التكامل بالتعويض

ملخص القوانين

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

قاعدة

$\int \text{ه}'(\text{س})\ \text{ق}(\text{ه}(\text{س}))\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ه}(\text{س})$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ه}'(\text{س})}$

مثال

جد $\int ٢\text{س}\ (\text{س}^٢ + ٣)^٥\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^٢ + ٣$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$\int \cancel{٢\text{س}}\ \text{ص}^٥\ \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$= \int \text{ص}^٥\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^٦}{٦} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}^٢ + ٣)^٦}{٦} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int ٦\text{س}^٥\ (\text{س}^٦ + ٤)^٧\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^٦ + ٤$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٦\text{س}^٥}$

$\int \cancel{٦\text{س}^٥}\ \text{ص}^٧\ \frac{\text{دص}}{\cancel{٦\text{س}^٥}}$

$\int \frac{\text{ص}^٨}{٨} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}^٦ + ٤)^٨}{٨} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{س}^٣\ \sqrt[٣]{٣\text{س}^٤ + ٤}\ \text{دس}$

الحل:

$\int \text{س}^٣\ (٣\text{س}^٤ + ٤)^{\frac{١}{٣}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = ٣\text{س}^٤ + ٤$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{١٢\text{س}^٣}$

$\int \cancel{\text{س}^٣}\ (\text{ص})^{\frac{١}{٣}}\ \frac{\text{دص}}{١٢\cancel{\text{س}^٣}}$

$\frac{١}{١٢} \int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\ \text{دص}$

$\frac{١}{١٢} \times \frac{٣}{٤}\ \text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$\frac{١}{١٦}\ (٣\text{س}^٤ + ٤)^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{س}^٢\ (٦\text{س}^٣ + ٥)^٣\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = ٦\text{س}^٣ + ٥$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{١٨\text{س}^٢}$

$\int \cancel{\text{س}^٢}\ \text{ص}^٣\ \frac{\text{دص}}{١٨\cancel{\text{س}^٢}}$

$\frac{١}{١٨} \int \text{ص}^٣\ \text{دص}$

$$\frac{١}{١٨}\cdot\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}+\text{جـ}$$

$$\frac{١}{٧٢}\left(٦\text{س}^{٣}+٥\right)^{٤}+\text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int(\text{س}+٣)\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}+٦\text{س}-٤}\;\text{دس}$

الحل:

$$\text{ص}=\text{س}^{٢}+٦\text{س}-٤$$

$$\text{دس}=\frac{\text{دص}}{٢\text{س}+٦}$$

$$\int\cancel{(\text{س}+٣)}\,\text{ص}^{\frac{١}{٥}}\,\frac{\text{دص}}{٢\cancel{(\text{س}+٣)}}$$

$$\frac{١}{٢}\times\frac{٥}{٦}\,\text{ص}^{\frac{٦}{٥}}+\text{جـ}$$

$$\frac{٥}{١٢}\left(\text{س}^{٢}+٦\text{س}-٤\right)^{\frac{٦}{٥}}+\text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int\frac{٦\text{س}-٩}{(\text{س}^{٢}-٣\text{س}+١)^{٣}}\;\text{دس}$

الحل:

$$\int(٦\text{س}-٩)(\text{س}^{٢}-٣\text{س}+١)^{-٣}\;\text{دس}$$

$$\text{ص}=\text{س}^{٢}-٣\text{س}+١$$

$$\text{دس}=\frac{\text{دص}}{٢\text{س}-٣}$$

$$\int٣\cancel{(٢\text{س}-٣)}\,\text{ص}^{-٣}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{(٢\text{س}-٣)}}$$

$$٣\int\text{ص}^{-٣}\;\text{دص}$$

$$٣\,\frac{\text{ص}^{-٢}}{-٢}+\text{جـ}$$

$$=٣\,\frac{(\text{س}^{٢}-٣\text{س}+١)^{-٢}}{-٢}+\text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int\frac{٢}{(٤\text{س}^{٢}-٢٠\text{س}+٢٥)^{٧}}\;\text{دس}$

الحل:

$$\int\frac{٢}{\left((٢\text{س}-٥)(٢\text{س}-٥)\right)^{٧}}\;\text{دس}$$

$$=\int\frac{٢}{(٢\text{س}-٥)^{١٤}}\;\text{دس}$$

$$=\int٢\,(٢\text{س}-٥)^{-١٤}\;\text{دس}$$

$$=\frac{٢\,(٢\text{س}-٥)^{-١٣}}{٢\times-١٣}+\text{جـ}$$

$$=\frac{(٢\text{س}-٥)^{-١٣}}{-١٣}+\text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int\frac{١}{\text{س}^{٢}}\sqrt{\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}}\;\text{دس}$

الحل:

$$\int\frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}}+\frac{١}{\text{س}}\right)^{\frac{١}{٢}}\text{دس}$$

$$=\int\frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(٢+\frac{١}{\text{س}}\right)^{\frac{١}{٢}}\text{دس}$$

$$\text{ص}=٢+\frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{دس}=\frac{\text{دص}}{\frac{-١}{\text{س}^{٢}}}=-\text{س}^{٢}\;\text{دص}$$

$$\int\frac{١}{\cancel{\text{س}^{٢}}}(\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\times-\cancel{\text{س}^{٢}}\;\text{دص}$$

$= -\int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\, \text{دص}$

$= -2\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$

$= -2\left(3 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$

مثال

جد $\int_{0}^{2} (\text{س}+3)\sqrt{\text{س}^2 + 6\text{س}}\; \text{دس}$

الحل:

$\int_{0}^{2} (\text{س}+3)(\text{س}^2 + 6\text{س})^{\frac{1}{2}}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 6\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}+6}$ $\quad \text{س}=0 \Leftarrow \text{ص}=0$ $\quad \text{س}=2 \Leftarrow \text{ص}=16$

$\int_{0}^{16} \cancel{(\text{س}+3)}\, \text{ص}^{\frac{1}{2}}\, \frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س}+3)}}$

$\frac{1}{2}\int_{0}^{16} \text{ص}^{\frac{1}{2}}\, \text{دص}$

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\, \text{ص}^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{16}$

$\frac{1}{3}\sqrt{\text{ص}^3}\, \Big|_{0}^{16}$

$\frac{1}{3}\sqrt{16^3} - \frac{1}{3}\sqrt{0^3}$

$\frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}$

مثال

جد $\int \text{س}^3 (\text{س}^2 + 4)^6\, \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^2 + 4$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\int \text{س}^3\, \text{ص}^6\, \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\frac{1}{2}\int \text{س}^2\, \text{ص}^6\, \text{دص}$ $\quad \text{س}^2 = \text{ص} - 4$

$\frac{1}{2}\int (\text{ص}-4)\, \text{ص}^6\, \text{دص}$

$\frac{1}{2}\int \text{ص}^7 - 4\,\text{ص}^6\; \text{دص}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ص}^8}{8} - \frac{4\,\text{ص}^7}{7}\right) + \text{ج}$

$\frac{(\text{س}^2+4)^8}{16} - \frac{2(\text{س}^2+4)^7}{7} + \text{ج}$

مثال

جد $\int \text{س}^7 \sqrt{\text{س}^4 - 3}\; \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^4 - 3$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س}^3}$

$\int \text{س}^7\, \text{ص}^{\frac{1}{2}}\, \frac{\text{دص}}{4\text{س}^3}$

$\frac{1}{4}\int \text{س}^4\, \text{ص}^{\frac{1}{2}}\, \text{دص}$ $\quad \text{س}^4 = \text{ص} + 3$

$\frac{1}{4}\int (\text{ص}+3)\, \text{ص}^{\frac{1}{2}}\, \text{دص}$

$\frac{١}{٤} \int (ص^{\frac{٣}{٢}} + ٣ص^{\frac{١}{٢}})\, دص$

$\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$\frac{١}{١٠} (س^٤ - ٣)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٢} (س^٤ - ٣)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

مثال

جد $\int ٢س^٥ (س^٢ + ٥)^٤\, دس$

الحل:

$ص = س^٢ + ٥$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

$\int ٢س^٥ (ص)^٤ \frac{دص}{٢س}$

$\int س^٤ ص^٤\, دص$

$س^٢ = ص - ٥$

$\int (ص-٥)^٢ ص^٤\, دص \qquad س^٤ = (ص-٥)^٢$

$\int (ص^٢ - ١٠ص + ٢٥) ص^٤\, دص$

$\int ص^٦ - ١٠ص^٥ + ٢٥ص^٤\, دص$

$\frac{ص^٧}{٧} - \frac{١٠ص^٦}{٦} + \frac{٢٥ص^٥}{٥} + جـ$

$= \frac{(س^٢+٥)^٧}{٧} - \frac{٥}{٣}(س^٢+٥)^٦ + ٥(س^٢+٥)^٥ + جـ$

مثال

جد $\int \frac{(س+١)^٩}{س^{١١}}\, دس$

الحل:

$\int \frac{(س+١)^٩}{س^٩ \times س^٢}\, دس$

$= \int \left(\frac{س+١}{س}\right)^٩ \times \frac{١}{س^٢}\, دس$

$= \int \left(١ + \frac{١}{س}\right)^٩ \times \frac{١}{س^٢}\, دس$

$ص = ١ + \frac{١}{س}$

$دس = \frac{دص}{\frac{-١}{س^٢}} = -دص\, س^٢$

$\int ص^٩ \times \frac{١}{\cancel{س^٢}} \times -دص\, \cancel{س^٢}$

$= -\int ص^٩\, دص$

$= -\frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ$

$= \frac{-\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{١٠}}{١٠} + جـ$

مثال

جد $\int \frac{(٢س+١)^٥}{س^٧}\, دس$

الحل:

$\int \frac{(٢س+١)^٥}{س^٥ \times س^٢}\, دس$

$\int \left(\frac{2\text{س}+1}{\text{س}}\right)^5 \times \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$= \int \left(2+\frac{1}{\text{س}}\right)^5 \times \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 2 + \frac{1}{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{-1}{\text{س}^2}} = -\text{دص}\ \text{س}^2$

$\int \text{ص}^5 \times \frac{1}{\cancel{\text{س}^2}} \times -\text{دص}\ \cancel{\text{س}^2}$

$= -\int \text{ص}^5\,\text{دص}$

$= -\frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$

$= -\frac{\left(2+\frac{1}{\text{س}}\right)^6}{6} + \text{جـ}$.

مثال

جد $\int \sqrt[3]{4\text{س}^5 + 2\text{س}^3}\,\text{دس}$

الحل:

$\int \left(\text{س}^3(4\text{س}^2+2)\right)^{\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}\,(4\text{س}^2+2)^{\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 4\text{س}^2 + 2$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{8\text{س}}$

$\int \cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{\frac{1}{3}}\ \frac{\text{دص}}{8\cancel{\text{س}}}$

$\frac{1}{8} \times \frac{3}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

$\frac{3}{32}\,(4\text{س}^2 + 2)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int (7\text{س}^5 - 2\text{س})^3\,\text{دس}$

الحل:

$\int \left(\text{س}(7\text{س}^4 - 2)\right)^3\,\text{دس}$

$\int \text{س}^3\,(7\text{س}^4 - 2)^3\,\text{دس}$

$\text{ص} = 7\text{س}^4 - 2$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{28\text{س}^3}$

$\int \cancel{\text{س}^3}\ \text{ص}^3\ \frac{\text{دص}}{28\cancel{\text{س}^3}}$

$\frac{1}{28}\ \frac{\text{ص}^4}{4} + \text{جـ}$

$\frac{1}{112}\,(7\text{س}^4 - 2)^4 + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{س}^2 \sqrt[3]{\text{س}^7 + 5\text{س}^3}\,\text{دس}$

الحل:

$\int \text{س}^2 \left(\text{س}^3(\text{س}^4+5)\right)^{\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$\int \text{س}^2\ \text{س}\,(\text{س}^4 + 5)^{\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$\int س^{٣} (س^{٤} + ٥)^{\frac{١}{٣}} \, دس$

$ص = س^{٤} + ٥$

$دس = \frac{دص}{٤س^{٣}}$

$\int س^{٣} \, ص^{\frac{١}{٣}} \, \frac{دص}{٤س^{٣}}$

$\frac{١}{٤} \int ص^{\frac{١}{٣}} \, دص$

$\frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{١٦} (س^{٤} + ٥)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

مثال

جد $\int_{٠}^{٤} س \sqrt{س^{٢} + ٩} \, دس$

الحل:

$ص = س^{٢} + ٩$

$دس = \frac{دص}{٢س}$ ، $س = ٠ \leftarrow ص = ٩$ ، $س = ٤ \leftarrow ص = ٢٥$

$\int_{٩}^{٢٥} س \, ص^{\frac{١}{٢}} \, \frac{دص}{٢س}$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٩}^{٢٥}$

$\frac{١}{٣} \sqrt{ص^{٣}} \Big|_{٩}^{٢٥}$

$\frac{١}{٣} \sqrt{٢٥^{٣}} - \frac{١}{٣} \sqrt{٩^{٣}}$

$= \frac{١٢٥}{٣} - \frac{٢٧}{٣} = \frac{٩٨}{٣}$

مثال

جد $\int_{١}^{٢} \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٧}} \, دس$

الحل:

$\int_{١}^{٢} \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٥} \, س^{٢}} \, دس$

$\int_{١}^{٢} \left(\frac{س+١}{س}\right)^{٥} \frac{١}{س^{٢}} \, دس$

$\int_{١}^{٢} \left(\frac{١}{س} + ١\right)^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}} \, دس$

$ص = ١ + \frac{١}{س}$

$دس = \frac{دص}{\frac{-١}{س^{٢}}} = -دص \, س^{٢}$

$س = ١ \leftarrow ص = ٢$

$س = ٢ \leftarrow ص = \frac{٣}{٢}$

$\int_{٢}^{\frac{٣}{٢}} ص^{٥} \times \frac{١}{\cancel{س^{٢}}} \times -دص \times \cancel{س^{٢}}$

$= -\frac{ص^{٦}}{٦} \Big|_{٢}^{\frac{٣}{٢}}$

$-\frac{(\frac{٣}{٢})^{٦}}{٦} - -\frac{(٢)^{٦}}{٦}$

مثال

جد $\int \frac{س^{٣}}{(س+١)^{٥}} \, دس$

الحل:

$$\int س^{٣}\,(س+١)^{-٥}\; دس$$

$$ص = س + ١ \Leftarrow س = ص - ١$$

$$دس = دص$$

$$\int (ص-١)^{٣}\; ص^{-٥}\; دص$$

$$\int (ص^{٣} - ٣ص^{٢} + ٣ص - ١)\, ص^{-٥}\; دص$$

$$\int ص^{-٢} - ٣ص^{-٣} + ٣ص^{-٤} - ص^{-٥}\; دص$$

$$= \frac{ص^{-١}}{-١} - \frac{٣ص^{-٢}}{-٢} + \frac{٣ص^{-٣}}{-٣} - \frac{ص^{-٤}}{-٤} + جـ$$

$$= \frac{-١}{ص} + \frac{٣}{٢ص^{٢}} - \frac{١}{ص^{٣}} + \frac{١}{٤ص^{٤}} + جـ$$

$$= \frac{-١}{(س+١)} + \frac{٣}{٢(س+١)^{٢}} - \frac{١}{(س+١)^{٣}} + \frac{١}{٤(س+١)^{٤}} + جـ$$

مثال

$$جد \int \frac{(٥+\sqrt{س})^{٧}}{\sqrt{س}}\; دس$$

الحل:

$$ص = ٥ + \sqrt{س}$$

$$دس = \frac{دص}{\frac{١}{٢\sqrt{س}}} = ٢\sqrt{س}\; دص$$

$$\int \frac{ص^{٧}}{\cancel{\sqrt{س}}}\; دص \times ٢\cancel{\sqrt{س}}$$

$$\frac{ص^{٨}}{٨} + جـ$$

$$= \frac{(٥+\sqrt{س})^{٨}}{٨} + جـ$$

مثال

$$جد \int_{٠}^{٢} \frac{س^{٣}}{\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}}}\; دس$$

الحل:

$$\int_{٠}^{٢} س^{٣}\,(س^{٢}+٩)^{-\frac{٣}{٢}}\; دس$$

$$ص = س^{٢} + ٩$$

$$دس = \frac{دص}{٢س} \qquad س = ٠ \Leftarrow ص = ٩$$

$$س = ٢ \Leftarrow ص = ١٣$$

$$\int_{٩}^{١٣} س^{٣}\,(ص)^{-\frac{٣}{٢}}\; \frac{دص}{٢س}$$

$$\frac{١}{٢}\int_{٩}^{١٣} س^{٢}\,(ص)^{-\frac{٣}{٢}}\; دص$$

$$س^{٢} = ص - ٩$$

$$\frac{١}{٢}\int_{٩}^{١٣} (ص-٩)\,(ص)^{-\frac{٣}{٢}}\; دص$$

$$\frac{١}{٢}\int_{٩}^{١٣} ص^{-\frac{١}{٢}} - ٩ص^{-\frac{٣}{٢}}\; دص$$

$$\frac{١}{٢}\left(٢ص^{\frac{١}{٢}} - ٩ \times -٢ص^{-\frac{١}{٢}}\right)\Big|_{٩}^{١٣}$$

$$\sqrt{ص} + \frac{٩}{\sqrt{ص}}\Big|_{٩}^{١٣}$$

$$\left(\sqrt{١٣} + \frac{٩}{\sqrt{١٣}}\right) - (٣ + ٣)$$

مثال

اذا كان $\int_{1}^{8} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 18$

فجد قيمة $\int_{1}^{2} \text{س}^2\,\text{ق}(\text{س}^3)\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^3 \qquad \text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2} \qquad \text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 8$

$\int_{1}^{8} \cancel{\text{س}^2}\,\text{ق}(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$\frac{1}{3}\int_{1}^{8} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$\frac{1}{3} \times 18 = 6$

مثال

جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}2\text{س}}{\sqrt{1+\text{جتا}^2\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,(1+\text{جتا}^2\text{س})^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 1 + \text{جتا}^2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-2\,\text{جتاس}\,\text{جاس}} \qquad \text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 2 \qquad \text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = 1$

$\int_{2}^{1} 2\,\cancel{\text{جاس}}\,\cancel{\text{جتاس}}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\text{دص}}{-2\,\cancel{\text{جتاس}}\,\cancel{\text{جاس}}}$

$-\int_{2}^{1} \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دص}$

$-2\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}\Big|_{2}^{1}$

$-2\sqrt{\text{ص}}\Big|_{2}^{1}$

$-2 - -2\sqrt{2} = -2 + 2\sqrt{2}$

مثال

جد $\int (\text{س}+3)\,\text{قتا}^2(\text{س}^2+6\text{س}-4)\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^2 + 6\text{س} - 4$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}+6}$

$\int \cancel{(\text{س}+3)}\,\text{قتا}^2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س}+3)}}$

$\frac{1}{2}\int \text{قتا}^2\text{ص}\,\text{دص}$

$-\frac{1}{2}\,\text{ظتا}\,\text{ص} + \text{ج}$

$= -\frac{1}{2}$ ظتا $(س^{2} + ٦س - ٤) +$ جـ

مثال

جد $\int (س^{2}+1)$ جا$(س^{3}+٣س+1)$ دس

الحل:

ص $=$ س$^{3} + ٣س + 1$

دس $= \frac{دص}{٣س^{2}+٣}$

$\int \cancel{(س^{2}+1)}$ جا ص $\frac{دص}{٣\cancel{(س^{2}+1)}}$

$\frac{1}{٣} \int$ جا ص دص

$-\frac{1}{٣}$ جتا ص $+$ جـ

$-\frac{1}{٣}$ جتا$(س^{3}+٣س+1) +$ جـ

مثال

جد $\int$ س ظا$^{2}(س^{2}+٥)$ دس

الحل:

ص $=$ س$^{2} + ٥$

دس $= \frac{دص}{٢س}$

$\int \cancel{س}$ ظا^{2}ص $\frac{دص}{٢\cancel{س}}$

$\frac{1}{٢} \int$ ظا^{2}ص دص

$\frac{1}{٢} \int$ قا^{2}ص $- 1$ دص

$\frac{1}{٢}($ظا ص $-$ ص$) +$ جـ

$\frac{1}{٢}$ ظا$(س^{2}+٥) - \frac{1}{٢}(س^{2}+٥) +$ جـ

مثال

جد $\int$ جا^{3}٢س جتا^{5}٢س دس

الحل:

ص $= ٢س \rightarrow$ دس $= \frac{دص}{٢}$

$\frac{1}{٢} \int$ جا^{3}ص جتا^{5}ص دص

ع $=$ جتا ص   دص $= \frac{دع}{-جا ص}$

$\frac{1}{٢} \int$ جا^{3}ص ع^{5} $\frac{دع}{-جا ص}$

$-\frac{1}{٢} \int$ جا^{2}ص ع^{5} دع

$-\frac{1}{٢} \int (1-$جتا^{2}ص$)$ ع^{5} دع

$-\frac{1}{٢} \int (1-ع^{2})$ ع^{5} دع

$-\frac{1}{٢} \int ع^{5} - ع^{7}$ دع

$-\frac{1}{٢}\left(\frac{ع^{6}}{٦} - \frac{ع^{8}}{٨}\right) +$ جـ

$-\frac{(جتا ص)^{6}}{١٢} + \frac{(جتا ص)^{8}}{١٦} +$ جـ

$-\frac{جتا^{6} ٢س}{١٢} + \frac{جتا^{8} ٢س}{١٦} +$ جـ

مثال

جد $\int$ جتا^{3}س جا^{4}س دس

الحل:

$\int \text{جتا}^2 س \ \text{جا}^2 س \ \text{جا}^2 س \ دس$

$= \int (\text{جتا}س \ \text{جا}س)^2 \ \text{جا}^2 س \ دس$

$= \int (\tfrac{1}{2} \text{جا}٢س)^2 (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \text{جتا}٢س) \ دس$

$= \int \tfrac{1}{4} \text{جا}^2 ٢س \ (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \text{جتا}٢س) \ دس$

$= \int \tfrac{1}{8} \text{جا}^2 ٢س - \tfrac{1}{8} \text{جا}^2 ٢س \ \text{جتا}٢س \ دس$

$= \int \tfrac{1}{8} (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \text{جتا}٤س) \ دس - \tfrac{1}{8} \int \text{جا}^2 ٢س \ \text{جتا}٢س \ دس$

$= \tfrac{1}{16} س - \tfrac{1}{16} \dfrac{\text{جا}٤س}{4}$ ، ص = جا٢س ، $دس = \dfrac{دص}{٢\text{جتا}٢س}$

$= \tfrac{1}{16} س - \tfrac{1}{64} \text{جا}٤س - \tfrac{1}{8} \int ص^2 \ \text{جتا}٢س \ \dfrac{دص}{٢\text{جتا}٢س}$

$= \dfrac{س}{16} - \dfrac{\text{جا}٤س}{64} - \dfrac{1}{16} \dfrac{ص^3}{3} + جـ$

$= \dfrac{س}{16} - \dfrac{\text{جا}٤س}{64} - \dfrac{\text{جا}^3 ٢س}{48} + جـ$

مثال

جد $\int \text{جا}^4 س \ \text{جتا}^3 س \ دس$

الحل:

ص = جاس ⟸ $دس = \dfrac{دص}{\text{جتا}س}$

$\int ص^4 \ \text{جتا}^3 س \ \dfrac{دص}{\text{جتا}س}$

$\int ص^4 \ \text{جتا}^2 س \ دص$

$\int ص^4 (1 - \text{جا}^2 س) \ دص$

$\int ص^4 (1 - ص^2) \ دص$

$= \int ص^4 - ص^6 \ دص$

$\dfrac{ص^5}{5} - \dfrac{ص^7}{7} + جـ$

$= \dfrac{\text{جا}^5 س}{5} - \dfrac{\text{جا}^7 س}{7} + جـ$

مثال

جد $\int \text{جا}^4 ٥س \ \text{جتا}^3 ٥س \ دس$

الحل:

ص = جا٥س

$دس = \dfrac{دص}{٥\text{جتا}٥س}$

$\int ص^4 \ \text{جتا}^3 ٥س \ \dfrac{دص}{٥\text{جتا}٥س}$

$\tfrac{1}{5} \int ص^4 \ \text{جتا}^2 ٥س \ دص$

$\tfrac{1}{5} \int ص^4 (1 - \text{جا}^2 ٥س) \ دص$

$\tfrac{1}{5} \int ص^4 (1 - ص^2) \ دص$

$\tfrac{1}{5} \int ص^4 - ص^6 \ دص$

$\tfrac{1}{5} \dfrac{ص^5}{5} - \tfrac{1}{5} \dfrac{ص^7}{7} + جـ$

$= \frac{\text{جا}^{5}\text{س}}{25} - \frac{\text{جا}^{7}\text{س}}{35} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{ظا}^{5}\,3\text{س}\ \text{قا}^{2}\,3\text{س}\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{ظا}\,3\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{2}\,3\text{س} \times 3}$

$\int \text{ص}^{5}\ \cancel{\text{قا}^{2}\,3\text{س}}\ \frac{\text{دص}}{3\,\cancel{\text{قا}^{2}\,3\text{س}}}$

$\frac{1}{3}\int \text{ص}^{5}\ \text{دص}$

$\frac{1}{3}\ \frac{\text{ص}^{6}}{6} + \text{جـ}$

$\frac{1}{18}\ (\text{ظا}\,3\text{س})^{6} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{\text{جتا}\,2\text{س}}{\text{قا}^{5}\,2\text{س}}\ \text{دس}$

الحل:

$\int \text{جتا}\,2\text{س}\ \text{جا}^{5}\,2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}\,2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا}\,2\text{س} \times 2}$

$\int \cancel{\text{جتا}\,2\text{س}}\ \text{ص}^{5}\ \frac{\text{دص}}{2\,\cancel{\text{جتا}\,2\text{س}}}$

$\frac{1}{2}\int \text{ص}^{5}\ \text{دص}$

$\frac{1}{2}\ \frac{\text{ص}^{6}}{6} + \text{جـ}$

$\frac{1}{12}\ (\text{جا}\,2\text{س})^{6} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{جا}^{3}\text{س}\ \text{دس}$

الحل:

$\int \text{جاس}\ \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{جاس}\ (1 - \text{جتا}^{2}\text{س})\ \text{دس}$

$\int \text{جاس} - \text{جاس}\ \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$-\text{جتاس} - \int \cancel{\text{جاس}}\ \text{ص}^{2}\ \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$-\text{جتاس} + \int \text{ص}^{2}\ \text{دص}$

$-\text{جتاس} + \frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{جـ}$

$-\text{جتاس} + \frac{\text{جتا}^{3}\text{س}}{3} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{1 - \text{ظا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$

الحل:

$\int (1-ظا^2س)\, قا^2س\ دس$

$= \int قا^2س - قا^2س\, ظا^2س\ دس$

$ص = ظاس$

$دس = \frac{دص}{قا^2س}$

$= ظاس - \int \cancel{قا^2س}\, ص^2 \frac{دص}{\cancel{قا^2س}}$

$= ظاس - \frac{ص^3}{3} + جـ$

$= ظاس - \frac{ظا^3س}{3} + جـ$

مثال

جد $\int جتا^3س\, (1 + جاس)^7\ دس$

الحل:

$ص = 1 + جاس$

$دس = \frac{دص}{جتاس}$

$\int جتا^3س\, ص^7 \frac{دص}{جتاس}$

$\int جتا^2س\, ص^7\ دص$

$\int (1 - جا^2س)\, ص^7\ دص$

$\int ص^7 - ص^7\, جا^2س\ دص$

$\int ص^7 - ص^7 (ص-1)^2\ دص$

$\int ص^7 - ص^7 (ص^2 - 2ص + 1)\ دص$

$= \int \cancel{ص^7} - ص^9 + 2ص^8 - \cancel{ص^7}\ دص$

$= \int 2ص^8 - ص^9\ دص$

$= \frac{2ص^9}{9} - \frac{ص^{10}}{10} + جـ$

$= \frac{2(1+جاس)^9}{9} - \frac{(1+جاس)^{10}}{10} + جـ$

مثال

جد $\int \frac{جاس \sqrt{جا^2س + 4}}{قاس}\ دس$

الحل:

$\int جاس\, جتاس\, (جا^2س+4)^{\frac{1}{2}}\ دس$

$ص = جا^2س + 4$

$دس = \frac{دص}{2جاس\, جتاس}$

$\int \cancel{جاس\, جتاس}\, ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{2\cancel{جاس\, جتاس}}$

$\frac{1}{2} \int ص^{\frac{1}{2}}\ دص$

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + جـ$

$\frac{1}{3} (جا^2س + 4)^{\frac{3}{2}} + جـ$

مثال

جـ $\int \frac{\text{ظتا}^2 \frac{1}{\text{س}}}{\text{س}^2}\, \text{ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\frac{1}{\text{س}^2}}$

$\text{ءس} = -\,\text{ءص}\ \text{س}^2$

$\int \frac{\text{ظتا}^2 \text{ص}}{\text{س}^2} \times -\,\text{ءص}\ \text{س}^2$

$-\int \text{ظتا}^2 \text{ص}\ \text{ءص}$

$-\int \text{قتا}^2 \text{ص} - 1\ \text{ءص}$

$-\left(-\text{ظتا ص} - \text{ص}\right) + \text{جـ}$

$\text{ظتا}\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} + \text{جـ}$

مثال

$\int \frac{\text{جا2س}}{(1+\text{جتا}^2\text{س})^5}\, \text{ءس}$

الحل:

$\int 2\,\text{جاس جتاس}\ (1+\text{جتا}^2\text{س})^{-5}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = 1 + \text{جتا}^2\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-2\,\text{جتاس جاس}}$

$\int \cancel{2\,\text{جاس جتاس}}\ \text{ص}^{-5}\ \frac{\text{ءص}}{-2\,\text{جتاس جاس}}$

$= -\frac{1}{2}\int \text{ص}^{-5}\ \text{ءص}$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\text{ص}^{-4}}{-4} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{8}\left(1+\text{جتا}^2\text{س}\right)^{-4} + \text{جـ}$

مثال

جـ $\int \text{جاس}\ (1 + \text{جتا2س})^5\ \text{ءس}$

الحل:

$\int \text{جاس}\ (2\,\text{جتا}^2\text{س})^5\ \text{ءس}$

$= \int 32\ \text{جاس جتا}^{10}\text{س}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\int 32\ \cancel{\text{جاس}}\ \text{ص}^{10}\ \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$-32\int \text{ص}^{10}\ \text{ءص}$

$-32\ \frac{\text{ص}^{11}}{11} + \text{جـ}$

$\frac{-32}{11}\left(\text{جتاس}\right)^{11} + \text{جـ}$

مثال

جـ $\int \text{جتا2س}\ (\text{جاس} - \text{جتاس})^8\ \text{ءس}$

الحل:

ESAM SHIKH
0796300625

$\int (\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})(\text{جتاس} - \text{جاس})^8 \, \text{دس}$

$= \int (\text{جتاس} - \text{جاس})(\text{جتاس} + \text{جاس})(\text{جتاس} - \text{جاس})^8 \, \text{دس}$

$= \int (\text{جتاس} + \text{جاس})(\text{جتاس} - \text{جاس})^9 \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس} - \text{جاس}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{-\text{جاس} - \text{جتاس}}$

$\int (\text{جتاس} + \text{جاس}) \, \text{ص}^9 \dfrac{\text{دص}}{-(\text{جاس} + \text{جتاس})}$

$= -\int \text{ص}^9 \, \text{دص}$

$= -\dfrac{\text{ص}^{10}}{10} + \text{جـ}$

$= -\dfrac{(\text{جتاس} - \text{جاس})^{10}}{10} + \text{جـ}$

مثال

جد $\displaystyle\int \dfrac{\sqrt[3]{\text{ظتاس} + 3}}{2 - 2\text{جتا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

الحل:

$\displaystyle\int \dfrac{(\text{ظتاس} + 3)^{\frac{1}{3}}}{2(1 - \text{جتا}^2\text{س})} \, \text{دس}$

$\dfrac{1}{2} \displaystyle\int \dfrac{(\text{ظتاس} + 3)^{\frac{1}{3}}}{\text{جا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$\dfrac{1}{2} \displaystyle\int \text{قتا}^2\text{س} \, (\text{ظتاس} + 3)^{\frac{1}{3}} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتاس} + 3$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$

$\dfrac{1}{2} \displaystyle\int \cancel{\text{قتا}^2\text{س}} \, \text{ص}^{\frac{1}{3}} \dfrac{\text{دص}}{-\cancel{\text{قتا}^2\text{س}}}$

$-\dfrac{1}{2} \displaystyle\int \text{ص}^{\frac{1}{3}} \, \text{دص}$

$-\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

$-\dfrac{3}{8} (\text{ظتاس} + 3)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس} - \text{جتا}^3\text{س}} \, \text{دس}$

الحل:

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}(1 - \text{جتا}^2\text{س})} \, \text{دس}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}} \sqrt{\text{جا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\text{جاس}| \, (\text{جتاس})^{\frac{1}{2}} \, \text{دس}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس} \, (\text{جتاس})^{\frac{1}{2}} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ $\quad$ $\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$ $\quad$ $\text{س} = \dfrac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = 0$

$\displaystyle\int_1^0 \cancel{\text{جاس}} \, \text{ص}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\text{دص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$- \int_{1}^{0} ص^{\frac{1}{2}}\, دص$

$- \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \Big|_{1}^{0}$

$- \frac{2}{3} \sqrt{ص^{3}} \Big|_{1}^{0}$

$= 0 - \frac{-2}{3}\sqrt{1^{3}} = \frac{2}{3}$

مثال

جد $\int قتا^{4} ٦س\ ظتا^{3} ٦س\ دس$

$ص = ظتا ٦س$

$دس = \frac{دص}{-قتا^{2} ٦س \times ٦}$

$\int قتا^{4} ٦س\ ص^{3} \frac{دص}{-قتا^{2} ٦س \times ٦}$

$-\frac{1}{6} \int قتا^{2} ٦س\ ص^{3}\ دص$

$-\frac{1}{6} \int (1 + ظتا^{2} ٦س)\ ص^{3}\ دص$

$-\frac{1}{6} \int (1 + ص^{2})(ص^{3})\ دص$

$-\frac{1}{6} \int ص^{3} + ص^{5}\ دص$

$-\frac{1}{6} \left(\frac{ص^{4}}{4} + \frac{ص^{6}}{6} \right) + جـ$

$-\frac{1}{24} (ظتا ٦س)^{4} - \frac{1}{36} (ظتا ٦س)^{6} + جـ$

مثال

جد $\int جتا^{4} س\ دس$

الحل:

$\int (جتا^{2} س)^{2}\ دس$

$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا ٢س\right)^{2} دس$

$= \int \frac{1}{4} + \frac{1}{2} جتا ٢س + \frac{1}{4} جتا^{2} ٢س\ دس$

$\frac{1}{4} س + \frac{جا ٢س}{4} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا ٤س\ دس$

$\frac{1}{4} س + \frac{جا ٢س}{4} + \frac{1}{8} س + \frac{1}{8} \times \frac{جا ٤س}{4} + جـ$

$\frac{3س}{8} + \frac{جا ٢س}{4} + \frac{1}{32} جا ٤س + جـ$

مثال

جد $\int قا^{4} س\ دس$

الحل:

$\int قا^{2} س \times قا^{2} س\ دس$

$\int قا^{2} س\ (1 + ظا^{2} س)\ دس$

$\int (قا^{2} س + قا^{2} س\ ظا^{2} س)\ دس$

$ظا س +$ $\quad ص = ظا س \quad دس = \frac{دص}{قا^{2} س}$

$ظا س + \int \cancel{قا^{2} س}\ ص^{2} \frac{دص}{\cancel{قا^{2} س}}$

$ظاس + \frac{ص^٣}{٣} + جـ$

$ظاس + \frac{ظا^٣س}{٣} + جـ$

مثال

إذا كان $\int_{٠}^{١} ق(س)\, دس = ٨$

فجد قيمة

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٣\, جتا٢س\, ق(جا٢س)\, دس$

الحل:

$ص = جا٢س$ $\qquad س = ٠ \leftarrow ص = صفر$

$دس = \frac{دص}{جتا٢س \times ٢}$ $\qquad س = \frac{\pi}{٤} \leftarrow ص = ١$

$\int_{٠}^{١} ٣\, \cancel{جتا٢س}\, ق(ص)\, \frac{دص}{\cancel{جتا٢س} \times ٢}$

$\frac{٣}{٢} \int_{٠}^{١} ق(ص)\, دص$

$\frac{٣}{٢} \times ٨ = ٣ \times ٤ = ١٢$

مثال

جد $\int قا^٢ ٢س \times هـ^{ظا٢س}\, دس$

الحل:

$ص = ظا٢س$

$دس = \frac{دص}{قا^٢ ٢س \times ٢}$

$\int \cancel{قا^٢ ٢س} \times هـ^{ص}\, \frac{دص}{\cancel{قا^٢ ٢س} \times ٢}$

$\frac{١}{٢} \int هـ^{ص}\, دص$

$\frac{١}{٢}\, هـ^{ص} + جـ$

$\frac{١}{٢}\, هـ^{ظا٢س} + جـ$

مثال

جد $\int_{١}^{٢} \frac{هـ^{\frac{٣}{س}}}{س^٢}\, دس$

الحل:

$ص = \frac{٣}{س}$

$س = ١ \leftarrow ص = ٣$

$دس = \frac{دص}{\frac{-٣}{س^٢}}$ $\qquad س = ٢ \leftarrow ص = \frac{٣}{٢}$

$دس = -\frac{١}{٣} س^٢\, دص$

$\int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \frac{هـ^{ص}}{\cancel{س^٢}} \times -\frac{١}{٣} \cancel{س^٢}\, دص$

$-\frac{١}{٣} \int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} هـ^{ص}\, دص$

$-\frac{١}{٣}\, هـ^{ص} \Big|_{٣}^{\frac{٣}{٢}}$

$-\frac{١}{٣} \left(هـ^{\frac{٣}{٢}} - هـ^{٣} \right)$

مثال

جد $\int هـ^{س^٣ + ٣لوس}\, دس$

الحل:

$\int هـ^{س^٣} \times هـ^{لوس^٣}\, دس$

$\int \text{هـ}^{\text{س}^3} \times \text{س}^2 \; \text{دس}$

$= \int \text{س}^2 \; \text{هـ}^{\text{س}^3} \; \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$\int \cancel{\text{س}^2} \; \text{هـ}^{\text{ص}} \; \frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$\frac{1}{3} \int \text{هـ}^{\text{ص}} \; \text{دص}$

$\frac{1}{3} \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$\frac{1}{3} \text{هـ}^{\text{س}^3} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{جا}2\text{س} \times \text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}} \; \text{دس}$

الحل:

$\int 2\text{جاس جتاس} \; \text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}} \; \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتا}^2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-2\text{جتاس جاس}}$

$\int \cancel{2\text{جاس جتاس}} \; \text{هـ}^{\text{ص}} \; \frac{\text{دص}}{-\cancel{2\text{جتاس جاس}}}$

$- \int \text{هـ}^{\text{ص}} \; \text{دص}$

$- \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$- \text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{\text{جاس} + \text{لوهـ جتاس}} \; \text{دس}$

الحل:

$\int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{لوهـ جتاس}} \; \text{دس}$

$= \int \text{جتاس} \; \text{هـ}^{\text{جاس}} \; \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\int \cancel{\text{جتاس}} \; \text{هـ}^{\text{ص}} \; \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{2\text{س} - 3}{2\text{س}^2 - 6\text{س} - 5} \; \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = 2\text{س}^2 - 6\text{س} - 5 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س} - 6}$

$\int \frac{(\cancel{2\text{س} - 3})}{\text{ص}} \; \frac{\text{دص}}{2(\cancel{2\text{س} - 3})}$

$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\text{ص}} \; \text{دص}$

$\frac{1}{2} \text{لوهـ} |\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2} \text{لوهـ} |2\text{س}^2 - 6\text{س} - 5| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\,(٢+\sqrt{\text{س}})}\, \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = ٢ + \sqrt{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{٢\sqrt{\text{س}}}} = ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{دص}$

$\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\ \text{ص}} \times ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{دص}$

$٢\int \frac{1}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}|٢+\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\, \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$

$\text{ص}^٣ = \text{س}$

$٣\text{ص}^٢\ \text{دص} = \text{دس}$

$\int \frac{\text{ص}}{٥ - \text{ص}^٣\ \text{ص}} \times ٣\text{ص}^٢\ \text{دص}$

$\int \frac{٣\text{ص}^٣}{٥ - \text{ص}^٤}\ \text{دص}$

$\text{ع} = ٥ - \text{ص}^٤ \leftarrow \text{دص} = \frac{\text{دع}}{-٤\text{ص}^٣}$

$\int \frac{٣\,\cancel{\text{ص}^٣}}{\text{ع}} \times \frac{\text{دع}}{-٤\,\cancel{\text{ص}^٣}}$

$-\frac{٣}{٤}\int \frac{1}{\text{ع}}\ \text{دع}$

$-\frac{٣}{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{جـ}$

$-\frac{٣}{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|٥-\text{ص}^٤| + \text{جـ}$

$-\frac{٣}{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|٥-(\sqrt[٣]{\text{س}})^٤| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \sqrt[٢]{\text{س}^{-\frac{٢}{٣}} + ١}\ \text{دس}$

الحل:

$\int \left(\frac{1}{\text{س}^{\frac{٢}{٣}}} + ١\right)^{\frac{1}{٢}} \text{دس}$

$= \int \left(\frac{١ + \text{س}^{\frac{٢}{٣}}}{\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}\right)^{\frac{1}{٢}} \text{دس}$

$= \int \frac{(١ + \text{س}^{\frac{٢}{٣}})^{\frac{1}{٢}}}{\text{س}^{\frac{1}{٣}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = ١ + \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{٢}{٣}\text{س}^{-\frac{1}{٣}}} = \frac{٣}{٢}\ \text{دص}\ \text{س}^{\frac{1}{٣}}$

$\int \frac{\text{ص}^{\frac{1}{٢}}}{\cancel{\text{س}^{\frac{1}{٣}}}} \times \frac{٣}{٢}\ \text{دص}\ \cancel{\text{س}^{\frac{1}{٣}}}$

$\frac{٣}{٢}\int \text{ص}^{\frac{1}{٢}}\ \text{دص}$

$\cancel{\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

$= (1 + \text{س}^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

مثال
جد $\int_{1}^{\text{هـ}^{3}} \frac{1}{\text{س}\sqrt{1+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل :

$\text{ص} = \sqrt{1+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\text{ص}^{2} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow 2\text{ص}\,\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{س}=1 \Leftarrow \text{ص}=1 \\ \text{س}=\text{هـ}^{3} \Leftarrow \text{ص}=2 \\ \text{دس} = 2\text{س}\,\text{ص}\,\text{دص} \end{array}}$

$\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}\,\text{ص}}\;2\text{س}\,\text{ص}\,\text{دص}$

$= \int_{1}^{2} 2\,\text{دص}$

$= 2 \times 1 = 2$

مثال
جد $\int_{3}^{4} \frac{7}{\text{س}^{2} - 4\text{س} + 4}\,\text{دس}$

الحل :

$\int_{3}^{4} \frac{7}{(\text{س}-2)(\text{س}-2)}\,\text{دس}$

$\int_{3}^{4} 7\,(\text{س}-2)^{-2}\,\text{دس}$

$\left.\frac{7\,(\text{س}-2)^{-1}}{-1}\right|_{3}^{4}$

$\left.\frac{-7}{\text{س}-2}\right|_{3}^{4}$

$\frac{-7}{2} - \frac{-7}{1}$

$\frac{-7}{2} + \frac{14}{2} = \frac{7}{2}$

مثال
أثبت أن $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+2}}\,\text{دس}$

$= \begin{cases} \frac{-1}{\text{ن}+1} & \text{، ن عدد فردي} \\ \frac{1}{\text{ن}+1} & \text{، ن عدد زوجي} \end{cases}$

الحل :

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}}\,\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} \times \frac{1}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} \times \frac{1}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 1 - \frac{1}{\text{س}}$

$\text{س}=\frac{1}{2} \Leftarrow \text{ص}=-1$

$\text{س}=1 \Leftarrow \text{ص}=0$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{\text{س}^{2}}} = \text{س}^{2}\,\text{دص}$

ESAM SHIKH
0796300625

$$\int_{-1}^{0} ص^{ن} \times \frac{1}{س^2} \times س^2 \, دص$$

$$\int_{-1}^{0} ص^{ن} \, دص$$

$$\left. \frac{ص^{ن+1}}{ن+1} \right|_{-1}^{0}$$

اذا كانت ن فردي $\Leftarrow$ ن+1 زوجي

$$0 - \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1} = \frac{-1}{ن+1}$$

اذا كانت ن زوجي $\Leftarrow$ ن+1 فردي

$$0 - \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1} = \frac{1}{ن+1}$$

وهو المطلوب .

رياضيات المستوى (٤) الوحدة (التكامل) عصام الشيخ

التخصص(العلمي) الدرس (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

الأسئلة الوزارية :

٢٠٠٨ شتوي ٨ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int_{0}^{\pi} (1+\text{جا}2\text{س})\,\text{جتا}^2\text{س}\ \text{دس}$$

الحل:

$$\int_{0}^{\pi} (\text{جتا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}\ \text{جا}2\text{س})\ \text{دس}$$

$$= \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^2\text{س}\ \text{دس} + \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^2\text{س} \times 2\text{جاس} \times \text{جتاس}\ \text{دس}$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{1+\text{جتا}2\text{س}}{2}\ \text{دس} + 2\int_{0}^{\pi} \text{جتا}^3\text{س}\ \text{جاس}\ \text{دس}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س}\right)\Big|_{0}^{\pi}$$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = \pi \Leftarrow \text{ص} = -1$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\text{جا}2\pi\right) - (0+0) + 2\int_{1}^{-1} \text{ص}^3\ \text{جاس}\ \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\int_{1}^{-1} \text{ص}^3\ \text{دص}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\ \frac{\text{ص}^4}{4}\Big|_{1}^{-1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2 \times \text{صفر}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

٢٠١٠ صيفي ٥ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}\,(1+\sqrt{\text{س}})^4}$$

الحل:

$\sqrt{\text{س}} = \text{ص} \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^2$

$\text{دس} = 2\text{ص}\ \text{دص}$

$$\int \frac{2\text{ص}\ \text{دص}}{\text{ص}\,(1+\text{ص})^4}$$

$$= \int \frac{2}{(1+\text{ص})^4}\ \text{دص}$$

$$= 2\int (1+\text{ص})^{-4}\ \text{دص}$$

$$= 2\ \frac{(1+\text{ص})^{-3}}{-3} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-2}{3}\,(1+\sqrt{\text{س}})^{-3} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-2}{3}\ \frac{1}{(1+\sqrt{\text{س}})^3} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-2}{3(1+\sqrt{\text{س}})^3} + \text{جـ}$$

رياضيات المستوى (٤)   الوحدة (التكامل)   عصام الشيخ

التخصص(العلمي)   الدرس (التكامل بالتعويض)   ماجستير رياضيات

٢٠١١ صيفي   ٥ علامات

جد التكامل الآتي :

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \text{جا}^2\text{س} \ \text{جتا}^2\text{س} \ \text{دس}$$

الحل:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} (\text{جاس جتاس})^2 \ \text{دس}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\tfrac{1}{2}\ \text{جا}2\text{س}\right)^2 \ \text{دس}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\tfrac{1}{4}\ \text{جا}^2 2\text{س}\right) \ \text{دس}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \tfrac{1}{2}(1 - \text{جتا}4\text{س}) \ \text{دس}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\text{س} - \frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(0 - \frac{\text{جا}0}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\text{جا}4\cdot -\frac{\pi}{3}}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(0 - 0 + \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

٢٠١٢ شتوي

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على الفترة [١ ، ٢] وكان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤ فإن قيمة

$$\int_{1}^{2} 3\,\text{ق}'(\text{س})\sqrt{\text{ق}(\text{س})}\ \text{دس} =$$

أ) ١٤   ب) $\frac{63}{2}$ ج) ٧   د) $\frac{14}{3}$

٢٠١٢ شتوي   ٦ علامات

جد التكامل الآتي

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1+\text{س})^5}{\text{س}^7}\ \text{دس}$$

الحل:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\text{س}^2}\ \frac{(\text{س}+1)^5}{\text{س}^5}\ \text{دس}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\text{س}^2}\left(\frac{1}{\text{س}} + 1\right)^5 \text{دس}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{س}} + 1 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{-1}{\text{س}^2}}$$

$$\text{س} = \tfrac{1}{2} \leftarrow \text{ص} = 3$$

$$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2$$

$$\int_{3}^{2} \cancel{\frac{1}{\text{س}^2}}\ \text{ص}^5\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\frac{-1}{\text{س}^2}}}$$

$$- \int_{3}^{2} \text{ص}^5\ \text{دص}$$

$$- \frac{\text{ص}^6}{6}\Big|_{3}^{2}$$

$$= -\frac{1}{6}\left(2^6 - 3^6\right) = \frac{665}{6}$$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٥) (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٢ صيفي

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، م(س) اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) وكان أ، جـ ثابتين أ ≠ صفر، فإن $\int \text{ق}(\text{أس})\,\text{دس} =$

أ) م(أس) + جـ ب) $\frac{١}{\text{أ}}$ م(أس) + جـ

جـ) م(س) + جـ د) $\frac{١}{\text{أ}}$ م(س) + جـ

٢٠١٢ صيفي **(٥ علامات)**

جد التكامل الآتي $\int_{-١}^{٤} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+٥}}\,\text{دس}$

الحل: $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+٥} \Leftarrow \text{ص}^٢ = \text{س} + ٥$

$\Leftarrow \text{س} = \text{ص}^٢ - ٥$

$\text{دس} = ٢\text{ص}\,\text{دص}$

س = −١ ← ص = ٢

س = ٤ ← ص = ٣

$\int_{٢}^{٣} \frac{\text{ص}^٢ - ٥}{\text{ص}}\, ٢\text{ص}\,\text{دص}$

$= \int_{٢}^{٣} (٢\text{ص}^٢ - ١٠)\,\text{دص}$

$\left. \frac{٢\text{ص}^٣}{٣} - ١٠\text{ص} \right|_{٢}^{٣}$

$= (٢ \times \frac{٢٧}{٣} - ١٠ \times ٣) - (\frac{٢ \times ٨}{٣} - ١٠ \times ٢)$

$= (٢ \times ٩ - ٣٠) - (\frac{١٦}{٣} - ٢٠)$

$= -١٢ - (\frac{١٦ - ٦٠}{٣})$

$= -١٢ + \frac{٤٤}{٣} = \frac{-٣٦ + ٤٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$

٢٠١٣ شتوي **(٦ علامات)**

جد التكامل الآتي $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}٢\text{س}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} ٢\,\text{جاس}\,\text{جتا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٤} \leftarrow \text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \leftarrow \text{ص} = \text{صفر}$

$\int_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{٠} ٢\,\text{جاس}\,\text{ص}^٢ \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= -٢ \int_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{٠} \text{ص}^٢\,\text{دص}$

$= -٢ \left. \frac{\text{ص}^٣}{٣} \right|_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{٠} = \left(٠ - \frac{-٢ (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٣}{٣}\right)$

$= ٢ \frac{١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣\sqrt{٢}}$

٢٠١٣ صيفي **(٦ علامات)**

جد التكامل الآتي $\int \text{قا}^٤(٣\text{س})\,\text{ظا}^٣(٣\text{س})\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{ظا}٣\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢٣\text{س} \times ٣}$

$\int \text{قا}^٤٣\text{س}\,\text{ص}^٣ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢٣\text{س} \times ٣}$

$\int \text{قا}^٢٣\text{س}\,\text{ص}^٣ \frac{\text{دص}}{٣}$

$= \frac{١}{٣} \int (١ + \text{ظا}^٢٣\text{س})\,\text{ص}^٣\,\text{دص}$

$= \frac{١}{٣} \int (١ + \text{ص}^٢)\,\text{ص}^٣\,\text{دص}$

$= \frac{١}{٣} \int (\text{ص}^٣ + \text{ص}^٥)\,\text{دص}$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٥) (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

$= \frac{1}{3}\left(\frac{\text{ص}^4}{4} + \frac{\text{ص}^6}{6}\right) + \text{ج}$

$= \frac{\text{ظا}^4 3\text{س}}{12} + \frac{\text{ظا}^6 3\text{س}}{18} + \text{ج}$

٢٠١٤ شتوي **(٥ علامات)**

جد التكامل الآتي $\int (\text{ظاس} + \text{قاس})^2 \, \text{دس}$

الحل:

$\int (\text{ظا}^2\text{س} + 2\,\text{ظاس قاس} + \text{قا}^2\text{س})\,\text{دس}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س} - 1 + 2\,\text{ظاس قاس} + \text{قا}^2\text{س})\,\text{دس}$

$= \text{ظاس} - \text{س} + 2\,\text{قاس} + \text{ظاس} + \text{ج}$

$= 2\,\text{ظاس} + 2\,\text{قاس} - \text{س} + \text{ج}$.

٢٠١٤ صيفي **(٧ علامات)**

جد التكامل الآتي:

$\int_0^1 \frac{-\text{س}}{(\text{س}+1) - \sqrt{\text{س}+1}}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س} + 1 \Leftarrow \text{س} = \text{ص} - 1 \Leftarrow -\text{س} = 1 - \text{ص}$

$\Leftarrow \; -\text{دس} = -\text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \text{دص}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2$

$\int_1^2 \frac{1 - \text{ص}}{\text{ص} - \sqrt{\text{ص}}}\,\text{دص}$

$\int_1^2 \frac{1 - \text{ص}}{\sqrt{\text{ص}}\sqrt{\text{ص}} - \sqrt{\text{ص}}}\,\text{دص}$

$\int_1^2 \frac{1 - \text{ص}}{\sqrt{\text{ص}}(\sqrt{\text{ص}} - 1)}\,\text{دص}$

$\int_1^2 \frac{\cancel{(1 - \sqrt{\text{ص}})}^{-1}(1 + \sqrt{\text{ص}})}{\sqrt{\text{ص}}\,\cancel{(\sqrt{\text{ص}} - 1)}}$

$= -\int_1^2 \frac{1 + \sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{دص}$

$= -\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\text{ص}}} + \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{ص}}}\right)\text{دص}$

$= -\int_1^2 (\text{ص}^{-\frac{1}{2}} + 1)\,\text{دص}$

$= -(2\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{ص})\Big|_1^2$

$= -\left((2\sqrt{2} + 2) - (2\sqrt{1} + 1)\right)$

$= -2\sqrt{2} - \cancel{2} + \cancel{2} + 1$

$= 1 - 2\sqrt{2}$.

٢٠١٥ صيفي **(٨ علامات)**

جد التكامل الآتي $\int_0^4 \frac{\text{س}^3}{\sqrt{(\text{س}^2 + 9)^3}}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^2 + 9$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 9$

$\text{س} = 4 \leftarrow \text{ص} = 25$

$\int_9^{25} \frac{\text{س}^3}{\text{ص}^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\frac{1}{2}\int_9^{25} \frac{\text{س}^2}{\text{ص}^{\frac{3}{2}}}\,\text{دص}$

$\frac{1}{2}\int_9^{25} \frac{\text{ص} - 9}{\text{ص}^{\frac{3}{2}}}\,\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\int_9^{25} (\text{ص}^{-\frac{1}{2}} - 9\text{ص}^{-\frac{3}{2}})\,\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\left(2\text{ص}^{\frac{1}{2}} - 9(-2)\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_9^{25}$

التخصص(العلمي)	الوحدة(١)	(التكامل)	عصام الشيخ
المستوى(٤)	الدرس(٥)	(التكامل بالتعويض)	ماجستير رياضيات

$= \left(\sqrt{ص} + \frac{٩}{\sqrt{ص}} \right) \Big|_{٩}^{٢٥}$

$= \left(\sqrt{٢٥} + \frac{٩}{\sqrt{٢٥}}\right) - \left(\sqrt{٩} + \frac{٩}{\sqrt{٩}}\right)$

$= \left(٥ + \frac{٩}{٥}\right) - (٣ + ٣)$

$= ٥ + \frac{٩}{٥} - ٦ = \frac{٩}{٥} - ١ = \frac{٤}{٥}$

٢٠١٥ صيفي **(٦ علامات)**

جد التكامل الآتي $\int \frac{\text{جتا}٣\text{س}}{\text{جتا}\text{س}} \, \text{دس}$

الحل:

$\int \frac{\text{جتا}(٢\text{س}+\text{س})}{\text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}٢\text{س}\ \text{جتاس} - \text{جا}٢\text{س}\ \text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}٢\text{س}\ \text{جتاس} - ٢\text{جاس}\ \text{جتاس}\ \text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}٢\text{س} - ٣\ \text{جا}^{٢}\text{س}}{١} \, \text{دس}$

$= \int \left(\text{جتا}٢\text{س} - (١ - \text{جتا}٢\text{س})\right) \text{دس}$

$= \int \text{جتا}٢\text{س} - ١ + \text{جتا}٢\text{س} \, \text{دس}$

$= \int ٢\,\text{جتا}٢\text{س} - ١ \, \text{دس}$

$= ٢\, \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢} - \text{س} + \text{ج}$

$= \text{جا}٢\text{س} - \text{س} + \text{ج}$

٢٠١٦ شتوي **(٨ علامات)**

جد التكامل الآتي:

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{س}\ \text{جتاس}} \, \text{دس}$

الحل:

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س} + \frac{١}{٢}\, ٢\text{جاس}\ \text{جتاس}\ \text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} \left(\sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\right)\left(\sqrt{١ + \text{جاس}}\right) \text{دس}$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} |\text{جتاس}| \sqrt{١ + \text{جاس}} \, \text{دس}$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس} \sqrt{١ + \text{جاس}} \, \text{دس} + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} -\text{جتاس} \sqrt{١ + \text{جاس}} \, \text{دس}$

$\Leftarrow \text{ص} = ١ + \text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٤} \leftarrow \text{ص} = ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \leftarrow \text{ص} = ٢$

$\text{س} = \pi \leftarrow \text{ص} = ١$

$\int_{١+\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{٢} \text{جتاس}\ \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}} + \int_{٢}^{١} -\text{جتاس}\ \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١+\sqrt{٢}}^{٢} - \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٢}^{١}$

$= \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{٨} - \sqrt{\left(١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٣}}\right) - \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{١} - \sqrt{٨}\right)$

٢٠١٦ شتوي **(٧ علامات)**

إذا كان $\int_{-١}^{٢} \left(٣\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٤\right) \text{دس} = ٣$

$\int_{٣}^{١} \left(\text{ق}(\text{س}+١) - ٣\text{س}^{٢}\right) \text{دس} = ٢٧$

فجد $\int_{-١}^{٤} \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس}$.

الحل:

$\int_{-١}^{٢} \left(٣\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٤\right) \text{دس} = ٣$

$٣\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{-١}^{٢} ٢\text{س}\,\text{دس} - \int_{-١}^{٢} ٤\,\text{دس} = ٣$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٥) (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

$$3\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \text{س}^2\Big|_{-1}^{2} - 12 = 3$$

$$3\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + (4-1) = 15$$

$$3\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 12$$

$$\Leftarrow \int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$$

كذلك

$$\int_{3}^{1} \left(\text{ق}(\text{س}+1) - 3\text{س}^2\right)\text{دس} = 27$$

$\text{ص} = \text{س} + 1$

$\text{دس} = \text{دص}$

$\text{س} = 3 \Leftarrow \text{ص} = 4$

$\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 2$

$$\int_{4}^{2} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} - \int_{3}^{1} 3\text{س}^2\,\text{دس} = 27$$

$$\int_{4}^{2} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} - \text{س}^3\Big|_{3}^{1} = 27$$

$$\int_{4}^{2} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} - (1 - 27) = 27$$

$$\int_{4}^{2} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = 1$$

الآن المطلوب:

$$\int_{-1}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= 4 + -1 = 3$$

٢٠١٦ صيفي **(٦علامات)**

إذا كان $\int_{0}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$ ، $\int_{0}^{3} \left(\text{م}\,\text{ق}(3-\text{س}) + 6\text{س} + 1\right)\text{دس} = 42$

فجد قيمة الثابت م.

الحل:

$$\int_{0}^{3} \text{م}\,\text{ق}(3-\text{س})\,\text{دس} + \int_{0}^{3} (6\text{س}+1)\,\text{دس} = 42$$

$\text{ص} = 3 - \text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-1} = -\text{دص}$

$\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = 3 \Leftarrow \text{ص} = 0$

$$-\text{م}\int_{3}^{0} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} + 3\text{س}^2 + \text{س}\Big|_{0}^{3} = 42$$

$$\text{م}\int_{0}^{3} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} + (27 + 3 - 0) = 42$$

$$\text{م} \times 4 + 30 = 42$$

$$\text{م} \times 4 = 12 \Leftarrow \text{م} = 3$$

٢٠١٧ شتوي **(٧علامات)**

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س} - 5]\,|\text{س} - 1| & ، \ 0 \le \text{س} < 2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{\text{س}+1}} & ، \ 2 \le \text{س} \le 4 \end{cases}$$

فجد $\int_{0}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$.

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -5(1-\text{س}) & 0 \le \text{س} < 1 \\ -4(\text{س}-1) & 1 \le \text{س} < 2 \\ 3(\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}} & 2 \le \text{س} \le 4 \end{cases}$$

$$\int_{0}^{1} (-5 + 5\text{س})\,\text{دس} + \int_{1}^{2} (-4\text{س} + 4)\,\text{دس} + \int_{2}^{4} 3(\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$$

$$-5\text{س} + \frac{5\text{س}^2}{2}\Big|_{0}^{1} + -2\text{س}^2 + 4\text{س}\Big|_{1}^{2} + 3 \times 2(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_{2}^{4}$$

$$\left(-5 + \frac{5}{2}\right) - (0) + (-8 + 8) - (-2 + 4) + (6\sqrt{5}) - (6\sqrt{3})$$

$$= \frac{-10+5}{2} - 2 + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$$

$$= \frac{-5}{2} - \frac{2}{1} + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$$

$$= \frac{-5-4}{2} + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$$

$$= \frac{-9}{2} + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$$

٢٠١٨ شتوي قديم

قيمة $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} \frac{1}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$ تساوي

أ) 1 ب) $\text{لو}_{\text{هـ}}2$ جـ) $4\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$ د) $\frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}2$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad \text{س} = \text{هـ} \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = \text{هـ}^2 \leftarrow \text{ص} = 2$

$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{\text{س}}} = \text{س دص}$

$\int_1^2 \frac{1}{\text{س ص}}\ \text{دص} \times \text{س}$

$\int_1^2 \frac{1}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|\Big|_1^2 = \text{لو}_{\text{هـ}}2 - \text{لو}_{\text{هـ}}1 = \text{لو}_{\text{هـ}}2$

٢٠١٨ شتوي قديم (٧ علامات)

جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \text{ظا}^4(2\text{س})\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = 2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = \frac{\pi}{8} \leftarrow \text{ص} = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{ظا}^2\text{ص})^2\ \frac{\text{دص}}{2}$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{قا}^2\text{ص} - 1)^2\ \text{دص}$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{قا}^4\text{ص} - 2\,\text{قا}^2\text{ص} + 1)\ \text{دص}$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{ص}\ \text{قا}^2\text{ص}\ \text{دص} - \cancel{\frac{2}{2}}\ \text{ظاص}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\text{ص}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \text{ظا}^2\text{ص})\ \text{قا}^2\text{ص}\ \text{دص} - (\text{ظا}\frac{\pi}{4} - \text{ظا}\,0) + (\frac{\pi}{8} - 0)$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{قا}^2\text{ص} + \text{قا}^2\text{ص}\ \text{ظا}^2\text{ص})\ \text{دص} - (1 - 0) + \frac{\pi}{8}$

$\frac{1}{2}\text{ظاص}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{ظا}^3\text{ص}}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 1 + \frac{\pi}{8}$

$(\frac{1}{2}\text{ظا}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{ظا}\,0) + (\frac{1}{6}\text{ظا}^3\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\text{ظا}^3\,0) - 1 + \frac{\pi}{8}$

$(\frac{1}{2} - 0) + (\frac{1}{6} - 0) - 1 + \frac{\pi}{8}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - 1 + \frac{\pi}{8}$

$\frac{3 + 1 - 6}{6} + \frac{\pi}{8}$

$\frac{-2}{6} + \frac{\pi}{8}$

$-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{8}$

٢٠١٦ صيفي (٦علامات)

جد

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظاس}}{\text{جا٢س}}\,\text{دس}$$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظاس}$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}}} = \frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^2\text{س}}\,\text{دص}$$

$$\int \frac{\text{ص}}{\text{٢}\cancel{\text{جاس}}\,\text{جتاس}} \times \frac{\cancel{\text{جاس}}}{\text{جتاس}} \times \frac{1}{\frac{1}{\text{جتاس جتاس}}}\,\text{دص}$$

$$\int \frac{\text{ص}}{\text{٢}} \frac{\cancel{\text{جتاس}}\,\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}\,\cancel{\text{جتاس}}}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{1}{2}\,\text{ص}\,\text{دص}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ}$$

$$\frac{1}{4}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظاس}\right)^2 + \text{جـ}.$$

٢٠١٤ شتوي (٥علامات)

جد $\int \text{ظتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس})\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جاس}$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{دص}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جاس}}} \times \text{ص} \frac{\cancel{\text{جاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}\,\text{دص}$$

$$\int \text{ص}\,\text{دص}$$

$$\frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ}$$

$$\frac{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جاس}\right)^2}{2} + \text{جـ}.$$

٢٠١١ شتوي (٥علامات)

أثبت أن:

$\int \frac{\text{ظتا}(\text{لو}_{هـ} س)}{س}\, دس = \text{لو}_{هـ} |\text{جا}\,\text{لو}_{هـ} س| + جـ$

الحل:

$ص = \text{لو}_{هـ} س$

$دس = \frac{دص}{\frac{1}{س}} = س\, دص$

$\int \frac{\text{ظتا}\, ص}{س} \times س\, دص$

$\int \text{ظتا}\, ص\, دص$

$\int \frac{\text{جتا}\, ص}{\text{جا}\, ص}\, دص$

$= \text{لو}_{هـ} |\text{جا}\, ص| + جـ$

$= \text{لو}_{هـ} |\text{جا}\, \text{لو}_{هـ} س| + جـ$

٢٠١٤ شتوي (٦ علامات)

جد

$$\int \frac{1}{1+هـ^{س}}\, دس$$

الحل:

$$\int \frac{1}{1+هـ^{س}} \times \frac{هـ^{-س}}{هـ^{-س}}\, دس$$

$$\int \frac{هـ^{-س}}{1+هـ^{-س}}\, دس$$

$$ص = هـ^{-س} + 1$$

$$دس = \frac{دص}{-هـ^{-س}}$$

$$\int \frac{\cancel{هـ^{-س}}}{ص} \cdot \frac{دص}{-\cancel{هـ^{-س}}}$$

$$-\int \frac{1}{ص}\, دص$$

$$- لو_{هـ}|ص| + جـ$$

$$- لو_{هـ}|هـ^{-س}+1| + جـ .$$

٢٠١٤ صيفي (٧ علامات)

جد

$$\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+هـ^{-س}}\, دس$$

الحل:

$$\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+هـ^{-س}} \times \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}}\, دس$$

$$\int \frac{هـ^{2س}}{هـ^{2س}+1}\, دس$$

$$ص = هـ^{2س} + 1$$

$$دس = \frac{دص}{2هـ^{2س}}$$

$$\int \frac{\cancel{هـ^{2س}}}{ص} \cdot \frac{دص}{2\cancel{هـ^{2س}}}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{ص}\, دص$$

$$\frac{1}{2} لو_{هـ}|ص| + جـ$$

$$\frac{1}{2} لو_{هـ}|هـ^{2س}+1| + جـ .$$