التكامل بالكسور الجزئية

ملخص القوانين

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال

جد $\int \frac{2}{\text{س}^2-4}\,\text{دس}$

الحل:

$\int \frac{2}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{أ}}{\text{س}-2} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+2}\,\text{دس}$

$\Leftarrow 2 = \text{أ}(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س}-2)$

$\text{س}=-2 \Leftarrow 2=-4\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=\frac{-1}{2}$

$\text{س}=2 \Leftarrow 2=4\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=\frac{1}{2}$

$\int \frac{\frac{1}{2}}{\text{س}-2} + \frac{-\frac{1}{2}}{\text{س}+2}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{5}{\text{س}^2-4\text{س}+3}\,\text{دس}$

الحل:

$\int \frac{5}{(\text{س}-3)(\text{س}-1)}\,\text{دس}$

$\int \frac{\text{أ}}{\text{س}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-1}\,\text{دس}$

$\Leftarrow 5 = \text{أ}(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}-3)$

$\text{س}=1 \Leftarrow 5=-2\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=\frac{-5}{2}$

$\text{س}=3 \Leftarrow 5=2\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=\frac{5}{2}$

$\int \frac{\frac{5}{2}}{\text{س}-3} + \frac{-\frac{5}{2}}{\text{س}-1}\,\text{دس}$

$= \frac{5}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| - \frac{5}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{7}{\text{س}^2-3\text{س}-10}\,\text{دس}$

الحل:

$\int \frac{\text{أ}}{(\text{س}-5)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س}+2)}\,\text{دس}$

$7 = \text{أ}(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س}-5)$

$\text{س}=-2 \Leftarrow 7=-7\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=-1$

$\text{س}=5 \Leftarrow 7=7\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=1$

$\int \frac{1}{\text{س}-5} + \frac{-1}{\text{س}+2}\,\text{دس}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-5| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int_{1}^{3} \frac{2\text{س}}{\text{س}^2-4\text{س}-12}\,\text{دس}$

الحل:

$\int \frac{\text{أ}}{(\text{س}-6)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س}+2)}\,\text{دس}$

$2\text{س} = \text{أ}(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س}-6)$

$\text{س}=-2 \Leftarrow -4 = -8\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=\frac{1}{2}$

$\text{س}=6 \Leftarrow 12 = 8\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

$$\int_{١}^{٣} \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{س}-٦} + \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س}+٢} \, \text{دس}$$

$$\left[\frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٦| + \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢|\right]_{١}^{٣}$$

$$\frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ + \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \left(\frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥ + \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣\right)$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - \text{لو}_{\text{هـ}}٥ = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٣}{٥}$$

مثال

جد $\displaystyle\int_{٢}^{٤} \frac{٤\text{س}-١}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢} \, \text{دس}$

الحل:

$$\int_{٢}^{٤} \frac{٤\text{س}-١}{(\text{س}+٢)(\text{س}-١)} \, \text{دس}$$

$$\int_{٢}^{٤} \frac{\text{أ}}{\text{س}+٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-١} \, \text{دس}$$

$$٤\text{س}-١ = \text{أ}(\text{س}-١) + \text{ب}(\text{س}+٢)$$

$$\text{س}=١ \Leftarrow ٣ = ٣\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=١$$

$$\text{س}=-٢ \Leftarrow -٩ = -٣\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=٣$$

$$\int_{٢}^{٤} \frac{٣}{\text{س}+٢} + \frac{١}{\text{س}-١} \, \text{دس}$$

$$= \left[٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١|\right]_{٢}^{٤}$$

$$= ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٦ + \text{لو}_{\text{هـ}}٥ - (٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٤ + \text{لو}_{\text{هـ}}٣)$$

$$= ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٦ + \text{لو}_{\text{هـ}}٥ - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٤ - \text{لو}_{\text{هـ}}٣$$

مثال

جد $\displaystyle\int \frac{\text{س}-١٣}{٢\text{س}^{٢}-٧\text{س}+٣} \, \text{دس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{أ}}{(٢\text{س}-١)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س}-٣)} \, \text{دس}$$

$$\text{س}-١٣ = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(٢\text{س}-١)$$

$$\text{س}=٣ \Leftarrow -١٠ = ٥\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -٢$$

$$\text{س}=\frac{١}{٢} \Leftarrow -١٢٫٥ = -٢٫٥\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = ٥$$

$$\int \frac{٥}{٢\text{س}-١} + \frac{-٢}{\text{س}-٣} \, \text{دس}$$

$$= \frac{٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س}-١|}{٢} - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٣| + \text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int_{-١}^{١} \frac{|١-\text{س}|}{\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٦} \, \text{دس}$

الحل:

$$\underset{١}{+++\,|\,----}$$

$$\int_{-١}^{١} \frac{١-\text{س}}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)} \, \text{دس}$$

$$\int_{-١}^{١} \frac{\text{أ}}{\text{س}-٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٣} \, \text{دس}$$

$$١-\text{س} = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(\text{س}-٢)$$

$$\text{س}=٣ \Leftarrow -٢ = \text{ب}$$

$$\text{س}=٢ \Leftarrow -١ = -\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=١$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{س-2} + \frac{2}{س-3} \, دس$$

$$لوهـ|س-2| - 2\,لوهـ|س-3| \Big|_{-1}^{1}$$

$$لوهـ1 - 2\,لوهـ2 - (لوهـ3 - 2\,لوهـ4)$$

$$-2\,لوهـ2 - لوهـ3 + 2\,لوهـ4$$

مثال

جد $\int \frac{2س^2 + 3}{س^2 - س} \, دس$

الحل

$$\begin{array}{r} 2 \\ س^2 - س \overline{\big)\, 2س^2 + 3} \\ -(2س^2 - 2س) \\ \hline 2س + 3 \end{array}$$

$$\int 2 + \frac{2س+3}{س(س-1)} \, دس$$

$$2 \quad \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} \quad س$$

$2س + 3 = أ(س-1) + ب\,س$

$س = 1 \Leftarrow 5 = ب$

$س = 0 \Leftarrow 3 = -أ \Leftarrow أ = -3$

$$\int 2 - \frac{3}{س} + \frac{5}{س-1} \, دس$$

$$2س - 3\,لوهـ|س| + 5\,لوهـ|س-1| + جـ$$

مثال

جد $\int \frac{س^2 + س + 5}{س^2 + س} \, دس$

الحل:

$$\begin{array}{r} 1 \\ س^2 + س \overline{\big)\, س^2 + س + 5} \\ -(س^2 + س) \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\int 1 + \frac{5}{س(س+1)} \, س$$

$$\int 1 \quad \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+1} \quad دس$$

$5 = أ(س+1) + ب\,س$

$س = -1 \Leftarrow 5 = -ب \Leftarrow ب = -5$

$س = 0 \Leftarrow 5 = أ$

$$\int 1 + \frac{5}{س} - \frac{5}{س+1} \, دس$$

$$س + 5\,لوهـ|س| - 5\,لوهـ|س+1| + جـ$$

مثال

جد $\int_{1}^{} \frac{3س^2 + 3}{3س^2 - س - 4} \, دس$

الحل:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3س^2 - س - 4 \overline{\big)\, 3س^2 + 3} \\ -(3س^2 - س - 4) \\ \hline س + 7 \end{array}$$

$$\int_{}^{1} 1 + \frac{س+7}{(3س-4)(س+1)} \, دس$$

$\int_{0}^{1} \left(١ + \frac{أ}{٣س-٤} + \frac{ب}{س+١} \right) دس$

$س+٧ = أ(س+١) + ب(٣س-٤)$

$س=-١ \Leftarrow ٦ = -٧ب \Leftarrow ب = \frac{-٦}{٧}$

$س=\frac{٤}{٣} \Leftarrow \frac{٤}{٣}+٧ = أ(\frac{٤}{٣}+١)$

$\frac{٢٥}{٣} = \frac{٧}{٣}أ \Leftarrow أ = \frac{٢٥}{٧}$

$\int_{0}^{1} \left(١ + \frac{\frac{٢٥}{٧}}{٣س-٤} + \frac{\frac{-٦}{٧}}{س+١} \right) دس$

$س + \frac{\frac{٢٥}{٧} لو_{هـ}|٣س-٤|}{٣} - \frac{٦}{٧} لو_{هـ}|س+١| \Big|_{0}^{1}$

$١ + \frac{\frac{٢٥}{٧}\cancel{لو١}}{٣} - \frac{٦}{٧} لو_{هـ}٢ - (٠ + \frac{\frac{٢٥}{٧} لو_{هـ}٤}{٣} - \cancel{\frac{٦}{٧} لو_{هـ}١})$

$١ - \frac{٦}{٧} لو_{هـ}٢ - \frac{٢٥}{٢١} لو_{هـ}٤$

مثال

جـ: $\int \frac{س^٣ + ٤س - ٨}{س^٢ - ٩} دس$

الحل:

$$\begin{array}{r} س \\ س^٢-٩ \;\big)\; س^٣+٤س-٨ \\ -(س^٣-٩س) \\ \hline ١٣س-٨ \end{array}$$

$\int \left(س + \frac{١٣س-٨}{(س-٣)(س+٣)} \right) دس$

$\int \left(س + \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+٣} \right) دس$

$١٣س-٨ = أ(س+٣) + ب(س-٣)$

$س=٣ \Leftarrow ٣١ = ٦أ \Leftarrow أ = \frac{٣١}{٦}$

$س=-٣ \Leftarrow -٤٧ = -٦ب \Leftarrow ب = \frac{٤٧}{٦}$

$\int \left(س + \frac{\frac{٣١}{٦}}{س-٣} + \frac{\frac{٤٧}{٦}}{س+٣} \right) دس$

$\frac{س^٢}{٢} + \frac{٣١}{٦} لو_{هـ}|س-٣| + \frac{٤٧}{٦} لو_{هـ}|س+٣| + جـ$

مثال

جـ: $\int_{٢}^{٣} \frac{س^٣ + س}{س - ١} دس$

الحل:

$$\begin{array}{r} س^٢+س+٢ \\ س-١ \;\big)\; س^٣+س \\ -(س^٣-س^٢) \\ \hline س^٢+س \\ -(س^٢-س) \\ \hline ٢س \\ -(٢س-٢) \\ \hline ٢ \end{array}$$

$\int_{٢}^{٣} \left(س^٢ + س + ٢ + \frac{٢}{س-١} \right) دس$

$\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} + ٢س + ٢لو_{هـ}|س-١| \Big|_{٢}^{٣}$

$٩ + \frac{٩}{٢} + \cancel{٦} + ٢لو_{هـ}٢ - (\frac{٨}{٣} + \cancel{٢} + \cancel{٤} + \cancel{٢لو_{هـ}١})$

$١٣\frac{١}{٢} + ٢لو_{هـ}٢ - \frac{٨}{٣}$

$= \frac{٢٧}{٢} - \frac{٨}{٣} + ٢لو_{هـ}٢ = \frac{٦٥}{٦} + ٢لو_{هـ}٢$

مثال

جد $\int \frac{\text{٢}}{\text{س} - \text{٣}\sqrt{\text{س}} - \text{٤}}\,\text{دس}$

الحل :

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}$

$\text{٢ص دص} = \text{دس}$

$\int \frac{\text{٢}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} - \text{٤}}\,\text{٢ص دص}$

$\int \frac{\text{٤ص}}{(\text{ص}-\text{٤})(\text{ص}+\text{١})}\,\text{دص}$

$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-\text{٤}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+\text{١}}\,\text{دص}$

$\text{٤ص} = \text{أ}(\text{ص}+\text{١}) + \text{ب}(\text{ص}-\text{٤})$

$\text{ص} = -\text{١} \Leftarrow -\text{٤} = -\text{٥ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

$\text{ص} = \text{٤} \Leftarrow \text{١٦} = \text{٥أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{\text{١٦}}{\text{٥}}$

$\int \frac{\frac{\text{١٦}}{\text{٥}}}{\text{ص}-\text{٤}} + \frac{\frac{\text{٤}}{\text{٥}}}{\text{ص}+\text{١}}\,\text{دص}$

$= \frac{\text{١٦}}{\text{٥}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-\text{٤}| + \frac{\text{٤}}{\text{٥}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+\text{١}| + \text{جـ}$

$= \frac{\text{١٦}}{\text{٥}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}-\text{٤}| + \frac{\text{٤}}{\text{٥}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}+\text{١}| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int_{\text{٩}}^{\text{١٦}} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-\text{٤}}\,\text{دس}$

الحل :

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^{\text{٢}} = \text{س} \qquad \text{س} = \text{٩} \Leftarrow \text{ص} = \text{٣}$

$\text{٢ص دص} = \text{دس} \qquad \text{س} = \text{١٦} \Leftarrow \text{ص} = \text{٤}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٤}} \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{\text{٢}}-\text{٤}}\,\text{٢ص دص}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٤}} \frac{\text{٢ص}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}}-\text{٤}}\,\text{دص}$

$$\begin{array}{r} \text{٢} \\ \text{ص}^{\text{٢}}-\text{٤}\,\overline{)\,\text{٢ص}^{\text{٢}}} \\ \underline{-\text{٢ص}^{\text{٢}} \mp \text{٨}} \\ \text{٨} \end{array}$$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٤}} \text{٢} + \frac{\text{٨}}{(\text{ص}-\text{٢})(\text{ص}+\text{٢})}\,\text{دص}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٤}} \text{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{ص}-\text{٢}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+\text{٢}}\,\text{دص}$

$\text{٨} = \text{أ}(\text{ص}+\text{٢}) + \text{ب}(\text{ص}-\text{٢})$

$\text{ص} = \text{٢} \Leftarrow \text{٨} = \text{٤أ} \Leftarrow \text{أ} = \text{٢}$

$\text{ص} = -\text{٢} \Leftarrow \text{٨} = -\text{٤ب} \Leftarrow \text{ب} = -\text{٢}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٤}} \text{٢} + \frac{\text{٢}}{\text{ص}-\text{٢}} + \frac{-\text{٢}}{\text{ص}+\text{٢}}\,\text{دص}$

$\text{٢ص} + \text{٢لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-\text{٢}| - \text{٢لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+\text{٢}|\,\Big|_{\text{٣}}^{\text{٤}}$

$\text{٨} + \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٢} - \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٦} + \text{٦} + \cancel{\text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{١}} - \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٥}$

$= \text{١٤} + \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٢} - \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٦} - \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٥}$

مثال ١٦

جد $$\int_{9}^{16} \frac{\text{دس}}{\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}} + ٢}$$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$ ، $\text{س} = ٩ \leftarrow \text{ص} = ٣$

$٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$ ، $\text{س} = ١٦ \leftarrow \text{ص} = ٤$

$$\int_{3}^{4} \frac{٢\text{ص}\,\text{دص}}{\text{ص}^2 - ٣\text{ص} + ٢}$$

$$\int_{3}^{4} \frac{\text{أ}}{(\text{ص}-٢)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}-١)}$$

$٢\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(\text{ص}-٢)$

$\text{ص} = ١ \Leftarrow ٢ = -\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -٢$

$\text{ص} = ٢ \Leftarrow ٤ = \text{أ}$

$$\int_{3}^{4} \frac{٤}{\text{ص}-٢} + \frac{-٢}{\text{ص}-١}\,\text{دص}$$

$$٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٢| - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-١| \Big|_{3}^{4}$$

$٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - (٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}١ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢)$

$٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣$

مثال ٣

جد $$\int^{3} \frac{\sqrt{\text{س}+١} - ١}{\sqrt{\text{س}+١} + ١}\,\text{دس}$$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+١}$

$\text{ص}^2 = \text{س} + ١$ ، $\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ١$

$٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$ ، $\text{س} = ٣ \leftarrow \text{ص} = ٢$

$$\int_{1}^{2} \frac{\text{ص} - ١}{\text{ص} + ١}\; ٢\text{ص}\,\text{دص}$$

$$\int_{1}^{2} \frac{٢\text{ص}^2 - ٢\text{ص}}{\text{ص} + ١}\,\text{دص}$$

$$\begin{array}{r|l} ٢\text{ص} - ٤ & \\ \hline ٢\text{ص}^2 - ٢\text{ص} & \text{ص}+١ \\ -(٢\text{ص}^2 + ٢\text{ص}) & \\ \hline -٤\text{ص} & \\ -(-٤\text{ص} - ٤) & \\ \hline ٤ & \end{array}$$

$$\int_{1}^{2} ٢\text{ص} - ٤ + \frac{٤}{\text{ص}+١}\,\text{دص}$$

$$\text{ص}^2 - ٤\text{ص} + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١| \Big|_{1}^{2}$$

$٤ - ٨ + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - (١ - ٤ + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢)$

$-١ + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

مثال

جد $$\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢} + ١}{\sqrt{٤\text{س} - ٨} - ٢}\,\text{دس}$$

الحل:

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢} + ١}{\sqrt{٤(\text{س}-٢)} - ٢}\,\text{دس}$$

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}-2}+1}{2\sqrt{\text{س}-2}-2}\,\text{دس}$$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}-2}$

$\text{ص}^2 = \text{س}-2$

$2\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$

$$\int \frac{\text{ص}+1}{2\text{ص}-2}\; 2\text{ص}\,\text{دص}$$

$$\int \frac{2\text{ص}^2+2\text{ص}}{2\text{ص}-2}\,\text{دص}$$

$$\int \frac{\text{ص}^2+\text{ص}}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{ص}+2 & \\ \hline \text{ص}^2+\text{ص} & \text{ص}-1 \\ -(\text{ص}^2-\text{ص}) & \\ \hline 2\text{ص} & \\ -(2\text{ص}-2) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\int \text{ص}+2 + \frac{2}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$$

$$\frac{\text{ص}^2}{2} + 2\text{ص} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{ج}$$

$$\frac{(\sqrt{\text{س}-2})^2}{2} + 2\sqrt{\text{س}-2} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}-2}-1| + \text{ج}$$

مثال

جد $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-1}{\sqrt[3]{\text{س}^2}-4}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$

$\text{ص}^3 = \text{س}$

$3\text{ص}^2\,\text{دص} = \text{دس}$

$$\int \frac{\text{ص}-1}{\text{ص}^2-4}\; 3\text{ص}^2\,\text{دص}$$

$$\int \frac{3\text{ص}^3-3\text{ص}^2}{\text{ص}^2-4}\,\text{دص}$$

$$\begin{array}{r|l} 3\text{ص}-3 & \\ \hline 3\text{ص}^3-3\text{ص}^2 & \text{ص}^2-4 \\ -(3\text{ص}^3-12\text{ص}) & \\ \hline -3\text{ص}^2+12\text{ص} & \\ -(-3\text{ص}^2+12) & \\ \hline 12\text{ص}-12 & \end{array}$$

$$\int 3\text{ص}-3 + \frac{12\text{ص}-12}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)}\,\text{دص}$$

$$\int 3\text{ص}-3 + \frac{\text{أ}}{(\text{ص}-2)} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+2}\,\text{دص}$$

$12\text{ص}-12 = \text{أ}(\text{ص}+2) + \text{ب}(\text{ص}-2)$

$\text{ص}=2 \quad 12 = 4\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=3$

$\text{ص}=-2 \quad -36 = -4\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=9$

$$\int 3\text{ص}-3 + \frac{3}{\text{ص}-2} + \frac{9}{\text{ص}+2}\,\text{دص}$$

$$3\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2| + 9\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2| + \text{ج}$$

$$3\sqrt[3]{\text{س}^2} - 3\sqrt[3]{\text{س}} + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt[3]{\text{س}}-2| + 9\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt[3]{\text{س}}+2| + \text{ج}$$

مثال

جد $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^٤ + \text{س}^٢}\, \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^٢$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$\int \frac{\cancel{\text{س}}}{\text{ص}^٢ + \text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$\int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص}(\text{ص}+١)}\, \text{دص}$

$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+١}\, \text{دص}$

$\frac{١}{٢} = \text{أ}(\text{ص}+١) + \text{ب}\,\text{ص}$

$\text{ص} = ٠ \Leftarrow \frac{١}{٢} = \text{أ}$

$\text{ص} = -١ \Leftarrow \frac{١}{٢} = -\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٢}$

$\int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص}} + \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{ص}+١}\, \text{دص}$

$\frac{١}{٢} \text{لو}_\text{هـ}|\text{ص}| - \frac{١}{٢} \text{لو}_\text{هـ}|\text{ص}+١| + \text{جـ}$

$\frac{١}{٢} \text{لو}_\text{هـ}|\text{س}^٢| - \frac{١}{٢} \text{لو}_\text{هـ}|\text{س}^٢+١| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{٥\text{ظا}^٢\text{س} - ٣\text{ظاس} - ٢}\, \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢\text{س}}$

$\int \frac{\cancel{\text{قا}^٢\text{س}}}{٥\text{ص}^٢ - ٣\text{ص} - ٢} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^٢\text{س}}}$

$\int \frac{١}{(٥\text{ص}+٢)(\text{ص}-١)}\, \text{دص}$

$\int \frac{\text{أ}}{٥\text{ص}+٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-١}\, \text{دص}$

$١ = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(٥\text{ص}+٢)$

$\text{ص} = ١ \Leftarrow ١ = ٧\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٧}$

$\text{ص} = \frac{-٢}{٥} \Leftarrow ١ = \frac{-٧}{٥}\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{-٥}{٧}$

$\int \frac{\frac{-٥}{٧}}{٥\text{ص}+٢} + \frac{\frac{١}{٧}}{\text{ص}-١}\, \text{دص}$

$-\frac{٥}{٧} \cdot \frac{\text{لو}_\text{هـ}|٥\text{ص}+٢|}{٥} + \frac{١}{٧} \text{لو}_\text{هـ}|\text{ص}-١| + \text{جـ}$

$-\frac{٥}{٧} \cdot \frac{\text{لو}_\text{هـ}|٥\text{ظاس}+٢|}{٥} + \frac{١}{٧} \text{لو}_\text{هـ}|\text{ظاس}-١| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \frac{\text{جتاس}}{١ + ٣\text{جاس} - \text{جتا}^٢\text{س}}\, \text{دس}$

الحل:

$\int \frac{\text{جتاس}}{١ + ٣\text{جاس} - (١ - \text{جا}^٢\text{س})}\, \text{دس}$

$$\int \frac{\text{جتاس}}{\text{٢جا}^2\text{س} + \text{٣جاس}}\ \text{دس}$$

ص = جاس

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\text{٢ص}^2 + \text{٣ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$\int \frac{1}{\text{ص}(\text{٢ص}+3)}\ \text{دص}$$

$$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{٢ص}+3}\ \text{دص}$$

$1 = \text{أ}(\text{٢ص}+3) + \text{ب ص}$

ص $= 0 \leftarrow 1 = \text{٣أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{3}$

ص $= \frac{-3}{2} \leftarrow 1 = \frac{-3}{2}\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-2}{3}$

$$\int \frac{\frac{1}{3}}{\text{ص}} + \frac{\frac{-2}{3}}{\text{٢ص}+3}\ \text{دص}$$

$$\frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \frac{2}{3}\,\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢ص}+3|}{2} + \text{جـ}$$

$$\frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| - \frac{2}{3}\,\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢جاس}+3|}{2} + \text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5 - \text{قا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5 - (1+\text{ظا}^2\text{س})}\ \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{4 - \text{ظا}^2\text{س}}\ \text{دس}$$

ص = ظاس

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}{4 - \text{ص}^2} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$$

$$\int \frac{1}{(2-\text{ص})(2+\text{ص})}\ \text{دص}$$

$$\int \frac{\text{أ}}{2-\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{2+\text{ص}}\ \text{دص}$$

$1 = \text{أ}(2+\text{ص}) + \text{ب}(2-\text{ص})$

ص $= 2 \Leftarrow 1 = \text{٤أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{4}$

ص $= -2 \leftarrow 1 = -\text{٤ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-1}{4}$

$$\int \frac{\frac{1}{4}}{2-\text{ص}} + \frac{\frac{-1}{4}}{2+\text{ص}}\ \text{دص}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ص}|}{-1} - \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$\frac{-1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ظاس}| - \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ظاس}| + \text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{8 + \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

الحل: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جتاس}{٨ + (١ - جا^2س)} \, دس$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جتاس}{٩ - جا^2س} \, دس$

ص = جاس

$دس = \frac{دص}{جتاس}$ ، س = ٠ ← ص = ٠ ، $س = \frac{\pi}{2}$ ← ص = ١

$\int_{0}^{1} \frac{\cancel{جتاس}}{٩ - ص^2} \cdot \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

$\int_{0}^{1} \frac{١}{(٣ - ص)(٣ + ص)} \, دص$

$\int_{0}^{1} \frac{أ}{٣ - ص} + \frac{ب}{٣ + ص} \, دص$

١ = أ(٣ + ص) + ب(٣ - ص)

ص = ٣ ⇐ ١ = ٦أ ← أ = $\frac{١}{٦}$

ص = -٣ ⇐ ١ = -٦ب ⇐ ب = $\frac{-١}{٦}$

$\int_{0}^{1} \frac{\frac{١}{٦}}{٣ - ص} + \frac{\frac{-١}{٦}}{٣ + ص} \, دص$

$-\frac{١}{٦} لو_هـ|٣ - ص| - \frac{١}{٦} لو_هـ|٣ + ص| \Big]_{0}^{1}$

$-\frac{١}{٦} لو_هـ٢ - \frac{١}{٦} لو_هـ٤ - (-\frac{١}{٦} لو_هـ٣ - \frac{١}{٦} لو_هـ٣)$

$-\frac{١}{٦} لو_هـ٢ - \frac{١}{٦} لو_هـ٤ + \frac{١}{٦} لو_هـ٣ + \frac{١}{٦} لو_هـ٣$

مثال

جد $\int \frac{٨ هـ^س}{هـ^{٢س} - ١٦} \, دس$

الحل:

ص = هـ^س

$دس = \frac{دص}{هـ^س}$

$\int \frac{٨ \cancel{هـ^س}}{ص^2 - ١٦} \cdot \frac{دص}{\cancel{هـ^س}}$

$\int \frac{أ}{ص - ٤} + \frac{ب}{ص + ٤} \, دص$

٨ = أ(ص + ٤) + ب(ص - ٤)

ص = -٤ ← ٨ = -٨ب ← ب = -١

ص = ٤ ← ٨ = ٨أ ← أ = ١

$\int \frac{١}{ص - ٤} + \frac{-١}{ص + ٤} \, دص$

$لو_هـ|ص - ٤| + -١ \, لو_هـ|ص + ٤| + جـ$

$لو_هـ|هـ^س - ٤| - لو_هـ|هـ^س + ٤| + جـ$

مثال

جد $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٢س} - ٣هـ^س - ٤} \, دس$

ص = هـ^س

$دس = \frac{دص}{هـ^س}$

$\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٢س} - ٣هـ^س - ٤} \cdot \frac{دص}{هـ^س}$

$\int \frac{هـ^{٢س}}{ص^2-٣ص-٤}\,دص$

$= \int \frac{ص^2}{ص^2-٣ص-٤}\,دص$

$$\begin{array}{r} ١ \\ ص^2-٣ص-٤ \overline{)\, ص^2 \quad} \\ -\,(ص^2-٣ص-٤) \\ \hline ٣ص+٤ \end{array}$$

$\int ١ + \frac{٣ص+٤}{(ص-٤)(ص+١)}\,دص$

$\int ١ + \frac{أ}{ص-٤} + \frac{ب}{ص+١}\,دص$

$٣ص+٤ = أ(ص+١) + ب(ص-٤)$

$ص=٤ \leftarrow ١٦ = ٥أ \leftarrow أ = \frac{١٦}{٥}$

$ص=-١ \leftarrow ١ = -٥ب \leftarrow ب = \frac{-١}{٥}$

$\int ١ + \frac{\frac{١٦}{٥}}{ص-٤} - \frac{\frac{١}{٥}}{ص+١}\,دص$

$ص + \frac{١٦}{٥}لو_هـ|ص-٤| - \frac{١}{٥}لو_هـ|ص+١| + جـ$

$هـ^س + \frac{١٦}{٥}لو_هـ|هـ^س-٤| - \frac{١}{٥}لو_هـ|هـ^س+١| + جـ$

مثال

جد $\int \frac{١}{هـ^س+١}\,دس$

الحل

$ص = هـ^س \leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^س}$

$\int \frac{١}{هـ^س+١} \times \frac{دص}{هـ^س}$

$\int \frac{١}{ص(ص+١)}\,دص$

$\int \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+١}\,دص$

$١ = أ(ص+١) + ب(ص)$

$ص=٠ \leftarrow ١ = أ \leftarrow أ=١$

$ص=-١ \leftarrow ١ = -ب \leftarrow ب=-١$

$\int \frac{١}{ص} + \frac{-١}{ص+١}\,دص$

$لو_هـ|ص| - لو_هـ|ص+١| + جـ$

$لو_هـ هـ^س - لو_هـ|هـ^س+١| + جـ$

$س - لو_هـ|هـ^س+١| + جـ$

مثال

جد $\int \sqrt{١-هـ^س}\,دس$

الحل:

$ص = \sqrt{١-هـ^س}$

$ص^2 = ١-هـ^س$

$٢ص\,دص = -هـ^س\,دس$

$دس = \frac{٢ص\,دص}{-هـ^س}$

$\int ص \times \frac{٢ص\,دص}{-هـ^س}$

لكن: $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}^2 - 1$

$$\int \frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 1}\, \text{دص}$$

$$\frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 1} = 2 \quad ; \quad 2\text{ص}^2 - (2\text{ص}^2 - 2) = 2$$

$$\int 2 + \frac{2}{(\text{ص}-1)(\text{ص}+1)}\, \text{دص}$$

$$\int 2 + \frac{\text{أ}}{\text{ص}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}\, \text{دص}$$

$$2 = \text{أ}(\text{ص}+1) + \text{ب}(\text{ص}-1)$$

$$\text{ص} = 1 \leftarrow 2 = 2\text{أ} \leftarrow \text{أ} = 1$$

$$\text{ص} = -1 \leftarrow 2 = -2\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -1$$

$$\int 2 + \frac{1}{\text{ص}-1} - \frac{1}{\text{ص}+1}\, \text{دص}$$

$$2\text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{جـ}$$

$$2\sqrt{1+\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{1+\text{هـ}^{\text{س}}} - 1\right| - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{1+\text{هـ}^{\text{س}}} + 1\right| + \text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 4\text{س}}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{\text{س}}} = \text{س}\ \text{دص}$$

$$\int \frac{\text{س}\ \text{دص}}{\text{س}(\text{ص}^2 - 1)}$$

$$\int \frac{\text{دص}}{(\text{ص}-1)(\text{ص}+1)}$$

$$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}\, \text{دص}$$

$$1 = \text{أ}(\text{ص}+1) + \text{ب}(\text{ص}-1)$$

$$\text{ص} = 1 \leftarrow 1 = 2\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{ص} = -1 \leftarrow 1 = -2\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{\text{ص}-1} - \frac{\frac{1}{2}}{\text{ص}+1}\, \text{دص}$$

$$\tfrac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| - \tfrac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{جـ}$$

$$\tfrac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-1| - \tfrac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+1| + \text{جـ}$$

مثال

جد $\displaystyle\int \frac{\text{ظاس}}{25 - (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس})^2}\, \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}} = \frac{\text{دص}}{-\text{ظاس}}$$

$$\int \frac{\text{ظاس}}{25 - \text{ص}^2} \cdot \frac{\text{دص}}{-\text{ظاس}}$$

$$\int \frac{\text{دص}}{\text{ص}^2 - 25}$$

$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-5} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+5}\ \text{دص}$

$1 = \text{أ}(\text{ص}+5) + \text{ب}(\text{ص}-5)$

ص $= 5 \leftarrow 1 = 10$ أ $\leftarrow$ أ $= \frac{1}{10}$

ص $= -5 \leftarrow 1 = -10$ ب $\leftarrow$ ب $= -\frac{1}{10}$

$\int \frac{\frac{1}{10}}{\text{ص}-5} - \frac{\frac{1}{10}}{\text{ص}+5}\ \text{دص}$

$\frac{1}{10}$ لوهـ $|$ص $-5|$ $-\frac{1}{10}$ لوهـ $|$ص $+5|$ + جـ

$\frac{1}{10}$ لوهـ $|$لوهـ قاس $-5|$ $-\frac{1}{10}$ لوهـ $|$لوهـ قاس $+5|$ + جـ

مثال

جد $\int$ لوهـ(س² − ٩) دس

الحل:

م = لوهـ(س² − ٩)   دهـ = دس

دم $= \frac{2\text{س}}{\text{س}^2-9}$ هـ = س

س لوهـ(س² − ٩) $- \int \text{س} \times \frac{2\text{س}}{\text{س}^2-9}\ \text{دس}$

س لوهـ(س² − ٩) $- \int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-9}\ \text{دس}$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \text{س}^2-9 \,\big)\, 2\text{س}^2 \\ -\ (2\text{س}^2 - 18) \\ \hline 18 \end{array}$$

س لوهـ(س² − ٩) $- \int 2 + \frac{18}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}\ \text{دس}$

س لوهـ(س² − ٩) $- \int 2 + \frac{\text{أ}}{\text{س}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+3}\ \text{دس}$

$18 = \text{أ}(\text{س}+3) + \text{ب}(\text{س}-3)$

س $= -3 \leftarrow 18 = -6$ب $\leftarrow$ ب $= -3$

س $= 3 \leftarrow 18 = 6$أ $\leftarrow$ أ $= 3$

س لوهـ(س² − ٩) $- \int 2 + \frac{3}{\text{س}-3} - \frac{3}{\text{س}+3}\ \text{دس}$

س لوهـ(س² − ٩) − ٢س − ٣ لوهـ $|$س $-3|$ + ٣ لوهـ $|$س $+3|$ + جـ

الأسئلة الوزارية:

٢٠٠٨ شتوي — ١٠ علامات

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}{(\text{س}-2)^{2}}\,\text{دس}$$

الحل:

$$\int 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,(\text{س}-2)^{-2}\,\text{دس}$$

$\text{ق} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{دع} = (\text{س}-2)^{-2}$

$\text{دق} = \frac{2}{\text{س}}$ ، $\text{ع} = \frac{(\text{س}-2)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{\text{س}-2}$

$$2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \times \frac{-1}{\text{س}-2} - \int \frac{-2}{\text{س}(\text{س}-2)}\,\text{دس}$$

$$\frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}{\text{س}-2} + \int \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-2}\right)\text{دس}$$

$2 = \text{أ}(\text{س}-2) + \text{ب}\,\text{س}$

$\text{س} = 0 \rightarrow 2 = -2\text{أ} \rightarrow \text{أ} = -1$

$\text{س} = 2 \rightarrow 2 = 2\text{ب} \rightarrow \text{ب} = 1$

$$\frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}{\text{س}-2} + -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + \text{جـ}$$

$$\frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}{\text{س}-2} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + \text{جـ}.$$

٢٠٠٨ صيفي — ٩ علامات

جد التكامل الآتي

$$\int_{1}^{\text{هـ}} \frac{2}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}-2)(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}-3)}\,\text{دس}$$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{\text{س}}} = \text{س}\,\text{دص}$

$\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = \text{هـ} \Leftarrow \text{ص} = 1$

$$\int_{0}^{1} \frac{2}{\cancel{\text{س}}(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)}\,\cancel{\text{س}}\,\text{دص}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{2}{(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)}\,\text{دص}$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ص}-2} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-3}\right)\text{دص}$$

$2 = \text{أ}(\text{ص}-3) + \text{ب}(\text{ص}-2)$

$\text{ص} = 2 \Leftarrow 2 = -\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -2$

$\text{ص} = 3 \Leftarrow 2 = \text{ب} \Leftarrow \text{ب} = 2$

$$\int_{0}^{1} \left(\frac{-2}{\text{ص}-2} + \frac{2}{\text{ص}-3}\right)\text{دص}$$

$$= -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2| + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-3| \Big|_{0}^{1}$$

$$= (-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}1 + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2) - (-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3)$$

$$= 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$$

$$= 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$$

رياضيات المستوى (٤) الوحدة (التكامل) عصام الشيخ

التخصص(العلمي) الدرس (التكامل بالكسور الجزئية) ماجستير رياضيات

٢٠٠٩ شتوي ..... ٨ علامات

جد التكامل الآتي

$$\int_{0}^{4} \frac{2\,\text{دس}}{\text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + 3}$$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^2 = \text{س} \leftarrow 2\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = 4 \leftarrow \text{ص} = 2$

$$\int_{0}^{2} \frac{2}{\text{ص}^2 - 4\text{ص} + 3}\; 2\text{ص}\,\text{دص}$$

$$\int_{0}^{2} \frac{4\text{ص}}{(\text{ص}-3)(\text{ص}-1)}\,\text{دص}$$

$$\int_{0}^{2} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ص}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-1}\right)\text{دص}$$

$4\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}-1) + \text{ب}(\text{ص}-3)$

$\text{ص} = 3 \leftarrow 12 = 2\text{أ} \leftarrow \text{أ} = 6$

$\text{ص} = 1 \leftarrow 4 = -2\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -2$

$$6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-3| - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| \Big|_{0}^{2}$$

$$6\,\text{لو}_{\text{هـ}}1 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}1 - (6\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}1)$$

$$= -6\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$$

٢٠٠٩ صيفي ..... ٧ علامات

جد

$$\int \frac{\text{جتاس}}{1 + 3\,\text{جاس} - \text{جتا}2\text{س}}\,\text{دس}$$

الحل:

$$\int \frac{\text{جتاس}}{1 + 3\,\text{جاس} - (1 - 2\,\text{جا}^2\text{س})}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{جتاس}}{2\,\text{جا}^2\text{س} + 3\,\text{جاس}}\,\text{دس}$$

$\text{ص} = \text{جاس} \leftarrow \text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$$\int \frac{\text{جتاس}}{2\text{ص}^2 + 3\text{ص}}\;\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$$

$$\int \frac{1}{\text{ص}(2\text{ص}+3)}\,\text{دص}$$

$$\int \left(\frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{2\text{ص}+3}\right)\text{دص}$$

$1 = \text{أ}(2\text{ص}+3) + \text{ب}(\text{ص})$

$\text{ص} = 0 \leftarrow 1 = 3\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{3}$

$\text{ص} = \frac{-3}{2} \leftarrow 1 = \frac{-3}{2}\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-2}{3}$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{\text{ص}} + \frac{\frac{-2}{3}}{2\text{ص}+3}\right)\text{دص}$$

$$\frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \frac{2}{3}\,\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{ص}+3|}{2} + \text{جـ}$$

$$\frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| - \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\,\text{جاس}+3| + \text{جـ}$$

رياضيات المستوى (٤)　　الوحدة (التكامل)　　عصام الشيخ

التخصص (العلمي)　　الدرس (التكامل بالكسور الجزئية)　　ماجستير رياضيات

٢٠١٠ شتوي　　(٩ علامات)

جد $\int_{1}^{8} \frac{2\,\text{دس}}{\sqrt[3]{\text{س}^{4}} + 4\text{س} + 3\sqrt[3]{\text{س}^{2}}}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^{3} = \text{س}$

$3\text{ص}^{2}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 8 \leftarrow \text{ص} = 2$

$\int_{1}^{2} \frac{2}{\text{ص}^{4} + 4\text{ص}^{3} + 3\text{ص}^{2}}\; 3\text{ص}^{2}\,\text{دص}$

$\int_{1}^{2} \frac{6\text{ص}^{2}}{\text{ص}^{2}(\text{ص}^{2} + 4\text{ص} + 3)}\,\text{دص}$

$\int_{1}^{2} \frac{6}{\text{ص}^{2} + 4\text{ص} + 3}\,\text{دص}$

$\int_{1}^{2} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ص}+3} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}+1)} \right) \text{دص}$

$6 = \text{أ}(\text{ص}+1) + \text{ب}(\text{ص}+3)$

$\text{ص} = -3 \leftarrow 6 = -2\text{أ} \leftarrow \text{أ} = -3$

$\text{ص} = -1 \leftarrow 6 = 2\text{ب} \leftarrow \text{ب} = 3$

$-3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+3| + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| \Big|_{1}^{2}$

$= -3\,\text{لو}_{\text{هـ}}5 + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 - (-3\,\text{لو}_{\text{هـ}}4 + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}2)$

$= 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}4 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}5 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$

$= 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}12 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}10 = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{12}{10}$

٢٠١٠ صيفي　　(١٠ علامات)

جد $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1)\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) \leftarrow \text{دم} = \frac{\text{دص}}{\frac{2\text{س}}{\text{س}^{2}-1}}$

$\text{ص}' = \frac{2\text{س}}{\text{س}^{2}-1}$　　$\text{م} = \text{س}$

$\int \text{ص}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) - \int \frac{2\text{س}}{\text{س}^{2}-1}\,\text{س}\,\text{دس}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) - \int \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+1} \right) \text{دس}$

$2\text{س} = \text{أ}(\text{س}+1) + \text{ب}(\text{س}-1)$

$\text{س} = 1 \leftarrow 2 = 2\text{أ} \leftarrow \text{أ} = 1$

$\text{س} = -1 \leftarrow +2 = -2\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -1$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) - \left(\int \left(\frac{1}{\text{س}-1} + \frac{-1}{\text{س}+1} \right) \text{دس} \right)$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + \text{جـ}$

رياضيات المستوى (٤)　　الوحدة (التكامل)　　عصام الشيخ

التخصص (العلمي)　　الدرس (التكامل بالكسور الجزئية)　　ماجستير رياضيات

٢٠١١ شتوي　　٩ علامات

جد $\int_{1}^{4} \frac{|\text{س}-1|}{\text{س}^2-5\text{س}+6}\,\text{دس}$

الحل:

بعد إعادة التعريف

$\int_{1}^{4} \frac{\text{س}-1}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)}\,\text{دس}$

$\Leftarrow$

$\int_{1}^{4} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-2}\right)\text{دس}$

$\text{س}-1 = \text{أ}(\text{س}-2) + \text{ب}(\text{س}-3)$

$\text{س}=3 \leftarrow 2 = \text{أ}$

$\text{س}=2 \leftarrow 1 = -\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -1$

$\int_{1}^{4} \left(\frac{2}{\text{س}-3} + \frac{-1}{\text{س}-2}\right)\text{دس}$

$2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| \Big]_{1}^{4}$

$(2\,\text{لو}_{\text{هـ}}1 - \text{لو}_{\text{هـ}}2) - (2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - \text{لو}_{\text{هـ}}1)$

$-\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$

$-3\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$

٢٠١١ صيفي　　٧ علامات

جد $\int \frac{4\,\text{دس}}{\text{س}^3+\text{س}}$　　$\text{س} > 0$.

الحل:

$\int \frac{4}{\text{س}(\text{س}^2+1)}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\int \frac{4}{\text{س}(\text{ص}+1)}\,\frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\int \frac{2}{\text{س}^2(\text{ص}+1)}\,\text{دص}$

$\int \frac{2}{\text{ص}(\text{ص}+1)}\,\text{دص}$

$\int \left(\frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}\right)\text{دص}$

$2 = \text{أ}(\text{ص}+1) + \text{ب}\,\text{ص}$

$\text{ص}=0 \leftarrow 2 = \text{أ}$

$\text{ص}=-1 \leftarrow 2 = -\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -2$

$\int \left(\frac{2}{\text{ص}} + \frac{-2}{\text{ص}+1}\right)\text{دص}$

$2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{جـ}$

$2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^2| - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^2+1| + \text{جـ}$

٢٠١٢ شتوي ٦ علامات

جد $\int \frac{\text{س}^3 - 1}{\text{س}^2 + 2\text{س}} \, \text{دس}$

الحل:

$$\begin{array}{r} \text{س} - 2 \\ \text{س}^2 + 2\text{س} \,\big)\, \overline{\text{س}^3 - 1} \\ -(\text{س}^3 + 2\text{س}^2) \\ \hline -2\text{س}^2 - 1 \\ -(-2\text{س}^2 - 4\text{س}) \\ \hline 4\text{س} - 1 \end{array}$$

$$\int (\text{س} - 2)\, \text{دس} + \int \frac{4\text{س} - 1}{\text{س}(\text{س} + 2)}$$

$$\frac{\text{س}^2}{2} - 2\text{س} + \int \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + 2}\right) \text{دس}$$

$$4\text{س} - 1 = \text{أ}(\text{س} + 2) + \text{ب}(\text{س})$$

$$\text{س} = 0 \leftarrow -1 = 2\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{س} = -2 \leftarrow -9 = -2\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{\text{س}^2}{2} - 2\text{س} - \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{9}{2} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + 2| + \text{جـ}$$

٢٠١٣ صيفي ٧ علامات

جد $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}} - 4} \, \text{دس}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{ص}^2 - 4} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

$$= \int \frac{1}{(\text{ص} - 2)(\text{ص} + 2)} \, \text{دص}$$

$$= \int \left(\frac{\text{أ}}{\text{ص} - 2} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + 2}\right) \text{دص}$$

$$1 = \text{أ}(\text{ص} + 2) + \text{ب}(\text{ص} - 2)$$

$$\text{ص} = 2 \leftarrow 1 = 4\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ص} = -2 \leftarrow 1 = -4\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - 2| - \frac{1}{4} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + 2| + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{4} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} - 2| - \frac{1}{4} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} + 2| + \text{جـ}$$

٢٠١٣ شتوي   ٨ علامات

جد $\int \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2-4}\, \text{دس}$

الحل:

$\text{س}^2 \div (\text{س}^2-4) = 1$

$\text{س}^2 - (\text{س}^2 - 4) = 4$

$= \int 1\, \text{دس} + \int \frac{4}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\, \text{دس}$

$= \text{س} + \int \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}-2} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+2} \right) \text{دس}$

$4 = \text{أ}(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س}-2)$

$\text{س} = 2 \Leftarrow 4 = 4\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = 1$

$\text{س} = -2 \Leftarrow 4 = -4\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -1$

$= \text{س} + \int \left(\frac{1}{\text{س}-2} + \frac{-1}{\text{س}+2} \right) \text{دس}$

$= \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ}$

٢٠١٣ صيفي   ٦ علامات

جد $\int \frac{\text{س}^5+2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس}$

الحل:

$(\text{س}^5 + 2) \div (\text{س}^2 - 1) = \text{س}^3 + \text{س}$

$(\text{س}^5 + 2) - (\text{س}^5 - \text{س}^3) = \text{س}^3 + 2$

$(\text{س}^3 + 2) - (\text{س}^3 - \text{س}) = \text{س} + 2$

$\int (\text{س}^3 + \text{س})\, \text{دس} + \int \frac{\text{س}+2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}\, \text{دس}$

$\frac{\text{س}^4}{4} + \frac{\text{س}^2}{2} + \int \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+1} \right) \text{دس}$

$\text{س} + 2 = \text{أ}(\text{س}+1) + \text{ب}(\text{س}-1)$

$\text{س} = 1 \Leftarrow 3 = 2\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{3}{2}$

$\text{س} = -1 \Leftarrow 1 = -2\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\text{س}^4}{4} + \frac{\text{س}^2}{2} + \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{\text{س}-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{\text{س}+1} \right) \text{دس}$

$\frac{\text{س}^4}{4} + \frac{\text{س}^2}{2} + \frac{3}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| - \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + \text{جـ}$

رياضيات المستوى (٤)   الوحدة (التكامل)   عصام الشيخ

التخصص(العلمي)   الدرس (التكامل بالكسور الجزئية)   ماجستير رياضيات

٢٠١٤ شتوي   ٦ علامات

جد $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}}$

الحل:

$$\int \frac{\text{١}}{(\text{س} - \text{٢})(\text{س} - \text{٣})}\,\text{دس}$$

$$\int \left(\frac{\text{أ}}{\text{س} - \text{٣}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - \text{٢}} \right) \text{دس}$$

$\text{١} = \text{أ}(\text{س} - \text{٢}) + \text{ب}(\text{س} - \text{٣})$

س = ٣ ← ١ = أ

س = ٢ ← ١ = -ب ← ب = -١

$$\int \left(\frac{\text{١}}{\text{س} - \text{٣}} + \frac{\text{-١}}{\text{س} - \text{٢}} \right) \text{دس}$$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{٣}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{٢}| + \text{جـ}$

٢٠١٤ صيفي   (٨ علامات)

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{\text{س} - \text{١٣}}{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٧س} + \text{٣}}\,\text{دس}$$

الحل:

$$\int \frac{\text{س} - \text{١٣}}{(\text{٢س} - \text{١})(\text{س} - \text{٣})}\,\text{دس}$$

$$\int \frac{\text{أ}}{\text{٢س} - \text{١}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - \text{٣}}\,\text{دس}$$

$\text{س} - \text{١٣} = \text{أ}(\text{س} - \text{٣}) + \text{ب}(\text{٢س} - \text{١})$

س = ٣ ← -١٠ = ٥ب ← ب = -٢

س = $\frac{1}{2}$ ← ١٢,٥ = -٢,٥ أ ← أ = -٥

$$\int \frac{\text{-٥}}{\text{٢س} - \text{١}} + \frac{\text{-٢}}{\text{س} - \text{٣}}\,\text{دس}$$

$$\frac{\text{-٥ لو}_{\text{هـ}}|\text{٢س} - \text{١}|}{\text{٢}} - \text{٢ لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{٣}| + \text{جـ}$$

المستوى (٤)	**الوحدة (التكامل)**	**عصام الشيخ**
التخصص(العلمي)	**الدرس (التكامل بالكسور الجزئية)**	**ماجستير رياضيات**

٢٠١٥ شتوي (٧علامات)

جد التكامل الآتي:

$$\int \frac{\text{٢} - \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}{\text{٩} - \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}}} \, \text{دس}$$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$

$\text{ص}^{\text{٣}} = \text{س}$

$\text{٣ص}^{\text{٢}} \, \text{دص} = \text{دس}$

$$\int \frac{\text{٢} - \text{ص}}{\text{٩} - \text{ص}^{\text{٢}}} \, \text{٣ص}^{\text{٢}} \, \text{دص}$$

$$\int \frac{\text{٦ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص}^{\text{٣}}}{\text{٩} - \text{ص}^{\text{٢}}} \, \text{دص}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{٣ص} - \text{٦} & \\ \hline -\text{٣ص}^{\text{٣}} + \text{٦ص}^{\text{٢}} & -\text{ص}^{\text{٢}} + \text{٩} \\ \mp \text{٣ص}^{\text{٣}} \pm \text{٢٧ص} & \\ \hline \text{٦ص}^{\text{٢}} - \text{٢٧ص} & \\ -\text{٦ص}^{\text{٢}} \pm \text{٥٤} & \\ \hline -\text{٢٧ص} + \text{٥٤} & \end{array}$$

$$\int \text{٣ص} - \text{٦} \, \text{دص} + \int \frac{-\text{٢٧ص} + \text{٥٤}}{(\text{٣} - \text{ص})(\text{٣} + \text{ص})}$$

$$\int \text{٣ص} - \text{٦} \, \text{دص} + \int \left(\frac{\text{أ}}{\text{٣} - \text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{٣} + \text{ص}} \right) \text{دص}$$

$-\text{٢٧ص} + \text{٥٤} = \text{أ}(\text{٣} + \text{ص}) + \text{ب}(\text{٣} - \text{ص})$

$\text{ص} = \text{٣} \leftarrow -\text{٢٧} = \text{٦أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{-\text{٢٧}}{\text{٦}}$

$\text{ص} = -\text{٣} \leftarrow \text{١٣٥} = \text{٦ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{\text{١٣٥}}{\text{٦}}$

$$\frac{\text{٣ص}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{٦ص} + \frac{\text{٢٧}}{\text{٦}} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣} - \text{ص}| - \frac{\text{١٣٥}}{\text{٦}} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣} + \text{ص}| + \text{جـ}$$

$$\frac{\text{٣}}{\text{٢}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}} - \text{٦} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}} + \frac{\text{٢٧}}{\text{٦}} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣} - \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}| - \frac{\text{١٣٥}}{\text{٦}} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣} + \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}| + \text{جـ}$$

المستوى (٤)	**الوحدة (التكامل)**	**عصام الشيخ**
التخصص (العلمي)	**الدرس (التكامل بالكسور الجزئية)**	**ماجستير رياضيات**

٢٠١٥ صيفي (٦ علامات)

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{٢\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٥\text{هـ}^{\text{س}} + ٢} \, \text{دس}$$

الحل:

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$

$\Leftarrow$

$$\int \frac{\cancel{\text{ص}}}{٢\text{ص}^{٢} - ٥\text{ص} + ٢} \, \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{ص}}}$$

$$= \int \frac{١}{(٢\text{ص}-١)(\text{ص}-٢)} \, \text{دص}$$

$$= \int \left(\frac{\text{أ}}{(٢\text{ص}-١)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}-٢)} \right) \text{دص}$$

$\text{أ}(\text{ص}-٢) + \text{ب}(٢\text{ص}-١) = ١$

عندما $\text{ص} = ٢ \Leftarrow ٣\text{ب} = ١ \Leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٣}$

عندما $\text{ص} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{-٣}{٢}\text{أ} = ١ \Leftarrow \text{أ} = \frac{-٢}{٣}$

$$\Leftarrow \int \left(\frac{\frac{-٢}{٣}}{٢\text{ص}-١} + \frac{\frac{١}{٣}}{\text{ص}-٢} \right) \text{دص}$$

$$= \frac{-\cancel{٢}}{٣} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{ص}-١|}{\cancel{٢}} + \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٢| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{هـ}^{\text{س}}-١| + \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-٢| + \text{جـ}$$

٢٠١٦ شتوي (٦ علامات)

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{١}{١ + \text{هـ}^{\text{س}}} \, \text{دس}$$

الحل:

$\text{ص} = ١ + \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

لكن $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص} - ١ \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}-١}$

$\Leftarrow$

$$\int \frac{١}{\text{ص}} \, \frac{\text{دص}}{(\text{ص}-١)}$$

$$= \int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-١)} \, \text{دص}$$

$$= \int \left(\frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-١} \right) \text{دص}$$

$\text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}\,\text{ص} = ١$

عندما $\text{ص} = ١ \Leftarrow \text{ب}\,\text{ص} = ١ \Leftarrow \text{ب} = ١$

عندما $\text{ص} = ٠ \Leftarrow -\text{أ} = ١ \Leftarrow \text{أ} = -١$

$\Leftarrow$

$$\int \frac{-١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ص}-١} \, \text{دص}$$

$$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-١| + \text{جـ}$$

$$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{جـ}$$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (التكامل) عصام الشيخ

المستوى(٤) الدرس(١٠) (التكامل بالكسور الجزئية) ماجستير رياضيات

٢٠١٦ صيفي (٧ علامات)

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{\text{دس}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}+٢}}$$

الحل:

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+٢}$$

$$\text{ص}^٢ = \text{س} + ٢$$

$$٢\text{ص دص} = \text{دس}$$

$$\int \frac{٢\text{ص دص}}{\text{ص}^٢ - ٢ - \text{ص}}$$

$$\int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^٢ - \text{ص} - ٢} \text{دص}$$

$$\int \frac{٢\text{ص}}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+١)} \text{دص}$$

$$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+١} \text{دص}$$

$$٢\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}+١) + \text{ب}(\text{ص}-٢)$$

$$\text{ص} = -١ \leftarrow -٢ = -٣\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{٢}{٣}$$

$$\text{ص} = ٢ \leftarrow ٤ = ٣\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{٤}{٣}$$

$$\frac{٤}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ٢| + \frac{٢}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}+١| + \text{جـ}$$

$$\frac{٤}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}+٢} - ٢| + \frac{٢}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}+٢}+١| + \text{جـ}$$

التخصص (العلمي)	الوحدة (١) (التكامل)	عصام الشيخ
المستوى (٤)	الدرس (١٠) (التكامل بالكسور الجزئية)	ماجستير رياضيات

٢٠١٧ شتوي (٧ علامات)

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{\text{قاس ظاس}}{8 - \text{ظا}^2\text{س}}\, \text{دس}$$

الحل :

$$\int \frac{\text{قاس ظاس}}{8 - (\text{قا}^2\text{س} - 1)}\, \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{قاس ظاس}}{9 - \text{قا}^2\text{س}}\, \text{دس}$$

ص = قاس

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$$

$$\int \frac{\text{قاس ظاس}}{9 - \text{ص}^2} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$$

$$\int \frac{1}{9 - \text{ص}^2} \cdot \text{دص}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\text{أ}}{3 - \text{ص}} + \frac{\text{ب}}{3 + \text{ص}}\, \text{دص}$$

$$1 = \text{أ}(3 + \text{ص}) + \text{ب}(3 - \text{ص})$$

ص = −٣ ← ١ = +٦ب ← ب = $\frac{1}{6}$+

ص = ٣ ← ١ = ٦أ ← أ = $\frac{1}{6}$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\,\text{لو}_\text{هـ}|3 - \text{ص}| + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\,\text{لو}_\text{هـ}|3 + \text{ص}| + \text{ج}$$

$$-\frac{1}{12}\,\text{لو}_\text{هـ}|3 - \text{قاس}| + \frac{1}{12}\,\text{لو}_\text{هـ}|3 + \text{قاس}| + \text{ج}$$

٢٠١٨ شتوي قديم ٧ علامات

جد

$$\int \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 - \text{س} - 2}\, \text{دس}$$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \text{س}^2 - \text{س} - 2 & \text{س}^2 + 1 \\ & \text{س}^2 - \text{س} - 2 \\ \hline & \text{س} + 3 \end{array}$$

$$\int 1 + \frac{\text{س} + 3}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 1)}\, \text{دس}$$

$$\int 1 + \int \frac{\text{أ}}{\text{س} - 2} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + 1}\, \text{دس}$$

$$\text{س} + 3 = \text{أ}(\text{س} + 1) + \text{ب}(\text{س} - 2)$$

س = −١   ٢ = −٣ب ← ب = $\frac{-2}{3}$

س = ٢   ٥ = ٣أ ← أ = $\frac{5}{3}$

$$\int 1 + \frac{\frac{5}{3}}{\text{س} - 2} + \frac{\frac{-2}{3}}{\text{س} + 1}\, \text{دس}$$

$$= \text{س} + \frac{5}{3}\,\text{لو}_\text{هـ}|\text{س} - 2| - \frac{2}{3}\,\text{لو}_\text{هـ}|\text{س} + 1| + \text{ج}$$

٢٠١٨ شتوي جديد

جد $\int \frac{1}{هـ^{-س} - هـ^{س}}\, دس$

الحل:

$\int \frac{1}{\frac{1}{هـ^{س}} - هـ^{س}}\, دس$

$\int \frac{1}{\frac{1 - هـ^{2س}}{هـ^{س}}}\, دس$

$\int \frac{هـ^{س}}{1 - هـ^{2س}}\, دس$

$هـ^{س} = ص$

$دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$\int \frac{\cancel{هـ^{س}}}{1 - ص^{2}} \cdot \frac{دص}{\cancel{هـ^{س}}}$

$\int \frac{1}{(1-ص)(1+ص)}\, دص$

$\int \frac{أ}{1-ص}\, دص + \int \frac{ب}{1+ص}\, دص$

$1 = أ(1+ص) + ب(1-ص)$

$ص = -1 \leftarrow 1 = -2ب \leftarrow ب = -\frac{1}{2}$

$ص = 1$

$1 = 2أ \leftarrow أ = \frac{1}{2}$

$\int \frac{\frac{1}{2}}{1-ص}\, دص + \int \frac{-\frac{1}{2}}{1+ص}\, دص$

$\frac{\frac{1}{2} لو_{هـ}|1-ص|}{-1} + -\frac{1}{2} لو_{هـ}|1+ص| + جـ$

$-\frac{1}{2} لو_{هـ}|1-هـ^{س}| - \frac{1}{2} لو_{هـ}|1+هـ^{س}| + جـ$

٢٠١٦ شتوي (٧ علامات)

جـ $\int \frac{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س} + \sqrt{1-س}} \, دس$

الحل:

$\int \frac{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س} + \sqrt{1-س}} \times \frac{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}} \, دس$

$= \int \frac{\left(\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}\right)^2}{(1+س) - (1-س)} \, دس$

$= \int \frac{1+\cancel{س} - 2\sqrt{1+س}\sqrt{1-س} + 1-\cancel{س}}{2س} \, دس$

$= \int \frac{2 - 2\sqrt{(1+س)(1-س)}}{2س} \, دس$

$= \int \frac{2\left(1 - \sqrt{1-س^2}\right)}{2س} \, دس$

$= \int \frac{1 - \sqrt{1-س^2}}{س} \, دس$

$= \int \left(\frac{1}{س} - \frac{\sqrt{1-س^2}}{س}\right) دس$

$ص = \sqrt{1-س^2}$

$ص^2 = 1 - س^2$

$2ص \, دص = -2س \, دس$

$ص \, دص = -س \, دس$

$دس = \frac{ص \, دص}{-س}$

$= لو_{هـ} س - \int \frac{ص}{س} \cdot \frac{ص \, دص}{-س}$

$= لو_{هـ} س - \int \frac{ص^2}{-س^2} \, دص$

$= لو_{هـ} س - \int \frac{ص^2}{ص^2 - 1} \, دص$

$= لو_{هـ} س - \int \left(1 + \frac{1}{ص^2-1}\right) دص$

$ص^2 - 1 \overline{) \, ص^2 \,}$ ، $\frac{\mp ص^2 \mp 1}{1}$ ، الناتج 1

$لو_{هـ} س - ص - \int \frac{1}{(ص-1)(ص+1)} \, دص$

$لو_{هـ} س - ص - \int \left(\frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص+1}\right) دص$

$1 = أ(ص+1) + ب(ص-1)$

$1 = -2ب \leftarrow ب = -\frac{1}{2}$

$1 = 2أ \leftarrow أ = \frac{1}{2}$

$لو_{هـ} س - \sqrt{1-س^2} - \frac{1}{2} لو_{هـ}|ص-1| + \frac{1}{2} لو_{هـ}|ص+1| + جـ$

$لو_{هـ} س - \sqrt{1-س^2} - \frac{1}{2} لو_{هـ}\left|\sqrt{1-س^2} - 1\right| + \frac{1}{2} لو_{هـ}\left|\sqrt{1-س^2} + 1\right| + جـ$