التكامل المحدود

ملخص القوانين

①
$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \bar{\text{ق}}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ق}(\text{س})\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$
$$= \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$$

②
$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{دس} = \text{جـ}(\text{ب} - \text{أ})$$

حيث جـ عدد ثابت.

مثال

جد $\int_{1}^{2} 3\text{س}^2\,\text{دس}$

الحل:

$$\text{س}^3\Big|_{1}^{2}$$
$$= 8 - 1 = 7$$

مثال

جد قيمة

$$\int_{2}^{-1} (3\text{س}^2 - 12\text{س} + 5)\,\text{دس}$$

الحل:

$$\text{س}^3 - 6\text{س}^2 + 5\text{س}\Big|_{2}^{-1}$$
$$(-1 - 6 - 5) - (8 - 6\times 4 + 10)$$
$$= -12 - (8 - 24 + 10)$$
$$= -12 - (-6) = -6$$

مثال

جد قيمة

$$\int_{1}^{6} -2\,\text{دس}$$

الحل:

$$-2 \times (6 - 1) = -2 \times 5 = -10$$

مثال

جد
$$\int_{0}^{6} (2\text{س} + 8\text{س}^3 - 5\text{س}^4 + 7)\,\text{دس}$$

الحل:

$$\text{س}^2 + 2\text{س}^4 - \text{س}^5 + 7\text{س}\Big|_{0}^{6}$$
$$= (6^2 + 2\times 6^4 - 6^5 + 7\times 6) - 0$$
$$= 36 + 2\times 1296 - 7776 + 42$$
$$= 36 + 2592 - 7776 + 42$$
$$= -5106$$

مثال

جد
$$\int_{1}^{2} 3\text{س}(4 - 2\text{س}^2)\,\text{دس}$$

الحل:

$$\int_{1}^{2} 12\text{س} - 6\text{س}^3\,\text{دس}$$
$$6\text{س}^2 - \frac{6}{4}\text{س}^4\Big|_{1}^{2}$$
$$= \left(6\times 4 - \frac{6\times 16}{4}\right) - \left(6 - \frac{6}{4}\right)$$
$$= 24 - 24 - \left(\frac{24-6}{4}\right) = \frac{-18}{4}$$

مثال

جد $\int_{-٢}^{٢} (٣\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)\, \text{دس}$

الحل:

$\int_{-٢}^{٢} ٣\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٢\text{س} - ٢\ \text{دس}$

$= \int_{-٢}^{٢} ٣\text{س}^٢ + \text{س} - ٢\ \text{دس}$

$= \text{س}^٣ + \frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س} \Big|_{-٢}^{٢}$

$= (٨ + \frac{٤}{٢} - ٤) - (-٨ + \frac{٤}{٢} + ٤)$

$= ٦ - (-٢) = ٨$

مثال

جد $\int_{١}^{-١} (٢\text{س} - ٣)^٢\, \text{دس}$

الحل:

$\int_{١}^{-١} (٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٩)\ \text{دس}$

$\int_{١}^{-١} \frac{٤\text{س}^٣}{٣} - ٦\text{س}^٢ + ٩\text{س} \Big|_{١}^{-١}$

$= (\frac{-٤}{٣} - \cancel{٦} - ٩) - (\frac{٤}{٣} - \cancel{٦} + ٩)$

$= \frac{-٨}{٣} - ١٨ = \frac{-٨ - ٥٤}{٣} = \frac{-٦٢}{٣}$

مثال

جد $\int_{٠}^{-٢} \frac{\text{س}^٢ + ٦\text{س} - ٧}{\text{س} - ١}\, \text{دس}$

الحل:

$\int_{٠}^{-٢} \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س} + ٧)}{\cancel{(\text{س} - ١)}}\ \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٧\text{س} \Big|_{٠}^{-٢}$

$= \frac{٤}{٢} - ١٤ - ٠$

$= \frac{٤ - ٢٨}{٢} = \frac{-٢٤}{٢} = -١٢$

مثال

إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [١،٥] وكان ق′(س) = ٢س + ١ ، فجد قيمة ق(٥) − ق(١)

الحل:

$\text{ق}(٥) - \text{ق}(١) = \int_{١}^{٥} ٢\text{س} + ١\ \text{دس}$

$= \text{س}^٢ + \text{س} \Big|_{١}^{٥}$

$= ٢٥ + ٥ - (١ + ١)$

$= ٣٠ - ٢ = ٢٨$

مثال

إذا كان

$\int_{5}^{2} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = 13$ وكان $\text{ق}(5) = -17$

فجد قيمة $\text{ق}(2)$.

الحل:

$\int_{5}^{2} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \text{ق}(2) - \text{ق}(5)$

$13 = \text{ق}(2) - -17$

$-4 = \text{ق}(2)$

مثال

جد $\int_{4}^{1} \frac{6}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{4}^{1} 6\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$6 \times 2\,\text{س}^{\frac{1}{2}} \Big|_{4}^{1}$

$12\sqrt{\text{س}} \Big|_{4}^{1} = 12 - 24$

$= -12$

مثال

جد $\int_{0}^{1} 14(\text{س})^{\frac{4}{3}}\,\text{دس}$

الحل:

$14 \times \frac{3}{7}\,\text{س}^{\frac{7}{3}} \Big|_{0}^{1}$

$6\sqrt[3]{\text{س}^7} \Big|_{0}^{1}$

$= 6 - 0 = 6$

مثال

جد $\int_{8}^{1} \frac{1}{8\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{8}^{1} \frac{1}{8}\,\text{س}^{-\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{8} \times \frac{3}{2}\,\text{س}^{\frac{2}{3}} \Big|_{8}^{1}$

$= \frac{3}{16}\sqrt[3]{\text{س}^2} \Big|_{8}^{1}$

$= \frac{3}{16} - \frac{3}{16}\sqrt[3]{8^2}$

$= \frac{3}{16} - \frac{3}{16} \times 4$

$= \frac{3}{16} - \frac{12}{16} = \frac{-9}{16}$

مثال

إذا كان $\int_{-1}^{\text{م}} 4\,\text{دس} = 20$ فجد قيمة م .

الحل:

$٤(م+١) = ٢٠$

$\frac{٤(م+١)}{٤} = \frac{٢٠}{٤}$

$م+١ = ٥$

$م = ٤$

ملاحظة

$\int_{م}^{م} ق(س)\, دس = صفر$.

مثال

جد $\int_{٢}^{٢} (٤س - ٦س^٢ + ٣)\, دس$

الحل:

صفر لأنه:

$\left[٢س^٢ - ٢س^٣ + ٣س\right]_{٢}^{٢}$

$= (٢\times٤ - ٢\times٨ + ٣\times٢) - (٢\times٤ - ٢\times٨ + ٣\times٢)$

$= (٨ - ١٦ + ٦) - (٨ - ١٦ + ٦)$

$= -٢ \quad - \quad -٢$

$= -٢ + ٢$

$=$ صفر

ملاحظة:

مشتقة التكامل المحدود = صفر

وذلك لأن التكامل المحدود عبارة عن عدد ومشتقة العدد = صفر

مثال

إذا كان $ص = \int_{١}^{١} (٤س^٣ - ٣س^٢ + ٣)\, دس$

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = صفر$

مثال

إذا كان

$\int_{١}^{ب} ٦س\, دس = ٩$ جد قيمة ب .

الحل:

$٣س^٢ \Big|_{١}^{ب} = ٩$

$٣ب^٢ - ٣ = ٩$

$٣ب^٢ = ١٢$

$ب^٢ = ٤$

$\Leftarrow ب = \pm ٢$

مثال

إذا كان ق(-١) = ٣ ، ق(٢) = ٥

فجد قيمة $\int_{-١}^{٢} ٤\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس}$

الحل:

$٤ \times \int_{-١}^{٢} \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس}$

٤ (ق(٢) - ق(-١))

٤ (٥ - ٣)

٤ × ٢ = ٨

الأسئلة الوزارية

٢٠٠٨ شتوي

$\text{هـ}^{\text{س}} \Big|_{١}^{\text{ك}} = \text{صفر}$

$\text{هـ}^{\text{ك}} - \text{هـ}^{١} = \text{صفر} \quad \text{هـ}^{\text{ك}} = \text{هـ}^{١}$

إذا كان $\int_{١}^{\text{ك}} \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس} = \text{صفر}$ ، فإن قيمة ك تساوي:

أ) ١- ب) صفر ج) ١ د) ٢

٢٠٠٨ صيفي

إذا كان ق(١) = ١٠ ، ق(٣) = ٦

فجد $\int_{١}^{٣} \text{قَ(س)} \, \text{دس} = \text{ق(٣)} - \text{ق(١)}$

أ) ٢ ب) ٤- ج) ٤ د) ١٦

٢٠٠٩ شتوي ٥ علامات

إذا كان $\int_{١}^{\text{جـ}} (٢\text{س} + ٣) \, \text{دس} = ٦$

فجد قيمة جـ ؟

الحل:

$\text{س}^{٢} + ٣\text{س} \Big|_{١}^{\text{جـ}} = ٦$

$(\text{جـ}^{٢} + ٣\text{جـ}) - (١ + ٣) = ٦$

$\text{جـ}^{٢} + ٣\text{جـ} - ٤ - ٦ = \text{صفر}$

$\text{جـ}^{٢} + ٣\text{جـ} - ١٠ = \text{صفر}$

$(\text{جـ} + ٥)(\text{جـ} - ٢) = \text{صفر}$

جـ = ٥- أو جـ = ٢

٢٠١١ شتوي ٥ علامات

جد التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{١} (\sqrt{\text{س}} + \text{س}) \, \text{دس}$

الحل:

$\int_{٠}^{١} (\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}) \, \text{دس}$

$\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{١}$

$\frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{١}$

$= (\frac{٢}{٣}\sqrt{١} + \frac{١}{٢}) - (٠)$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢}$

$\frac{٤ + ٣}{٦} = \frac{٧}{٦}$

٢٠١٢ شتوي

اذا علمت أن قَ(س) متصل وكان ق(١) = ٣- ، ق(٢) = ١ فإن $\int_{١}^{٢} \text{قَ(س)} \, \text{دس}$ يساوي:

أ) ٤- ب) ٢ ج) ٤ د) ٢-

٢٠١٢ صيفي

قيمة $\int_{0}^{1} \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$ تساوي

أ) هـ ب) ١ − هـ

ج) هـ − ١ د) ١

٢٠١٣ شتوي

إذا كان ق(١) = −٦ ، ق(٣) = ٨

فإن $\int_{1}^{3} \text{قَ(س)}\ \text{دس} =$

أ) صفر ب) ٢ ج) −١٤ د) ١٤

٢٠١٣ شتوي

$\frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{1}$

$\int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$ يساوي

أ) ١ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) ٢

٢٠١٣ صيفي

إذا كان $\int_{1}^{\text{جـ}} 3\ \text{دس} = -6$

فإن قيمة الثابت جـ تساوي

■ −٣ ■ ٣

■ −١ ■ ١

$3(\text{جـ} - 1) = -6$

$\text{جـ} - 1 = -2$

$\text{جـ} = -1$

٢٠١٤ شتوي ٤ علامات

جد التكامل الآتي

$\int_{0}^{1} (\sqrt{\text{س}} + 3\text{س}^2)\ \text{دس}$

الحل:

$\int_{0}^{1} (\text{س}^{\frac{1}{2}} + 3\text{س}^2)\ \text{دس}$

$\frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{س}^3 \Big|_{0}^{1}$

$\frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^3} + \text{س}^3 \Big|_{0}^{1}$

$(\frac{2}{3}\sqrt{1} + 1) - 0$

$\frac{2}{3} + 1$

$= \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$

٢٠١١ شتوي ٤ علامات

اذا كان $\int_{0}^{\text{أ}} 7\ \text{دس} = 21$

فجد قيمة الثابت أ .

الحل:

$7(\text{أ} - 0) = 21$

$7\text{أ} = 21$

$\text{أ} = 21$

٢٠١٤ صيفي (٤ علامات)

إذا كان جـ عدداً ثابتاً وكان ق(جـ) = ١٢

ق(٠) = ٨ ، $\int_{\text{٠}}^{\text{جـ}} \left(\text{ق}'(\text{س}) - \text{هـ}^{\text{س}}\right) \text{دس} = \text{صفر}$

فجد قيمة $\text{هـ}^{\text{جـ}}$.

الحل:

$$\int_{\text{٠}}^{\text{جـ}} \text{ق}'(\text{س}) \text{دس} - \int_{\text{٠}}^{\text{جـ}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{دس} = \text{صفر}$$

$$\text{ق(جـ)} - \text{ق(٠)} - \left(\text{هـ}^{\text{س}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{جـ}}\right) = \text{صفر}$$

$$\text{١٢} - \text{٨} - \left(\text{هـ}^{\text{جـ}} - \text{هـ}^{\text{٠}}\right) = \text{صفر}$$

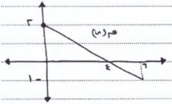
$$\text{٤} - \text{هـ}^{\text{جـ}} + \text{١} = \text{صفر}$$

$$\text{٥} - \text{هـ}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$$

$$\text{هـ}^{\text{جـ}} = \text{٥}$$

المستوى (٤)	**الوحدة** (التكامل وتطبيقاته)	**عصام الشيخ**
التخصص(الأدبي والمعلوماتية) **الدرس** (التكامل المحدود		) **ماجستير رياضيات**

٢٠١٧ شتوي (٤ علامات)



اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [٠، ٦] جد $\int_{0}^{6}$ ق(س) دس .

الحل:

نجد قاعدة ق(س)

م يمر بـ (٤، ٠)، (٠، ٢)

$م = \frac{٢ - ٠}{٠ - ٤} = \frac{-١}{٢}$

$ص - ٠ = \frac{-١}{٢}(س - ٤)$

$ص = \frac{-١}{٢}س + ٢$

$\int_{0}^{6} \frac{-١}{٢}س + ٢ \; دس =$

$\int_{0}^{4} \frac{-١}{٢}س + ٢ \; دس + \int_{4}^{6} \frac{-١}{٢}س + ٢ \; دس$

$\frac{-س^{٢}}{٤} + ٢س \Big|_{0}^{4} + \frac{-س^{٢}}{٤} + ٢س \Big|_{4}^{6}$

$= (-٤ + ٨) - (٠) + (-٩ + ١٢) - (-٤ + ٨)$

$(٤ - ٠) + (٣ - ٤)$

$٤ + -١$

$\boxed{٣}$

ESAM SHIKH
0796300625

٢٠١٧ شتوي (٤ علامات)

إذا كان ق اقترانًا متصلًا وكان ق(١) = ٣ ، ق(جـ) = ٨ ،

$\int_{١}^{جـ}$ (قَ(س) − ٢س) دس = جـ

فجد قيمة (قيم) الثابت جـ .

الحل:

$\int_{١}^{جـ}$ قَ(س) دس − $\int_{١}^{جـ}$ ٢س دس = جـ

ق(جـ) − ق(١) − (س٢ |$_{١}^{جـ}$) = جـ

٨ − ٣ − (جـ٢ − ١) = صفر

٥ − جـ٢ + ١ = صفر

٤ − جـ٢ = صفر

٤ = جـ٢

⇐ جـ = ± ٢

٢٠١٨ شتوي قديم

قيمة $\int_{٨}^{٢}$ ٤ دس تساوي

أ) ٢٤ ب) −٢٤ جـ) صفر د) −١٦

الحل:

٤(٢ − ٨)

٤ × −٦ = −٢٤