مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي

ملخص القوانين

① قاعدة المشتقة

① $ق(س) = هـ^{س} \Leftarrow قَ(س) = هـ^{س}$

② $ق(س) = هـ^{ل(س)} \Leftarrow قَ(س) = لَ(س) \times هـ^{ل(س)}$

برهان ①

$ق(س) = هـ^{س}$

$ص = هـ^{س}$

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} هـ^{س}$

$لو_{هـ} ص = س$

$\frac{صَ}{ص} = ١$

$صَ = ص$

$قَ(س) = هـ^{س}$

مثال

$ق(س) = هـ^{س} + لو_{هـ}(س^{٣}+٥)$

جد قَ(س)

الحل:

$قَ(س) = هـ^{س} + \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٥}$

مثال

$ق(س) = هـ^{٧-٢س^{٣}}$ جد قَ(س)

الحل:

$قَ(س) = (-٦س^{٢})\, هـ^{٧-٢س^{٣}}$

مثال

$ق(س) = هـ^{\frac{١}{س}}$ جد قَ(س)

الحل:

$قَ(س) = \frac{-١}{س^{٢}}\, هـ^{\frac{١}{س}}$

مثال

$ق(س) = هـ^{جاس}$ جد قَ(س)

الحل:

$قَ(س) = جتاس \times هـ^{جاس}$

مثال

$ق(س) = س^{٤}\, هـ^{٣س}$ جد قَ(س)

الحل:

$قَ(س) = (س^{٤})(٣هـ^{٣س}) + (هـ^{٣س})(٤س^{٣})$

مثال

$ق(س) = لو_{هـ} هـ^{س^{٣}}$ جد قَ(س)

الحل:

$ق(س) = س^{٣}$

$قَ(س) = ٣س^{٢}$.

مثال

$ق(س) = هـ^{لو_{هـ} س^{٤}}$ جد قَ(س)

الحل:

$ق(س) = س^{٤}$

$قَ(س) = ٤س^{٣}$.

مثال

$ق(س) = س \; لو_{هـ} هـ^{س^٢}$ جد $ق\grave{}(س)$

الحل:

$ق(س) = س \times س^٢$

$= س^٣$

$\Leftarrow ق\grave{}(س) = ٣س^٢$.

مثال

$ق(س) = هـ^{٣ لو_{هـ}(١+جاس)}$ جد $ق\grave{}(س)$

الحل:

$ق(س) = هـ^{لو_{هـ}(١+جاس)^٣}$

$ق(س) = (١+جاس)^٣$

$ق\grave{}(س) = ٣(١+جاس)^٢ \times (جتاس)$

مثال

$ص = س + هـ^{٩س}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = ١ + ٩ هـ^{٩س}$

مثال

$ص = س^٣ + هـ^{٦-٥س^٤}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = ٣س^٢ + (-٢٠س^٣) هـ^{٦-٥س^٤}$

مثال

$ص = جا هـ^{س^٢}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = جتا هـ^{س^٢} \times ٢هـ^{٣س}$.

مثال

$ص = \sqrt{١+هـ^{س^٢}}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢هـ^{س^٢}}{٢\sqrt{١+هـ^{س^٢}}}$.

مثال

$ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو_{هـ}\sqrt{س}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^٢} هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{\frac{١}{٢\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}$

$= \frac{-١}{س^٢} هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢س}$.

مثال

$ص = هـ^٥ + لو_{هـ} قاس$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = ٠ + \frac{قاس ظاس}{قاس} = ظاس$

مثال

$ص = هـ^{٤ لو_{هـ}(س^٣+٢)}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٣+٢)^٤}$

$\text{ص} = (\text{س}^٣+٢)^٤$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤(\text{س}^٣+٢)^٣(٣\text{س}^٢)$

مثال

$\text{ص} = \frac{١ + \text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٥\text{س}}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$\text{ص} = \frac{١}{\text{هـ}^{٥\text{س}}} + \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٥\text{س}}}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{-٥\text{س}} + \text{هـ}^{-٣\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٥\,\text{هـ}^{-٥\text{س}} - ٣\,\text{هـ}^{-٣\text{س}}$

مثال

$\text{ص} = \text{هـ}^٢ + \text{س}^٣\,\text{هـ}^{\text{جاس}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠ + (\text{س}^٣)(\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}) + \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٣\text{س}^٢$

مثال

$\text{ص} = (\text{هـ}^{٤\text{س}+٥})^٦$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$\text{ص} = \text{هـ}^{٢٤\text{س}+٣٠}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢٤\,\text{هـ}^{٢٤\text{س}+٣٠}$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{دس}}{١+\text{ظا}^٢\text{س}}$

وكان $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = ٢\text{هـ} + ١$ جد قيمة أ

الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ}\,\frac{(-\text{جاس})}{\text{جتاس}} + ٠$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}} - \text{أ}\,\text{ظاس}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = \text{قا}^٢\frac{\pi}{٤}\,\text{هـ}^{\text{ظا}\frac{\pi}{٤}} - \text{أ}\,\text{ظا}\frac{\pi}{٤}$

$٢\text{هـ} + ١ = ٢\,\text{هـ}^١ - \text{أ}$

$٢\text{هـ} + ١ = ٢\text{هـ} - \text{أ}$

$\Leftarrow ١ = -\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -١}$

مثال

إذا كان $\text{هـ}^{\text{ص س}} = \text{س} - \text{ص}$ فأثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^٢ - \text{ص س} + ١}{\text{س}^٢ - \text{س ص} + ١}$

الحل:

$\text{هـ}^{\text{ص س}}\left(\text{ص} \times ١ + \text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) = ١ - \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$(\text{س} - \text{ص})\left(\text{ص} + \text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) = ١ - \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\text{ص س} - \text{ص}^٢ + \text{س}^٢\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{س ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ - \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

س^2 دص/دس − س ص دص/دس + دص/دس = ص^2 − ص س + ١

دص/دس (س^2 − س ص + ١) = ص^2 − ص س + ١

دص/دس = (ص^2 − ص س + ١) / (س^2 − س ص + ١)

مثال

إذا كان ق(س) = ٣$^{\text{ل(س)}}$ حيث ل(س) قابل للاشتقاق فأثبت أن

قَ(س) = ٣$^{\text{ل(س)}}$ × لَ(س) لوهـ ٣

الحل:

ق(س) = ٣$^{\text{ل(س)}}$

لوهـ ق(س) = لوهـ ٣$^{\text{ل(س)}}$

لوهـ ق(س) = ل(س) × لوهـ ٣

قَ(س) / ق(س) = لوهـ ٣ × لَ(س)

قَ(س) = ق(س) × لوهـ ٣ × لَ(س)

= ٣$^{\text{ل(س)}}$ × لوهـ ٣ × لَ(س)

مثال

إذا كان ∫قَ(س) دس = هـ$^{\text{١−س}^2}$ + ٤هـ ، قَ(ب) = −٢ب جد قيمة ب

الحل:

قَ(س) = −٢س هـ$^{\text{١−س}^2}$ + صفر

قَ(ب) = −٢ب هـ$^{\text{١−ب}^2}$

−٢ب = −٢ب هـ$^{\text{١−ب}^2}$

١ = هـ$^{\text{١−ب}^2}$

⇐ ١ − ب^2 = صفر

١ = ب^2

⇐ ب = ±١

مثال

إذا كان ص = هـ$^{\text{م س}}$ جد قيمة م التي تحقق صً − ٥صَ + ٦ص = صفر

الحل:

صَ = م هـ$^{\text{م س}}$

صً = م^2 هـ$^{\text{م س}}$

⇐

م^2 هـ$^{\text{م س}}$ − ٥م هـ$^{\text{م س}}$ + ٦ هـ$^{\text{م س}}$ = صفر

هـ$^{\text{م س}}$ (م^2 − ٥م + ٦) = صفر

م^2 − ٥م + ٦ = صفر

(م − ٣)(م − ٢) = صفر

م = ٣ ، م = ٢ .

قاعدة التكامل

① $\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

② $\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\, \text{دس} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int (\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{\text{س}})\, \text{دس}$

الحل:

$\text{هـ}^{٢}\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{٥\text{س}}\, \text{دس}$

الحل:

$\dfrac{\text{هـ}^{٥\text{س}}}{٥} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{٣-٤\text{س}}\, \text{دس}$

الحل:

$\dfrac{\text{هـ}^{٣-٤\text{س}}}{-٤} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{٣\text{س}}(١ + \text{هـ}^{٢\text{س}})\, \text{دس}$

الحل،

$\int (\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{هـ}^{٥\text{س}})\, \text{دس}$

$= \dfrac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{٣} + \dfrac{\text{هـ}^{٥\text{س}}}{٥} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int_{٠}^{١} (١ + \text{هـ}^{\text{س}})^{٢}\, \text{دس}$

الحل:

$\int_{٠}^{١} (١ + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{٢\text{س}})\, \text{دس}$

$= \text{س} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \dfrac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢} \Big|_{٠}^{١}$

$= ١ + ٢\text{هـ} + \dfrac{\text{هـ}^{٢}}{٢} - (٠ + ٢\text{هـ}^{٠} + \dfrac{\text{هـ}^{٠}}{٢})$

$= ١ + \dfrac{٥}{٢}\text{هـ} - ٢ - \dfrac{١}{٢}$

$= -\dfrac{٣}{٢} + \dfrac{٥}{٢}\text{هـ}$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{٧\text{س}}\, \text{دس}$

الحل:

$\dfrac{\text{هـ}^{٧\text{س}}}{٧} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int_{١}^{٣} \text{هـ}^{٤}\, \text{دس}$

الحل:

$\text{هـ}^{٤} \times (٣-١) = ٢\text{هـ}^{٤}$

مثال

جد $\int (\text{هـ}^{٢\text{س}+٥})^{٣}\, \text{دس}$

الحل:

$$\int \text{هـ}^{\text{٤س}+١٠}\ \text{دس}$$

$$= \frac{\text{هـ}^{\text{٤س}+١٠}}{٤} + \text{جـ}$$

مثال

جد $\int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\text{هـ}-١}\ \text{دس}$

الحل:

$$\frac{١}{\text{هـ}-١} \times (\text{هـ}^{٢}-١)$$

$$= \frac{(\cancel{\text{هـ}-١})(\text{هـ}+١)}{(\cancel{\text{هـ}-١})} = \text{هـ}+١$$

مثال

جد $\int \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}} - ٢٧}{\text{هـ}^{\text{س}} - ٣}\ \text{دس}$

الحل:

$$\int \frac{(\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}-٣})(\text{هـ}^{\text{٢س}}+٣\text{هـ}^{\text{س}}+٩)}{(\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}-٣})}\ \text{دس}$$

$$= \int (\text{هـ}^{\text{٢س}} + ٣\text{هـ}^{\text{س}} + ٩)\ \text{دس}$$

$$= \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{٢} + ٣\text{هـ}^{\text{س}} + \text{٩س} + \text{جـ}$$

مثال

جد $\int^{١} ٣\text{هـ}^{\text{٣س}}\ \text{دس}$

الحل:

$$\left.\frac{٣\text{هـ}^{\text{٣س}}}{٣}\right|_{٠}^{١}$$

$$= \text{هـ}^{٣} - \text{هـ}^{٠} = \text{هـ}^{٣} - ١$$

مثال

جد $\int \frac{٤\text{هـ}^{\text{٤س}} - ٣}{\text{هـ}^{\text{٤س}} - \text{٣س}}\ \text{دس}$

الحل:

$$\text{لو}\left|\text{هـ}^{\text{٤س}} - \text{٣س}\right| + \text{جـ}$$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{٥+\text{لو جتا س}}\ \text{دس}$

الحل:

$$\int \text{هـ}^{٥} \times \text{هـ}^{\text{لو جتا س}}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{هـ}^{٥} \times \text{جتا س}\ \text{دس}$$

$$= \text{هـ}^{٥}\ \text{جا س} + \text{جـ}$$

مثال

جد $\int \text{٣س}\ \text{هـ}^{٢+\text{لو س}}\ \text{دس}$

الحل:

$$\int \text{٣س} \times \text{هـ}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{لو س}}\ \text{دس}$$

$$= \int ٣\text{هـ}^{٢}\text{س} \times \text{س}\ \text{دس}$$

$= \int 3\text{هـ}^{2}\,\text{س}^{3}\,\text{دس}$

$= \frac{3\text{هـ}^{2}\,\text{س}^{4}}{4} + \text{جـ}$

مثال

إذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = \text{جاس} + \text{هـ}^{2\text{س}}$

$\text{ق}(0) = \frac{1}{4}$ ، $\text{ق}'(0) = \frac{1}{2}$

فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس}$

$= \int (\text{جاس} + \text{هـ}^{2\text{س}})\,\text{دس}$

$= -\text{جتاس} + \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(0) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = -\text{جتا}\,0 + \frac{\text{هـ}^{0}}{2} + \text{جـ}$

$= -1 + \frac{1}{2} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = 1$

$\Leftarrow$

$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جتاس} + \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + 1$

$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس}$

$= \int -\text{جتاس} + \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + 1\,\text{دس}$

$= -\text{جاس} + \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{4} + \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(0) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} = -\text{جا}\,0 + \frac{\text{هـ}^{0}}{4} + 0 + \text{جـ}$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{جـ} = \text{صفر}$

$\Leftarrow$

$\text{ق}(\text{س}) = -\text{جاس} + \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{4} + \text{س}$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{5\text{س}} \sqrt{\text{هـ}^{10\text{س}} + 4\text{هـ}^{5\text{س}} + 4}\,\text{دس}$

الحل:

$\int \text{هـ}^{5\text{س}} \left((\text{هـ}^{5\text{س}} + 2)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{5\text{س}} (\text{هـ}^{5\text{س}} + 2)\,\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{6\text{س}} + 2\text{هـ}^{5\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{هـ}^{6\text{س}}}{6} + \frac{2\text{هـ}^{5\text{س}}}{5} + \text{جـ}$

مثال

جد معكوس المشتقة للاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = 3\,\text{هـ}^{2\text{س}}$

الحل:

$\text{ق}(\text{س}) = \int 2\,\text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{2\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + \text{جـ}$ ، $\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{جـ}$

مثال

جد معكوس المشتقة للاقتران

$ق(س) = -٣ هـ^{١-٣س}$

الحل:

$م(س) = \int -٣ هـ^{١-٣س} ءس$

$= \frac{-٣ هـ^{١-٣س}}{-٣} + جـ$

$= هـ^{١-٣س} + جـ$.

مثال

جد معكوس المشتقة للاقتران

$ق(س) = هـ^{مس}$

الحل:

$م(س) = \int هـ^{مس} ءس$

$= \frac{هـ^{مس}}{م} + جـ$

الأسئلة الوزارية :

٢٠٠٨ شتوي (٥علامات)

جد $\int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢} \text{هـ}^{\text{س}}(٩-٤\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$

الحل :

$\int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢} ٩\text{هـ}^{\text{س}} - ٤\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{دس}$

$\left. ٩\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{٤\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢} \right|_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢}$

$= (٩\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢} - ٢\text{هـ}^{٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢}) - (٩\text{هـ}^{٠} - ٢\text{هـ}^{٠})$

$= ٩\times٢ - ٢\times٤ - (٩-٢)$

$= ١٨ - ٨ - ٧$

$= ١٠ - ٧$

$= ٣$

٢٠٠٨ صيفي (٥علامات)

إذا كانت

$\text{ص} = \text{أ}\,\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

حيث أ ثابت وكانت

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = \text{هـ}^{٣} + ١$

فجد قيمة أ .

الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{أ}\,\text{هـ}^{٢\text{س}} + (\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{١}{\text{س}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = ٢\text{أ}\,\text{هـ}^{٢} + \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}١) \times \frac{١}{١}$

$\text{هـ}^{٣} + ١ = ٢\text{أ}\,\text{هـ}^{٢} + ١$

$\text{هـ}^{٣} = ٢\text{أ}\,\text{هـ}^{٢}$

$\frac{\text{هـ}}{٢} = \text{أ}$

٢٠٠٩ شتوي (٥علامات)

إذا كانت

$\text{ص} = \text{هـ}^{٤\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}\,\text{س} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{دس}}{١+\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

فجد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$

الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{هـ}^{٤\text{س}} + \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا}\,\text{س}} + ٠$

$= ٤\text{هـ}^{\frac{٤\pi}{٤}} + \frac{\text{قا}^{٢}\frac{\pi}{٤}}{\text{ظا}\frac{\pi}{٤}}$

$= ٤\,\text{هـ}^{\pi} + \frac{٢}{١}$

$= ٤\,\text{هـ}^{\pi} + ٢$

٢٠٠٩ صيفي

$\int \left(\frac{\text{قاس}}{\text{قتاس}} + \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}}\right) \text{دس} =$

أ) $\text{ظاس} - \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$ ب) $-\text{ظاس} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

جـ) $\text{ظاس} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$ د) $\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

الحل :

٢٠٠٩ صيفي (٥ علامات)

إذا كانت

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{قتاس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{دس}}{١+\text{ظا}^٢\text{س}}$

حيث أ ثابت وكان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = ٢\text{هـ} + ١$

فجد قيمة أ .

الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ}\frac{(-\text{جاس})}{\text{قتاس}} + ٠$

$٢\text{هـ}+١ = \text{قا}^٢\frac{\pi}{٤}\,\text{هـ}^{\text{ظا}\frac{\pi}{٤}} + \text{أ} \times -\text{ظا}\frac{\pi}{٤}$

$٢\text{هـ}+١ = ٢\,\text{هـ} - \text{أ}$

$١ = -\text{أ}$

$\text{أ} = -١$

٢٠١٠ شتوي ٥ علامات

اذا كانت

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أ قتاس}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} + \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{س}}{٢+\text{جاس}}$

وكان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٢}} = -٢$ فجد قيمة أ

الحل:

$\frac{دص}{دس} = (-أجاس)\, هـ^{أجتاس} + \frac{جتاس}{جاس} + ٠$

$-٢ = -أجا\frac{\pi}{٢}\, هـ^{أجتا\frac{\pi}{٢}} + ظتا\frac{\pi}{٢}$

$-٢ = -أ\, هـ^{٠} + ٠$

$-٢ = -أ$

$أ = ٢$

$هـ = -هـ + \frac{١}{٢}أ$

$٢هـ = \frac{١}{٢}أ$

$٤هـ = أ$

٢٠١١ شتوي

$\int_{٠}^{٣} (٣س^{٢} - \int_{٢}^{٢} هـ^{س}\, دس)\, دس =$

أ) $٢٧ - هـ^{٣}$ ب) $٢٨ - هـ^{٣}$

جـ) ٢٧ د) ٢٤

الحل:

٢٠١٠ صيفي (٤علامات)

إذا كان

$ق(س) = هـ^{\frac{١}{س}} + أ\, لوهـ \sqrt{س}$

وكان $قَ(١) = هـ$ جد قيمة أ .

الحل:

$قَ(س) = \frac{-١}{س^{٢}}\, هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢}أ\, \frac{١}{س}$

$قَ(١) = -١\, هـ + \frac{١}{٢}أ$

٢٠١٣ شتوي   ٦ علامات

إذا كان $ص = ٤^{ق(س)}$ وكان ق(س) قابل للاشتقاق، فأثبت أن

$\frac{دص}{دس} = ٤^{ق(س)} \times لو_{هـ}٤ \times ق'(٤)$

الحل:

$ص = ٤^{ق(س)}$

$لو_{هـ}ص = لو_{هـ}٤^{ق(س)}$

$لو_{هـ}ص = ق(س)\ لو_{هـ}٤$

$\frac{\frac{دص}{دس}}{ص} = لو_{هـ}٤\ ق'(س)$

$\frac{دص}{دس} = لو_{هـ}٤ \times ق'(س) \times ص$

$\frac{دص}{دس} = لو_{هـ}٤ \times ق'(س) \times ٤^{ق(س)}$

وهو المطلوب.

٢٠١٣ شتوي

قيمة $\int_{0}^{1} \frac{هـ^س}{هـ^س+1}\, دس =$

أ) ١   ب) $لو_{هـ}(هـ+١)$

ج) $لو_{هـ}\left(\frac{هـ+١}{٢}\right)$ د) $لو_{هـ}(٢هـ+٢)$

٢٠١٣ شتوي

إذا كان $ق(س) = هـ^{جا^2 س} + لو_{هـ}(١ - جتا^2 س)$ فإن

$ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right) =$

أ) $\sqrt{٢}$ ب) ٢   ج) $\sqrt{هـ}$ د) $\sqrt{هـ}+٢$

٢٠١٣ صيفي   ٤ علامات

إذا كان $ص = \sqrt{١+هـ^س}$ فجد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = صفر.

الحل:

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^س}{٢\sqrt{١+هـ^س}}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٠} = \frac{هـ^٠}{٢\sqrt{١+هـ^٠}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

٢٠١١ صيفي

إذا كان ق(س) = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}+1}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ جد قَ(٠)

أ) صفر   ب) ١   ج) -١   د) غير موجودة

الحل:

ق(س) = $1 + \text{هـ}^{-\text{س}}$

قَ(س) = $-1\,\text{هـ}^{-\text{س}}$

قَ(٠) = $-1\,\text{هـ}^{0}$

= -1

٢٠١٢ صيفي

إذا كان ق(س) = $\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(3\text{س}+1)$ ، س > $-\frac{1}{3}$

فإن قَ(٠) =

أ) ٥   ب) ٤   ج) ٣   د) ٢

الحل:

قَ(س) = $2\,\text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{3}{3\text{س}+1}$

قَ(٠) = $2\,\text{هـ}^{0} + \frac{3}{1+0}$

= $2 + 3$

= 5

٢٠١٢ شتوي

إذا كان ق(س) = $\text{هـ}^{2} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جاس}$ فإن

قَ(س) =

أ) ظتاس   ب) - ظتاس

ج) ٢هـ + ظتاس   د) هـ٢ + ظتاس

الحل:

قَ(س) = $0 + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

= ظتاس

٢٠١٤ صيفي   (٦ علامات)

إذا كان قًَ(س) = جاس + $\text{هـ}^{2\text{س}}$

وكان ق(٠) = $\frac{1}{4}$ ، قَ(٠) = $\frac{1}{2}$

فجد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل:

قَ(س) = $\int$ جاس + $\text{هـ}^{2\text{س}}$ دس

= $-\text{جتاس} + \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + \text{جـ}$

قَ(٠) = $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = -\text{جتا}\,0 + \frac{\text{هـ}^{0}}{2} + \text{جـ}$

= $-1 + \frac{1}{2} + \text{جـ}$

$+1 = \text{جـ}$

قَ(س) = $-\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + 1$

$\text{ق}(\text{س}) = \int \left(-\text{جتا س} + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + 1\right) \text{ دس}$

$= -\text{جا س} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(0) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} = -\text{جا } 0 + \frac{1}{4}\text{هـ}^{0} + 0 + \text{جـ}$

$= 0 + \frac{1}{4} + \text{جـ}$

$\therefore \text{جـ} = 0$

$\text{ق}(\text{س}) = -\text{جا س} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س}.$

٢٠١٥ شتوي		(٨ علامات)

إذا كانت

$\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} - \text{ص}$

فأثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^2 - \text{س ص} + 1}{\text{س}^2 - \text{س ص} + 1}$

الحل:

$(\text{س ص}' + \text{ص} \times 1)\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = 1 - \text{ص}'$

$\text{س ص}'\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{ص هـ}^{\text{س ص}} = 1 - \text{ص}'$

$\text{س ص}'\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{ص}' = 1 - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$

$\text{ص}'(\text{س هـ}^{\text{س ص}} + 1) = 1 - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$

$\text{ص}' = \frac{1 - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س هـ}^{\text{س ص}} + 1}$

$\text{ص}' = \frac{1 - \text{ص}(\text{س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - \text{ص}) + 1}$

$= \frac{1 - \text{س ص} + \text{ص}^2}{\text{س}^2 - \text{س ص} + 1}$

وهو المطلوب.

٢٠١٥ صيفي (٦ علامات)

إذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+2}}\, \text{دس}$ لوغاريتمي

جد $\text{ق}''(0)$

الحل:

$\text{ق(س)} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)}\, \text{دس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)\right)(\text{هـ}^{\text{س}}) - (\text{هـ}^{\text{س}})\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{س}+2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)\right)^2}$

$\text{ق}''(0) = \frac{\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2\ \text{هـ}^0 - \text{هـ}^0\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}2)^2}$

$= \frac{4\left(\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2\ \text{هـ}^0 - \frac{1}{4}\,\text{هـ}^0\right)}{(\text{لو}_{\text{هـ}}2)^2}$

$= \frac{2\left(\text{لو}_{\text{هـ}}2 - \frac{1}{2}\right)}{(\text{لو}_{\text{هـ}}2)^2}$

٢٠١٦ شتوي (٦ علامات)

إذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = \int (\text{هـ}^{\text{جتا}2\text{س}} + \text{جا}2\text{س})\, \text{دس}$

هـ: عدد نيبري

فجد $\text{ق}''\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتا}2\text{س}} + \text{جا}2\text{س}$

$\text{ق}''(\text{س}) = -\text{جا}2\text{س}\times 2\ \text{هـ}^{\text{جتا}2\text{س}} + \text{جتا}2\text{س}\times 2$

$\text{ق}''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\text{جا}\frac{\pi}{2}\times 2\ \text{هـ}^{\text{جتا}\frac{\pi}{2}} + \text{جتا}\frac{\pi}{2}\times 2$

$= -1\times 2\ \text{هـ}^0 + 0\times 2$

$= -2$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل)	عصام الشيخ
المستوى(٤) الدرس(٩) (الاقتران الأسي الطبيعي)	ماجستير رياضيات

٢٠١٦ صيفي (٧ علامات)

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} |هـ^{س} - ١| & -١ \leq س \leq ١ \\ [س - ٣] & ١ < س \leq ٢ \end{cases}$

فجد $\int_{-١}^{٢} ق(س)\, دس$.

الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} ١ - هـ^{س} & -١ \leq س < ٠ \\ هـ^{س} - ١ & ٠ \leq س \leq ١ \\ ١ & ١ < س \leq ٢ \end{cases}$$

$$\int_{-١}^{٠} (١ - هـ^{س})\, دس + \int_{٠}^{١} (هـ^{س} - ١)\, دس + \int_{١}^{٢} ١\, دس$$

$$= \left. س - هـ^{س} \right|_{-١}^{٠} + \left. هـ^{س} - س \right|_{٠}^{١} + ١$$

$$= (٠ - ١) - (-١ - هـ^{-١}) + (هـ - ١) - (هـ^{٠} - ٠) + ١$$

$$= \cancel{١} - \cancel{١} + \frac{١}{هـ} + هـ - ١ - \cancel{١} + \cancel{١}$$

$$= \frac{١}{هـ} + هـ - ١$$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٩) (الاقتران الأسي الطبيعي) ماجستير رياضيات

٢٠١٧ شتوي (٦ علامات)

إذا كان $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)}$

فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٠.

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٢هـ}^{\text{٢س}} + \frac{١}{\text{س}+١}}{٢\sqrt{\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)}}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=٠} = \frac{\text{٢هـ}^{٠} + \frac{١}{١}}{٢\sqrt{\text{هـ}^{٠} + \text{لو}_{\text{هـ}}١}}$$

$$= \frac{٢+١}{٢\sqrt{١+٠}}$$

$$= \frac{٣}{٢}$$

٢٠١٧ شتوي (٧ علامات)

إذا كان $\text{م(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}$ اقتران بدائي للاقتران $\text{ق(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}}$

وكان

$$\int_{٠}^{٢} (\text{٤ق(س)} + \text{هـ}^{٢})\,\text{دس} + \int_{٤}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{\text{م}}{\text{هـ}-٢}\,\text{دس} = ٢٨$$

فجد قيمة الثابت م.

الحل:

$$٤\int_{٠}^{٢} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \text{هـ}^{٢}(٢-٠) + \frac{\text{م}}{\text{هـ}-٢}(\text{هـ}^{٢}-٤) = ٢٨$$

$$٤(\text{م(٢)} - \text{م(٠)}) + \text{٢هـ}^{٢} + \text{م(هـ}+٢) = ٢٨$$

$$(\text{٠هـ}^{٠} - \text{هـ}^{٠})$$

$$٤(\text{٢هـ}^{٢} - \text{هـ}^{٢}) + \text{٢هـ}^{٢} + \text{م(هـ}+٢) = ٢٨$$

$$\text{٤هـ}^{٢} + ٤ + \text{٢هـ}^{٢} + \text{م(هـ}+٢) = ٢٨$$

$$\text{٦هـ}^{٢} + ٤ - ٢٨ = -\text{م(هـ}+٢)$$

$$-\text{م} = \frac{\text{٦هـ}^{٢} - ٢٤}{\text{هـ}+٢}$$

$$-\text{م} = \frac{٦(\text{هـ}^{٢} - ٤)}{\text{هـ}+٢}$$

$$-\text{م} = ٦(\text{هـ} - ٢)$$

٢٠١٨ شتوي قديم (علامتان)

إذا كان $ق(س) = \sqrt{٣ + هـ^{س}}$ فإن قيمة $قَ(٠)$ تساوي

أ) $\frac{1}{8}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) صفر د) $\frac{1}{2}$

الحل:

$$قَ(س) = \frac{هـ^{س}}{٢\sqrt{٣ + هـ^{س}}}$$

$$قَ(٠) = \frac{هـ^{٠}}{٢\sqrt{٣ + ١}}$$

$$= \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{1}{4}$$