



الحل:

$$3s - 12 = \text{صف}$$

$$3s = 12$$

$$s = 4$$

$$s + 2 = 6 \text{ (خارج الفترة)}$$



$$3 - (3 - 12) = 12 \text{ دس}$$

$$|1 - 12| = 11$$

$$|(12 + 1) - (12 - 1)| =$$

$$|11 - 17| =$$

$$|27 - 1| =$$

$$27 =$$

مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة

بين منحني الاختيار  $s = 3 - 2s$  و  $s = 3 - s$

ومحور السينات على الفترة  $[1, 3]$

الحل:

$$3 - 2s = \text{صف}$$

$$3 = (3 - 2s) \cdot 3$$

$$3 = 9 - 6s$$



مساحة المنطقة المغلقة المحصورة

بين منحني الاختيار  $s = 3 - 2s$

ومحور السينات على الفترة  $[1, 3]$

يغطي بالقاعدة:

$$\int_1^3 (3 - 2s) ds = 3$$

مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة

بين منحني الاختيار  $s = 2 + 3s$

ومحور السينات والمستقيمة

$$s = 1, s = 3$$

الحل:

$$2 + 3s = \text{صف}$$

$$2 = 3s$$

$$s = \frac{2}{3} \text{ (خارج الفترة)}$$



$$\int_1^2 (2 + 3s) ds = 3$$

$$1 + 3s = 17 + 17 =$$

$$(2 + 1) - 17 + 17 =$$

$$27 = 0 - 27 =$$

مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة

بين منحني الاختيار  $s = 3 - 2s$

ومحور السينات والمستقيمة

$$s = 1, s = 3$$

$$7 = 1 - 17$$

مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران  $(17 - 7x)$  و  $(x - 1)$  على الفترة  $[2, 4]$

الحل:

$$= 17 - 7x - (x - 1)$$

$$= 18 - 8x$$

$$x = 17 - 7x$$



$$\int_{2}^{4} (17 - 7x - (x - 1)) dx = 4$$

$$= 17 - 7x - (x - 1)$$

$$= (17 - 7x) - (x - 1)$$

$$= 18 - 8x$$

$$= 17 - 7x$$

$$= 17$$

مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران  $(17 - 7x)$  و  $(x - 1)$  على الفترة  $[2, 4]$

الحل:

$$= 17 - 7x - (x - 1)$$

$$= 18 - 8x$$

$$x = 17 - 7x$$



$$\int_{2}^{4} (17 - 7x - (x - 1)) dx = 4$$

$$= 17 - 7x - (x - 1)$$

$$(17 - 7x) - (x - 1)$$

$$= 18 - 8x$$

$$= 17 - 7x$$

$$= 17$$

$$= 18 - 8x = 18 - 32 = -14$$

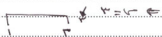
مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران  $(17 - 7x)$  و  $(x - 1)$  على الفترة  $[2, 4]$

الحل:

$$= 17 - 7x - (x - 1)$$

$$= 18 - 8x$$



$$\int_{2}^{4} (17 - 7x - (x - 1)) dx = 4$$

$$= 17 - 7x - (x - 1)$$

$$= (17 - 7x) - (x - 1)$$



$$\omega \left. \begin{array}{l} 3-2=0 \\ 2-2 \end{array} \right\} = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} 3-2 \\ 2-2 \end{array} \right\} = 9$$

$$(3-2) - (2-2) =$$

$$1 = 1$$

$$2 = 1 + 1 =$$

$$\omega \left. \begin{array}{l} 3-2=1 \\ 2-2 \end{array} \right\} = 9 \oplus \omega \left. \begin{array}{l} 3-2=1 \\ 1-1 \end{array} \right\} = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} 3-2 \\ 1-1 \end{array} \right\} = 9 \oplus \left. \begin{array}{l} 3-2 \\ 1-1 \end{array} \right\} = 9$$

$$(3-2) - (1-1) \oplus (1-1) - (3-2) =$$

$$1 = 1 \oplus 0 = 1 =$$

$$1 = 1 \oplus 0 =$$

$$1 = 1 \oplus 0 =$$

$$0 =$$

مثال  
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة  
بين منحنيي الاقتران و(1) = 3-2

والمستقيمة 2 = 2 و 3 = 3

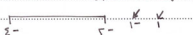
الحل:

$$3-2 = 3-2$$

$$2 = 2-2$$

$$1 = 3-2$$

$$2 = 1 + 1 = 2 =$$



$$\omega \left. \begin{array}{l} 3-2=1 \\ 2-2 \end{array} \right\} = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} 3-2 \\ 2-2 \end{array} \right\} = 9$$

$$(3-2) - (2-2) =$$

$$(3-2) - 0 = 1 =$$

$$0 = 0 + 0 =$$

مثال  
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة  
بين منحنيي الاقتران و(1) = 13

والمستقيمة 3 = 3 و 1 = 1

الحل:

$$13 \neq 3$$

$$3 \leftarrow$$

$$3 = 13 \left\} = 9$$

$$(1-3) \cdot 13 =$$

$$36 = 3 \times 13 =$$

مثال  
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة  
بين منحنيي الاقتران و(1) = 5-2=0

والمستقيمة 2 = 3 و 2 = 2

الحل:

$$5-2=0$$

$$50 = 0 = 5-2=0$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx \oplus \int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx = 9$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx \oplus \int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx = 9$$

$$(0 - 1) \oplus (1 - 0) =$$

$$1 \oplus |1 - 1| =$$

$$2 = 1 + 1 =$$

مثال  
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة  
بين منحنيي الاختزان  $(y) = x^2 - 7x + 6$   
ومحور السينات على الفترة  $[0, 6]$   
الحل:

$$0 = x^2 - 7x + 6$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = 1$$

$$1 \pm x = 6$$



مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة  
بين منحنيي الاختزان  $(y) = x^2 - 3x - 4$   
ومحور السينات على الفترة  $[0, 4]$   
الحل:

$$0 = x^2 - 3x - 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$17 = x$$

$$x \pm 4 = 17$$



$$\int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx \oplus \int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx = 9$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx \oplus \int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx = 9$$

$$(2 + 7) - (0) \oplus (17 + 17) - (2 + 7) =$$

$$(4 - 0) \oplus (4 - 4) =$$

$$4 \oplus |8 - 1| =$$

$$13 = 4 + 8 =$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx \oplus \int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx = 9$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx \oplus \int_{-1}^1 (x^3 - 4) dx = 9$$

$$(195 - 76) - (130 - 56) \oplus (144 - 27) - (195 - 76) =$$

$$158 - 110 - 117 - 158 =$$

$$13 \oplus |11 - 1| =$$

$$14 = 13 \oplus 1 =$$

مثال  
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة  
بين منحنيي الاختزان  $(y) = x^2 - 4x$   
ومحور السينات على الفترة  $[0, 4]$   
الحل:

$$0 = x^2 - 4x$$

$$0 = x = 4$$



مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاختزان  $3 - 2x = y$  ومحور السينات

الحل:

$$0 = 3 - 2x + y$$

$$0 = (3 + y) \cdot x$$

$$3 - 2x = 0 \quad 0 = 3$$

$$x \left| \begin{array}{c} 3 - 2x + y \\ 3 - \end{array} \right| = 0$$

$$\left| \begin{array}{c} 3 - 2x + y \\ 3 - \end{array} \right| =$$

$$\left| \left( \frac{9x^2}{2} + 9 - \right) - (0) \right| =$$

$$\left| \left( \frac{9x^2}{2} + 9 - \right) - \right| =$$

$$\left| \left( \frac{9}{2} \right) - \right| = \left| \left( \frac{18 + 18}{2} \right) - \right| =$$

$$\frac{9}{2} =$$

مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاختزان  $3 - 2x = y$  ومحور السينات

الحل:

$$3 - 2x - y = 0$$

$$(3 - 2x)(3 - y) = 0$$

مثال

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاختزان  $4 - 3x = y$  ومحور السينات

الحل:

$$4 - 3x - y = 0$$

$$0 = 4 + 3x - y$$

$$4 - 3x = 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$x \left| \begin{array}{c} 4 - 3x - y \\ 4 - \end{array} \right| = 0$$

$$\left| \begin{array}{c} 4 - 3x - y \\ 4 - \end{array} \right| =$$

$$\left| \left( 4 + \frac{1}{2} \right) - \left( 4 - \frac{1}{2} \right) \right| =$$

$$\left| \left( \frac{15 + 1}{2} \right) - \frac{15 - 1}{2} \right| =$$

$$\left| \frac{14}{2} - \frac{14}{2} \right| =$$

$$\left| \frac{14}{2} - \right| =$$

$$\frac{14}{2} =$$

$$\frac{35}{3} = \frac{75-97}{3} =$$

$$1 = 3, 4, 2 = 3$$

$$3 \left| \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right| = 9$$

مثال  
جد مساحة المنطقة المثلثة المضمرة  
بين منحني الاختزان و(س) = 3-13-3-4-3  
ومحور السينات .

الحل:  
3-4-3-13-3 = صف  
3-4-3-3-3 = صف  
3 = 3, 4, 0 = 3

$$3 \left| \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right| = 9$$

$$3 \left| \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right| =$$

$$|(3+1-\frac{1}{3}) - (9-9-9)| =$$

$$|(2+\frac{1}{3}) - 9 - 1 =$$

$$|\frac{7+1}{3} - 9 - 1 =$$

$$|\frac{0}{3} - 9 - 1 =$$

$$|\frac{35-1}{3}| = |\frac{0-27}{3}| =$$

$$\frac{35}{3} =$$

$$|(0) - (27 \times 4 - 81)| =$$

$$|108 - 81| =$$

$$|27 - 1 =$$

$$27 =$$

مثال  
جد مساحة المنطقة المثلثة المضمرة  
بين منحني الاختزان و(س) = 3-13-3-4-3  
ومحور السينات .

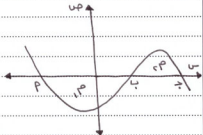
الحل:  
3-4-3-13-3 = صف  
3-4-3-3-3 = صف  
3 = 3, 4 = 3

$$3 \left| \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right| = 9$$

$$3 \left| \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right| =$$

$$(0) - (75 - 35) =$$

مثال



بمثل الشكل صحنى  $v(t)$  إذا كانت  
 $0 = ٢٣$  ،  $٨ = ١٣$   
 حدد قيمة  $٢٠$  :

$$① \int_P^{١٣} v(t) dt$$

$$② \int_P^{ب} v(t) dt$$

$$③ \int_P^{ج} v(t) dt$$

④ مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين  
 صحنى الاقتران  $v(t)$  ومحور السينات  
 على الفترة  $[٢٠, ٠]$

الحل:

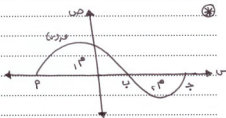
$$① \int_P^{١٣} v(t) dt = ٨ -$$

$$② \int_P^{ب} v(t) dt = ٥$$

$$③ \int_P^{ج} v(t) dt + \int_P^{ب} v(t) dt = \int_P^{ج} v(t) dt$$

$$٣ = ٥ + ٨ =$$

④ المساحة =  $١٣ + ٢ = ١٥$



$$\int_P^{ب} v(t) dt + \int_P^{١٣} v(t) dt = ٥$$

$$٢ = ٥ + ٣ =$$

ملاحظة:

المساحة تحت محور السينات أو فوق  
 محور السينات موجبة

ملاحظة:

التكامل من اليسار إلى اليمين فوق  
 محور السينات موجبة

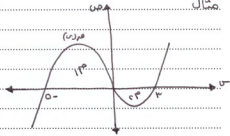
التكامل من اليسار إلى اليمين تحت  
 محور السينات سالب

التكامل من اليمين إلى اليسار فوق  
 محور السينات سالب

التكامل من اليمين إلى اليسار تحت  
 محور السينات موجبة



مثال



يمثل الشكل نافذة على شكل مستطيل

طول قاعدته ٣ م وارتفاعه ٣ م

يحلوه من حيث يعطى بالقاعدة

$$y = 3 - x^2$$

إذا أردنا وضع زجاج على النافذة

وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه

خمسة دنانير فما التكلفة الكلية

لزجاج النافذة؟

يمثل الشكل منحني الإرتقان (١٣)

إذا كانت  $1.5 = 1.5$   $1.5 = 0.5$   $3 = 0.5$

جد قيمة

$$\int_0^3 (3-x^2) dx$$

الحل:

مساحة النافذة = مساحة المستطيل +

المساحة تحت الإرتقان (١٣)

من ١ إلى ٣ وفوق ١ = ٥

$$[3] = 1 \times 3 = 3$$

المساحة تحت (١٣) وفوق ١ =

$$\int_1^3 (3-x^2) dx = \left[ 3x - \frac{x^3}{3} \right]_1^3$$

$$= \left( 9 - \frac{27}{3} \right) - \left( 3 - \frac{1}{3} \right) = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

$$= \frac{10}{3} + 3 = \frac{19}{3}$$

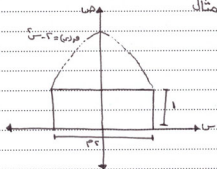
$$= \left( \frac{19}{3} + 3 \right) \times 5 = \frac{46}{3} \times 5 = \frac{230}{3}$$

$$= \frac{230}{3} \times 5 = \frac{1150}{3} = 383.33$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{2}{3} + 7 = 9 \leftarrow$$

$$\frac{1}{3} = 0 \times \frac{1}{3} = \text{الكلفة} \leftarrow$$

مثال





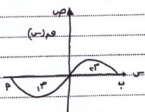
رياضيات المستوى ( ٤ ) الوحدة ( التكامل وتطبيقاته )  
 اختصاص (الادبي والمعلوماتية) الدرس ( ايجاد المساحة )  
 عصام الشبخ ماجستير رياضيات

٢٠٩ شتوي

بالاعتماد على الشكل المرفق يمثل منحني  $y = \sin(x)$   
 اذا كانت المساحة  $\int_0^3 \sin(x) dx = 7$  ، المساحة  
 $\int_3^5 \sin(x) dx$  فان  $\int_0^5 \sin(x) dx$  تساوي  
 ٤ (P) ٤ (B) ٤ (C) ١٦ (D) ٦٠ (E)



رياضيات المستوى ( ٤ ) الوحدة ( التكامَل وتطبيقاته )  
 النقص (الادبي والمعلوماتية ) الدرس ( ايجاد المساحة )  
 عصام الشيخ ( ماجستير رياضيات )

$\int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx$	<p>٣.١. صيغتين</p> 
	<p>يمثل الشكل المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران <math>f(x)</math> ومحور السينات في الفترة <math>[-2, 2]</math>. اذا علمت ان مساحة <math>M = 0</math> ومساحة <math>M = 3</math> فان <math>\int_{-2}^2 f(x) dx</math> يساوي</p> <p>١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤ (هـ)</p>
	<p>٣.١.١. شتوي          جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران <math>f(x) = x^2 + 1</math> ومحور السينات والمستقيمين <math>x = -1</math> و <math>x = 1</math></p> <p>الحل:</p> $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$ $= \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1$ $= \left( \frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left( \frac{(-1)^3}{3} + (-1) \right)$ $= \left( \frac{1}{3} + 1 \right) - \left( -\frac{1}{3} - 1 \right)$ $= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

رياضيات المستوى ( ٤ ) الوحدة ( التكامل وتطبيقاته )  
 عصام الشيخ ( ماجستير رياضيات )  
 التخصص ( الادبي والمعلوماتية ) الدرس ( ايجاد المساحة )

<p>٢.١٢ صيفي</p> <p>٤ علامات</p> <p>احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران <math>f(x) = 7 + x^2</math> ومحور السينات في الفترة <math>[3, 0]</math></p> <p>الحل:</p> $0 \leq 7 + x^2$ $7 - 49 \leq x^2$ <p>أي <math>x = \pm \sqrt{7}</math></p> $x = \sqrt{7} \quad   \quad 7 + x^2 = 14$ $x = -\sqrt{7} \quad   \quad 7 + x^2 = 14$ $ 0 - 14 + \frac{9 \times 7}{2}  =$ $\frac{9}{2} = \left  \frac{14 - 63}{2} \right  = \left  14 - \frac{63}{2} \right  =$	
<p>٢.١٣ شتوي</p> <p>يبين الشكل المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران <math>f(x)</math> ومحور السينات في الفترة <math>[b, a]</math> إذا علمت أن <math>a = 23.9</math> فإن <math>f(x) = 3</math></p>	<p>٢.١٢ صيفي</p> <p>معتاداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران <math>f(x)</math> في الفترة <math>[b, a]</math> إذا علمت أن مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى <math>f(x)</math> ومحور السينات تساوي ١٤ وكان <math>f(x) = 7</math> فما قيمة <math>b</math> ؟</p> <p>٨ (ب) ٢ (ج) ٨- (د) ٣- (هـ)</p>

رياضيات المستوى ( ٤ ) الوحدة ( التكامل وتطبيقاته ) عصام الشخ  
 التخصص (الادبي والعلوميّة ) الدرس ( ايجاد المساحة ) ماجستير رياضيات

٦.١٣ صيفي

٦.١٣

احسب مساحة المنطقة المغلقة

المحصورة بين منحني الايتزان

وخط  $y = 2 - x$  ومحور السينات

الحل:

$$y = 2 - x$$

$$= (2 - x) \cdot x$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = 0$$

$$\left| \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^2 =$$

$$\left( 2 - \frac{8}{3} \right) - 0 =$$

$$\left| 2 - \frac{8}{3} \right| =$$

$$\left| \frac{6}{3} - \frac{8}{3} \right| =$$

$$\left| \frac{6 - 8}{3} \right| =$$

$$\frac{2}{3} =$$

المستوى ( ٤ ) الوحدة ( التفاضل وتطبيقاته ) عصام الشيخ

التخصص ( الأدي ) ( الدرس ( إيجاد المساحة ) ماجستير رياضيات والمعلوماتية

٣.١٥ صيفي (٦ علامات)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

الافتتان  $y = (x-3)^2 - 6$  والمحور

السنيات في الفترة  $[-1, 4]$ .

الحل:

$$y = (x-3)^2 - 6$$

$$y = (x-3)^2 - 6$$

$$y = x^2 - 6x + 9 - 6$$



$$\int_{-1}^4 (x^2 - 6x + 9 - 6) dx = \int_{-1}^4 (x^2 - 6x + 3) dx$$

$$\left[ \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x \right]_{-1}^4 =$$

$$\left[ \frac{1}{3}(4)^3 - 3(4)^2 + 3(4) \right] - \left[ \frac{1}{3}(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) \right] =$$

$$\left[ \frac{64}{3} - 48 + 12 \right] - \left[ -\frac{1}{3} - 3 - 3 \right] =$$

$$\frac{64}{3} - 36 + 15 + \frac{1}{3} + 6 + 3 =$$

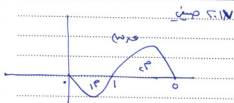
$$\frac{64}{3} + \frac{1}{3} - 18 =$$





$$\frac{25}{4} \times 7 = \text{الكلفة}$$

$$22 \times 10 = 220 = \text{ثمن}$$



المساحة تحت المنحنى

مربع:  $v \in [0, c]$

إذا علمت أن مساحة المنطقة  $E = 12$

$$12 = v \times c \quad \text{منه } c = \frac{12}{v}$$

منه مساحة المنطقة  $c = 12/v$

الحل:

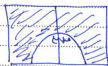
$$12 = \frac{c \times c}{4} = v \quad ?$$

$$v \times \left(\frac{12}{v}\right) + v \times \left(\frac{12}{v}\right) = v \quad ?$$

$$v \times \left(\frac{12}{v}\right) + 12 = v \quad ?$$

$$12 = v \times \left(\frac{12}{v}\right) \quad \Leftarrow$$

$$12 = c \times v \quad \Leftarrow$$



٢٠١٧ صيفي  
يمثل الشكل  
العلامة الإيجابية  
للإحداثيات  
مساحة المنحنى

يمثلها منحنى الإحداثيات  $c = 12/v$   
مساحة المنطقة  $v \times c = 12$   
لكن من الأفضل إذا علمت أن مساحة المنطقة  
المربعة منه يساوي 7 مثلاً

مساحة المثلث =  $\frac{1}{2} \times c \times v$   
مساحة المثلث هي  $\frac{1}{2} \times c \times v$

$$c \times v = 12$$

$$c = \frac{12}{v}$$

$$12 = v \times \left(\frac{12}{v}\right)$$

$$12 = v \times \left(\frac{12}{v}\right) = 12$$

$$12 = v \times \left(\frac{12}{v}\right) = 12$$

$$\left(\frac{12}{v} \times \frac{12}{v} - 12\right) - \left(12 \times \frac{12}{v} - 12\right) =$$

$$\left(\frac{144}{v^2} - 12\right) - \left(\frac{144}{v} - 12\right) =$$

$$\frac{144 - 12v^2}{v^2} - \frac{144 - 12v}{v} =$$

$$\frac{144}{v^2} - \frac{12}{v} - \frac{144}{v} + \frac{12}{1} =$$

٢٠١٨ - ٢٠١٩ م. ٢٠١٨

حدد مساحة المنطقة المظللة المحصورة  
بين منحني الاقتران  $y = 2x - x^2$  و  $y = x^2 - 2x$   
في محور السينات .

الحل:

$$2x - x^2 = x^2 - 2x$$

$$4x = 2x^2 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$x = 0, 2$$

$$A = \int_0^2 (2x - x^2 - (x^2 - 2x)) dx = 4$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = 4$$

$$= \left[ 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = 4$$

$$= \left( 8 - \frac{16}{3} \right) - 0 = 4$$

$$= \left| \frac{24 - 16}{3} \right| = 4$$

$$= \left| \frac{8}{3} \right| = 4$$

$$= \frac{8}{3} = 4$$