قواعد التكامل المحدود وخصائصه

ملخص القوانين

① $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \text{ق}(\text{س}) \Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$

$= \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$

مثال

إذا كان $\text{ق}(-٢) = -٨$ ، $\text{ق}(١) = ١$

فجد $\int_{-٢}^{١} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ق}(\text{س}) \Big|_{-٢}^{١} = \text{ق}(١) - \text{ق}(-٢)$

$= ١ - (-٨) = ٩$

مثال

جد $\int_{١}^{٥} ٣\text{س}\,\text{دس}$

الحل:

$\frac{٣\text{س}^٢}{٢} \Big|_{١}^{٥}$

$= ٣ \times \frac{٢٥}{٢} - ٣ \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{٧٥}{٢} - \frac{٣}{٢} = \frac{٧٢}{٢} = ٣٦$

مثال

جد $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} \text{جتاس}\,\text{دس}$

الحل

$\text{جاس} \Big|_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} = \text{جا}\pi - \text{جا}\frac{\pi}{٢}$

$= ٠ - ١ = -١$

مثال

جد $\int_{٢}^{٧} ٤\text{س}\,\text{دس}$

الحل:

$٢\text{س}^٢ \Big|_{٢}^{٧} = ٢ \times ٤٩ - ٢ \times ٤$

$= ٩٨ - ١٦$

$= ٨٢$

مثال

جد $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{قا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ظاس} \Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} = \text{ظا}\frac{\pi}{٤} - \text{ظا}\frac{\pi}{٦}$

$= ١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثال

جد $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{\text{س}^٢}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{٢}^{٨} \text{س}^{-٢}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{-١}}{-١} \Big|_{٢}^{٨}$

$= \frac{-١}{\text{س}} \Big|_{٢}^{٨} = \frac{-١}{٨} - \frac{-١}{٢}$

$= \frac{-١}{٨} + \frac{٤}{٨} = \frac{٣}{٨}$

مثال

جد $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا٢س}\,\text{دس}$

الحل:

$$-\frac{\text{جتا}\,٢\text{س}}{٢}\Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= -\frac{\text{جتا}\,\pi}{٢} - -\frac{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢}}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} + \text{صفر} = \frac{١}{٢}$$

قاعدة (٢) قاعدة العدد :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{دس} = \text{جـ}\,(\text{ب} - \text{أ})$$

حيث جـ عدد حقيقي .

مثال

جد $\int_{٢}^{٦} ٥\,\text{دس}$

الحل:

$= ٥ \times (٦ - ٢)$

$= ٥ \times ٤ = ٢٠$

مثال

إذا كان $\int_{-٢}^{٤} ٣\text{ب}\,\text{دس} = ٤٨$

فجد قيمة الثابت ب .

الحل:

$٣\text{ب}\,(٤ - -٢) = ٤٨$

$٣\text{ب} \times ٦ = ٤٨$

$١٨\text{ب} = ٤٨$

$\text{ب} = \frac{٤٨}{١٨}$

مثال

إذا كان $\int_{١+\text{ب}}^{٢+٣\text{ب}} ٥\,\text{دس} = ٤٠$ فجد

قيمة الثابت ب .

الحل:

$٥\,(٢ + ٣\text{ب} - ١ - \text{ب}) = ٤٠$

$٥\,(١ + ٢\text{ب}) = ٤٠$

$١ + ٢\text{ب} = ٨$

$٢\text{ب} = ٧$

$\text{ب} = \frac{٧}{٢}$

مثال

إذا كان $\int_{\text{ب}}^{٢} ٣\text{ب}\,\text{دس} = -٣٠$ حيث ب ∈ ح

فجد قيمة الثابت ب .

الحل:

$٣\text{ب}\,(٢ - \text{ب}) = -٣٠$

$٤\text{ب} - ٢\text{ب}^٢ = -٣٠$

$٠ = ٢\text{ب}^٢ - ٤\text{ب} - ٣٠$

$٠ = \text{ب}^٢ - ٢\text{ب} - ١٥$

$٠ = (\text{ب} - ٥)(\text{ب} + ٣)$

$\Leftarrow \text{ب} = ٥ \text{ ، } \text{ب} = -٣$

خصائص التكامل المحدود :

① $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق(س)}\ \text{دس} = \text{صفر}$

② $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{دس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س)}\ \text{دس}$

③ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ ق(س)}\ \text{دس} = \text{جـ} \times \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{دس}$

④ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)})\ \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{دس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س)}\ \text{دس}$

مثال

جد $\int_{٣}^{٣} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\ \text{دس}$

الحل :

صفر

مثال

جد $\int_{٢}^{٢} (٩\text{س}-٧)^{٥}\ \text{دس}$

الحل :

صفر

مثال

إذا كان $\int_{١}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{دس} = \frac{٣}{٥}$

فجد $\int_{٤}^{١} \text{ق(س)}\ \text{دس}$.

الحل :

$-\frac{٣}{٥}$

مثال

إذا كان $\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{دس} = ٢$

فجد $\int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{دس}$

الحل :

-٢

مثال

جد $\int_{١}^{٤} (٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س})\ \text{دس}$

الحل :

$\text{س}^{٣} + ٥\frac{\text{س}^{٢}}{٢} \Big|_{١}^{٤}$

$= (٦٤ + ٥ \times \frac{١٦}{٢}) - (١ + ٥ \times \frac{١}{٢})$

$= (٦٤ + ٤٠) - (١ + \frac{٥}{٢})$

$= ١٠٤ - \frac{٧}{٢} = ١٠٠\frac{١}{٢}$

مثال

إذا كان $\int_{١}^{٥} \frac{١}{٢} \text{ق(س)}\ \text{دس} = -٣$

$\int_{٥}^{١} ٣\ \text{هـ(س)}\ \text{دس} = ١٨$

فجد $\int_{١}^{٥} (٤\ \text{ق(س)} - ٥\ \text{هـ(س)})\ \text{دس}$

الحل :

$\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{دس} = -٦$

$\int_{٥}^{١} \text{هـ(س)}\ \text{دس} = ٦$

الآن

$\int_{1}^{5} \left(4\text{ق(س)} - 5\text{هـ(س)}\right) \text{دس} =$

$\int_{1}^{5} 4\text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{1}^{5} 5\text{هـ(س)}\,\text{دس}$

$= 4 \times \int_{1}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} - 5 \times \int_{1}^{5} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

$= 4 \times -6 - 5 \times -6$

$= -24 - -30$

$= -24 + 30 = 6$

مثال

إذا كان $\int_{1}^{3} \left(4\text{ق(س)} + 7\text{هـ(س)}\right) \text{دس} = 19$

$\int_{1}^{3} 3\text{ق(س)}\,\text{دس} = 9$

فاحسب قيمة $\int_{3}^{1} 5\text{هـ(س)}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{1}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 3$

$4\int_{1}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} + 7\int_{1}^{3} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = 19$

$4 \times 3 + 7\int_{1}^{3} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = 19$

$12 + 7\int_{1}^{3} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = 19$

$7\int_{1}^{3} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = 7$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = 1$

$\Leftarrow \int_{3}^{1} 5\text{هـ(س)}\,\text{دس} =$

$5 \times \int_{3}^{1} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

$5 \times -1 = -5$

مثال

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 5$ فما قيمة

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= 5 + 5 = 10$

مثال

إذا كان ع = $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{قتا}^2\text{س}\,\text{دس}$

ل = $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظتا}^2\text{س}\,\text{دس}$

جد قيمة ع + ل

الحل:

ع + ل =

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس} + \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ظتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس} + \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{دس}$

$-\text{ظتاس} \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} + -\text{ظتاس} \Big|_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} - \text{س} \Big|_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \cancel{-\text{ظتا}}\frac{٣\pi}{٤} - \cancel{\text{ظتا}}\frac{\pi}{٤} - \cancel{\text{ظتا}}\frac{\pi}{٤} - \cancel{\text{ظتا}}\frac{٣\pi}{٤}$

$-\frac{\pi}{٤} - -\frac{٣\pi}{٤}$

$= -\frac{\pi}{٤} + \frac{٣\pi}{٤} = \frac{٢\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢}$

⑤ خاصية الاضافة

$\int_{م}^{ب} \text{ق(س)}\ \text{دس} = \int_{م}^{جـ} \text{ق(س)}\ \text{دس} + \int_{جـ}^{ب} \text{ق(س)}\ \text{دس}$

مثال

إذا كان $\int_{١}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{دس} = ١٠$ جد

$\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{دس} - \int_{٨}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{دس}$

الحل:

$\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{دس} + \int_{٥}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{دس}$

$= \int_{١}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{دس} = ١٠$

مثال

إذا كان $\int_{٣}^{٥} \left(\frac{\text{ق(س)}}{٢} - ٣\right) \text{دس} = ٤$

$\boxed{\int_{٨}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{دس} = ٦}$ فجد

$\int_{٣}^{٨} (\text{ق(س)} + ٤\text{س})\ \text{دس}$

الحل:

أولاً:

$\int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\ \text{دس} - \int_{٣}^{٥} ٣\ \text{دس} = ٤$

$\int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢} - ٦ = ٤$

$\int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢} = ١٠ \Leftarrow \boxed{\int_{٣}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{دس} = ٢٠}$

الآن:

$\int_{٣}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{دس} + \int_{٣}^{٨} ٤\text{س}\ \text{دس}$

$\int_{٣}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{دس} + \int_{٥}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{دس} + ٢\text{س}^{٢} \Big|_{٣}^{٨}$

$٢٠ + -٦ + (٢\times٦٤) - (٢\times٩)$

$١٤ + (١٢٨ - ١٨)$

$١٤ + ١١٠ = ١٢٤$

مثال

إذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢\text{ق(س)} + ٣)\ \text{دس} = -١٧$

$\int_{٢}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٣}\ \text{دس} = -٢$ فجد

$\int_{٥}^{٩} (٤\text{ق(س)} - ١)\ \text{دس}$

الحل:

أولاً:

$٢\int_{٩}^{٢} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{٩}^{٢} ٣\,\text{دس} = -١٧$

$٢\int_{٩}^{٢} \text{ق(س)}\,\text{دس} + -٢١ = -١٧$

$٢\int_{٩}^{٢} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ٤ \Rightarrow \boxed{\int_{٩}^{٢} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ٢}$

ثانياً:

$\int_{٢}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٣}\,\text{دس} = -٢ \Rightarrow \boxed{\int_{٢}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -٦}$

الآن

$٤ \times \int_{٥}^{٩} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{٥}^{٩} ١\,\text{دس}$

$٤\left(\int_{٥}^{٢} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{٢}^{٩} \text{ق(س)}\,\text{دس}\right) - ٤$

$٤\left(٦ + -٢\right) - ٤$

$٤ \times ٤ - ٤$

$١٦ - ٤ = ١٢$

مثال

جد $\int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{٠}^{٣} \sqrt{(\text{س}-٢)(\text{س}-٢)}\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{٣} \sqrt{(\text{س}-٢)^٢}\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{٣} |\text{س}-٢|\,\text{دس}$

$\text{س}-٢ = \text{صفر} \Rightarrow \text{س} = ٢$

$٢-\text{س} \quad \text{س}-٢$

$- - - - - \quad + + +$

$٠ \quad ٢ \quad ٣$

$= \int_{٠}^{٢} ٢-\text{س}\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} \text{س}-٢\,\text{دس}$

$= ٢\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \Big|_{٠}^{٢} + \frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س} \Big|_{٢}^{٣}$

$= (٤-٢) - (٠) + (\frac{٩}{٢} - ٦) - (٢-٤)$

$= ٢ + \frac{-٣}{٢} - -٢$

$= ٤ - \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٢}$

مثال

جد $\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{٢}}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{دس}$

$\int_{٠}^{٢\pi} |\text{جاس}|\,\text{دس}$

$+ + + + \quad - - - -$

$٠ \quad \pi \quad ٢\pi$

$\int_{٠}^{\pi} \text{جاس}\,\text{دس} + \int_{\pi}^{٢\pi} -\text{جاس}\,\text{دس}$

$-\text{جتاس} \Big|_{٠}^{\pi} + \text{جتاس} \Big|_{\pi}^{٢\pi}$

$= (-\text{جتا}\pi - -\text{جتا}٠) + (\text{جتا}٢\pi - \text{جتا}\pi)$

$= (١ + ١) + (١ - -١)$

$= ٢ + ٢ = ٤$

مثال

جد $\int_{٠}^{٣} \left(س^٢ - |س-١|\right)\,دس$

الحل: $\int_{٠}^{٣} س^٢\,دس - \int_{٠}^{٣} |س-١|\,دس$

$س-١=٠ \quad س=١$

$- - - - \quad + + +$

$٠ \quad ١ \quad ٣$

$\frac{س^٣}{٣}\Big|_{٠}^{٣} - \left(\int_{٠}^{١} ١-س\,دس + \int_{١}^{٣} س-١\,دس\right)$

$\left(\frac{٢٧}{٣} - ٠\right) - \left((س-\frac{س^٢}{٢})\Big|_{٠}^{١} + \frac{س^٢}{٢} - س\Big|_{١}^{٣}\right)$

$٩ - \left((١-\frac{١}{٢}) - (٠) + (\frac{٩}{٢}-٣) - (\frac{١}{٢}-١)\right)$

$٩ - \left(\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} - \frac{-١}{٢}\right)$

$٩ - \left(\frac{٤}{٢} + \frac{١}{٢}\right)$

$٩ - \frac{٥}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

مثال

جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + جا٢س}}{جاس + جتاس}\,دس$

الحل:

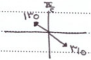
$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{جا^٢س + جتا^٢س + جا٢س}}{جاس + جتاس}\,دس$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{جا^٢س + ٢جاس\,جتاس + جتا^٢س}}{جاس + جتاس}\,دس$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{(جاس + جتاس)^٢}}{جاس + جتاس}\,دس$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{|جاس + جتاس|}{جاس + جتاس}\,دس$

$جاس + جتاس = ٠ \Leftarrow جاس = -جتاس$



$\Leftarrow \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس + جتاس}{جاس + جتاس}\,دس$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ١\,دس = \frac{\pi}{٢}$

مثال

جد $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٩س^٢ - ١٢س + ٤}\,دس$

الحل: $\int_{٢}^{٣} \sqrt{(٣س+٢)(٣س+٢)}\,دس$

$\int_{٢}^{٣} \sqrt{(٣س+٢)^٢}\,دس$

$= \int_{٢}^{٣} |٣س+٢|\,دس$

$٣س+٢ = ٠$

$٣س = -٢$

$س = \frac{-٢}{٣}$

$- - - - \quad + + +$

$\frac{-٢}{٣}$

$= \int_{٢}^{٣} ٣س+٢\,دس$

$\frac{٣س^٢}{٢} + ٢س\Big|_{٢}^{٣}$

$= (٣ \times \frac{٩}{٢} + ٦) - (٣ \times ٢ + ٤)$

$= ١٩,٥ - ١٠ = ٩,٥$

مثال

جد $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{٠} (\text{س} + \text{جتا س})\, \text{دس}$

الحل:

$\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جا س} \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{٠}$

$(٠ + \text{جا}٠) - \left(\frac{\frac{\pi^{٢}}{٤}}{٢} + \text{جا}\frac{\pi}{٤}\right)$

$٠ - \left(\frac{\pi^{٢}}{٨} + ١\right)$

$= -\frac{\pi^{٢}}{٨} - ١$

مثال

جد $\int_{-١}^{٣} (\text{س}-١)(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)\, \text{دس}$

الحل:

$\int_{-١}^{٣} \text{س}^{٣}-١\, \text{دس}$

$\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \text{س} \Big|_{-١}^{٣}$

$= \left(\frac{٨١}{٤} - ٣\right) - \left(\frac{١}{٤} + ١\right)$

$= \frac{٦٩}{٤} - \frac{٥}{٤} = \frac{٦٤}{٤} = ١٦$

مثال

جد $\int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}}\, (\sqrt{\text{س}} + ٢)^{٢}\, \text{دس}$

الحل:

$\int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}}\, (\text{س} + ٤\sqrt{\text{س}} + ٤)\, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{١} (\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٤\text{س} + ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}})\, \text{دس}$

$= \frac{٢}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + ٢\text{س}^{٢} + ٤ \times \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{١}$

$= \frac{٢}{٥}\sqrt{\text{س}^{٥}} + ٢\text{س}^{٢} + \frac{٨}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} \Big|_{٠}^{١}$

$= \left(\frac{٢}{٥} + ٢ + \frac{٨}{٣}\right) - (٠)$

$= \frac{١٢}{٥} + \frac{٨}{٣} = \frac{٣٦+٤٠}{١٥} = \frac{٧٦}{١٥}$

مثال

جد $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{(\text{س}-١)^{٢}}\, \text{دس}$

الحل:

$\int_{٢}^{٤} (\text{س}-١)^{-٢}\, \text{دس}$

$\frac{(\text{س}-١)^{-١}}{-١} \Big|_{٢}^{٤}$

$= \frac{-١}{\text{س}-١} \Big|_{٢}^{٤}$

$= \frac{-١}{٣} - \frac{-١}{١} = \frac{-١}{٣} + \frac{١}{١} = \frac{٢}{٣}$

مثال

جد $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٢}}\, \text{دس}$

$= \int_{١}^{٣} ٢\text{س} - ٤ + ٥\text{س}^{-٢}\, \text{دس}$

$= \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + \frac{٥\text{س}^{-١}}{-١} \Big|_{١}^{٣}$

$= \text{س}^{٢} - ٤\text{س} - \frac{٥}{\text{س}} \Big|_{١}^{٣}$

$= \left(٩ - ١٢ - \frac{٥}{٣}\right) - (١ - ٤ - ٥)$

$= \frac{-١٤}{٣} - ٨ = \frac{١٠}{٣}$

مثال

جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\,\text{دس}$

الحل:

$\text{جاس} + \text{جتاس} \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (\text{جا}\frac{\pi}{٢} + \text{جتا}\frac{\pi}{٢}) - (\text{جا}٠ + \text{جتا}٠)$

$= (١ + ٠) - (٠ + ١)$

$= ١ - ١ =$ صفر.

مثال

إذا كان $\int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س}) + \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ٦)\,\text{دس} = ١٢$

فجد $\int_{١}^{٣} (\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - \text{س}^{٢})\,\text{دس}$

الحل:

أولاً نجد $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\text{دس} + \int_{١}^{٣} \text{س}^{-٢} - ١٢ = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١}\Big|_{١}^{٣} = ٢٤$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + (\frac{-١}{٣} - \frac{-١}{١}) = ٢٤$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \frac{٢}{٣} = ٢٤$

$٦\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س}) + ٢ = ٧٢$

$٦\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٧٠$

$\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{٧٠}{٦}$

$\Leftarrow$

$\int_{١}^{٣} (\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - \text{س}^{٢})\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big|_{١}^{٣}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٧٠}{٦} - (٩ - \frac{١}{٣})$

$= \frac{٧٠}{١٢} - \frac{٢٦ \times ٤}{٣ \times ٤}$

$= \frac{٧٠}{١٢} - \frac{١٠٤}{١٢} = \frac{-٣٤}{١٢}$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} & -٣ < \text{س} \le ٠ \\ \text{س} & ٠ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$

فجد $\int_{-٣}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{-٣}^{٠} -\text{س}\,\text{دس} + \int_{٠}^{٤} \text{س}\,\text{دس}$

$\frac{-\text{س}^{٢}}{٢}\Big|_{-٣}^{٠} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{٤}$

$(٠ - \frac{-٩}{٢}) + (\frac{١٦}{٢} - ٠)$

$\frac{٩}{٢} + ٨ = \frac{٢٥}{٢}$

مثال

إذا كان $\int_{٠}^{\text{ج}} \text{س}(١-\text{س})\,\text{دس} =$ صفر

حيث $\text{ج} \in \text{ح}$ جد قيمة ج

الحل:

$\int_{٠}^{ج} (س - س^{٢})\, دس = صفر$

$\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{ج} = صفر$

$\frac{ج^{٢}}{٢} - \frac{ج^{٣}}{٣} = صفر$

× ٦

$٣ج^{٢} - ٢ج^{٣} = صفر$

$ج^{٢}(٣ - ٢ج) = صفر$

ج = صفر أو $٣ - ٢ج = صفر$

$٣ = ٢ج$

$ج = \frac{٣}{٢}$

مثال

إذا كان $\int_{٢}^{ب} (٢س - ٣)\, دس = ٢٠$

فجد قيمة الثابت ب.

الحل:

$س^{٢} - ٣س \Big|_{٢}^{ب} = ٢٠$

$ب^{٢} - ٣ب - (٤ - ٦) = ٢٠$

$ب^{٢} - ٣ب - -٢ - ٢٠ = صفر$

$ب^{٢} - ٣ب - ١٨ = صفر$

$(ب - ٦)(ب + ٣) = صفر$

ب = ٦ ، ب = −٣

مثال

إذا كان $\int_{-١}^{٣} \left(٣س^{٢} - ٢\int_{٠}^{ج} ٣م\, دم\right) دس = -٢٠$

فجد قيمة ج

الحل:

$\int_{-١}^{٣} ٣س^{٢}\, دس - \int_{-١}^{٣} ٢ × \frac{٣م^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{ج} دس = -٢٠$

$= \int_{-١}^{٣} ٣س^{٢}\, دس - \left((٣ج^{٢} - ٠)\right) دس = -٢٠$

$= س^{٣} - ٣ج^{٢}س \Big|_{-١}^{٣} = -٢٠$

$= (٢٧ - ٩ج^{٢}) - (-١ + ٣ج^{٢}) = -٢٠$

$٢٨ - ١٢ج^{٢} = -٢٠$

$٤٨ = ١٢ج^{٢}$

$\frac{٤٨}{١٢} = ج^{٢}$

$\Leftarrow ج^{٢} = ٤ \Leftarrow ج = \pm ٢$

مثال

إذا كان $ق(س) = \int \left(\int_{٠}^{٢٠} ٤جس - ٣س^{٢} \right) دس$

فجد $ق'(-١)$

الحل:

$ق(س) = \int (-٨ - ٣س^{٢})\, دس$

$ق'(س) = -٨ - ٣س^{٢}$

$ق'(-١) = -٨ - ٣ = -١١$

خاصية خاصية المقارنة .

① ق(س) ≥ صفر س ∈ [أ، ب]

⟸ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≥ صفر

② ق(س) ≤ صفر س ∈ [أ، ب]

⟸ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≤ صفر

③ ق(س) ≥ هـ(س) س ∈ [أ، ب]

⟸ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≥ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ءس

④

ل ≤ ق(س) ≤ ك س ∈ [أ، ب]

⟸ $\int_{أ}^{ب}$ ل ءس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ ك ءس

مثال

دون حساب قيمة التكامل بين

أن $\int_{٠}^{٢\pi}$ (١ + جاس) ءس ≥ صفر

الحل:

الفترة [٠، ٢π] الربع الأول والثاني

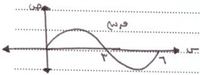
٠ ≤ جاس ≤ ١ (جا⁺)

١ ≤ ١ + جاس ≤ ٢

⟸ ١ + جاس ≥ صفر

⟸ $\int_{٠}^{٢\pi}$ (١ + جاس) ءس ≥ صفر

مثال



معتمداً الشكل

① ما إشارة $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس ؟ لماذا ؟

② ما إشارة $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) ءس ؟ لماذا ؟

الحل :

① إشارة $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس هي موجبة

لأن ق(س) ≥ صفر س ∈ [٠، ٣]

② إشارة $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) ءس هي سالبة

لأن ق(س) ≤ صفر س ∈ [٣، ٦]

مثال

بين أن $\int_{-٢}^{٥}$ (س² + ٤) ءس ≥ $\int_{-٢}^{٥}$ ٣س ءس

دون حساب التكامل .

الحل:

ليكن ق(س) = س² + ٤ ، هـ(س) = ٣س

ليكن ل(س) = ق(س) − هـ(س)

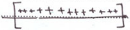
ندرس اشارة ل في الفترة [−٢، ٥]

س² + ٤ − ٣س = س² − ٣س + ٤

$\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤$

لا تحلل لأن المميز سالب

نعوض ٠ مثلاً فيكون الناتج ٤ ⇐ (+)

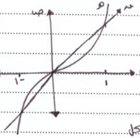


⇐ $\text{ق(س)} \ge \text{هـ(س)}$ في [-٢، ٥]

⇐ $\int_{-٢}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} \ge \int_{-٢}^{٥} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

⇐ $\int_{-٢}^{٥} \text{س}^{٢} + ٤\,\text{دس} \ge \int_{-٢}^{٥} ٣\text{س}\,\text{دس}$

مثال



معتمداً الشكل

① قارن بين قيمتي التكامل في ما يلي

$\int_{٠}^{١} \text{ق(س)}\,\text{دس}$ ، $\int_{٠}^{١} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

② $\int_{-١}^{٠} \text{ق(س)}\,\text{دس}$ ، $\int_{-١}^{٠} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

الحل:

① $\int_{٠}^{١} \text{ق(س)}\,\text{دس} \ge \int_{٠}^{١} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

② $\int_{-١}^{٠} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le \int_{-١}^{٠} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

مثال

بين أن $\int_{٠}^{٢\pi} (٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

ينحصر بين ٦π ، ٨π

دون إيجاد التكامل

الحل: [٠، ٢π]

$-١ \le \text{جتاس} \le ١$

الربع الأول والثاني والثالث والرابع

جتا² + -

$٠ \le \text{جتا}^{٢}\text{س} \le ١$

$٣ \le ٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س} \le ٤$

$\int_{٠}^{٢\pi} ٣\,\text{دس} \le \int_{٠}^{٢\pi} ٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس} \le \int_{٠}^{٢\pi} ٤\,\text{دس}$

$٦\pi \le \int_{٠}^{٢\pi} ٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس} \le ٨\pi$

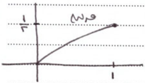
مثال

إذا علمت أن $\text{م} \le \int_{٠}^{١} \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}\,\text{دس} \le \text{ك}$

فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دون حساب التكامل

الحل:

طريقة الرسم



$\text{ق(س)} = \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

من الرسم نلاحظ أن

$٠ \le \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}} \le \frac{١}{٢}$

⇐

$$\int_{0}^{1} 0 \, دس \leq \int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2} \, دس \leq \int_{0}^{1} \frac{1}{2} \, دس$$

$$0 \leq \int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2} \, دس \leq \frac{1}{2}$$

⊛ طريقة المشتقة

$ق(س) = \frac{س}{1+س^2} \qquad [0 ، 1]$

$$ق'(س) = \frac{(1+س^2)(1) - (س)(2س)}{(1+س^2)^2}$$

$0 = 1 + س^2 - 2س^2$

$0 = 1 - س^2$

$0 = (1-س)(1+س)$

$س = 1 ، س = -1$

لا يوجد اصفار للمقام

⇐ لا يوجد نقط حرجة في $[0 ، 1]$

$ق'(س) \quad \underset{0 \qquad\qquad\qquad 1}{+ + + + + +}$

⇐ $ق(0)$ اصغر قيمة $= 0$

$ق(1)$ اكبر قيمة $= \frac{1}{2}$

⇐

$$0 \leq \frac{س}{1+س^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{1} 0 \, دس \leq \int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2} \, دس \leq \int_{0}^{1} \frac{1}{2} \, دس$$

$$0 \leq \int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2} \, دس \leq \frac{1}{2}$$

⇐ $م = 0 ، ك = \frac{1}{2}$

مثال

دون حساب التكامل بين أن

$$\frac{\pi}{5} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3جتا^2س+2} \, دس \leq \frac{\pi}{2}$$

الحل:

الفترة $[0 ، \pi]$

الربع الأول والثاني
جتا + -

$-1 \leq جتاس \leq 1$

$0 \leq جتا^2س \leq 1$

$0 \leq 3جتا^2س \leq 3$

$2 \leq 3جتا^2س+2 \leq 5$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3جتا^2س+2} \leq \frac{1}{2}$$

⇐

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3جتا^2س+2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{5} \, دس \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3جتا^2س+2} \, دس \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} \, دس$$

$$\frac{\pi}{5} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3جتا^2س+2} \, دس \leq \frac{\pi}{2}$$

مثال

إذا علمت أن

$$م \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}\, ءس \le ك$$

فجد أكبر قيمة للثابت م وأصغر قيمة للثابت ك دون حساب التكامل

الحل:

$-٣ \le س \le ٣$

$٠ \le س^{٢} \le ٩$

$٠ \ge -س^{٢} \ge -٩$

⇐

$-٩ \le -س^{٢} \le ٠$

$٠ \le ٩ - س^{٢} \le ٩$

$\sqrt{٠} \le \sqrt{٩ - س^{٢}} \le \sqrt{٩}$

$٠ \le \sqrt{٩ - س^{٢}} \le ٣$

$$\int_{-٣}^{٣} ٠\, ءس \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}\, ءس \le \int_{-٣}^{٣} ٣\, ءس$$

$$٠ \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}\, ءس \le ١٨$$

مثال

جد كثير حدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث

$\int_{-١}^{١} ق(س)\, ءس = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} ق(س)\, ءس = ٢$

الحل:

$ق(س) = أس + ب$

$\int_{-١}^{١} (أس + ب)\, ءس = ٤$

$\left. \frac{أس^{٢}}{٢} + ب س \right|_{-١}^{١} = ٤$

$\cancel{\frac{أ}{٢}} + ب - (\cancel{\frac{أ}{٢}} - ب) = ٤$

$٢ب = ٤ \Rightarrow ب = ٢$

$\int_{١}^{٣} (أس + ٢)\, ءس = ٢$

$\left. \frac{أس^{٢}}{٢} + ٢س \right|_{١}^{٣} = ٢$

$\frac{٩أ}{٢} + ٦ - (\frac{أ}{٢} + ٢) = ٢$

$\frac{٨أ}{٢} + ٤ = ٢$

$٤أ = -٢$

$أ = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

$\Rightarrow ق(س) = -\frac{١}{٢} س + ٢$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ
المستوى(٤) الدرس(٣) (التكامل المحدود) ماجستير رياضيات

الأسئلة الوزارية :

٢٠٠٨ شتوي

$\int_{1}^{4} [\frac{1}{2}\text{س} + 2]\,\text{دس} =$

[✓ أ) ٧] ب) ٦ ج) ٩ د) ٨٫٥

٢٠٠٨ صيفي

$\int_{1}^{3} [4 - \frac{1}{2}\text{س}]\,\text{دس} =$

أ) ١٠ ب) ٦ ج) ٧ [✓ د) ٥]

٢٠٠٩ صيفي

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان

$\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س} + \text{س}^2$

فإن $\int_{-1}^{2} \text{قَ(س)}\,\text{دس} =$

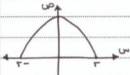
أ) ٢ ب) ٣ ج) ٧ [✓ د) ٦]

٢٠١٠ صيفي

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 3$ فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(ص)}\,\text{دص}$

أ) -٦ ب) صفر ج) -٣ [✓ د) ٦]

٢٠١٠ صيفي



إذا كان الشكل يمثل منحنى $\text{ق(س)} = \sqrt{4 - \text{س}^2}$
$\text{س} \in [-2, 2]$ فإن
العددين م، ن حيث $\text{م} \le \int_{-2}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le \text{ن}$
هما

[✓ أ) ٠، ٨] ب) ٠، ٢ ج) -٢، ٢ د) -٨، ٠

٢٠١٠ صيفي

إذا كان $\int_{1}^{\text{أ}} \sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = 1$ حيث أ عدد ثابت
فإن $\int_{1}^{\text{أ}} \frac{2\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} =$

أ) ١ [✓ ب) ٢] ج) ٣ د) ٤

٢٠١٠ صيفي **(٦ علامات)**

جد التكامل الآتي $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{دس}}{1 - \text{جتاس}}$.

الحل :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{دس}}{1-\text{جتاس}} \times \frac{1+\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\text{جتاس}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس جاس}}\right)\text{دس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\text{قتا}^2\text{س} + \text{ظتاس قتاس})\,\text{دس}$$

$$= -\text{ظتاس} - \text{قتاس} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(-1 - \sqrt{2}\right)$$

$$= 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ
المستوى(٤) الدرس(٣) (التكامل المحدود) ماجستير رياضيات

٢٠١١ شتوي

أقل قيمة ممكنة للمقدار

$\int_{-٤}^{-١}(س^{٢}+١)\,دس$ هي

أ) ٥٤ [✓ ب)] ٦ جـ) ١٠ د) ٢

٢٠١١ شتوي **(٨ علامات)**

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود، وكان ق(٠) = ٥ ، $ق''(س) = ٤$

$\int^{١} ق'(س)\,دس = ٣$ فجد ق(س)

الحل:

$ق'(س) = \int ق''(س)\,دس$

$= \int ٤\,دس$

$ق'(س) = ٤س + جـ$

$\int_{٠}^{١}(٤س+جـ)\,دس = ٣$

$٢س^{٢} + جـ\,س\,\Big|_{٠}^{١} = ٣$

$(٢+جـ) - ٠ = ٣$ ⇐ جـ = ١

$ق'(س) = ٤س + ١$

$ق(س) = \int(٤س+١)\,دس$

$= ٢س^{٢} + س + جـ$

لكن: ق(٠) = ٥

$٥ = ٠ + ٠ + جـ$ ⇐ جـ = ٥

⇐ $ق(س) = ٢س^{٢} + س + ٥$

٢٠١١ صيفي

إذا كان $ق(س) = \int\left(\int_{٠}^{-٢}٤\,دس - ٣س^{٢}\right)دس$

فإن $ق'(-١) =$

[✓ أ)] -١١ ب) صفر جـ) ١ د) -٣

٢٠١١ صيفي

إذا كان $\int_{١}^{٣}(٢ق(س)-٤)\,دس = ٦$ ، $\int_{٤}^{٣}ق(س)\,دس = -١$

فجد $\int_{١}^{٤}ق(س)\,دس$

أ) ٧ [✓ ب)] ٨ جـ) ٥ د) ١٥

٢٠١٢ شتوي

إذا كان $\int_{١}^{٣}\frac{١}{٢}ق(س)\,دس = ٢$ ، $\int_{٥}^{٣}ق(س)\,دس = -٥$

فإن $\int_{١}^{٥}ق(س)\,دس =$

أ) ٧ [✓ ب)] ٩ جـ) -٣ د) -١

٢٠١٢ صيفي

$\int_{٤}^{٦}[\frac{١}{٢}س+١]\,دس =$

[✓ أ)] ٦ ب) ٤ جـ) ٢ د) ١

٢٠١٢ صيفي

إذا كان $\int_{-٢}^{٢}٣ق(س)\,دس = ٦$ ، $\int_{٥}^{٢}ق(س)\,دس = ٨$

فإن $\int_{-٢}^{٥}|ق(س)|\,دس =$

أ) -٦ ب) ٦ [✓ جـ)] ١٠ د) ١٤

٢٠١٢ صيفي

إذا كان ق(س) ≥ ٦ لجميع قيم س في الفترة

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ
المستوى(٤) الدرس(٣) (التكامل المحدود) ماجستير رياضيات

[١، ٣] فإن أكبر قيمة ممكنة للمقدار
$\int_{١}^{٣} (٢ق(س) + ١)\, دس$ =
أ) ١٢ ب) ١٣ ج) ٢٤ [✓ د) ٢٦]

٢٠١٣ شتوي

$\int_{٠}^{٢} [٣ - \frac{١}{٢}س]\, دس$ =

أ) -٢ ب) -١ ج) ٢ [✓ د) ٤]

٢٠١٣ شتوي

إذا كان $\int_{-٢}^{١} (ق(س) + ١)\, دس = ٩$ ، $\int_{٢}^{١} ق(س)\, دس = -٤$

فإن $\int_{-٢}^{٢} ق(س)\, دس$ =

أ) ٥ ب) ٦ [✓ ج) ١٠] د) ١٣

٢٠١٣ شتوي

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة
[٠، ٢] وكان ق(س) ≥ ٢ لكل س ∈ [٠، ٢]
فإن أصغر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{٠}^{٢} (٣ق(س) - ١)\, دس$

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ [✓ د) ١٠]

٢٠١٣ صيفي

إذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ٦$ ، وكان $\int_{٣}^{١} ل ق(س)\, دس = -٣$
فإن قيمة الثابت ل =

أ) $-\frac{١}{٢}$ [✓ ب) $\frac{١}{٢}$] ج) -٦ د) ٢

٢٠١٣ صيفي

قيمة $\int_{٠}^{٣} [\frac{١}{٢}س + ٤]\, دس$ =

■ ٩ ■ ١٤ [✓ ■ ١٣] ■ ١٨

٢٠١٣ صيفي

قيمة $\int_{٢}^{٣} ٣\pi^{٢}\, دس$ تساوي

■ $\pi^{٣}$ ■ ٦π [✓ ■ $٣\pi^{٢}$] ■ صفر

٢٠١٣ صيفي

إذا كان $\int_{٥}^{٢} ق(س)\, دس = ٢$ ، $\int_{٧}^{٥} ق(س)\, دس = -٦$
فإن $\int_{٢}^{٧} \frac{ق(س)}{٢}\, دس$ تساوي

■ -٤ ■ ٤ ■ -٢ [✓ ■ ٢]

٢٠١٣ صيفي **(٦ علامات)**

إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية وكان
ق(٠) = ق(١) = صفر ، $\int_{٠}^{١} ق(س)\, دس = ١$
فجد قاعدة الاقتران ق(س).

الحل:

ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ

ق(٠) = ٠ ⇐ جـ = صفر

ق(١) = ٠ ⇐ أ + ب = صفر ــــ ①

$\int_{٠}^{١} ق(س)\, دس = ١$

⇐ $\int_{٠}^{١} أس^{٢} + ب س\, دس = ١$

$\frac{أس^{٣}}{٣} + \frac{ب س^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{١} = ١$

$\frac{أ}{٣} + \frac{ب}{٢} - ٠ = ١$ ×٦

٢أ + ٣ب = ٦ ــــ ②

⇐ (-٣×) أ + ب = صفر

٢أ + ٣ب = ٦

التخصص(العلمي) الوحدة(١)(التكامل) عصام الشيخ
المستوى(٤) الدرس(٣)(التكامل المحدود) ماجستير رياضيات

$\cancel{-٢أ} - ٢ب = صفر$

$+ \cancel{٢أ} + ٣ب = ٦$

$ب = ٦$

$\Leftarrow أ = -٦$

$\Leftarrow ق(س) = -٦س^٢ + ٦س$.

٢٠١٣ صيفي **(٥علامات)**

إذا كان $\int_{-١}^{٣} (٣س^٢ - ٢\int_{٠}^{ج} ٣م\,دم)\,دس = -٢٠$

فجد قيمة الثابت ج.

الحل:

$\int_{-١}^{٣} (٣س^٢\,دس - ٢(\frac{٣م^٢}{٢}\Big|_{٠}^{ج}))\,دس = -٢٠$

$س^٣\Big|_{-١}^{٣} - \int_{-١}^{٣} ٢(\frac{٣ج^٢}{٢})\,دس = -٢٠$

$٢٧ - -١ - \int_{-١}^{٣} ٣ج^٢\,دس = -٢٠$

$٢٨ - ٣ج^٢(٣ - -١) = -٢٠$

$٢٨ - ١٢ج^٢ = -٢٠$

$٢٨ + ٢٠ = ١٢ج^٢$

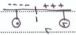
$٤٨ = ١٢ج^٢ \Leftarrow ج^٢ = ٤ \Leftarrow ج = \pm٢$

٢٠١٤ شتوي **(٦علامات)**

جد التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{٢} (س^٢ - |س-١|)\,دس$

الحل:



$\int_{٠}^{٢} س^٢\,دس - \int_{٠}^{١} ١-س\,دس - \int_{١}^{٢} س-١\,دس$

$\frac{س^٣}{٣}\Big|_{٠}^{٢} - (س - \frac{س^٢}{٢}\Big|_{٠}^{١}) - (\frac{س^٢}{٢} - س\Big|_{١}^{٢})$

$(\frac{٨}{٣} - ٠) - ((١ - \frac{١}{٢}) - ٠) - ((٢-٢) - (\frac{١}{٢} - ١))$

$\frac{٨}{٣} - \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$

$= \frac{٨}{٣} - ١ = \frac{٥}{٣}$

٢٠١٤ صيفي **(٦علامات)**

إذا كان $\int_{٢}^{ب} [\frac{١}{٢}س + ٣]\,دس = ٢٤$ ، $ب > ٢$

فجد قيمة الثابت ب.

الحل:

$[\frac{١}{٢}س + ٣] = \begin{cases} ٤ & ٢ \le س < ٤ \\ ٥ & ٤ \le س < ٦ \\ ٦ & ٦ \le س < ٨ \end{cases}$

التخصص(العلمي) الوحدة(١)(التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٣)(التكامل المحدود) ماجستير رياضيات

$\int_{٢}^{٤} ٤\,دس = ٤ \times ٢ = ٨$

$\int_{٤}^{٦} ٥\,دس = ٥ \times ٢ = ١٠$

$\int_{٦}^{ب} ٦\,دس = ٢٤ - ١٨$

$٦(ب - ٦) = ٦$

$ب - ٦ = ١ \Rightarrow ب = ٧$

٢٠١٥ شتوي **(٧ علامات)**

إذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢ق(س) + ٣)\,دس = -١٧$

$\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = -٢$ ، جد $\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\,دس$

الحل:

$\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\,دس =$

$\int_{٥}^{٢} (٤ق(س) - ١)\,دس + \int_{٢}^{٩} (٤ق(س) - ١)\,دس$

$٤\int_{٥}^{٢} ق(س)\,دس - \int_{٥}^{٢} ١\,دس + ٤\int_{٢}^{٩} ق(س)\,دس - \int_{٢}^{٩} ١\,دس$

$٤ \times ٦ - ١(-٣) + ٤ \times (-٢) - ١(٧)$

$٢٤ + ٣ - ٨ - ٧ = ١٢$

من المعطيات

$٢\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٩}^{٢} ٣\,دس = -١٧$

$٢\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس = -١٧ + ٢١ \Rightarrow \int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس = ٢$

$\int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس = -٦$

٢٠١٥ صيفي **(٧ علامات)**

دون حساب قيمة التكامل

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}\,دس$

بين أن $\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}\,دس \le \frac{\pi}{٢}$

حل: $-١ \le جتا س \le ١$

$٠ \le جتا^٢س \le ١$

$٠ \le ٣جتا^٢س \le ٣$

$٢ \le ٣جتا^٢س + ٢ \le ٥$

$\frac{١}{٥} \le \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢} \le \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٥}\,دس \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}\,دس \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}\,دس$

$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}\,دس \le \frac{\pi}{٢}$

٢٠١٥ صيفي **(٦ علامات)**

إذا كان م(س)، هـ(س) اقترانين بدائيين للاقتران ق(س) وكان $\int_{-١}^{٣} (م(س) - هـ(س))\,دس = ١٢$

فجد $\int_{٠}^{٤} ٢س\,م(س)\,دس + \int_{٤}^{٠} ٢س\,هـ(س)\,دس$

الحل:

$م(س) - هـ(س) = جـ \Rightarrow \int_{-١}^{٣} جـ\,دس = ١٢$

$\Rightarrow جـ \times ٤ = ١٢ \Rightarrow جـ = ٣$

$\int_{٠}^{٤} ٢س\,م(س)\,دس + \int_{٤}^{٠} ٢س\,هـ(س)\,دس$

$= \int_{٠}^{٤} ٢س\,م(س)\,دس - \int_{٠}^{٤} ٢س\,هـ(س)\,دس$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٣) (التكامل المحدود) ماجستير رياضيات

$$\int_{٠}^{٤} ٢س\,\left(م(س) - هـ(س)\right)\,دس$$

$$\int_{٠}^{٤} ٢س\,(٣)\,دس = \int_{٠}^{٤} ٦س\,دس$$

$$\frac{٦س^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{٤} = ٣س^{٢}\Big|_{٠}^{٤}$$

$$= ٤٨ - ٠ = ٤٨$$

٢٠١٦ شتوي **(٦ علامات)**

إذا علمت أن $م \leq \int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٣س^{٢}+٧}}\,دس \leq ك$

فجد قيمة كل من الثابتين م، ك دون حساب التكامل

$$\int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٢س^{٢}+٧}}\,دس$$

الحل: $١ \leq س \leq ٣$

$$١ \leq س^{٢} \leq ٩$$

$$٢ \leq ٢س^{٢} \leq ١٨$$

$$٩ \leq ٢س^{٢}+٧ \leq ٢٥$$

$$٣ \leq \sqrt{٢س^{٢}+٧} \leq ٥$$

$$\frac{١}{٥} \leq \frac{١}{\sqrt{٢س^{٢}+٧}} \leq \frac{١}{٣}$$

$$\int_{١}^{٣} \frac{١}{٥}\,دس \leq \int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٢س^{٢}+٧}}\,دس \leq \int_{١}^{٣} \frac{١}{٣}\,دس$$

$$\frac{٢}{٥} \leq \int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٢س^{٢}+٧}}\,دس \leq \frac{٢}{٣}$$

$$\Leftarrow م = \frac{٢}{٥} \text{ ، } ك = \frac{٢}{٣}$$

٢٠١٦ صيفي **(٦ علامات)**

إذا علمت أن $م \leq \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩}\,دس \leq ك$

فجد قيمة م، ك دون حساب $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩}\,دس$

الحل: $٠ \leq س \leq ٢$

$$٠ \leq س^{٤} \leq ١٦$$

$$٩ \leq س^{٤}+٩ \leq ٢٥$$

$$٣ \leq \sqrt{س^{٤}+٩} \leq ٥$$

$$\int_{٠}^{٢} ٣\,دس \leq \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩}\,دس \leq \int_{٠}^{٢} ٥\,دس$$

$$٦ \leq \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩}\,دس \leq ١٠$$

$$\Leftarrow م = ٦ \text{ ، } ك = ١٠$$

٢٠١٨ شتوي جديد

إذا كان م ≤ ق(س) ≤ ن

وكان

$$16 \le \int_{-1}^{3} (\text{ق}(\text{س}) + 5)\,\text{دس} \le 20$$

فإن قيم الثابتين م، ن على الترتيب

أ) ٧، ١١ ب) -٤، ٠

جـ) ٤، ٥ د) -١، ٠

الحل:

$$16 \le \int_{-1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + 5\times4 \le 20$$

$$-4 \le \int_{-1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \int_{-1}^{3} \text{م}\,\text{دس} = -4$$

$$\text{م}\times4 = -4$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{م} = -1}$$

الآن $\int_{-1}^{3} \text{ك}\,\text{دس} = \text{صفر}$

$$\Leftarrow \text{ك}\times4 = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{ك} = \text{صفر}}$$

٢٠١٨ شتوي قديم (٥ علامات)

إذا علمت أن

$$\text{م} \le \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{\text{س}^3+1}}\,\text{دس} \le \text{ك}$$

بدون حساب قيمة التكامل جد قيم كل من الثابتين م، ك

الحل:

$$0 \le \text{س} \le 2$$

$$0 \le \text{س}^3 \le 8$$

$$1 \le \text{س}^3+1 \le 9$$

$$1 \le \sqrt{\text{س}^3+1} \le 3$$

$$1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{\text{س}^3+1}} \geqslant \frac{1}{3}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{\sqrt{\text{س}^3+1}} \le 1$$

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{3}\,\text{دس} \le \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{\text{س}^3+1}}\,\text{دس} \le \int_{0}^{2} 1\,\text{دس}$$

$$\frac{2}{3} \le \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{\text{س}^3+1}}\,\text{دس} \le 2$$

$$\text{م} = \frac{2}{3} \quad ، \quad \text{ك} = 2$$

٢٠١٨ شتوي قديم (علامتان)

قيمة $\int_{4}^{5} \left(|\text{س}-3| + [\tfrac{1}{2}\text{س}+1]\right)\text{دس} =$

أ) ١٫٥ ب) ٧٫٥ جـ) ٤٫٥ د) -١٫٥

الحل:

$$\int_{4}^{5} \text{س}-3+3\,\text{دس}$$

$$= \int_{4}^{5} \text{س}\,\text{دس} = \left.\frac{\text{س}^2}{2}\right|_{4}^{5} = \frac{25}{2} - \frac{16}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

٢٠١٨ شتوي قديم (علامتان)

اذا كان:

$$\int_{٠}^{٢} \left(٢\text{س} - \int_{٠}^{\text{جـ}} ٣\,\text{دس}\right)\text{دس} = ١٦$$

فإن قيمة جـ تساوي :

أ) -٤ ب) -٢ ج) ٤ د) ٢

الحل :

$$\int_{٠}^{٢} (٢\text{س} - ٣\text{جـ})\,\text{دس} = ١٦$$

$$\text{س}^{٢} - ٣\text{جـ س} \Big|_{٠}^{٢} = ١٦$$

$$٤ - ٦\text{جـ} - ٠ = ١٦$$

$$-٦\text{جـ} = ١٢$$

$$\text{جـ} = -٢$$