٩}{(س+٢)^{٢}}$

$= \frac{س^{٢} + ٤س - ٥}{(س+٢)^{٢}}$

$= \frac{(س-١)(س+٥)}{(س+٢)^{٢}}$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = ١، -٥$ نهمل -٥

النقط الحرجة $\{-١، ١، ٤\}$



$ق(-١) = ٨$ عظمى مطلقه

$ق(١) = ٤$ صغرى محليه

$ق(٤) = \frac{١١}{٢}$ عظمى محليه

٢٠١٣ شتوي

اذا كان $ق(س) = ٢س^{٢} - \frac{١}{٤}س^{٤}$

$س \in [-٣، ٣]$

جد القيم العظمى والصغرى المحليه (ان وجدت)

الحل:

$ق'(س) = ٤س - س^{٣}$

$٠ = ٤س - س^{٣}$

$٠ = س(٤ - س^{٢})$

$س = ٠، ٢، -٢$

النقط الحرجة = $\{-٣، -٢، ٠، ٢، ٣\}$

$ق(-٢) = ٤$ عظمى محليه

$ق(٢) = ٤$ عظمى محليه

$ق(٠) = ٠$ صغرى محليه

$ق(٣) = -\frac{٩}{٤}$

$ق(-٣) = -\frac{١٥٣}{٤}$

٢٠١٣ صيفي

اذا كانت $ق'(س) = \frac{١}{٢} + جتاس$ هي المشتقه الأولى للاقتران ق المعرف على الفترة $[٠، \pi]$ فإن للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س تساوي

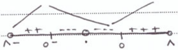
■ صفر ■ π

■ $\frac{\pi}{٣}$ [✓ ■] $\frac{٢\pi}{٣}$

٢٠١٣ صيفي

إذا كان $ق(س) = س + \frac{٢٥}{س}$
$س \in [-٨، ٨] - \{٠\}$ فجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق (إن وجدت)

الحل :



للاقتران ق قيمة عظمى محليه
ص ق(-٥) = -١٠

للاقتران ق قيمة صغرى محليه
عند ق(٥) = ١٠

المستوى (٣) **الوحدة** (تطبيقات التفاضل) **عصام الشيخ**

التخصص (العلمي) **الدرس** (القيم القصوى) **ماجستير رياضيات**

٢٠١٤ شتوي ٧ علامات

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}$ حيث س ∈ ح

فجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت)

للاقتران ق وبين نوعها.

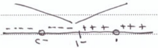
الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٢}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٢}}}$$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{س} = -١$

أصفار المقام : $\text{س}(\text{س}+٢)$

$\text{س} = ٠ ، -٢$

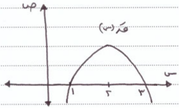


يوجد للاقتران قيمة صغرى

عند س = −١

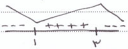
ص = ق(−١) = −١

٢٠١٤ صيفي



بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى ق'(س) حيث ق(س) كثير حدود، جد قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيم قصوى محلية

الحل:



عند س = ١ قيمة قصوى صغرى محلية

عند س = ٣ قيمة عظمى محلية.

المستوى (٣) **الوحدة (تطبيقات التفاضل)** **عصام الشيخ**

التخصص (العلمي) **الدرس (القيم القصوى)** **ماجستير رياضيات**

٢٠١٥ شتوي

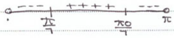
إذا كان ق(س) = س - جا٢س

س ∋ [٠ ، π] فجد القيم العظمى

والقيم الصغرى المحلية للاقتران ق

(ان وجدت)

الحل :



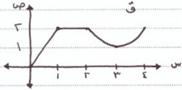
للاقتران ق قيمة صغرى محليه عند س = $\frac{\pi}{٦}$

ص = ق($\frac{\pi}{٦}$)

للاقتران ق قيمة عظمى محليه عند س = $\frac{٥\pi}{٦}$

ص = ق($\frac{٥\pi}{٦}$) .

٢٠١٥ شتوي



بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى ق المتصل على الفترة [٠ ، ٤] جد

١) قَ($\frac{١}{٢}$) ٢) قَ(١٫٥) ٣) قَ(٣)

الحل :

قَ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٢ - ٠}{١ - ٠}$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

قَ(١٫٥) = صفر

قَ(٣) = صفر لأن المماس أفقي.

المستوى (٣) **الوحدة (** تطبيقات التفاضل **)** **عصام الشيخ**

التخصص(العلمي **)** **الدرس (** القيم القصوى **)** **ماجستير رياضيات**

٢٠١٥ صيفي **(٨ علامات)**

إذا كان ق(س) = $(\text{أس} - \text{ب})^{\frac{٢}{٣}}$ + ٥ب

حيث أ ≠ صفر وكان للاقتران ق(س) قيمة قصوى عند النقطة (٤، ١٠) فجد قيمة كل من الثابتين أ، ب

الحل :

ق̄(٤) = صفر أو غير موجودة

ق(٤) = ١٠

ق̄(س) = $\frac{٢}{٣}(\text{أس} - \text{ب})^{\frac{-١}{٣}} \times \text{أ}$

$= \dfrac{٢\text{أ}}{٣\sqrt[٣]{\text{أس} - \text{ب}}}$

⇐ ق̄(٤) غير موجودة

⇐ ٤ صفر للمقام

٤أ − ب = صفر ـــ ①

ق(٤) = ١٠

ق(٤) = $\sqrt[٣]{٤\text{أ} - \text{ب}}$

١٠ = $\sqrt[٣]{٤\text{أ} - \text{ب}}$ ـــ ②

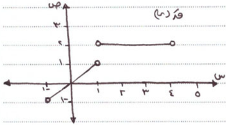
⇐

٢٠١٥ صيفي **(١٧ علامة)**

اذا كان الاقتران ق(س) متصل على الفترة [−١، ٤] حيث

ق(س) = { جس² + دس + هـ ، −١ ≤ س < ١
أس + ب ، ١ ≤ س ≤ ٤

وتمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران ق(س) كما في الشكل المجاور جد ما يلي :



١) النقط الحرجه للاقتران ق(س)

٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

٣) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيم قصوى محلية .

٤) قيم كل من الثوابت أ، ب، ج، د، هـ علماً بان ق(−١) = ٣ ، ق(٤) = ٨

الحل:

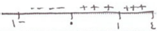
① النقط الحرجة

ق̄(س) = ٠ ⇐ س = ٠

ق̄ غير موجودة ⇐ س = {−١، ١، ٤}

⇐ النقط الحرجة = {٠، −١، ١، ٤}

②



ق متناقص [−١، ٠]

ق متزايد [٠، ٤]

③ يوجد للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ٠

④ ق′(س) = $\left\{\begin{array}{ll}\text{٢جس + د} & \text{-١ < س < ١}\\ \text{أ} & \text{١ < س < ٤}\end{array}\right.$

من الرسم

ق′(س) = $\left\{\begin{array}{ll}\text{س} & \text{-١ < س < ١}\\ \text{٢} & \text{١ < س < ٤}\end{array}\right.$

⇐ أ = ٢

د = صفر

٢ج = ١

ج = ½

ق(٤) = ٨ ⇐

٤أ + ب = ٨

٨ + ب = ٨

⇐ $\boxed{\text{ب = صفر}}$

ق(-١) = ٢ ⇐

ج - د + هـ = ٢

½ + هـ = ٢

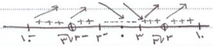
⇐ هـ = $\frac{٣}{٢}$

٢٠١٦ شتوي

إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{\text{س}^{٣}\text{ - ٢٧س}}$

س ∈ (-١٠، ١٠) فجد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت).

الحل:



للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = -٣

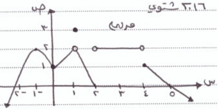
هي ق(-٣) = $\sqrt[3]{\text{-٢٧ - ٢٧(-٣)}}$

للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = +٣

هي ق(٣) = $\sqrt[3]{\text{٢٧ - ٢٧(٣)}}$

التخصص(العلمي) الوحدة (٣) (تطبيقات التفاضل) عصام الشيخ
المستوى(٣) الدرس (٥) (القيم القصوى .) ماجستير رياضيات

٢٠١٦ شتوي

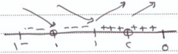


ق(س) معرف على ح معتمداً الشكل
جد قَ(-١) ، قَ(٣) ، قَ(٥).
الحل:

قَ(-١) = صفر   لأن له مماس أفقي
قَ(٣) = صفر   لأنه ثابت

$قَ(٥) = \frac{٠ - ١}{٥ - ٤} = \frac{-١}{١} = -١$

٢٠١٦ صيفي
إذا كان $ق(س) = س^{\frac{١}{٣}} (س-٢)^{\frac{١}{٣}}$
س ∈ [-١، ٥] فجد القيم القصوى
المحلية للاقتران ق(س).
الحل:



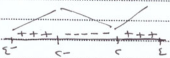
للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية
عند س = ١ وهي ق(١)
$= \sqrt[3]{١(١-٢)} = -١$

٢٠١٧ شتوي

ليكن $ق(س) = س^{٣} - ١٢س$

$س \in [-٤، ٤]$ جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) ان وجدت.

الحل:



للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند $س = -٢$ ص $ق(-٢) = ١٦$

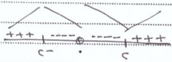
للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$ ص $ق(٢) = -١٦$

٢٠١٧ صيفي

ليكن $ق(س) = س^{٣} + \frac{٤٨}{س}$ ، $س \neq ٠$

جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) * (ان وجدت)

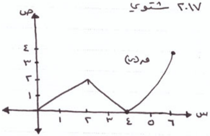
الحل:



للاقتران ق قيمة عظمى عند عند $س = -٢$ ص $ق(-٢) = -٢^{٣} + \frac{٤٨}{-٢}$

للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$ ص $ق(٢) = ٢^{٣} + \frac{٤٨}{٢}$

٢٠١٧ شتوي



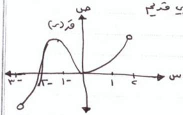
الشكل يمثل ق(س) حيث س ∈ [٠، ٦]
جد ① النقط الحرجة للاقتران ق(س)
② مجموعة قيم س التي تكون عندها
ق'(س) < صفر .

الحل :

① النقط الحرجة
(٠، ٠)، (٢، ٣)، (٤، ٠)، (٦، ٤)

② ق'(س) < صفر عندما
س ∈ (٢، ٤)

٢٠١٨ شتوي قديم



الشكل يمثل منحنى ق'(س) حيث ق(س)
معرف على [-٣، ٢]
فإن مجموعة القيم الحرجة للاقتران ق(س)
هي

أ) {-٣، -٢، ٠، ٢}

ب) {-٢، -١، ٢}

ج) {-١، ٠}

[✓ د)] [-٣، -٢، ٠]

٢٠١٧ صيفي (٩ علامات)

ليكن $ق(س) = س^{٣} + \frac{٤٨}{س}$ ، $س \neq ٠$

جد

① فترات التزايد والتناقص

② القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) إن وجدت

الحل:

$ق'(س) = ٣س^{٢} - \frac{٤٨}{س^{٢}}$

$٠ = ٣س^{٢} - \frac{٤٨}{س^{٢}}$

$٠ = \frac{٣س^{٤} - ٤٨}{س^{٢}}$

$٠ = ٣س^{٤} - ٤٨$

$٠ = ٣(س^{٤} - ١٦)$

$٠ = ٣(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ٤)$

$٠ = ٣(س - ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)$

$س = ٢ ، -٢$

① $(-\infty ، -٢]$ متزايد

$[٢ ، \infty)$ متزايد

$[-٢ ، ٠)$

$(٠ ، ٢]$ متناقص

② $ق(-٢) = (-٢)^{٣} + \frac{٤٨}{-٢} = -٨ - ٢٤ = -٣٢$

عظمى محلية.

$ق(٢) = ٢^{٣} + \frac{٤٨}{٢} = ٨ + ٢٤ = ٣٢$

صغرى محلية.

٢٠١٨ شتوي قديم (١٠ علامات)

إذا كان $ق(ر) = (١ - ٤ر)(ر - ١)^{٢}$ ، $ر \in [٠ ، ٢]$ جد

① مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(ر)

② القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(ر) إن وجدت.

الحل:

$ق'(ر) = (١ - ٤ر) \times ٢(ر - ١) + (ر - ١)^{٢}(-٤)$

$= (ر - ١)(٢ - ٨ر + -٤ر + ٤)$

$٠ = (ر - ١)(-١٢ر + ٦)$

$ر = ١ ، ر = \frac{١}{٢}$

① $[٠ ، \frac{١}{٢}]$ متناقص

$[\frac{١}{٢} ، ١]$ متزايد

$[١ ، ٢]$ متناقص

② $ق(\frac{١}{٢}) = (١ - ٢)(\frac{-١}{٢})^{٢}$

$= -١ \times \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٤}$

صغرى محلية.

$ق(١) = (-٣)(٠) = ٠$

عظمى محلية.

٢٠١٨ شتوي جديد

اذا كان

ق(س) = جا²س − ½ جتا٢س   س ∈ [٠، $\frac{٣\pi}{٢}$]

جد مايلي

① مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

② القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ان وجدت

③ الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) مقعراً للاعلى

الحل:

ق′(س) = ٢جاس جتاس + $\cancel{\frac{1}{2}}$ جا٢س × $\cancel{٢}$

= + ٢جاس جتاس

٠ = ٤جتاس جاس

جاس = ٠ ← س = ٠ ، π

جتاس = ٠ ← س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

① [٠، $\frac{\pi}{٢}$] ∪ [π، $\frac{٣\pi}{٢}$] متزايد

[$\frac{\pi}{٢}$، π] متناقص

② ق($\frac{\pi}{٢}$) عظمى محلية = $\frac{٣}{٢}$

ق(π) صغرى محلية = −$\frac{١}{٢}$

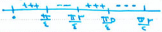
③ ق″(س) = ٤جتاس × جتاس + جاس × −٤جاس

= ٤جتا²س − ٤جا²س

٠ = ٤(جتا²س − جا²س)

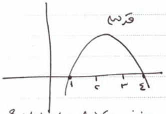
٠ = ٤(جتا٢س)

جتا٢س = ٠ ← س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$



مقعر للأعلى في [٠، $\frac{\pi}{٤}$] ∪ [$\frac{٣\pi}{٤}$، $\frac{٥\pi}{٤}$]

٢٠١٨ شتوي جديد



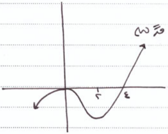
الشكل يمثل منحنى ق′(س) المعرف على ح فإن الفترة التي يكون فيها ق″(س) > ٠ هي

أ) [٢٫٥، ٤]   ب) [٤، ∞)

ج) [١، ٤]   ⓓ) (−∞، ٢٫٥]

الحل:

٢٠١٨ شتوي جديد



الشكل يمثل منحنى ق''(س)
ق(س) معرف على ح
مجموعة قيم س التي يكون عندها
ق نقطة انعطاف هي

[✓ أ)] {٤} ب) {٠}

ج) {٠، ٤} د) {٠، ٢، ٤}

الحل: