التكامل بالتعويض

ملخص القوانين

ESAM SHIKH
0796300625

١

$أ \neq ٠ ، ن \neq -١$

① $\int (أس + ب)^{ن} \, دس = \frac{(أس+ب)^{ن+١}}{أ \times (ن+١)} + ج$

② $\int جا(أس+ب) \, دس = \frac{-جتا(أس+ب)}{أ} + ج$

③ $\int جتا(أس+ب) \, دس = \frac{جا(أس+ب)}{أ} + ج$

④ $\int قا^{٢}(أس+ب) \, دس = \frac{ظا(أس+ب)}{أ} + ج$

مثال

جد $\int ٦ \, جتا(٢س-١) \, دس$

الحل

$\frac{٦ \, جا(٢س-١)}{٢} + ج$

$= ٣ \, جا(٢س-١) + ج$

مثال

جد $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{٥س+١}} \, دس$

$= \int (٥س+١)^{-\frac{١}{٣}} \, دس$

$= \frac{(٥س+١)^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣} \times ٥} \Big|_{٠}^{٣}$

$= \frac{٣}{١٠} \sqrt[٣]{(٥س+١)^{٢}} \Big|_{٠}^{٣}$

$= \frac{٣}{١٠} (\sqrt[٣]{(١٦)^{٢}}) - \frac{٣}{١٠}$

$= \frac{٣}{١٠} \sqrt[٣]{١٦} - \frac{٣}{١٠}$

$= \frac{٦}{٥} - \frac{٣}{١٠} = \frac{٩}{١٠}$

مثال

جد $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{(٣س+١)^{٤}}} \, دس$

الحل:

$= \int (٣س+١)^{-\frac{٤}{٥}} \, دس$

$= \frac{(٣س+١)^{\frac{١}{٥}}}{\frac{١}{٥} \times ٣} \Big|_{٠}^{٣}$

$= \frac{٥}{٣} \sqrt[٥]{(٣س+١)} \Big|_{٠}^{٣}$

$= \frac{٥}{٣} (\sqrt[٥]{٢٤}) - \frac{٥}{٣}$

مثال

جد $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{(٥س+١)^{٢}}} \, دس$

الحل:

$= \int (٥س+١)^{-\frac{٢}{٣}} \, دس$

$= \frac{٢(٥س+١)^{\frac{١}{٣}}}{٥} \Big|_{٠}^{٣}$

$= \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{(٥س+١)} \Big|_{٠}^{٣}$

$= \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{١٦} - \frac{٣}{٥}$

مثال

جد $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{(٢س-١)^{٢}}} \, دس$

الحل

$= \int (٢س-١)^{-\frac{٢}{٣}} \, دس$

$= \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{(٢س-١)} \Big|_{٠}^{١٣}$

$$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{(2-3)^2} - 1$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{-27}^2 - \frac{3}{4} \sqrt[3]{-1}^2$$

$$= \frac{3}{4} \times 9 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

مثال ٢

جد $\int_{-1}^{0} 6(1-2s)^5 \, ds$

الحل:

$$\left[\frac{6(1-2s)^6}{6 \times -2} \right]_{-1}^{0}$$

$$= \left[\frac{(1-2s)^6}{-2} \right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{(-3)^6}{-2} - \frac{(3)^6}{-2} = \text{صفر}$$

مثال

جد $\int \sqrt[3]{(3-3s)^2} \, ds$

الحل:

$$\int (3-3s)^{\frac{2}{3}} \, ds$$

$$\frac{1}{-3} \cdot \frac{5}{5} (3-3s)^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{-1}{5} \sqrt[3]{(3-3s)^5} + c$$

مثال

جد $\int 2 \text{قا}^2(2-s) \, ds$

الحل:

$$\frac{2 \text{ ظا}(2-s)}{-1} + c$$

$$= -2 \text{ ظا}(2-s) + c$$

مثال

جد $\int \sqrt{4s+1} \, ds$

الحل:

$$\int (4s+1)^{\frac{1}{2}} \, ds$$

$$\left[\frac{(4s+1)^{\frac{3}{2}}}{4 \cdot \frac{3}{2}} \right]_{0}^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{6} \sqrt{(4s+1)^3} \right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{6} \times 27 - \frac{1}{6} \times 1 = \frac{27-1}{6} = \frac{26}{6}$$

مثال

جد $\int 12 \text{ جا}(1-4s) \, ds$

الحل:

$$\frac{-12 \text{ جتا}(1-4s)}{-4} + c$$

$$= 3 \text{ جتا}(1-4s) + c$$

ESAM SHIKH
0796300625

* $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$

مثال
جد $\int e^{-4x+7}\,dx$

الحل:
$= \frac{1}{-4} e^{-4x+7} + c$
$= -\frac{1}{4} e^{-4x+7} + c$

مثال
جد $\int \frac{1}{2} e^{-6x}\,dx$

الحل:
$\frac{1}{2} \times \frac{e^{-6x}}{-6} + c$
$= -\frac{1}{12} e^{-6x} + c$

مثال
جد $\int \frac{6}{e^{5x}}\,dx$

الحل:
$\int 6 e^{-5x}\,dx$
$= 6 \frac{e^{-5x}}{-5} + c$
$= -\frac{6}{5} e^{-5x} + c$

مثال
جد $\int (\frac{5}{x^3} - 3e^{5x} - 4)\,dx$

الحل:
$\int 5x^{-3} - 3e^{5x} - 4\,dx$
$= \frac{5x^{-2}}{-2} - \frac{3e^{5x}}{5} - 4x + c$

* $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$

مثال*
جد $\int \frac{1}{3x+2}\,dx$

الحل:
$\frac{1}{3} \ln|3x+2| + c$

مثال*
جد $\int \frac{7}{3-5x}\,dx$

الحل:
$\frac{7}{-5} \ln|3-5x| + c$

ESAM SHIKH
0796300625

مثال

جد $\int 4x^{3} e^{x^{4}+1} \, dx$

الحل:

$$\frac{4x^{3} e^{x^{4}+1}}{c} + c$$

$$= 12 e^{x^{4}+1} + c$$

مثال
جد $\int_{-1}^{3} 3x^2(x^3+5)\,dx$

الحل:

$ص = x^3 + 5$

$dx = \frac{dص}{3x^2}$

$\int 3x^2 ص^{\frac{1}{2}} \frac{dص}{3x^2}$

$= \frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ج$

$= \frac{(x^3+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ج$

مثال ٤
جد $\int 2x\sqrt{x^2+9}\,dx$

الحل:

$\int x(x^2+9)^{\frac{1}{2}} 2x$

$ص = x^2 + 9$

$dx = \frac{dص}{2x}$ ، $x=0 \Rightarrow ص=9$ ، $x=4 \Rightarrow ص=25$

$\int x ص^{\frac{1}{2}} \frac{dص}{2x}$

$\frac{1}{2}\int ص^{\frac{1}{2}}\,dص$

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \Big|_9^{25}$

$\frac{1}{3}\sqrt{ص^3}\Big|_9^{25}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{125} - \frac{1}{3}\sqrt{9^3}$

$= \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3}$

مثال
جد $\int 12(3x^2+4x)(x^3+2x^2)^7\,dx$

الحل:

$ص = x^3 + 2x^2$

$dx = \frac{dص}{3x^2+4x}$

$\int 12(3x^2+4x) ص^7 \frac{dص}{3x^2+4x}$

$= 12\frac{ص^8}{8} + ج$

$= \frac{12}{8}(x^3+2x^2)^8 + ج$

مثال
جد $\int (3x+1)\sqrt{x^2+x+5}\,dx$

الحل:

$\int (3x+1)(x^2+x+5)^{\frac{1}{2}} dx$

$ص = x^2 + x + 5$

$dx = \frac{dص}{2x+1}$

$\int (2x+1) ص^{\frac{1}{2}} \frac{dص}{2x+1}$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^3+x+5)^3} + c$

$= \frac{2}{3}x^3\sqrt{x^3+x+5} + c$

مثال $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^5}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx$

الحل:

$\int_0^{\sqrt{7}} x^2(x^3+1)^{-\frac{1}{3}}\,dx$

$y = x^3+1$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{3x^2}$

$x=0 \Rightarrow y=1$

$x=\sqrt{7} \Rightarrow y=8$

$\int_1^8 x^2 y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{3x^2}$

$\frac{1}{3}\int_1^8 y^{-\frac{1}{3}}\,dy$

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\Big|_1^8$

$\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}\Big|_1^8$

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{y^2}\Big|_1^8$

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{8^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{1^2}$

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{64} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\times 4 - \frac{1}{2}$

$2 - \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$

مثال $\int_0^{\sqrt{2}} x^3(x^4+1)^5\,dx$

الحل:

$= \frac{1}{8}(x^4+1)^6 + c$

$= \frac{1}{8}\sqrt[4]{(x^4+1)^6} + c$

$= \frac{1}{8}\sqrt[4]{(x^4+1)^4}\sqrt[4]{(x^4+1)^2} + c$

$= \frac{1}{8}(x^4+1)^4\sqrt{x^4+1} + c$

$= \frac{1}{8}x^8\sqrt{x^4+1} + c$

$y = x^4+1$

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \frac{dy}{4x^3}$

$x=0 \Rightarrow y=1$

$x=\sqrt{2} \Rightarrow y=5$

$\int_1^5 x^3 y^5 \frac{dy}{4x^3}$

$\frac{1}{4}\int_1^5 y^5\,dy$

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}y^6\Big|_1^5$

$\frac{1}{24}y^6\Big|_1^5$

$\frac{1}{24}(5^6 - 1^6)$

$\frac{1}{24}(15625 - 1)$

$\frac{15624}{24}$

651

مثال $\int_{-1}^{1} (3x-1)\sqrt[3]{5-2x-x^2}\,dx$

الحل:

$\int_{-1}^{1} (3x-1)(-2x+5-x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$y = -2x+5-x^2$

$\frac{dy}{dx} = -4x+1 \Rightarrow dx = \frac{dy}{-4x+1}$

$x=-1 \Rightarrow y=2$

$x=1 \Rightarrow y=4$

$\int_{-1}^{1} (3x-1)\,y^{\frac{1}{3}}\,\frac{dy}{-4x+1}$

$-\frac{3}{4}\int_{-1}^{1} y^{\frac{1}{3}}\,dy$

$-\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{1}$

$-\frac{9}{16}\sqrt[3]{y^4}\Big|_{-1}^{1}$

$= -\frac{9}{16}\sqrt[3]{(1)^4} + \frac{9}{16}\sqrt[3]{(-1)^4}$

$= -\frac{9}{16}\sqrt[3]{1} + \frac{9}{16}\sqrt[3]{1}$

$= -\frac{9}{16} + \frac{9}{16}$

$= 0$

مثال $\int_0^{\sqrt{3}} x^5(x^3+1)^{-5}\,dx$

الحل:

$y = x^3+1$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{3x^2}$

$x=0 \Rightarrow y=1$

$x=\sqrt{3} \Rightarrow y=4$

$\int_1^4 x^5 y^{-5} \frac{dy}{3x^2}$

$\frac{1}{3}\int_1^4 x^3 y^{-5}\,dy$

$\frac{1}{3}\int_1^4 (y-1)\,y^{-5}\,dy$

$\frac{1}{3}\int_1^4 (y^{-4} - y^{-5})\,dy$

$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}y^{-3} + \frac{1}{4}y^{-4}\right)\Big|_1^4$

$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{4\cdot 4^4} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right)$

$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{192} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{12}\right)$

$\frac{1}{3}\left(\frac{-16+3+64}{1536}\right)$

$\frac{1}{3}\times\frac{51}{1536}$

$\frac{17}{1536}$

مثال $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

الحل:

$y = x^2+1$

$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

$x=0 \Rightarrow y=1$

$x=\sqrt{3} \Rightarrow y=4$

$\int_1^4 x^3 y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{2x}$

$\frac{1}{2}\int_1^4 x^2 y^{\frac{1}{2}}\,dy$

$\frac{1}{2}\int_1^4 (y-1)\,y^{\frac{1}{2}}\,dy$

$\frac{1}{2}\int_1^4 (y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}})\,dy$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\sqrt{y^5} - \frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right)\Big|_1^4$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\sqrt{4^5} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right)\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\times 32 - \frac{2}{3}\times 8 + \frac{4}{15}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{64}{5} - \frac{16}{3} + \frac{4}{15}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{192-80+4}{15}\right)$

$\frac{1}{2}\times\frac{116}{15}$

$\frac{58}{15}$

مثال $\int_0^{\sqrt{3}} x^3(x^2+1)^5\,dx$

الحل:

$y = x^2+1$

$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

$x=0 \Rightarrow y=1$

$x=\sqrt{3} \Rightarrow y=4$

$\int_1^4 x^3 y^5 \frac{dy}{2x}$

$\frac{1}{2}\int_1^4 x^2 y^5\,dy$

$\frac{1}{2}\int_1^4 (y-1)\,y^5\,dy$

$\frac{1}{2}\int_1^4 (y^6 - y^5)\,dy$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}y^7 - \frac{1}{6}y^6\right)\Big|_1^4$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sqrt[7]{y^7} - \frac{1}{6}\sqrt[6]{y^6}\right)\Big|_1^4$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sqrt[7]{4^7} - \frac{1}{6}\sqrt[6]{4^6} - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{6}\right)\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\times 4 - \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{42}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{6} + \frac{1}{42}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{24-28+1}{42}\right)$

$\frac{1}{2}\times\frac{-3}{42}$

$-\frac{1}{28}$

ESAM SHIKH
0796300625

مثال

جد $\int (1-3س)(س-س^{4})^{4}\,دس$

الحل:

$ص = س - س^{4}$

$دص = 1 - 3س^{2}$

$\int (1-3س^{2})(ص)^{4}\,\frac{دص}{1-3س^{2}}$

$= \frac{ص^{5}}{5} + جـ$

$= \frac{(س-س^{4})^{5}}{5} + جـ$

مثال

جد $\int 6س^{5}(2-3س^{3})^{2}\,دس$

الحل:

$ص = 2 - 3س^{3}$

$دص = -9س^{2}\,دس$

$\int 6س^{5}(ص)^{2}\,\frac{دص}{-9س^{2}}$

$\int -\frac{6}{9}س^{3}\,ص^{2}\,دص$

$= -\frac{2}{3}\,\frac{ص^{3}}{3} + جـ$

$= -\frac{2}{9}(2-3س^{3})^{3} + جـ$

مثال

جد $\int \frac{3س-9}{(س^{2}-6س)^{2}}\,دس$

الحل:

$\int (3س-9)(س^{2}-6س)^{-2}\,دس$

$ص = س^{2} - 6س$

$دص = 2س - 6$

$\int 3(س-3)\,ص^{-2}\,\frac{دص}{2(س-3)}$

$\frac{3}{2}\,\frac{ص^{-1}}{-1} + جـ$

$-\frac{3}{2}(س^{2}-6س)^{-1} + جـ$

مثال

جد $\int (س-1)(2س^{4}-4س+1)^{5}\,دس$

الحل:

$ص = 2س^{4} - 4س + 1$

$دص = 8س^{3} - 4\,دس$

$\int (س-1)\,ص^{5}\,\frac{دص}{4(2س^{3}-1)}$

$\frac{1}{4}\,\frac{ص^{6}}{6} + جـ = \frac{1}{24}(2س^{4}-4س+1)^{6} + جـ$

مثال

جد $\int_{-1}^{1} 3x^4 (x^5 - 1)^2 \, dx$

الحل:

صفر

مثال

جد $\int_{1}^{3} \frac{3x^2 - 2x}{(x^3 - x^2)^4} \, dx$

الحل:

$\int_{1}^{3} (3x^2 - 2x)(x^3 - x^2)^{-4} \, dx$

$ص = x^3 - x^2$

$\frac{dص}{dx} = 3x^2 - 2x$

$x = 1 \Rightarrow ص = 0$

$x = 3 \Rightarrow ص = 18$

$\int_{0}^{18} (3x^2 - 2x) ص^{-4} \frac{dص}{3x^2 - 2x}$

$= \int_{0}^{18} ص^{-4} \, dص = صفر$

مثال

جد $\int_{0}^{1} x^2 \sqrt[3]{x^3 - 1} \, dx$

الحل:

$\int_{1}^{0} x^2 (x^3 - 1)^{\frac{1}{3}} \, dx$

$ص = x^3 - 1$

$\frac{dص}{dx} = 3x^2$

$x = 1 \Rightarrow ص = 0$

$x = 0 \Rightarrow ص = -1$

$\int_{-1}^{0} x^2 ص^{\frac{1}{3}} \frac{dص}{3x^2}$

$\int_{-1}^{0} \frac{1}{3} ص^{\frac{1}{3}} \, dص$

$\frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^{0}$

$\frac{3}{4} \sqrt[3]{ص^4} \Big|_{-1}^{0}$

$\frac{3}{4} \sqrt[3]{0^4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(-1)^4}$

$= \frac{3}{4}$

مثال

جد $\int$ ٢س قأ (١-س^{٤}) بي

الحل:

ص = ١-س^{٤}

دي = $\frac{دص}{-٤س^{٣}}$

$\int$ ٢س قأ ص $\frac{دص}{-٤س^{٣}}$

= $-\frac{١}{٤}$ ظا ص + جـ

= $-\frac{١}{٤}$ ظا (١-س^{٤}) + جـ

الحل:

ص = س^{٤} + ١

دي = $\frac{دص}{٤س^{٣}}$

$\int$ ٢س^{٣} جا ص $\frac{دص}{٤س^{٣}}$

$\frac{١}{٤}$ × - جتا ص + جـ

$-\frac{١}{٤}$ جتا (س^{٤} + ١) + جـ

مثال

جد $\int$ (٢س-٣س^{٤}) قأ (س^{٣}-س^{٤}) بي

الحل:

ص = س^{٣} - س^{٤}

دي = $\frac{دص}{٣س^{٢}-٣س^{٣}}$

$\int$ (٣س^{٢}-٣س^{٣}) قأ ص $\frac{دص}{٣س^{٢}-٣س^{٣}}$ (-١)

= - ظا ص + جـ

= - ظا (س^{٣}-س^{٤}) + جـ

مثال

اذا علمت أن ق(-٨) = ٥ ، ق(٢٧) = -٦

فجد قيمة

$\int_{-٨}^{٢٧}$ ٣س^{٢} قَ(س^{٣}) دي

الحل:

ص = س^{٣}

دي = $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

س = -٢ ← ص = -٨

س = ٣ ← ص = ٢٧

$\int_{-٨}^{٢٧}$ ٣س^{٢} قَ(ص) $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

= ق(٢٧) - ق(-٨)

= -٦ - ٥ = -١١

مثال

جد $\int$ ٢س^{٣} جا (س^{٤}+١) دي

مثال

إذا علمت أن $\int_{0}^{3} \text{ق}(س)\,د س = ٣$

فجد قيمة

$\int_{-١}^{٠} ٨ س\, \text{ق}(س^٤ + ١)\, د س$

الحل:

$ص = س^٤ + ١$

$\frac{د ص}{د س} = ٤ س^٣$

$س = -١ \leftarrow ص = ٢$

$س = ٠ \leftarrow ص = ١$

$\int_{١}^{٢} ٨ س^٣\, \text{ق}(ص)\, \frac{د ص}{٤ س^٣}$

$٤ \times \int_{١}^{٢} \text{ق}(ص)\, د ص$

$= ٤ \times -٣ = -١٢$

مثال

جد $\int (٤-س)\, هـ^{س^{٢}-٤س+٧}\, دس$

الحل:

$ص = س^{٢}-٤س+٧$

$دص = (٢س-٤)\, دس$

$\int (٢س-٤)\, هـ^{ص}\, \frac{دص}{٢س-٤}$

$= \int هـ^{ص}\, دص$

$= هـ^{ص} + ث$

$= هـ^{س^{٢}-٤س+٧} + ث$

مثال

جد $\int (٢س+٣)\, هـ^{س^{٣}+٣س^{٢}-١}\, دس$

الحل:

$ص = س^{٣}+٣س^{٢}-١$

$دص = (٣س^{٢}+٦س)\, دس$

$\int (٢س+٣)\, هـ^{ص}\, \frac{دص}{٣س^{٢}+٦س}$

$= \frac{١}{٣} \int هـ^{ص}\, دص$

$= \frac{١}{٣} هـ^{ص} + ث$

$= \frac{١}{٣} هـ^{س^{٣}+٣س^{٢}-١} + ث$

مثال

جد $\int س\, هـ^{١-س^{٢}}\, دس$

الحل:

$ص = ١-س^{٢}$

$دص = -٢س\, دس$

$\int س\, هـ^{ص}\, \frac{دص}{-٢س}$

$= -\frac{١}{٢} \int هـ^{ص}\, دص$

$= -\frac{١}{٢} هـ^{ص} + ث$

$= -\frac{١}{٢} هـ^{١-س^{٢}} + ث$

مثال

جد $\int \frac{١٠-٥س}{س^{٢}-٥س+٧}\, دس$

الحل:

$ص = س^{٢}-٥س+٧$

$دص = (٢س-٥)\, دس$

$\int \frac{-٥(٢س-٥)}{ص}\, \frac{دص}{(٢س-٥)}$

$= -٥ \int \frac{١}{ص}\, دص$

$= -٥ \ln|ص| + ث$

$= -٥ \ln|س^{٢}-٥س+٧| + ث$

مثال

جد $\int (٦س^{٤} - ٤)(س^{٣} - ٢س + ١)^{٣}$ س

الحل:

$\int \frac{٦س^{٤} - ٤}{س^{٣} - ٢س + ١}$

ص = $س^{٣} - ٢س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ٢$

$\int \frac{٣(٢س^{٣} - ٢)}{ص} \frac{دص}{٣س^{٢} - ٢}$

$= ٢ \log_{هـ} |ص| + ج$

$= ٢ \log_{هـ} |س^{٣} - ٢س + ١| + ج$

مثال

جد $\int \frac{٨س}{س^{٢} + ٤}$ س

الحل:

ص = $س^{٢} + ٤$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$\int \frac{٤ \cancel{٨س}}{ص} \frac{دص}{\cancel{٢س}}$

$٤ \log_{هـ} |ص| + ج$

$= ٤ \log_{هـ} |س^{٢} + ٤| + ج$

الأسئلة الوزارية :

٢٠٠٨ شتوي ٤ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int س\ جا(س^2 - 3)\ دس$$

الحل :

$ص = س^2 - 3$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$$\int \frac{1}{2} جا ص\ دص$$

$$-\frac{1}{2} جتا ص + جـ$$

$$-\frac{1}{2} جتا(س^2 - 3) + جـ$$

٢٠٠٨ صيفي ٦ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int_{0}^{1} س\ هـ^{س^2}\ دس$$

الحل :

$ص = س^2$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$س = ٠ \Rightarrow ص = ٠$

$س = ١ \Rightarrow ص = ١$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{2} هـ^{ص}\ دص$$

$$\frac{1}{2} هـ^{ص} \Big|_{0}^{1}$$

$$\frac{1}{2} هـ - \frac{1}{2} هـ^{٠}$$

$$\frac{1}{2} هـ - \frac{1}{2}$$

٢٠٠٩ شتوي ٤ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int س\ جا(س^2 + 7)\ دس$$

الحل :

$ص = س^2 + 7$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$$\int \frac{1}{2} جا ص\ دص$$

$$-\frac{1}{2} جتا ص + جـ$$

$$-\frac{1}{2} جتا(س^2 + 7) + جـ$$

Esam Shikh Abdallah
0790862308

٣٠٩ صيفي ٣ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int (هـ^{س^٢} + قاس) \, دس$$

الحل :

$$\int هـ^{س^٢} \, دس + \int قاس \, دس$$

$$\frac{هـ^{س^٢}}{٢س} + ظا س + جـ$$

٣٠٩ صيفي ٥ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int س \, جا^٣ س \, دس$$

الحل :

$$ص = س^٢$$

$$\frac{دص}{٢س} = دس$$

$$\int س \, جا^٣ س \, \frac{دص}{٢س}$$

$$٣ \int جا^٢ ص \, دص$$

$$٣ \int جا ص \, دص$$

$$-٣ \, جتا ص + جـ$$

$$-٣ \, جتا س^٢ + جـ$$

٢٠١٠ شتوي ٤ علامات

جد $\int (e^{x} + \sec^2 4x)\, dx$

الحل:

$\int e^{x} dx + \int \sec^2 4x\, dx$

$e^{x} + \frac{\tan 4x}{4} + c$

٢٠١٠ شتوي ٦ علامات

جد $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+x-1}}\, dx$

الحل:

$\int (4x+1)(x^2+x-1)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$u = x^2+x-1$

$du = 2x+1$

$\int (4x+1) u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{2x+1}$

$2u^{\frac{1}{2}} + c$

$2\sqrt{x^2+x-1} + c$

٢٠١٠ صيفي ٥ علامات

جد التكامل الآتي

$\int (x+1) e^{x^2+2x}\, dx$

الحل:

$u = x^2+2x$

$du = 2x+2$

$\int (x+1) e^{u} \frac{du}{2(x+1)}$

$\frac{1}{2} e^{u} + c$

$\frac{1}{2} e^{x^2+2x} + c$

Esam Shikh Abdallah
0790862308

١١ . ٣ شتوي ٥ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int \frac{٣س^{٢} + ١}{(س^{٣} + س + ٧)^{٥}} \, دس$$

الحل :

$$\int (٣س^{٢} + ١)(س^{٣} + س + ٧)^{-٥} \, دس$$

$$ص = س^{٣} + س + ٧$$

$$دص = (٣س^{٢} + ١) \, دس$$

$$\int (ص)^{-٥} \, دص$$

$$\frac{ص^{-٤}}{-٤} + ج$$

$$-\frac{١}{٤}(س^{٣} + س + ٧)^{-٤} + ج$$

٢٠١١ صيفي

إذا كان $ق'(س) = ٥$ ، $ق(١) = ٢$

فإن قيمة $\int_{١}^{٠} ق(س+١)\,د س$ تساوي

أ) ١ ب) ٣ ج) ٤ د) ٥

٢٠١١ صيفي ٥ علامات

جد التكامل الآتي:

$$\int \sqrt[٣]{٦س - س^{٢}}\,(٦-٢س)\,د س$$

الحل:

$$\int (٦س - س^{٢})^{\frac{١}{٣}}\,(٦-٢س)\,د س$$

$ص = ٦س - س^{٢}$

$د ص = (٦-٢س)\,د س$

$$\int ص^{\frac{١}{٣}}\,د ص$$

$$\frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$$

$$\frac{٣}{٤}(٦س - س^{٢})^{\frac{٤}{٣}} + ج$$

٢٠١٢ شتوي ٥ علامات

جد التكامل الآتي:

$$\int \frac{٣س^{٢}+٣}{جتا^{٢}(س^{٣}+٣س)}\,د س$$

الحل:

$$\int (٣س^{٢}+٣)\,قا^{٢}(س^{٣}+٣س)\,د س$$

$ص = س^{٣}+٣س$

$$د س = \frac{د ص}{٣س^{٢}+٣}$$

$$\int (٣س^{٢}+٣)\,قا^{٢} ص\,\frac{د ص}{٣س^{٢}+٣}$$

$ظا ص + ج$

$ظا(س^{٣}+٣س) + ج$

٢٠١٣ صيفي ٥ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int \frac{٣س^{٤} - ٦}{٥س^{٣} - ٦س + ٩} \, دس$$

الحل :

$$\int (٣س^{٤} - ٦)(س^{٣} - ٦س + ٩)^{-\frac{١}{٥}} \, دس$$

$ص = س^{٣} - ٦س + ٩$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٤} - ٦$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٤} - ٦$

$$\int (٣س^{٤} - ٦) ص^{-\frac{١}{٥}} \frac{دص}{٣س^{٤} - ٦}$$

$$\frac{٥}{٤} ص^{\frac{٤}{٥}} + جـ$$

$$\frac{٥}{٤} (س^{٣} - ٦س + ٩)^{\frac{٤}{٥}} + جـ$$

٢٠١٣ شتوي ٥ علامات

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{٦س - ٤}{٣س^{٢} - ٤س + ١} \, دس$$

الحل :

$ص = ٣س^{٢} - ٤س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٦س - ٤$

$$\int \frac{٦س - ٤}{ص} \frac{دص}{٦س - ٤}$$

$$لو_{هـ} |ص| + جـ$$

$$لو_{هـ} |٣س^{٢} - ٤س + ١| + جـ$$

٢٠١٣ صيفي ٤ علامات

جد التكامل الآتي

$$\int (هـ^{٣س} - \frac{٥}{س} + قا^{٢}س) \, دس$$

الحل :

$$\int هـ^{٣س} - \int \frac{٥}{س} + \int قا^{٢}س$$

$$\frac{هـ^{٣س}}{٣} - ٥ لو_{هـ} |س| + ظا س + جـ$$

Esam Shikh Abdallah
0790862308

٢٠١٣ صيفي ٥ علامات

جد التكامل الآتي :

$\int 3س \sqrt{س^2+3}$ دس

الحل:

$\int 3س (س^2+3)^{\frac{1}{2}}$ دس

ص = $س^2+3$

$\frac{دص}{3س}$ = دس

$\int 3س ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{3س}$

$\int ص^{\frac{1}{2}}$ دص

$\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ج$

$\frac{2}{3} (س^2+3)^{\frac{3}{2}} + ج$

٢٠١٤ شتوي ٥ علامات

جد التكامل الآتي

$\int س^2$ جا $(س^3-1)$ دس

الحل:

ص = $س^3-1$

$\frac{دص}{3س^2}$ = دس

$\int س^2$ جا ص $\frac{دص}{3س^2}$

$\frac{1}{3}$ $\int$ جا ص + ج

$-\frac{1}{3}$ جتا ص + ج

$-\frac{1}{3}$ جتا $(س^3-1)$ + ج

Esam Shikh Abdallah
0790862308

٢٠١٤ شتوي ، ٤ علامات

اذا كانت $ق'(س) = ٦هـ^{٣س} - \frac{١}{س+هـ}$

فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن النقطة (٠، ١) تقع على منحنى الاقتران ق.

الحل:

$ق(س) = \int (٦هـ^{٣س} - \frac{١}{س+هـ}) \, دس$

$= \frac{٦هـ^{٣س}}{٣} - لو_{هـ}|س+هـ| + جـ$

$= ٢هـ^{٣س} - لو_{هـ}|س+هـ| + جـ$

$١ = ٢هـ^{٠} - لو_{هـ}|٠+هـ| + جـ$

$١ = ٢ - ١ + جـ$

$١ = ١ + جـ$

$جـ = ٠$

$ق(س) = ٢هـ^{٣س} - لو_{هـ}|س+هـ| - ١$

٢٠١٤ صيفي

جد التكامل الآتي

$\int \frac{١٠س - ١}{\sqrt{٥س^{٢} - س + ١}} \, دس$

الحل:

$\int (١٠س - ١)(٥س^{٢} - س + ١)^{-\frac{١}{٢}} \, دس$

$ص = ٥س^{٢} - س + ١$

$دص = ١٠س - ١$

$دس = \frac{دص}{١٠س - ١}$

$\int (١٠س - ١) ص^{-\frac{١}{٢}} \frac{دص}{١٠س - ١}$

$= \int ص^{-\frac{١}{٢}} \, دص$

$= ٢ص^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$= ٢(٥س^{٢} - س + ١)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

المستوى (٤) الوحدة (التكامل وتطبيقاته) عصام الشيخ

التخصص (الأدبي والمعلوماتية) الدرس (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٥ شتوي

جد التكامل الآتي :

$$\int_{0}^{1} س^{2} (س^{3} - 1)^{4} \, دس$$

الحل :

$ص = س^3 - 1$

$دص = 3 س^2 \, دس$

$\frac{دص}{3} = س^2 \, دس$

$س = 0 \Rightarrow ص = -1$

$س = 1 \Rightarrow ص = 0$

$$\int_{-1}^{0} ص^4 \frac{دص}{3}$$

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^{0} ص^4 \, دص$$

$$\frac{1}{3} \left[\frac{ص^5}{5} \right]_{-1}^{0}$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{3} \times \frac{-1}{5} \right)$$

$$= 0 - \frac{-1}{15} = \frac{1}{15}$$

٣.١٥ صيغي

إذا كان $ق(٨) = ١٤$ ، $ق(-١) = -٥$

فجد قيمة

$$\int_{-١}^{٢} ٣س^{٢} \, ق'(س^{٣}) \, د س .$$

الحل:

$ص = س^{٣}$

$د ص = ٣س^{٢} \, د س$

$س = -١ \Rightarrow ص = -١$

$س = ٢ \Rightarrow ص = ٨$

$$\int_{-١}^{٨} ق'(ص) \, د ص$$

$$= ق(ص) \Big|_{-١}^{٨}$$

$$= ق(٨) - ق(-١)$$

$$= ١٤ - (-٥) = ١٩$$

Esam Shikh Abdallah
0790862308

التخصص(الأدبي) الوحدة(١) (التكامل وتطبيقاته) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٤) (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٦ شتوي

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{6س - 8}{\sqrt[3]{3س^2 - 8س + 9}} \, دس$$

الحل:

$$= \int (6س - 8)(3س^2 - 8س + 9)^{-\frac{1}{3}} \, دس$$

$ص = 3س^2 - 8س + 9$

$دص = (6س - 8) دس$

$$\int (6س - 8)\, ص^{-\frac{1}{3}} \frac{دص}{6س - 8}$$

$$= \frac{3}{2} ص^{\frac{2}{3}} + جـ$$

$$= \frac{3}{2} (3س^2 - 8س + 9)^{\frac{2}{3}} + جـ$$

٢٠١٦ شتوي (٤ علامات)

إذا كان $ق(س) = \int \frac{1}{س + هـ^2} + 8هـ^{3س}$

ضع $س \neq -هـ^2$ فجد قاعدة الاقتران ق علما بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0، هـ)$.

الحل:

$$ق(س) = \int \frac{1}{س + هـ^2} + 8هـ^{3س} \, س$$

$$= لو_{هـ} |س + هـ^2| + \frac{8هـ^{3س}}{3} + جـ$$

$$هـ = لو_{هـ} |0 + هـ^2| + \frac{8هـ^{0}}{3} + جـ$$

$$هـ = 2 + \frac{8}{3} + جـ$$

$$جـ = -\frac{1}{3}$$

$$ق(س) = لو_{هـ} |س + هـ^2| + \frac{8}{3} هـ^{3س} - \frac{1}{3}$$

Esam Shikh Abdallah
0790862308

٣.٩ مثال

إذا كان ص = $\int_{هـ}^{هـ^{٢س}} دى$ فإن $\frac{دص}{دس}$ =

(أ) $٢هـ^{٢س}$ (ب) $هـ^{٢س}$ (ج) $\int_{هـ}^{هـ^{٢س}} دى + جـ$ (د) $٢هـ^{٢س}$

٣.١٥ مثال (٤ علامات)

إذا كان هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق وكانت

$ق(س) = \frac{٣}{١+س^{٢}}$ ، $س \neq -١$ وكان منحنى

الاقتران هـ يمر بالنقطة (٠، ٢) فجد

قاعدة الاقتران هـ.

الحل:

$هـ(س) = \int \frac{٣}{١+س^{٢}} س$

$= ٣ \text{ظا}^{-١} س + جـ$

$٢ = ٣ \text{ظا}^{-١} ٠ + جـ$

$٢ = جـ$

$\therefore هـ(س) = ٣ \text{ظا}^{-١} س + ٢$

التخصص(الأدبي) الوحدة(١) (التكامل وتطبيقاته) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٤) (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٦ صيفي (٣ علامات)

جد التكامل التالي

$$\int \left(\frac{1}{3س} + هـ^{س} + \text{جتا}س \, \text{ظا}س \right) دس$$

الحل:

$$\int \frac{1}{3س} دس + \int هـ^{س} دس + \int \frac{\text{جتا}س}{\text{جتا}س} \text{جا}س \, دس$$

$$\frac{1}{3} \ln|3س| + هـ^{س} - \text{جتا}س + جـ$$

$$\frac{1}{3} \ln|3س| - هـ^{س} - \text{جتا}س + جـ$$

٢٠١٦ صيفي (٥ علامات)

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{6س + 4}{\text{جتا}^2(3س^2 + 4س)} دس$$

الحل:

$$\int (6س + 4) \, \text{قا}^2(3س^2 + 4س) \, دس$$

$ص = 3س^2 + 4س$

$دص = (6س + 4) دس$

$$\int (6س + 4) \, \text{قا}^2 ص \frac{دص}{6س + 4}$$

$$\int \text{قا}^2 ص \, دص$$

$$\text{ظا}ص + جـ$$

$$\text{ظا}(3س^2 + 4س) + جـ$$

٢٠١٦ صيفي (٤ علامات)

إذا كان $ق(س)$ اقترانا وكان $ق(2) = 9$ ، $ق(1) = 5$

$$\int_{1}^{2} (4هـ^{2س-1} + 8 ق(س)) دس = 8$$

حيث $أ$ ثابت، جد قيمة $أ$ بدلالة $هـ$.

الحل:

$$\int_{1}^{2} 4هـ^{2س-1} دس + \int_{1}^{2} ق(س) دس = 8$$

$$4هـ^{2س-1} \Big|_{1}^{2} + أ \left(ق(2) - ق(1) \right) = 8$$

$$4هـ^{3} - 4هـ + أ(9 - 5) = 8$$

$$4هـ^{3} - 4هـ + 4أ = 8$$

$$4هـ^{3} + 4أ = 12 \quad \div 4$$

$$هـ + أ = 3$$

$$أ = 3 - هـ \leftarrow$$

ESAM SHIKH
0796300625

التخصص(الأدبي) الوحدة(١) (التكامل وتطبيقاته) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٤) (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٧ شتوي

جد التكامل التالي

$$\int \frac{٨س + ٤}{(س^٢ + س - ١)^٣} \, دس$$

الحل :

$$\int (٨س + ٤)(س^٢ + س - ١)^{-٣} \, دس$$

$ص = س^٢ + س - ١$

$دص = (٢س + ١) \, دس$

$$\int ٤ (٢س + ١)(ص)^{-٣} \frac{دص}{٢س + ١}$$

$$٤ \int ص^{-٣} \, دص$$

$$٤ \frac{ص^{-٢}}{-٢} + جـ$$

$$-٢ (س^٢ + س - ١)^{-٢} + جـ$$

ESAM SHIKH
0796300625

التخصص(أدبي) الوحدة(١) (التكامل وتطبيقاته) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس( ) (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٧ صيفي

أجب مما يلي

$\int_{1}^{2} ٤س^{٣}\, ق'(س^{٤})\, س$ حيث

$ق(١٦) = ١٤$ ، $ق(١) = -٦$

الحل:

$ص = س^{٤}$

$ع = \frac{د ص}{٤س^{٣}}$

$س = ١ \leftarrow ص = ١$	$ع = -١ \leftarrow ص = ١$
$س = ٢ \leftarrow ص = ١٦$	$ع = ٢ \leftarrow ص = ١٦$

$\int_{1}^{16} ٤س^{٣}\, ق'(ص)\, \frac{د ص}{٤س^{٣}}$

$\int_{1}^{16} ق'(ص)$

$ق(١٦) - ق(١)$

$١٤ - -٦ = ٢٠$

٢٠١٨ شتوي قديم

$\int س\, جا(س^{٢}+٧)\, س$

الحل:

$ص = س^{٢}+٧$

$ع = \frac{د ص}{٢س}$

$\int س\, جا ص\, \frac{د ص}{٢س}$

$-\frac{١}{٢}$ جتا ص + ج

$-\frac{١}{٢}$ جتا $(س^{٢}+٧)$ + ج .

٢٠١٨ شتوي ضبه

$\int$ جا $(٣ع+١)$ ع يساوي

أ) $\frac{-جتا(٣ع+١)}{٣} + ج$

ب) -٣ جتا $(٣ع+١) + ج$

ج) $\frac{جتا(٣ع+١)}{٣} + ج$

د) ٣ جتا $(٣ع+١) + ج$

٢٠١٨ شتوي ضبه

$\int (٤س^{٣}+١)\, هـ^{س^{٤}+س}\, س$

الحل:

$ص = س^{٤}+س$

$ع = \frac{د ص}{٤س^{٣}+١}$

$\int (٤س^{٣}+١)\, هـ^{ص}\, \frac{د ص}{٤س^{٣}+١}$

$\int هـ^{ص}\, ص$

$هـ^{ص} + ج$

$= هـ^{س^{٤}+س} + ج$.

التخصص(ادبي) الوحدة(١) (التكامل وتطبيقاته) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس( ) (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٨ شتوي جديد

جـ) $\int (3\sec^2 س + \frac{2س+1}{س^2+س} - 3س^2) د س$

الحل:

$\int 3\sec^2 س د س + \int \frac{2س+1}{س^2+س} د س - \int 3س^2 د س$

$3\tan س + \ln|س^2+س| - س^3 + جـ$