التكامل بالأجزاء

ملخص القوانين

ESAM SHIKH
0796300625

قاعدة

$\int م \times دهـ = م \times هـ - \int هـ \times دم$

$\int س جاس = -س جتاس + \int جتاس$

$= -س جتاس + جاس + ج$

مثال ١

جد $\int_{-2}^{0} ٥س \sqrt{س+٣}$ دس

الحل:

$م = ٥س$ $\quad دهـ = (س+٣)^{\frac{1}{2}}$

$دم = ٥$ $\quad هـ = \frac{2}{3}(س+٣)^{\frac{3}{2}}$

$٥س \left(\frac{2}{3}(س+٣)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} \frac{2}{3}(س+٣)^{\frac{3}{2}} \times ٥$ دس

$\frac{10}{3}\sqrt{(س+٣)^3}\Big|_{-2}^{0} - \frac{10}{3} \times \frac{2}{5}(س+٣)^{\frac{5}{2}}\Big|_{-2}^{0}$

$\frac{10}{3}\sqrt{(س+٣)^3}\Big|_{-2}^{0} - \frac{4}{3}\sqrt{(س+٣)^5}\Big|_{-2}^{0}$

$\left(\frac{10}{3} \times ٨ - ١ \times \frac{10}{3}\right) - \left(١ \times \frac{4}{3} - ٣٢ \times \frac{4}{3} - ١\right)$

$\frac{80}{3} - \frac{10}{3} - \left(\frac{4}{3} + \frac{128}{3}\right)$

$= \frac{70}{3} - \frac{132}{3} = \frac{-62}{3}$

مثال

جد $\int$ س جتاس دس

الحل:

$م = س$ $\quad دهـ = جتاس$

$دم = ١$ $\quad هـ = جاس$

مثال

جد $\int$ س قاس ظاس دس

الحل:

$م = س$ $\quad دهـ = قاس ظاس$

$دم = ١$ $\quad هـ = قاس$

$س قاس - \int قاس$ دس

مثال

جد $\int$ ٢س جاس دس

الحل:

$م = ٢س$ $\quad دهـ = جاس$

$دم = ٢$ $\quad هـ = -جتاس$

$-٢س جتاس - \int -جتاس \times ٢$ دس

$-٢س جتاس + ٢ جاس + ج$

مثال

جد $\int$ س جا٥س دس

الحل:

$م = س$ $\quad دهـ = جا٥س$

$دم = ١$ $\quad هـ = \frac{-جتا٥س}{٥}$

$-\frac{1}{5}س جتا٥س - \int -\frac{1}{5} جتا٥س$ دس

$-\frac{س}{٥} جتا٥س + \frac{1}{٥} \frac{جا٥س}{٥} + ج$

$$\int s\,dt = s_0 t + \frac{1}{2}at^2 + c$$

مثال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x \sin x\,dx$$

الحل:

$u = 3x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = 3 \qquad v = -\cos x$

$$-3x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \times 3\,dx$$

$$-3x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-3\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2} + 3\sin\tfrac{\pi}{2} - (0 + 3\sin 0)$$

$$0 + 3 - 0 - 0 = 3$$

مثال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos 3x\,dx$$

الحل:

$u = 2x+1 \qquad dv = \cos 3x$

$du = 2 \qquad v = \frac{\sin 3x}{3}$

$$(2x+1)\frac{\sin 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{3} \times 2\,dx$$

$$\frac{(2x+1)}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\frac{(2\pi+1)}{3}\sin 3\tfrac{\pi}{2} + \frac{2}{9}\cos 3\tfrac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2\times 0+1}{3}\sin 0 + \frac{2}{9}\cos 0\right)$$

$$(0 + \tfrac{2}{9}\times -1) - (0 + \tfrac{2}{9}) = \frac{-4}{9}$$

مثال

$$\int s \sin^2 s\,ds$$

الحل:

$u = s \qquad dv = \sin^2 s$

$du = 1 \qquad v = \int(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2s}{2})$

$v = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}\sin 2s$

$$s(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{4}\sin 2s) - \int \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{4}\sin 2s\,ds$$

$$\frac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{4}s\sin 2s - \frac{s^2}{4} + \frac{\cos 2s}{8} + c$$

مثال

$$\int s \cos^2 s\,ds$$

الحل:

$u = s \qquad dv = \cos^2 s$

$du = 1 \qquad v = \int(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2s}{2})$

$v = \frac{1}{2}s - \frac{1}{4}\sin 2s$

$$s(\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{4}\sin 2s) - \int \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{4}\sin 2s\,ds$$

$$\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}s\sin 2s - \frac{s^2}{4} - \frac{\cos 2s}{8} + c$$

مثال

$$\int \frac{s}{1-\cos 2s}\,ds$$

الحل:

$$\int \frac{s}{2\sin^2 s}\,ds$$

$$= \int \frac{1}{2}s \csc^2 s\,ds$$

ف = $\frac{1}{2}$ س د ف = قتا٢ س د س

د ف = $\frac{1}{2}$ ف = -ظتا س

$\frac{1}{2}$ ∫ ظتا س = - ∫ ظتا س × $\frac{1}{2}$ د س

$\frac{1}{2}$ ظتا س + $\frac{1}{2}$ لو |جا س| + جـ

مثال

جد ∫ $\frac{\text{س جا س}}{\text{جتا}^3 \text{س}}$ د س

الحل:

∫ س ظا قا٢ س د س

ف = س د ف = قا٢ ظا

د ف = ١ ف = $\frac{\text{ظا}^2 \text{س}}{2}$

$\frac{1}{2}$ ظا٢ س - ∫ $\frac{1}{2}$ ظا٢ س د س

$\frac{1}{2}$ ظا٢ س - $\frac{1}{2}$ ∫ قا٢ س - ١ د س

$\frac{1}{2}$ ظا٢ س - $\frac{1}{2}$ ظا س + $\frac{1}{2}$ س + جـ

مثال

جد ∫ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^3 \text{س}}$ د س

الحل:

∫ ظا س قا٢ س د س

ف = ظا س د ف = قا٢ س

د ف = د س ف = $\frac{\text{قا}^2 \text{س}}{2}$

$\frac{1}{2}$ ظا٢ س - ∫ $\frac{1}{2}$ قا٢ س د س

$\frac{1}{2}$ ظا٢ س - $\frac{1}{2}$ ∫ ظا٢ س + ١ د س

$\frac{1}{2}$ ظا٢ س - $\frac{1}{2}$ ∫ قا٢ س - ١ د س

$\frac{1}{2}$ ظا٢ س - $\frac{1}{2}$ ظا س + $\frac{1}{2}$ س + جـ

مثال

جد ∫ س (جا س + جتا س)٢ د س

الحل:

∫ س (جا٢ س + ٢ جا س جتا س + جتا٢ س) د س

∫ س (١ + جا ٢س) د س

∫ (س + $\frac{1}{2}$ س جا ٢س) د س

$\frac{\text{س}^2}{2}$ + ∫ $\frac{1}{2}$ س جا ٢س د س

ف = س د ف = جا ٢س د س

د ف = ١ ف = $\frac{-\text{جتا ٢س}}{2}$

$\frac{\text{س}^2}{2}$ + $\frac{1}{2}$ س جتا ٢س - ∫ $\frac{-1}{2}$ جتا ٢س د س

$\frac{\text{س}^2}{2}$ - $\frac{1}{2}$ س جتا ٢س + $\frac{1}{4}$ جا ٢س د س

مثال

جد ∫ س^5 (س + ١)^6 د س

الحل:

ف = س^5 د ف = (س + ١)^6

د ف = ٥ س^4 ف = $\frac{(\text{س}+1)^7}{7}$

$\frac{\text{س}^5 (\text{س}+1)^7}{7}$ - ∫ $\frac{(\text{س}+1)^7}{7}$ × ٥ س^4 د س

ف = ٥ س^4 د ف = $\frac{(\text{س}+1)^8}{8}$

د ف = ٢٠ س^3

ف = $\frac{(\text{س}+1)^8}{56}$

$\frac{\text{س}^5 (\text{س}+1)^7}{7}$ - $\frac{5}{56}$ (س + ١)^8 + $\frac{1}{1344}$ (س + ١)^9 + جـ

مثال

جد ∫ س جا س د س

الحل:

ف = س د ف = جا س

د ف = د س ف = - جتا س

- س جتا س + ∫ جتا س د س

- س جتا س + جا س + جـ

$\int$ س جتا س دس = س جا س − $\int$ جا س دس

ف = س دف = دس

دو = جا س و = −جتا س

$\int$ س جتا س دس = س(−جتا س) − $\int$ −جتا س دس

$\int$ س جتا س دس = −س جتا س + جا س + ج

مثال

جد $\int$ س جتا ٤س دس

الحل:

ف = س دف = دس

دو = جا ٤س و = −$\frac{1}{4}$ جتا ٤س

$\int$ س جا ٤س = س(−$\frac{1}{4}$ جتا ٤س) − $\int$ −$\frac{1}{4}$ جتا ٤س دس

$\int$ س جا ٤س = −$\frac{1}{4}$ س جتا ٤س + $\frac{1}{16}$ جا ٤س + ج

مثال

جد $\int$ (س² − س) جا ٢س دس

الحل:

ف = س² − س دف = ٢س − ١

دو = جا ٢س و = −$\frac{1}{2}$ جتا ٢س

$\int$ (س² − س) × −$\frac{1}{2}$ جتا ٢س دس = −$\frac{1}{2}$ (س² − س) جتا ٢س + $\int$ (٢س − ١) جتا ٢س دس

ف = ٢س − ١ دف = ٢

دو = جتا ٢س و = $\frac{1}{2}$ جا ٢س

$\int$ (س² − س) × −$\frac{1}{2}$ جتا ٢س دس = −$\frac{1}{2}$ (س² − س) جتا ٢س + (٢س − ١) × $\frac{1}{2}$ جا ٢س − $\int$ $\frac{1}{2}$ جا ٢س دس

$\int$ (س² − س) × −$\frac{1}{2}$ جتا ٢س دس = −$\frac{1}{2}$ (س² − س) جتا ٢س + $\frac{1}{2}$ (٢س − ١) جا ٢س + $\frac{1}{4}$ جتا ٢س + ج

مثال

جد $\int$ (س² − ٢س) $\sqrt{س + ٣}$ دس

الحل:

ف = س² − ٢س دف = (س + ٣)$^{\frac{1}{2}}$

دو = $\sqrt{س + ٣}$ و = $\frac{2}{3}$ (س + ٣)$^{\frac{3}{2}}$

$\int$ (س² − ٢س) × $\frac{2}{3}$ (س + ٣)$^{\frac{3}{2}}$ − $\int$ $\frac{2}{3}$ (٢س − ٢) (س + ٣)$^{\frac{3}{2}}$ دس

ف = $\frac{2}{3}$ (٢س − ٢) دف = (س + ٣)$^{\frac{3}{2}}$

دو = $\frac{2}{3}$ (س + ٣)$^{\frac{3}{2}}$ و = $\frac{2}{5}$ (س + ٣)$^{\frac{5}{2}}$

$\int$ (س² − ٢س) × $\frac{2}{3}$ (س + ٣)$^{\frac{3}{2}}$ − $\frac{4}{15}$ (٢س − ٢)(س + ٣)$^{\frac{5}{2}}$ − $\int$ $\frac{4}{15}$ (س + ٣)$^{\frac{5}{2}}$ دس

$\int$ (س² − ٢س) × $\frac{2}{3}$ (س + ٣)$^{\frac{3}{2}}$ − $\frac{4}{15}$ (٢س − ٢)(س + ٣)$^{\frac{5}{2}}$ + $\frac{16}{105}$ (س + ٣)$^{\frac{7}{2}}$ + ج

مثال

جد $\int$ س^{٥} جتا س^{٣} دس

الحل:

ص = س^{٣} دس = $\frac{دص}{3س^{2}}$

$\int \frac{\text{جتا ص}\, \text{د ص}}{\text{ص}^3}$

$\int \frac{1}{3} س^3 \text{ جتا ص د ص}$

$\int \frac{1}{3} \text{ص جتا ص د ص}$

ف $= \frac{1}{3}$ ص د ف $= \text{جتا ص}$

د ه $= \frac{1}{3}$ ه $= \text{جا ص}$

$\frac{1}{3}$ ص جا ص $- \int \frac{1}{3} \text{جا ص د ص}$

$\frac{1}{3}$ ص جا ص $+ \frac{1}{3}$ جتا ص $+$ جـ

$\frac{1}{3} س^3 \text{ جا } س^3 + \frac{1}{3} \text{ جتا } س^3 +$ جـ

مثال

جـ $\int \text{جتا } \sqrt{٢س+١}$ د س

الحل:

ص $= \sqrt{٢س+١}$

ص^2 $= ٢س+١$

٢ ص د ص $= ٢$ د س

ص د ص $=$ د س

$\int \text{جتا ص ص د ص}$

$= \int \text{ص جتا ص د ص}$

ف $=$ ص د ه $= \text{جتا ص}$

د ف $= ١$ ه $= \text{جا ص}$

ص جا ص $- \int \text{جا ص د ص}$

ص جا ص $+ \text{جتا ص} +$ جـ

$\sqrt{٢س+١} \text{ جا } \sqrt{٢س+١} + \text{جتا } \sqrt{٢س+١} +$ جـ

مثال

جـ $\int \text{جتا } \sqrt[3]{س}$ د س

الحل:

ص $= \sqrt[3]{س}$

ص^3 $= س$

٣ ص^2 د ص $=$ د س

$\int \text{جتا ص} \cdot ٣ص^2$ د ص

$= \int ٣ص^2 \text{ جتا ص د ص}$

ف $= ٣ص^2$ د ه $= \text{جتا ص}$

د ف $= ٦ص$ ه $= \text{جا ص}$

$٣ص^2 \text{ جا ص} - \int ٦ص \text{ جا ص د ص}$

ف $= ٦ص$ د ه $= \text{جا ص}$

د ف $= ٦$ ه $= -\text{جتا ص}$

$٣ص^2 \text{ جا ص} - (-٦ص \text{ جتا ص} - \int -٦ \text{ جتا ص د ص})$

$٣ص^2 \text{ جا ص} + ٦ص \text{ جتا ص} - ٦ \text{ جا ص} +$ جـ

$٣\sqrt[3]{س^2} \text{ جا } \sqrt[3]{س} + ٦\sqrt[3]{س} \text{ جتا } \sqrt[3]{س} - ٦ \text{ جا } \sqrt[3]{س} +$ جـ

مثال

جـ $\int س \, ه^{٣س}$ د س

الحل:

ف $= س$ د ه $= ه^{٣س}$

د ف $= ١$ ه $= \frac{١}{٣} ه^{٣س}$

$\frac{1}{2}$ س ω^{3} − ∫ $\frac{1}{2}\omega^{3}$ دس

$\frac{1}{2}$ س ω^{3} − $\frac{1}{9}\omega^{3}$ + ج

مثال

جد ∫ (٢س−٣) ω^{3} دس

الحل:

ف = ٢س − ٣ دف = ٢ دس

دف = ٢ دس ، $\omega = \omega$

(٢س−٣) ω^{3} − ∫ ٢ ω^{3} دس

(٢س−٣) ω^{3} − ٢ ω^{3} + ج

مثال

جد ∫ س ω^{3} دس

الحل:

ف = س دف = دس

دف = ٣س $\omega = \omega$

س ω^{3} − ∫ ٣س ω^{3} دس

ف = ٣س دف = دس

دف = ٣ $\omega = \omega$

س ω^{3} − (٣س ω^{3} − ∫ ٣ ω^{3} دس)

س ω^{3} − ٣س ω^{3} + ٣ ω^{3} + ج

مثال

جد ∫ ω^{3} دس

الحل:

ف = ω^{2} دف = دس

دف = ٣ ω^{2} دس $\omega = \omega$

س ω^{3} − ∫ ٣س ω^{2} دس

ف = ٣س دف = ٣ دس

دف = ٦س $\omega = \omega$

س ω^{3} − (٣س ω^{2} − ∫ ٦س ω^{2} دس)

س ω^{3} − ٣س ω^{2} + ٦ ∫ س ω^{2} دس

ف = س دف = دس

دف = ٢س دس $\omega = \omega$

س ω^{3} − ٣س ω^{2} + ٦ (س ω^{2} − ∫ ٢س ω^{2} دس)

س ω^{3} − ٣س ω^{2} + ٦س ω^{2} − ٦ ω^{3} + ج

مثال

جد ∫ $\frac{س}{\omega^{3}}$ دس

الحل:

∫ س ω^{-3} دس

ف = س دف = دس

دف = ١ $\omega = \omega^{-3}$

$-\frac{1}{2}$ س ω^{-2} − ∫ $-\frac{1}{2}\omega^{-3}$ دس

$-\frac{1}{2}$ س ω^{-2} − $\frac{1}{4}\omega^{-2}$ + ج

مثال

جد ∫ س ω^{3} دس

الحل:

مثال

جد $\int (س^3 + 2س) هـ^{س} \, دس$

الحل:

$ف = س^3 + 2س \quad د هـ = هـ^{س}$

$د ف = 3س^2 + 2 \quad هـ = هـ^{س}$

$(س^3 + 2س) هـ^{س} - \int (3س^2 + 2) هـ^{س} \, دس$

$ف = 3س^2 + 2 \quad د هـ = هـ^{س}$

$د ف = 6س \quad هـ = هـ^{س}$

$(س^3 + 2س) هـ^{س} - (3س^2 + 2) هـ^{س} + \int 6س هـ^{س} \, دس$

$ف = 6س \quad د هـ = هـ^{س}$

$د ف = 6 \quad هـ = هـ^{س}$

$(س^3 + 2س) هـ^{س} - (3س^2 + 2) هـ^{س} + 6س هـ^{س} - \int 6 هـ^{س} \, دس$

$(س^3 + 2س) هـ^{س} - (3س^2 + 2) هـ^{س} + 6س هـ^{س} - 6 هـ^{س} + ج$

مثال

جد $\int \frac{س \, هـ^{س}}{(1+س)^2} \, دس$

الحل:

$\int س هـ^{س} (1+س)^{-2} \, دس$

$ف = س هـ^{س} \quad د هـ = (1+س)^{-2}$

$د ف = س هـ^{س} + هـ^{س} \quad هـ = \frac{(1+س)^{-1}}{-1}$

$س هـ^{س} \times \frac{-1}{1+س} - \int (س هـ^{س} + هـ^{س}) \times \frac{-1}{1+س} \, دس$

$-س هـ^{س} \times \frac{1}{1+س} + \int \frac{هـ^{س}}{1+س} \, دس$

$-س هـ^{س} \times \frac{1}{1+س} + \int \frac{هـ^{س}(1+س)}{1+س} \, دس$

$-س هـ^{س} \times \frac{1}{1+س} + هـ^{س} + ج$

مثال

جد $\int ظا^3 س \, قا^2 س \, دس$

الحل:

$\int ظا^2 س \, قا^2 س \, ظا س \, دس$

$\int (قا^2 س - 1) قا^2 س \, ظا س \, دس$

$\int (قا^4 س - قا^2 س) ظا س \, دس$

$\int قا^4 س \, ظا س \, دس - \int قا^2 س \, ظا س \, دس$

$ص = قا س \quad د ص = قا س ظا س \, دس$

$\frac{د ص}{قا س ظا س} = دس$

$\int قا^4 س \, ظا س \, \frac{د ص}{قا س ظا س} - \int ص^2 د ص$

$\int ص^3 د ص - \frac{ص^3}{3}$

$ف = ص^3 \quad د هـ = د ص$

$د ف = 3ص^2 \quad هـ = ص$

$ص^3 ص - \int 3ص^2 ص \, د ص$

$ص^3 ص - \int 3ص^2 ص \, د ص + ج$

$قا^3 س ظا س - \int 3 قا^2 س ظا س \, دس + ج$

مثال

جد $\int جا^2 س \, جتا س \, دس$

الحل:

$\int ٢جا ى جتا ى هـ^{جا ى} دى$

ص = جا ى

دص = دى جتا ى

$\int ٢جا ى جتا ى هـ^{ص}$ دص

$\int ٢ص هـ^{ص}$ دص

م = ٢ص دهـ = هـ^ص

دم = ٢ هـ = هـ^ص

$٢ص هـ^{ص} - \int ٢ هـ^{ص}$ دص

$٢ص هـ^{ص} - ٢ هـ^{ص} + ج$

$٢جا ى هـ^{جا ى} - ٢ هـ^{جا ى} + ج$

مثال

جد $\int هـ^{٢س}$ جا ٣س دس

الحل:

م = هـ^٢س دهـ = جا ٣س دس

دم = ٢ هـ^٢س هـ = $-\frac{١}{٣}$ جتا ٣س

$-\frac{١}{٣} هـ^{٢س} جتا ٣س - \int \frac{٢}{٣} هـ^{٢س} جتا ٣س$ دس

م = $\frac{٢}{٣}$ هـ^٢س دهـ = جا ٣س دس

دم = $\frac{٢}{٣}$ هـ^٢س هـ = $-\frac{١}{٣}$ جتا ٣س

$-\frac{١}{٣} هـ^{٢س} جتا ٣س - \frac{٢}{٣} \int هـ^{٢س} جتا ٣س$ دس

$-\frac{١}{٣} هـ^{٢س} جتا ٣س - \frac{٢}{٣} [\frac{١}{٣} هـ^{٢س} جا ٣س - \frac{٢}{٣} \int هـ^{٢س} جا ٣س$ دس$]$

$-\frac{١}{٣} هـ^{٢س} جتا ٣س - \frac{٢}{٩} هـ^{٢س} جا ٣س - \frac{٤}{٩} \int هـ^{٢س} جا ٣س$ دس

$\frac{١٣}{٩} \int هـ^{٢س} جا ٣س$ دس $= -\frac{١}{٣} هـ^{٢س} جتا ٣س + \frac{٢}{٩} هـ^{٢س} جا ٣س$

$\int هـ^{٢س} جا ٣س$ دس $= -\frac{٣}{١٣} هـ^{٢س} جتا ٣س + \frac{٢}{١٣} هـ^{٢س} جا ٣س + ج$

مثال

جد $\int هـ^{-٢ى}$ جا ى دى

الحل:

م = $هـ^{-٢ى}$ دهـ = جا ى

دم = $-٢ هـ^{-٢ى}$ هـ = $-$ جتا ى

$-هـ^{-٢ى}$ جتا ى $- \int ٢هـ^{-٢ى}$ جتا ى دى

م = $-٢هـ^{-٢ى}$ دهـ = جتا ى

دم = $٤هـ^{-٢ى}$ هـ = جا ى

$-هـ^{-٢ى}$ جتا ى $- ٢هـ^{-٢ى}$ جا ى $+ \int ٤هـ^{-٢ى}$ جا ى دى

$\int هـ^{-٢ى}$ جا ى دى $= -\frac{١}{٥} هـ^{-٢ى}$ جتا ى $- \frac{٢}{٥} هـ^{-٢ى}$ جا ى $+ ج$

$\int هـ^{-٢ى}$ جا ى دى $= -\frac{١}{٥} هـ^{-٢ى} (٢$ جا ى $+$ جتا ى$) + ج$

مثال

جد $\int هـ^{٥س}$ جتا ٣س دس

الحل:

م = $هـ^{٥س}$ دهـ = جتا ٣س دس

دم = $٥هـ^{٥س}$ هـ = $\frac{١}{٣}$ جا ٣س

$\frac{١}{٣} هـ^{٥س}$ جا ٣س $- \int \frac{٥}{٣} هـ^{٥س}$ جا ٣س دس

م = $\frac{٥}{٣} هـ^{٥س}$ دهـ = جا ٣س دس

دم = $\frac{٥}{٣} هـ^{٥س}$ هـ = $-\frac{١}{٣}$ جتا ٣س

$\frac{١}{٣} هـ^{٥س}$ جا ٣س $- \frac{٥}{٣} [-\frac{١}{٣} هـ^{٥س}$ جتا ٣س $- \frac{٥}{٣} \int هـ^{٥س}$ جتا ٣س دس$]$

$\frac{١}{٣} هـ^{٥س}$ جا ٣س $+ \frac{٥}{٩} هـ^{٥س}$ جتا ٣س $+ \frac{٢٥}{٩} \int هـ^{٥س}$ جتا ٣س دس

$\frac{٣٤}{٩} \int هـ^{٥س}$ جتا ٣س دس $= \frac{١}{٣} هـ^{٥س}$ جا ٣س $+ \frac{٥}{٩} هـ^{٥س}$ جتا ٣س

$\int هـ^{٥س}$ جتا ٣س دس $= \frac{٣}{٣٤} هـ^{٥س}$ جا ٣س $+ \frac{٥}{٣٤} هـ^{٥س}$ جتا ٣س $+ ج$

مثال

جد $\int هـ^{٥ى}$ جا ى جتا ى دى

الحل:

$\frac{١}{٢} \int هـ^{٥ى}$ جا ٢ى دى

ف = هـ^ك دهـ = جتاءى

دف = هـ^ك هـ = -جتاءى

-½هـ^ك جتاءى - ∫½هـ^ك × جتاءـ ى ى

-½هـ^ك جتاءى + ∫½هـ^ك × جتاءـ ى ى

ف = ½هـ^ك دهـ = جتاءى

دف = ½هـ^ك هـ = ½جاءى

-½هـ^ك جتاءى + ¼هـ^ك جاءى - ∫½هـ^ك جاءى ى

⅝ ∫هـ^ك جاءى ى = -½هـ^ك جتاءى + ¼هـ^ك جاءى

∫هـ^ك جاءى ى = -⅖هـ^ك جتاءى + ⅕هـ^ك جاءى + د

هـ^ك - صفر = هـ^ك

مثال

جد ∫ ـ ى لو_هـ^٣ دى

الحل:

ف = لو_هـ^ى دهـ = ى

دف = ٣/ى دى هـ = ى^٤/٤

¼ى^٤ لو_هـ^٣ - ∫ى^٤/٤ × ٣/ى ى

¼ى^٤ لو_هـ^٣ = ٣/١٦ ى^٤ + د

مثال هـ^ك

جد ∫ ـ ى لو_هـ^ى دى

الحل:

ف = لو_هـ^ى دهـ = ى

دف = ١/ى دى هـ = ى^٢/٢

½ى^٢ لو_هـ^ى - ∫½ى^٢ × ١/ى ى

½ى^٢ لو_هـ^ى - ∫½ى ى

½ى^٢ لو_هـ^ى - ¼ى^٢ + د

مثال

جد ∫ ـ ى (لو_هـ^ى)^٢ ى

الحل:

ف = (لو_هـ^ى)^٢ دهـ = ى

دف = ٢ لو_هـ^ى × ١/ى دى هـ = ى^٢/٢

½ى^٢ (لو_هـ^ى)^٢ - ∫½ى^٢ لو_هـ^ى × ١/ى ى

½ى^٢ (لو_هـ^ى)^٢ - ∫½ى لو_هـ^ى ى

ف = لو_هـ^ى دهـ = ى

دف = ١/ى دى هـ = ى^٢/٢

½ى^٢ (لو_هـ^ى)^٢ - ¼ى^٢ لو_هـ^ى + ∫¼ى^٢ × ١/ى ى

هـ^ك لو_هـ^ى هـ^ك - هـ^ك = (هـ لو_هـ^ى - هـ)^ك

هـ^ك لو_هـ^ى هـ^ك - هـ^ك = (هـ^ك - هـ)^ك

$\frac{س^{ن+1}}{ن+1}(لو_{هـ} س)^{ن} - \frac{1}{ن+1}\int س^{ن} لو_{هـ} س + جـ$

مثال

جـ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ٣ قا^{٤} س لو_{هـ} ظا س$

الحل:

ص = ظا س ، س = $\frac{\pi}{4}$ ← ص = ١

د ص = قا^{٢} س د س ، س = $\frac{\pi}{3}$ ← ص = $\sqrt{٣}$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣ قا^{٤} س لو_{هـ} ص \frac{د ص}{قا^{٢} س}$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣ قا^{٢} س لو_{هـ} ص د ص$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣(١ + ظا^{٢} س) لو_{هـ} ص د ص$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣(١ + ص^{٢}) لو_{هـ} ص د ص$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}} (٣ + ٣ص^{٢}) لو_{هـ} ص د ص$

هـ = لو$_{هـ}$ ص ، دهـ = ٣ + ٣ص^{٢}

دهـ = $\frac{١}{ص}$ د ص ، هـ = ٣ص + ص^{٣}

$(٣ص + ص^{٣}) لو_{هـ} ص - \int \frac{١}{ص}(٣ص + ص^{٣}) د ص$

$(٣ص + ص^{٣}) لو_{هـ} ص - \int ٣ + ص^{٢} د ص$

$(٣ص + ص^{٣}) لو_{هـ} ص - ٣ص - \frac{ص^{٣}}{٣} \Big|_{١}^{\sqrt{٣}}$

$(٣\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣}^{٣}) لو_{هـ} \sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣} - \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} - (٠ - ٣ - \frac{١}{٣})$

$(٣\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣}^{٣}) لو_{هـ} \sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣} - \frac{١٠}{٣}$

مثال

جـ $\int س^{٣} لو_{هـ} س د س$

الحل:

هـ = لو$_{هـ}$ س ، دهـ = س

دهـ = $\frac{١}{س}$ د س ، هـ = $\frac{س^{٣}}{٣}$

$\frac{س^{٣}}{٣} لو_{هـ} س - \int \frac{١}{٣} س^{٢} د س$

$\frac{س^{٣}}{٣} لو_{هـ} س - \frac{١}{٣} \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

مثال

جـ $\int قا^{٢} س لو_{هـ} ظا س د س$

هـ = لو$_{هـ}$ ظا س ، دهـ = قا^{٢} س

دهـ = $\frac{قا^{٢} س}{ظا س}$ د س ، هـ = ظا س

ظا س لو$_{هـ}$ ظا س - $\int ظا س \frac{قا^{٢} س}{ظا س} د س$

ظا س لو$_{هـ}$ ظا س - ظا س + جـ

مثال

جـ ∫ جتاس لو$_{هـ}$ جاس دس

الحل:

م = لو$_{هـ}$ جاس دهـ = جتاس

دم = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ هـ = جاس

∫ جاس لو$_{هـ}$ جاس دس = ∫ جاس × $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ دس

جاس لو$_{هـ}$ جاس − جاس + جـ

مثال

جـ ∫ قأس لو$_{هـ}$ جاس دس

م = لو$_{هـ}$ جاس دهـ = قأس

دم = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ هـ = ظاس

∫ ظاس لو$_{هـ}$ جاس دس = ∫ $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ × $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ دس

ظاس لو$_{هـ}$ جاس − س + جـ

مثال

جـ ∫ $\frac{\text{لو}_{هـ}(س+٣)}{\sqrt{س+٣}}$ دس

الحل:

∫ (س+٣)$^{-\frac{١}{٢}}$ لو$_{هـ}$ (س+٣) دس

م = لو$_{هـ}$(س+٣) دهـ = (س+٣)$^{-\frac{١}{٢}}$

دم = $\frac{١}{س+٣}$ هـ = ٢(س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$

٢(س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ لو$_{هـ}$(س+٣) − ∫ $\frac{٢}{(س+٣)}$ (س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ دس

٢(س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ لو$_{هـ}$(س+٣) − ٢ ∫ (س+٣)$^{-\frac{١}{٢}}$ دس

٢(س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ لو$_{هـ}$(س+٣) − ٢×٢(س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

٢(س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ لو$_{هـ}$(س+٣) − ٤(س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

مثال

إذا كان ق(س) = ٣ ، ق(١) = ٥

ق(٢) = ٨ ، فاحسب قيمة

∫$_{١}^{٢}$ س ق(س) دس

الحل:

∫$_{١}^{٢}$ س ق(س) دس

م = س دهـ = ق(س)

دم = ١ هـ = ق(س)

س ق(س)|$_{١}^{٢}$ − ∫$_{١}^{٢}$ ق(س) دس

٢ ق(٢) − ق(١) = ٣

٢ × ٨ − ٥ = ٣

١٦ − ٨ = ٨

ESAM SHIKH
0796300625

مثال

اذا كان هـ اقترانا قابل للاشتقاق على ح وكان

$\int_{1}^{2}$ هـ(س) دس = ١٠ ، هـ(٢) = ٣ ، هـ(١) = -١

فجد قيمة

$\int_{0}^{1}$ س^{٥} هـ(س^{٣}+١) دس

الحل :

ص = س^{٣}+١ ، س = ٠ ← ص = ١

دص / ٣س^{٢} = دس ، س = ١ ← ص = ٢

$\int_{1}^{2}$ س^{٥} هـ(ص) دص / ٣س^{٢}

$\frac{1}{3}\int_{1}^{2}$ س^{٣} هـ(ص) دص

$\frac{1}{3}\int_{1}^{2}$ (ص-١) هـ(ص) دص

م = ص-١ ، دم = دص ، هـ = هـ(ص)

دم = ١ ، هـ = هـ(ص)

$\frac{1}{3}$ [(ص-١) هـ(ص)]$_{1}^{2}$ - $\int_{1}^{2}$ هـ(ص) دص

$\frac{1}{3}$ ((٢-١) هـ(٢) - ٠ هـ(١)) - ١٠

$\frac{1}{3}$ (٣ - ١٠) = -٧/٣

الأسئلة الوزارية

٢٠٠٨ صيفي (٧ علامات)

جد التكامل الآتي:

$\int \frac{س}{قتا^2 س} \, دس$

الحل:

$\int س \, ظتا^2 س \, دس$

$= \int س \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \, تتا \, 2س\right) دس$

$= \frac{1}{2} \int (س + س \, تتا \, 2س) \, دس$

$= \frac{1}{2} \int س \, دس + \frac{1}{2} \int س \, تتا \, 2س \, دس$

$= \frac{1}{4} س^2 + \frac{1}{2} \int س \, تتا \, 2س \, دس$

$ف = س \quad دف = دس$

$دهـ = تتا \, 2س \, دس \quad هـ = \frac{1}{2} جا \, 2س$

$= \frac{1}{4} س^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} س \, جا \, 2س - \int \frac{1}{2} جا \, 2س \, دس\right)$

$= \frac{1}{4} س^2 + \frac{1}{4} س \, جا \, 2س - \frac{1}{4} \times \frac{-1}{2} \, تتا \, 2س + ج$

$= \frac{1}{4} س^2 + \frac{1}{4} س \, جا \, 2س + \frac{1}{8} \, تتا \, 2س + ج$

٢٠٠٩ صيفي (٧ علامات)

إذا كان $ف$ اقترانا قابلا للاشتقاق على $ح$ وكان $\int_1^2 ف(س) \, دس = 1$ ، وكان $ف(2) = 3$ ، $ف(1) = -1$ فجد قيمة $\int_0^1 س \, ف'(س^2 + 1) \, دس$

الحل:

$ص = س^2 + 1 \Leftarrow دس = \frac{دص}{2س}$

$س = 0 \Leftarrow ص = 1 \quad س = 1 \Leftarrow ص = 2$

$\int_0^1 س \, ف'(س^2 + 1) \, دس = \int_1^2 س \, ف'(ص) \frac{دص}{2س}$

$= \frac{1}{2} \int_1^2 س^2 \, ف'(ص) \, دص$

$= \frac{1}{2} \int_1^2 (ص - 1) \, ف'(ص) \, دص$

$ل = ص - 1 \quad دم = ف'(ص)$

$دل = دص \quad م = ف(ص)$

$= \frac{1}{2} \left((ص - 1) \, ف(ص) \Big|_1^2 - \int_1^2 ف(ص) \, دص\right)$

$= \frac{1}{2} \left((2 - 1) \, ف(2) - (1 - 1) \, ف(1) - 1\right)$

$= \frac{1}{2} (ف(2) - صفر - 1)$

$= \frac{1}{2} (3 - 1) = \frac{-7}{2}$

٢٠١١ شتوي (٦ علامات)

جد التكامل الآتي

$\int (2س - 1) جا 2س \, دس$

الحل:

$و = 2س - 1$ $\quad دو = جا 2س$

$دو = 2 \, دس$ $\quad ه = -\frac{جتا 2س}{2}$

$(2س - 1)(-\frac{1}{2} جتا 2س) - \int (-\frac{1}{2} جتا 2س \times 2 \, دس)$

$(2س - 1)(-\frac{1}{2} جتا 2س) + \frac{جا 2س}{2} + ج$

٢٠١٢ شتوي (٦ علامات)

جد التكامل الآتي:

$\int \frac{س \, جتا س}{جا^{٣} س} \, دس$

الحل:

$\int س \frac{جتا س}{جا س} \times \frac{١}{جا س} \, دس$

$\int س \, ظتا س \, قتا^{٢} س \, دس$

$م = س \quad دهـ = قتا^{٢} س \, ظتا س$

$م' = ١ \, دس \quad هـ = -\frac{ظتا س}{٢}$

$-\frac{١}{٢} س \, ظتا^{٢} س - \int -\frac{١}{٢} ظتا^{٢} س \, دس$

$-\frac{١}{٢} س \, ظتا^{٢} س + \frac{١}{٢} \int (قتا^{٢} س - ١) \, دس$

$-\frac{١}{٢} س \, ظتا^{٢} س + \frac{١}{٢} (- ظتا س - س) + ج$

$-\frac{١}{٢} س \, ظتا^{٢} س - \frac{١}{٢} ظتا س - \frac{١}{٢} س + ج$

توضيح $\int قتا^{٢} س \, ظتا س \, دس$

$ص = ظتا س \Leftarrow دس = \frac{دص}{-قتا^{٢} س}$

$\int \frac{قتا^{٢} س \, ص \, دص}{-قتا^{٢} س}$

$= -\int ص \, دص = -\frac{ظتا^{٢} س}{٢}$

٢٠١٣ شتوي (٨ علامات)

جد التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{١} هـ^{٣ س} \, دس$

الحل:

$ص = س^{٣}$

$دس = \frac{دص}{٣ س^{٢}}$

$\int_{٠}^{١} \frac{س \, هـ^{٣ س} \, دص}{٣ س^{٢}}$

$\frac{١}{٣} \int_{٠}^{١} س \, هـ^{٣ س} \, دص$

$\frac{١}{٣} \int_{٠}^{١} ص \, هـ^{٣ ص} \, دص$

$م = ص \quad دم = دص$

$م' = ١ \quad م = هـ^{٣ ص}$

$\frac{١}{٣} ص \, هـ^{٣ ص} - \frac{١}{٣} \int هـ^{٣ ص} \, دص$

$\frac{١}{٣} ص \, هـ^{٣ ص} - \frac{١}{٣} هـ^{٣ ص} + ج$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} هـ^{٣ س^{٣}} - \frac{١}{٣} هـ^{٣ س^{٣}} + ج$

٢٠١٤ شتوي (٧ علامات)

جد التكامل الآتي:

$\int س \, حتا \sqrt{س^2+1} \, دس$

الحل:

$ص = \sqrt{س^2+1} \Leftarrow ص^2 = س^2+1$

$2ص \, دص = 2س \, دس$

$دس = \frac{ص}{س} دص$

$\int س \, حتا ص \frac{ص \, دص}{س}$

$= \int ص \, حتا ص \, دص$

$و = ص \quad دهـ = حتا ص$

$دو = دص \quad هـ = جا ص$

$ص جا ص - \int جا ص \, دص$

$ص جا ص + حتا ص + جـ$

$\sqrt{س^2+1} \, جا \sqrt{س^2+1} + حتا \sqrt{س^2+1} + جـ$

٢٠١٤ صيفي (٦ علامات)

جد التكامل $\int \frac{س + جا س}{1 + حتا س} دس$

الحل:

$\int \frac{س}{1+حتا س} دس + \int \frac{جا س}{1+حتا س} دس$

$\int \frac{س}{2 \, حتا^2 \frac{س}{2}} دس + \int \frac{2 \, جا \frac{س}{2} \, حتا \frac{س}{2}}{2 \, حتا^2 \frac{س}{2}} دس$

$\frac{1}{2} \int س \, قا^2 \frac{س}{2} دس + \int ظا \frac{س}{2} دس$

$و = س \quad دهـ = قا^2 \frac{س}{2}$

$دو = دس \quad هـ = 2 ظا \frac{س}{2}$

$\frac{1}{2} (2س ظا \frac{س}{2} - \int 2 ظا \frac{س}{2} دس) + \int ظا \frac{س}{2} دس + جـ$

$س ظا \frac{س}{2} - \int ظا \frac{س}{2} دس + \int ظا \frac{س}{2} دس + جـ$

$= س ظا \frac{س}{2} + جـ$

التخصص(المعلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(٦) (التكامل بالأجزاء) ماجستير رياضيات

٢٠١٧ شتوي (٦علامات)

جد التكامل الآتي :

$$\int_{1}^{2} س^{٤} \sqrt{\left(\frac{٢-س}{س}\right)^{٣}} \, دس$$

الحل :

$$\int_{1}^{2} \frac{س^{٤} (٢-س)^{\frac{٣}{٢}}}{س^{٣}} \, دس$$

$$\int_{1}^{2} س (٢-س)^{\frac{٣}{٢}} \, دس$$

$ع = س$ $\quad دع = (٢-س)^{\frac{٣}{٢}}$

$دع = دس$ $\quad ص = -\frac{٢}{٥}(٢-س)^{\frac{٥}{٢}}$

$$-\frac{٢}{٥} س \sqrt{(٢-س)^{٥}} \Big|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} -\frac{٢}{٥}(٢-س)^{\frac{٥}{٢}} \, دس$$

$$-\frac{٢}{٥} س \sqrt{(٢-س)^{٥}} \Big|_{1}^{2} + \frac{٢}{٥} \times \frac{-٢}{٧} (٢-س)^{\frac{٧}{٢}} \Big|_{1}^{2}$$

$$-\frac{٢}{٥} س \sqrt{(٢-س)^{٥}} \Big|_{1}^{2} - \frac{٤}{٣٥} \sqrt{(٢-س)^{٧}} \Big|_{1}^{2}$$

$$\left(-\frac{٤}{٥} \sqrt{٠} - \frac{-٢}{٥} \sqrt{١}\right) - \left(\frac{٤}{٣٥} \sqrt{٠} - \frac{٤}{٣٥} \sqrt{١}\right)$$

$$= \frac{٢}{٥} + \frac{٤}{٣٥} - \frac{١٤}{٣٥} + \frac{٤}{٣٥}$$

$$= \frac{١٨}{٣٥}$$

٢٠١٨ مستوى قديم ٨ علامات

جد

$\int (س+2)^3 \, جا(س^2+4س+3) \, دس$

الحل:

$ص = س^2+4س+3$

$دص = \frac{دص}{2س+4} = \frac{دص}{2(س+2)}$

$\int (س+2)^3 \, جا ص \, \frac{دص}{2(س+2)}$

$\frac{1}{2}\int (س+2)^2 \, جا ص \, دص$

$\frac{1}{2}\int (س^2+4س+4) \, جا ص \, دص$

$\frac{1}{2}\int \underset{ف}{(ص-1)} \, \underset{دو}{جا ص \, دص}$

$دو = جا ص \, دص \quad و = -جتا ص$

$ف و - \int و \, دف$

$-\frac{1}{2}(ص-1)جتا ص + \frac{1}{2}\int جتا ص \, دص$

$-\frac{1}{2}(ص-1)جتا ص + \frac{1}{2} جا ص + جـ$

$-\frac{1}{2}(س^2+4س+2) + \frac{1}{2} جا(س^2+4س+3) + جـ$

٢٠١٨ مستوى جديد

جد

$\int (س-1)^3 \sqrt{س^2-2س-3} \, دس$

الحل:

$\int (س-1)^3 (س^2-2س-3)^{\frac{1}{2}} \, دس$

$ص = س^2-2س-3$

$دس = \frac{دص}{2س-2} = \frac{دص}{2(س-1)}$

$\int (س-1)^3 \, ص^{\frac{1}{2}} \, \frac{دص}{2(س-1)}$

$\frac{1}{2}\int (س-1)^2 \, ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

$\frac{1}{2}\int (س^2-2س+1) \, ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

$\frac{1}{2}\int \underset{ف}{(ص+5)} \, \underset{دو}{ص^{\frac{1}{2}} \, دص}$

$دو = ص^{\frac{1}{2}} \, دص \quad و = \frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}}$

$ف و - \int و \, دف$

$\frac{1}{2}(ص+5) \times \frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}} \, دص$

$\frac{1}{2}(ص+5)ص^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}ص^{\frac{5}{2}} + جـ$

$\frac{1}{2}(س^2-2س+1)(س^2-2س-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(س^2-2س-3)^{\frac{5}{2}} + جـ$

٢٠١٨ شتوي جديد

إذا كان $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$

$f(1) = 5$ ، $f(2) = 8$ فإن

قيمة $\int_1^2 x\,f'(x)\,dx$ تساوي

أ) -١ ب) ٥,٤ ج) صفر د) ٨

الحل:

$$\int_1^2 x\,f'(x)\,dx$$

$u = x$ ، $dv = f'(x)\,dx$

$du = dx$ ، $v = f(x)$

$$= x\,f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= 2f(2) - 1\times f(1) - 3$$

$$= 2(8) - 1(5) - 3$$

$$= 16 - 5 - 3$$

$$= 11 - 3$$

$$= 8$$

٢٠١٨ شتوي جديد (١٠ علامات)

جد قيمة

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}\theta\,(\theta + \text{قتا}^2\theta)\,d\theta$$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\theta\,\text{جا}\theta + \text{قتا}^2\theta)\,d\theta$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \theta\,\text{جا}\theta\,d\theta - \text{ظتا}\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$u = \theta$ ، $dv = \text{جا}\theta\,d\theta$

$du = 1\,d\theta$ ، $v = -\text{جتا}\theta$

$$-\theta\,\text{جتا}\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}\theta\,d\theta - (\text{ظتا}\tfrac{\pi}{2} - \text{ظتا}\tfrac{\pi}{4})$$

$$-\tfrac{\pi}{2}\,\text{جتا}\tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{4}\,\text{جتا}\tfrac{\pi}{4}) + (\text{جا}\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}) - (0-1)$$

$$\tfrac{\pi}{4}\times\tfrac{1}{\sqrt{2}} + (\text{جا}\tfrac{\pi}{2} - \text{جا}\tfrac{\pi}{4}) + 1$$

$$\tfrac{\pi}{4\sqrt{2}} + (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) + 1$$

$$2 + \tfrac{\pi}{4\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

٢٠١٧ ـ ٢ متوي (٨ علامات)

جد $\int$ جا^{3}س لو$_{هـ}$(١+جتا س) دس

الحل:

ص = ١ + جتا س ← جتا س = ص − ١

جتا^{2}س = (ص − ١)^{2}

$\frac{دص}{-جتا س} = دس$

$\int$ جا^{2}س لو$_{هـ}$ ص × $\frac{-دص}{جتا س}$

$-\int$ جا^{2}س لو$_{هـ}$ ص دص

$-\int$ (١ − جتا^{2}س) لو$_{هـ}$ ص دص

$-\int$ (١ − (ص − ١)^{2}) لو$_{هـ}$ ص دص

$-\int$ (−ص^{2} + ٢ص) لو$_{هـ}$ ص دص

ع = لو$_{هـ}$ ص ، دع = $\frac{1}{ص}$ دص

م = −$\frac{ص^{3}}{3}$ + ص^{2} ، دم = (−ص^{2} + ٢ص) دص

$-\left((-\frac{ص^{3}}{3}+ص^{2})\text{ لو}_{هـ}\text{ ص} - \int(-\frac{ص^{3}}{3}+ص^{2})\frac{1}{ص}\,دص\right)$

$(\frac{ص^{3}}{3}-ص^{2})$ لو$_{هـ}$ ص $-\int(\frac{ص^{2}}{3}+ص)\,دص$

$(\frac{ص^{2}}{3}-ص^{2})$ لو$_{هـ}$ ص $-\frac{ص^{3}}{9}+\frac{ص^{2}}{4}+ج$

$(\frac{(1+جتا س)^{3}}{3}-(1+جتا س)^{2})$ لو$_{هـ}$(١+جتا س) $-\frac{(1+جتا س)^{3}}{9}$

$-\frac{(1+جتا س)^{2}}{4}+ج$

٢٠١٦ ـ ٢ متوي (٧ علامات)

جد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ ٣ قا^{4}س لو$_{هـ}$ ظا س دس

الحل:

ص = ظا س

$دص = \frac{دس}{قا^{2}س}$

$\int$ ٣ قا^{4}س لو$_{هـ}$ ص $\frac{دص}{قا^{2}س}$

$\int$ ٣ قا^{2}س لو$_{هـ}$ ص دص

$\int$ ٣ (١ + ظا^{2}س) لو$_{هـ}$ ص دص

$\int$ (٣ + ٣ص^{2}) لو$_{هـ}$ ص دص

ع = لو$_{هـ}$ ص ، دع = $\frac{1}{ص}$ دص

م = ٣ص + ص^{3}

(٣ص + ص^{3}) لو$_{هـ}$ ص $-\int(٣ص+ص^{3})\frac{1}{ص}\,دص$

(٣ص + ص^{3}) لو$_{هـ}$ ص $-\int(٣+ص^{2})\,دص$

(٣ص + ص^{3}) لو$_{هـ}$ ص − ٣ص − $\frac{ص^{3}}{3}$ + ج

(٣ظا س + ظا^{3}س) لو$_{هـ}$ ظا س − ٣ ظا س − $\frac{ظا^{3}س}{3}$ + ج

ص = ١ ← س = ٠

ص = $\sqrt{3}$ ← س = $\frac{\pi}{3}$

اجزاء

٢٠١٣ صيفي (٥علامات)

جـ) $\int \frac{س}{هـ^{س}} \, دس$

الحل: $ع = س$ $\quad دع = دس$

$ه = \frac{-1}{هـ^{س}}$ $\quad دو = هـ^{-س} \, دس$

$= \frac{-س}{هـ^{س}} - \int \frac{-1}{هـ^{س}} \times دس$

$= \frac{-س}{هـ^{س}} - \int هـ^{-س} \, دس$

$= \frac{-س}{هـ^{س}} + \frac{-1}{هـ^{س}} + ج$

٢٠١٢ صيفي (٥علامات)

جـ) $\int \frac{س}{1 + جتا س} \, دس$

الحل:

$= \int \frac{س}{2 جتا^{2} \frac{س}{2}} \, دس$ $\quad 1 + جتا س = 2 جتا^{2} \frac{س}{2}$

$= \int س \, قا^{2} \frac{س}{2} \, دس$

$ع = س$ $\quad دع = دس$

$دو = قا^{2} \frac{س}{2}$ $\quad ه = ظا \frac{س}{2}$

$= س ظا \frac{س}{2} - \int ظا \frac{س}{2} \, دس$

$= س ظا \frac{س}{2} - \int \frac{جا \frac{س}{2}}{جتا \frac{س}{2}} \, دس$

$= س ظا \frac{س}{2} - \frac{1}{2} \times -لو |جتا \frac{س}{2}| + ج$

$= س ظا \frac{س}{2} + لو |جتا \frac{س}{2}| + ج$

١١، ٢ صيغ (٦علامات)

حيث

$\int \sqrt{أ^2 - س^2}\ دس$

الحل:

$ص = \sqrt{أ^2 - س^2}$

$ص^2 = أ^2 - س^2$

$2ص\ دص = -2س\ دس$

$\int ص\ دص = -\int س\ دس$

$\frac{1}{2}ص^2 + ج_1 = -\frac{1}{2}س^2 + ج_2$

$\frac{1}{2}ص^2 = -\frac{1}{2}س^2 + ج$

$ص^2 = -س^2 + 2ج$

$ص^2 = أ^2 - س^2$

$\sqrt{أ^2 - س^2} = ص$

٢٠١٥ صيفي (٧ علامات)

جد $\int \frac{٢ س + ٣ ظا س}{جتا^٢ س} \, دس$

الحل:

$= \int \frac{٢ س}{جتا^٢ س} \, دس + \int \frac{٣ ظا س}{جتا^٢ س} \, دس$

$= \int ٢ س \, قا^٢ س \, دس + \int ٣ ظا س \, قا^٢ س \, دس$

$م = ٢ س \quad دهـ = قا^٢ س \quad ص = ظا س$

$دم = ٢ \, دس \quad هـ = ظا س \quad دص = \frac{دهـ}{قا^٢ س}$

$= ٢ س ظا س - \int ظا س \times ٢ \, دس + \int ٣ ص \, قا^٢ س \frac{دهـ}{قا^٢ س}$

$= ٢ س ظا س + ٢ \ln|جتا س| + ٣ هـ + ج$

$= ٢ س ظا س + ٢ \ln|جتا س| + ٣ ظا س + ج$

٢٠١٤ صيفي (٦ علامات)

جد $\int \frac{س + جا س}{١ + جتا س} \, دس$

الحل:

$= \int \frac{س}{١ + جتا س} \, دس + \int \frac{جا س}{١ + جتا س} \, دس$

$= \int \frac{س}{٢ جتا^٢ \frac{س}{٢}} \, دس + \int \frac{٢ جا \frac{س}{٢} جتا \frac{س}{٢}}{٢ جتا^٢ \frac{س}{٢}} \, دس$

$= \int \frac{١}{٢} س \, قا^٢ \frac{س}{٢} \, دس + \int ظا \frac{س}{٢} \, دس$

$م = \frac{١}{٢} س \quad دهـ = قا^٢ \frac{س}{٢}$

$دم = \frac{١}{٢} \quad هـ = ٢ ظا \frac{س}{٢}$

$\frac{١}{٢} س \times ٢ ظا \frac{س}{٢} - \int ٢ ظا \frac{س}{٢} \times \frac{١}{٢} \, دس + \int ظا \frac{س}{٢} \, دس$

$س ظا \frac{س}{٢} - \int ظا \frac{س}{٢} \, دس + \int ظا \frac{س}{٢} \, دس$

$= س ظا \frac{س}{٢} + ج$

٢٠١٠ شتوي (٦علامات)

جد

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2جتا^3 س جا^2 س - جتا^2 س)\, دس$

الحل:

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2 \times \frac{1}{4}(جتا^2 س + جتا س) - جتا^2 س)\, دس$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا^2 س\, دس$

$ف = هـ^0 \quad دف = جتا^2 س$

$دف = هـ^0 \quad ع = \frac{1}{2} جا^2 س$

$\frac{1}{4} هـ^0 جا^2 س - \int \frac{1}{2} جا^2 س هـ^0 \, دس$

$ف = هـ^0 \quad دف = جا^2 س$

$دف = هـ^0 \quad ع = -\frac{1}{2} جتا^2 س$

$\frac{1}{4} هـ^0 جا^2 س - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} هـ^0 جتا^2 س - \int -\frac{1}{2} جتا^2 س هـ^0\right)$

$\frac{1}{4} هـ^0 جا^2 س + \frac{1}{8} هـ^0 جتا^2 س - \frac{1}{8} \int هـ^0 جتا^2 س$

$\Leftarrow$

$\int هـ^0 جتا^2 س\, دس = \frac{1}{4} هـ^0 جا^2 س + \frac{1}{8} هـ^0 جتا^2 س + جـ$

$\frac{9}{8} \int هـ^0 جتا^2 س\, دس = \frac{1}{4} هـ^0 جا^2 س + \frac{1}{8} هـ^0 جتا^2 س + جـ$

$\int هـ^0 جا س جتا^2 س\, دس = -\frac{1}{2} هـ^0 جتا^2 س + \frac{1}{4} هـ^0 جا س + جـ$

٢٠٠٩ شتوي (٧علامات)

جد

$\int \frac{هـ^0}{قتا س}\, دس$

الحل:

$\int هـ^0 جا س\, دس$

$ف = هـ^0 \quad دف = جا س$

$دف = هـ^0 \quad ع = -جتا س$

$-هـ^0 جتا س - \int -جتا س هـ^0\, دس$

$-هـ^0 جتا س + \int هـ^0 جتا س\, دس$

$ف = هـ^0 \quad دف = جتا س$

$دف = هـ^0 \quad ع = جا س$

$-هـ^0 جتا س + هـ^0 جا س - \int هـ^0 جتا س$

$\int هـ^0 جا س\, دس = -هـ^0 جتا س + هـ^0 جا س - \int هـ^0 جا س\, دس$

$2 \int هـ^0 جا س\, دس = -هـ^0 جتا س + هـ^0 جا س$

٢٠١٥ شتوي (٥ علامات)

جد $\int_{0}^{2} (1+\sqrt{2x-1})\, dx$ عدد نيبيري:

الحل:

$$= \int_{0}^{2} x \cdot \sqrt{2x-1}\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} x \cdot (2x-1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$ص = \sqrt{2س-1}$

$ص^2 = 2س - 1$

$2ص\, دص = 2\, دس$

$ص\, دص = دس$

$س = 2 \Leftarrow ص = 1$

$س = 5 \Leftarrow ص = 3$

$$= \int_{1}^{3} (\frac{ص^2+1}{2}) \cdot ص \cdot ص\, دص$$

$$= \int_{1}^{3} \frac{1}{2}(ص^4 + ص^2)\, دص$$

نعوض: $م = ص$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{ص^5}{5} + \frac{ص^3}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{243}{5} + 9 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{242}{5} + \frac{26}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{726+130}{15}\right)$$

$$= \frac{428}{15}$$

٢٠١٦ صيفي (٦ علامات)

اذا علمت أن $\int_{1}^{هـ} س^4 \ln س\, دس = \frac{4هـ^5+1}{25}$

فجد $\int_{1}^{هـ} (\ln س)^2\, دس$

الحل: $ع = \frac{1}{س}$ $دف = (\ln س)^2$ $دع = 2\ln س \times \frac{1}{س}$

$$\frac{1}{5}(\ln س)^2\Big|_{1}^{هـ} - \int_{1}^{هـ} \frac{1}{5} \times 2\ln س \times \frac{1}{س}$$

$$\frac{1}{5}(\ln س)^2\Big|_{1}^{هـ} - \frac{2}{5}\int_{1}^{هـ} س^4 \ln س$$

$$\frac{1}{5}(\ln هـ)^2 - \frac{1}{5}(\ln 1)^2 - \frac{2}{5} \times \frac{4هـ^5+1}{25}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{8هـ^5+2}{125}$$

$$\frac{25 - 8هـ^5 - 2}{125}$$

$$\frac{17 - 8هـ^5}{125}$$