الوحدة الثانية

التفاضل

الفرع العلمي

المستوى الثالث

2017/2016

الأستاذ : عماد مسك

0795153669

التحـــدّي

برعاية

اللهم نجحهم وحقق أمنياتهم

أنا توجيهي

* الوحدة الثانية : التفاضل

الدرس الأول : متوسط التغير :

التغير = القيمة الجديدة - القيمة الحالية

ويرمز للتغير بالرمز (Δ)

التغير

التغير في س
Δس = هـ

التغير في الاقتران
Δص = Δق(س)

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(س}_2\text{)} - \text{ق(س}_1\text{)}}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق(س}_1 + \text{هـ)} - \text{ق(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$$

Δس = س٢ - س١

مثال: أوجد التغير في س إذا تغيرت قيمة س من ٢,٥ إلى ٣ ؟

الحل: Δس = س٢ - س١ = ٣ - ٢,٥ = ٠,٥

مثال: اذا كانت س١ = ٣ ، هـ = ٧,٨ أوجد قيمة س٢ ؟

الحل: هـ = س٢ - س١

س٢ = هـ + س١

س٢ = ٧,٨ + ٣ ⟸ س٢ = ١٠,٨

* ولإيجاد التغير في الاقتران ق(س) أو ص

Δص = ص٢ - ص١

Δق(س) = ق(س٢) - ق(س١)

Δق(س) = ق(س١ + هـ) - ق(س١)

مثال: اذا كانت ق(س) = س² - ٤س أوجد التغير في الاقتران عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ؟

الحل: Δق(س) = ق(س٢) - ق(س١)

= ق(٤) - ق(٢)

= ٠ - (-٤) = ٤

مثال: ق(س) = |س² - ٢س| أوجد التغير في الاقتران عندما س١ = ٣ ، هـ = ٥ ؟!

الحل: Δق(س) = ق(س١ + هـ) - ق(س١)

= ق(٨) - ق(٣)

= ٤٨ - ٣

= ٤٥

مثال: اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) = أ س^{٢} عندما تتغير س من ٢ إلى ٧ هو ١٣٥ نجد أ ؟

الحل: Δ ق(س) = ق(٧) − ق(٢)

= ٤٩أ − ٤أ = ٤٥أ

⇐ ١٣٥ = ٤٥أ ⇐ أ = $\frac{١٣٥}{٤٥}$ = ٣

مثال: اذا ازداد طول ضلع مكعب من ٤سم إلى ٥سم نجد مقدار الزيادة في حجم المكعب ؟

الحل: ح = س^{٣} ← طول الضلع

ح$_{١}$ = (٤)^{٣} = ٦٤ ، ح$_{٢}$ = (٥)^{٣} = ١٢٥

Δح = ١٢٥ − ٦٤ = ٦١

سؤال: اذا تغير طول ضلع مربع من ٤ سم الى ٤,٢ سم نجد مقدار التغير في مساحته ؟

مثال: اذا كان ق(س) = ٢س^{٣} − ٤س + ٣ نجد متوسط التغير في ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣ ؟

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$ = $\frac{٤٥ - ١}{٢}$ = ٢٢

مثال: اذا كان ق(س) = [٢س − ٣] نجد متوسط التغير في الفترة [$-\frac{١}{٤}$ ، ٣$\frac{١}{٤}$]

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{ق(٣\frac{١}{٤}) - ق(-\frac{١}{٤})}{٣\frac{١}{٤} - -\frac{١}{٤}}$

= $\frac{[٢(٣\frac{١}{٤}) - ٣] - [٢(-\frac{١}{٤}) - ٣]}{\frac{١٣}{٤} + \frac{١}{٤}}$

= $\frac{٣ - (-٤)}{\frac{١٤}{٤}}$ = $\cancel{٧}^{١} \times \frac{٤}{\cancel{١٤}_{٢}}$

= ٢

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ - |\text{س}| ، & \text{س} < ١ \\ |\text{س} - ٣| ، & \text{س} \geq ١ \end{cases}$ أوجد متوسط التغير في الفترة $[١ ، ٥]$

الحل: $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(١)}{٥ - ١} = \frac{-٢ - ٢}{٤} = \frac{-٤}{٤} = -١$

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢$ ، وكان متوسط التغير يساوي ٥ وكانت $\text{هـ} = ١$ أوجد قيمة $\text{س}_١$ ؟

الحل: $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{هـ}} \Leftarrow ٥ = \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + ١) - \text{ق}(\text{س}_١)}{١}$

$\Leftarrow ٥ = \text{ق}(\text{س}_١ + ١) - \text{ق}(\text{س}_١) \Leftarrow ٥ = (\text{س}_١ + ١)^٢ - \text{س}_١^٢$

$\Leftarrow ٥ = \cancel{\text{س}_١^٢} + ٢\text{س}_١ + ١ - \cancel{\text{س}_١^٢}$

$\Leftarrow ٥ = ٢\text{س}_١ + ١ \Leftarrow ٢\text{س}_١ = ٤$

$\Leftarrow \boxed{\text{س}_١ = ٢}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [٢\text{س} + ١] ، & ١ \leq \text{س} < ٤ \\ |\text{س}^٢ + ١| ، & ٤ \leq \text{س} < ٦ \end{cases}$ أوجد متوسط التغير في ق(س) في الفترة $[١ ، ٥]$ ؟

الحل: متوسط التغير $= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(١)}{٥ - ١} = \frac{٢٦ - ٣}{٤} = \frac{٢٣}{٤}$

مثال: يتحرك جسيم من النقطة م إلى النقطة (٢ ، ٥) بحيث $\Delta \text{س} = ٦$ ، $\Delta \text{ص} = ٧$
أوجد احداثيات النقطة م ؟

الحل: النقطة $\text{م}(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$

$\Delta \text{س} = \text{س}_٢ - \text{س}_١ \Leftarrow ٦ = ٢ - \text{س}_١ \Leftarrow \boxed{\text{س}_١ = -٤}$

$\Delta \text{ص} = \text{ص}_٢ - \text{ص}_١ \Leftarrow ٧ = ٥ - \text{ص}_١ \Leftarrow \boxed{\text{ص}_١ = -٢}$

$\therefore$ احداثيات النقطة م هي $\text{م}(-٤ ، -٢)$

سؤال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٧$ وكان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من $\text{س}_١$ إلى $\text{س}_١ + ٣$ يساوي ١٢ ، جد قيمة $\text{س}_١$ ——— $\boxed{\text{ج} = \frac{٩}{٢}}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ جد متوسط التغير لـ $\text{ق}(\text{س})$ عندما تتغير س من ٢ إلى $٢ + \text{هـ}$

الحل: متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}} = \dfrac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$

$$= \frac{(٢+\text{هـ})^{٢} + ٣(٢+\text{هـ}) - ١٠}{\text{هـ}} = \frac{\cancel{٤} + ٤\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} + \cancel{٦} + ٣\text{هـ} - \cancel{١٠}}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{هـ}^{٢} + ٧\text{هـ}}{\text{هـ}} = \frac{\cancel{\text{هـ}}(\text{هـ} + ٧)}{\cancel{\text{هـ}}} = \text{هـ} + ٧$$

مثال: اذا كان متوسط تغير $\text{ق}(\text{س})$ في $[-٢، ٢]$ يساوي ٦ جد متوسط تغير $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{٢} \times \text{ق}(\text{س})$ في $[-٢، ٢]$

الحل: متوسط التغير $= \dfrac{\text{ل}(٢) - \text{ل}(-٢)}{٢ - (-٢)} = \dfrac{٤\text{ق}(٢) - ٤\text{ق}(-٢)}{٤}$

$$= \frac{٤\left(\text{ق}(٢) - \text{ق}(-٢)\right)}{٤}$$

$= ٤ \times$ متوسط التغير ق $= ٤ \times ٦ = ٢٤$

مثال: اذا كان متوسط التغير في $\text{ق}(\text{س})$ في الفترة $[-٢، ١]$ هو -٣ وكانت $\text{هـ}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) - \text{س}^{٢}$، أوجد متوسط التغير في الاقتران $\text{هـ}(\text{س})$ في $[-٢، ١]$ ؟

الحل: متوسط التغير لـ $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\Delta \text{هـ}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{هـ}(١) - \text{هـ}(-٢)}{١ - (-٢)} = \dfrac{\left(\text{ق}(١) - ١\right) - \left(\text{ق}(-٢) - ٤\right)}{٣}$

$$= \frac{\text{ق}(١) - ١ - \text{ق}(-٢) + ٤}{٣} = \frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(-٢) + ٣}{٣}$$

لكن: $\dfrac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ق}(١) - \text{ق}(-٢)}{١ - (-٢)} = -٣$

$$\Leftarrow \frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(-٢)}{٣} = -٣$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{هـ}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(-٢)}{٣} + \frac{٣}{٣} = -٣ + ١$$

$$= -٢$$

مثال: اذا كان متوسط تغير م(س) هو ٣ في [١،٢] ومتوسط تغير م(س) هو ٨ في [٢،٥] ، أوجد متوسط التغير لـ م(س) في [١،٥] ؟

الحل: في الفترة [١،٣] :

$$\frac{\Delta \text{م}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{م}(٣) - \text{م}(١)}{١} = ٣ \Leftarrow \text{م}(٢) - \text{م}(١) = ٣ \text{ —— ①}$$

في الفترة [٢،٥] :-

$$\frac{\Delta \text{م}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{م}(٥) - \text{م}(٢)}{٣} = ٨ \Leftarrow \text{م}(٥) - \text{م}(٢) = ٢٤ \text{ —— ②}$$

نجمع المعادلتين ① و ② $\Leftarrow$

$$\begin{aligned} \cancel{\text{م}(٢)} - \text{م}(١) &= ٣ \\ \text{م}(٥) - \cancel{\text{م}(٢)} &= ٢٤ \\ \hline \text{م}(٥) - \text{م}(١) &= ٢٧ \end{aligned}$$

∴ في الفترة [١،٥] :

$$\frac{\Delta \text{م}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{م}(٥) - \text{م}(١)}{٥ - ١} = \frac{٢٧}{٤}$$

مثال: أثبت أن متوسط التغير للاقتران م(س) = ظاس يساوي

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{قا}^٢\text{س}_١ \text{ ظاهـ}}{\text{هـ}(١ - \text{ظاس}_١ \text{ ظاهـ})}$$

حيث س تتغير من س₁ إلى س₁ + هـ ؟

متطابقة

الحل:

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ظا}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ظاس}_١}{\text{هـ}} = \frac{\frac{\text{ظاس}_١ + \text{ظاهـ}}{١ - \text{ظاس}_١ \text{ ظاهـ}} - \text{ظاس}_١}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\cancel{\text{ظاس}_١} + \text{ظاهـ} - \cancel{\text{ظاس}_١} + \text{ظا}^٢\text{س}_١ \text{ ظاهـ}}{\text{هـ}(١ - \text{ظاس}_١ \text{ ظاهـ})}$$

$$= \frac{\text{ظاهـ}(١ - \text{ظا}^٢\text{س})}{\text{هـ}(١ - \text{ظاس}_١ \text{ ظاهـ})} = \frac{\text{ظاهـ قا}^٢\text{س}}{\text{هـ}(١ - \text{ظاس ظاهـ})} \quad \#$$

سؤال: اذا كان م(س) = جا٣س ، جد متوسط التغير في الفترة $\left[\frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right]$.

$\boxed{\text{الإجابة صفر}}$

مثال: اذا كان $ق(س) = ٢س^٢ - ٤س + ١$ وكان متوسط التغير لـ ق في الفترة [أ، ٢أ] يساوي (٥) ، جد قيمة أ ؟

الحل: $\frac{Δص}{Δس} = \frac{ق(٢أ) - ق(أ)}{٢أ - أ} \Leftarrow ٥ = \frac{٢(٢أ)^٢ - ٤(٢أ) + ١ - (٢أ^٢ - ٤أ + ١)}{أ}$

$\Leftarrow ٥أ = ٨أ^٢ - ٨أ - ٢أ^٢ + ٤أ \Leftarrow ٦أ^٢ - ٤أ - ٥أ = ٠$

$\Leftarrow ٦أ^٢ - ٩أ = ٠$

$\Leftarrow أ(٦أ - ٩) = ٠$

$\boxed{أ = صفر}$ أو $\boxed{أ = \frac{٣}{٢}}$

مرفوضة لأن الفترة تصبح غير منطقية

سؤال: اذا كان $ق(س) = س^٢$ وكان متوسط التغير في الفترة [أ-٣ ، أ] يساوي ٧ فجد قيمة أ ؟ ______ الاجابة $\boxed{أ = ٥}$

سؤال: اذا كان متوسط تغير الاقتران ق في الفترة [٢، ٥] يساوي ١٠ ، فجد تغير $ك(س) = ٤ق(س) + ٩$ في الفترة [٢، ٥] ______ $\boxed{الاجابة ٤٠}$

---

* نستنتج أن متوسط التغير له معنى هندسي وفيزيائي وجبري

متوسط التغير
- جبريا = $\frac{Δق(س)}{Δس}$
- هندسيا = ميل القاطع
- فيزيائيا = السرعة المتوسطة

$\boxed{ميل القاطع = \frac{Δص}{Δس}}$

مثال: اذا كان منحنى ق(س) يمر بالنقطتين (٢، ٣) ، (-٥، ٠) ، جد ميل القاطع ؟

الحل: $م = \frac{Δص}{Δس} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - ٣}{-٥ - ٢} = \frac{٣}{٧}$

$\boxed{السرعة المتوسطة = \bar{ع} = \frac{Δف}{Δن}}$

مثال: اذا كانت المسافة التي يقطعها جسم بالأمتار بعد ن ثانية $ف(ن) = ن^٢ - ٢ن$ جد سرعة الجسم المتوسطة التي يقطعها في الفترة الزمنية [٢، ٣] ؟

الحل: $\bar{ع} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(٣) - ف(٢)}{١} = \frac{٣ - ٠}{١} = ٣ م/ث$

مثال: اذا كان متوسط تغير م(س) في [١، ٦] يساوي ١٢ وكان ل(س) = ٧س + ٢م(س)

نجد متوسط تغير ل(س) في [١، ٦]

الحل: $\text{متوسط تغير ل(س)} = \frac{\text{ل}(٦) - \text{ل}(١)}{٦ - ١} = \frac{\left(٧(٦) + ٢\text{م}(٦)\right) - \left(٧(١) + ٢\text{م}(١)\right)}{٥}$

$$= \frac{٤٢ - ٧}{٥} + \frac{٢\text{م}(٦) - ٢\text{م}(١)}{٥}$$

$$= \frac{٣٥}{٥} + ٢\left(\frac{\text{م}(٦) - \text{م}(١)}{٥}\right) = ٧ + ٢(١٢) = ٣١$$

مثال: اذا كان متوسط تغير م(س) = $\frac{\text{أ}}{\text{س} + ٢}$ عندما تتغير س من صفر إلى ٣ يساوي -٢

نجد أ

الحل: $\text{متوسط التغير} = \frac{\text{م}(٣) - \text{م}(٠)}{٣ - ٠} \Leftarrow -٢ = \frac{\frac{\text{أ}}{٥} - \frac{\text{أ}}{٢}}{٣}$

$$\Leftarrow -٢ = \frac{٢\text{أ} - ٥\text{أ}}{٣٠} \Leftarrow -٦٠ = -٣\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٢٠}$$

مثال: اذا كان متوسط تغير م(س) في [٢، ٥] يساوي -٦ وكان $\frac{\text{م}(٢) + \text{م}(٥)}{٣} = ٤$

نجد متوسط تغير ل(س) = ٧س + م²(س) في [٢، ٥]

الحل: $\text{متوسط تغير ل(س)} = \frac{\text{ل}(٥) - \text{ل}(٢)}{٥ - ٢} = \frac{\left(٧(٥) + \text{م}^٢(٥)\right) - \left(٧(٢) - \text{م}^٢(٢)\right)}{٣}$

$$= \frac{٣٥ - ١٤}{٣} + \frac{\text{م}^٢(٥) - \text{م}^٢(٢)}{٣} \longleftarrow \text{نحلل فرق بين مربعين}$$

$$= ٧ + \frac{\left(\text{م}(٥) - \text{م}(٢)\right)\left(\text{م}(٥) + \text{م}(٢)\right)}{٣}$$

$$= ٧ + \frac{\text{م}(٥) - \text{م}(٢)}{٣} \times \frac{\text{م}(٥) + \text{م}(٢)}{٣}$$

$$= ٧ + \text{متوسط تغير م(س)} \times ٤$$

$$= ٧ + -٦ \times ٤$$

$$= ٧ + (-٢٤)$$

$$= -١٧$$

* المشتقة الأولى :

هي عبارة عن اقتران جديد ينتج من الاقتران الأصلي ق(س) عن طريق القانون :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} \quad \text{أو} \quad \text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

وتكون المشتقة موجودة إذا كانت النهاية موجودة .

* القانون السابق يسمى بالتعريف الأساسي للمشتقة الأولى

مثال: استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة ق(س) = س² + ٥س

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^2 + 5(\text{س}+\text{هـ}) - (\text{س}^2 + 5\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\cancel{\text{س}^2} + 2\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^2 + \cancel{5\text{س}} + 5\text{هـ} - \cancel{\text{س}^2} - \cancel{5\text{س}}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\cancel{\text{هـ}}(2\text{س} + \text{هـ} + 5)}{\cancel{\text{هـ}}} = 2\text{س} + 0 + 5 = 2\text{س} + 5$$

أو حل آخر :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ع}^2 + 5\text{ع}) - (\text{س}^2 + 5\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2 - \text{س}^2}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{5\text{ع} - 5\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع} + \text{س})}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{5\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} = \text{س} + \text{س} + 5$$

$$= 2\text{س} + 5$$

سؤال: (أ) استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد مشتقة ق(س) = ٢س

(ب) جد مشتقة ق(س) = ٤س² + ٣س باستخدام تعريف المشتقة الأولى

(جـ) جد مشتقة ق(س) = ٦س − ١ باستخدام تعريف المشتقة الأولى .

مثال: استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \frac{٥}{\text{س}}$ ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\sqrt{\text{س}}$

جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\,\text{جتا}^{٢}\text{س}$ د) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^{٢}\text{س}$

هـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{جا}^{٢}\text{س}$ و) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \sqrt{\text{س}}$

الحل: أ) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^{٣} + \frac{٥}{\text{س}+\text{هـ}} - \left(\text{س}^{٣} + \frac{٥}{\text{س}}\right)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}^{٣}} + ٣\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣} + \frac{٥}{\text{س}+\text{هـ}} - \cancel{\text{س}^{٣}} - \frac{٥}{\text{س}}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣}}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{٥}{\text{س}+\text{هـ}} - \frac{٥}{\text{س}}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{هـ}}(٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^{٢})}{\cancel{\text{هـ}}} + \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{٥\text{س} - ٥(\text{س}+\text{هـ})}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}}{\text{هـ}}$

$= ٣\text{س}^{٢} + \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{٥\text{س}} - \cancel{٥\text{س}} - ٥\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + \text{س}\text{هـ})}$

$= ٣\text{س}^{٢} + \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٥}{\text{س}^{٢} + \text{س}\text{هـ}} = ٣\text{س}^{٢} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}}$

ملاحظة:
$(\text{س}+\text{هـ})^{٣} = \text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣}$

ضرب بالمرافق

ب) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} - \text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} - \text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}} \times \frac{(\text{س}+\text{هـ})\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}}{(\text{س}+\text{هـ})\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}}$

فرق بين مكعبين

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^{٢}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{س}^{٢}(\text{س})}{\text{هـ}\left((\text{س}+\text{هـ})\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}\right)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{هـ}\left((\text{س}+\text{هـ})\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}\right)}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{هـ} - \text{س})\left((\text{س}+\text{هـ})^{٢} + \text{س}(\text{س}+\text{هـ}) + \text{س}^{٢}\right)}{\text{هـ}\left((\text{س}+\text{هـ})\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}\right)}$

تابع ←

$$= \text{٢ جا٢س} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}}\ \text{٢ جتا(ع+س)} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا(ع − س)}}{\text{ع − س}}$$

$$= \text{٢ جا٢س} \times \text{٢ جتا٢س} \times ١ = \text{٤ جا٢س جتا٢س}$$

نطرح ونضيف س جا٢ع

(هـ) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع) − ق(س)}}{\text{ع − س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع جا٢ع − س جا٢س}}{\text{ع − س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع جا٢ع − س جا٢ع + س جا٢ع − س جا٢س}}{\text{ع − س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع جا٢ع − س جا٢ع}}{\text{ع − س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س جا٢ع − س جا٢س}}{\text{ع − س}}$$

$$= \underset{\underset{\text{عوضنا}}{\text{ع}\to\text{س}}}{\text{نها}} \frac{\text{جا٢ع (ع − س)}}{\text{ع − س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}}\ \text{س} \left(\frac{\text{جا٢ع − جا٢س}}{\text{ع − س}} \right)$$

$$= \text{جا٢س} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}}\ \text{س} \times \frac{\text{٢ جتا}\frac{\text{٢ع + ٢س}}{٢}\ \text{جا}\frac{\text{٢ع − ٢س}}{٢}}{\text{ع − س}}$$

$$= \text{جا٢س} + \text{٢س} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}}\ \text{جتا(ع+س)} \times \overset{١}{\boxed{\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا(ع − س)}}{\text{ع − س}}}}$$

$$= \text{جا٢س} + \text{٢س جتا٢س}$$

(و) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع) − ق(س)}}{\text{ع − س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^2 + \sqrt{\text{ع}} - (\text{س}^2 + \sqrt{\text{س}})}{\text{ع − س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^2 - \text{س}^2}{\text{ع − س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع − س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع+س})\cancel{(\text{ع − س})}}{\cancel{\text{ع − س}}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع − س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \text{٢س} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{ع − س}}}{\cancel{\text{ع − س}}\,(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})} = \text{٢س} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

مثال: أثبت أن $\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{ق(ع)}}{\text{س}} - \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{ع}}}{\text{ع} - \text{س}} = \dfrac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{س}} + \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^2}$

الحل: $\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{ق(ع)}}{\text{س}} - \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{ع}}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع ق(ع)} - \text{س ق(س)}}{(\text{س ع})(\text{ع} - \text{س})}$　نطرح ونضيف س ق(ع)

$$\Leftarrow \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع ق(ع)} - \text{س ق(ع)} + \text{س ق(ع)} - \text{س ق(س)}}{(\text{س ع})(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع ق(ع)} - \text{س ق(ع)}}{(\text{س ع})(\text{ع} - \text{س})} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س ق(ع)} - \text{س ق(س)}}{(\text{س ع})(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(ع)}\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{(\text{س ع})\cancel{(\text{ع} - \text{س})}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}\left(\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}\right)}{(\text{س ع})(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^2} + \dfrac{\text{س ق}'\text{(س)}}{\text{س}^2} = \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^2} + \dfrac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{س}}$$

ملاحظة: اذا طلب حساب المشتقة عند العدد أ فإننا نعوض أ بدلاً من س في القانون $\Leftarrow \text{ق}'\text{(أ)} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(أ+هـ)} - \text{ق(أ)}}{\text{هـ}}$

أو $\text{ق}'\text{(أ)} = \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(أ)}}{\text{ع} - \text{أ}}$　أو $\text{ق}'\text{(أ)} = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{س} - \text{أ}}$ ← "الأكثر استخداماً"

مثال: استخدم تعريف المشتقة لايجاد مشتقة كل من الاقترانات التالية عند النقطة المبينة:

① $\text{ق(س)} = \text{س}^3 + \dfrac{٨}{\text{س}}$ عند س = ٢

الحل: $\text{ق}'\text{(س)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)} - \text{ق(٢)}}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\text{س}^3 + \dfrac{٨}{\text{س}}\right) - (٨ + ٤)}{\text{س} - ٢}$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^3 - ٨}{\text{س} - ٢} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{٨}{\text{س}} - ٤}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^2 + ٢\text{س} + ٤)}{\cancel{\text{س} - ٢}} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٨ - ٤\text{س}}{\text{س}(\text{س} - ٢)}$$

$$= (٤ + ٤ + ٤) + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٤\overset{-١}{\cancel{(٢ - \text{س})}}}{\text{س}\cancel{(\text{س} - ٢)}} = ١٢ + \left(\dfrac{-٤}{٢}\right)$$

$$= ١٢ - ٢$$

$$= ١٠$$

مثال: أثبت أن $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}} = 2\,\text{ق}'(\text{س})$

الحل: نضيف ونطرح ق(س) $\Leftarrow \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} + \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

نفرض $\text{س} - \text{هـ} = \text{ص} \Leftarrow \text{س} = \text{ص} + \text{هـ}$

عندما $\text{هـ} \to 0$ ، فإن $\text{س} = \text{ص}$

$$= \text{ق}'(\text{س}) + \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{ص}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{ص})}{\text{هـ}} = \text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}'(\text{ص})$$

$$= \text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}'(\text{س}) = 2\,\text{ق}'(\text{س})$$

مثال: أثبت أن $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + \text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$ أضفنا وطرحنا س ق(س)

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{س})\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{س}\,(\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{ع}))}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{ق}(\text{س}) + \text{س}\,(-\text{ق}'(\text{س})) = \text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$$

مثال: أثبت أن $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{5\text{ع}\,\text{ق}(\text{ع}) - 5\text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = 5\,\text{ق}(\text{س}) + 5\text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$

الحل: نضيف ونطرح ٥س ق(ع) $\Leftarrow \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{5\text{ع}\,\text{ق}(\text{ع}) - 5\text{س}\,\text{ق}(\text{ع}) + 5\text{س}\,\text{ق}(\text{ع}) - 5\text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{5\text{ع}\,\text{ق}(\text{ع}) - 5\text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{5\text{س}\,\text{ق}(\text{ع}) - 5\text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{5\,\text{ق}(\text{ع})\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{5\text{س}\,(\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س}))}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= 5\,\text{ق}(\text{س}) + 5\text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$$

② $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٥\text{س}}{٣\text{س}+١}$ عند س = ٢

الحل: $\text{ق}'(٢) = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س}-٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{٥\text{س}}{٣\text{س}+١} - \dfrac{١٠}{٧}}{\text{س}-٢}$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣٥\text{س} - ٣٠\text{س} - ١٠}{٧(٣\text{س}+١)(\text{س}-٢)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٥\text{س} - ١٠}{٧(٣\text{س}+١)(\text{س}-٢)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٥\cancel{(\text{س}-٢)}}{٧(٣\text{س}+١)\cancel{(\text{س}-٢)}} = \dfrac{٥}{٤٩}$$

---

③ $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{٥\text{س}+٣}$ عند س = ١

الحل: $\text{ق}'(١) = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{\text{س}-١}$

ضربنا بالمرافق التكعيبي

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٥\text{س}+٣} - ٢}{\text{س}-١} \times \dfrac{\left(\sqrt[٣]{٥\text{س}+٣}\right)^{٢} + ٢\sqrt[٣]{٥\text{س}+٣} + ٤}{\left(\sqrt[٣]{٥\text{س}+٣}\right)^{٢} + ٢\sqrt[٣]{٥\text{س}+٣} + ٤}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٥\text{س}+٣-٨}{(\text{س}-١)(٤+٤+٤)} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٥\text{س}-٥}{(\text{س}-١)(١٢)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{٥(\text{س}-١)}}{(١٢)\cancel{(\text{س}-١)}} = \dfrac{٥}{١٢}$$

---

③ $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}+٤ ، & \text{س} \le ٢ \\ ٤\text{س} ، & \text{س} > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

الحل: يجب أخذ المشتقة من اليمين واليسار لأنه (٢) نقطة تحول .

$$\text{ق}'_{-}(٢) = \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س}-٢} = \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}+٤-٨}{\text{س}-٢} = \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}} \dfrac{\overset{(\text{س}+٢)}{\cancel{\text{س}^{٢}-٤}}}{\cancel{\text{س}-٢}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}} (\text{س}+٢) = ٤$$

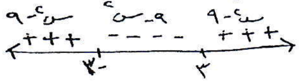
$$\text{ق}'_{+}(٢) = \underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س}-٢} = \underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نها}} \dfrac{٤\text{س}-٨}{\text{س}-٢} = \underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نها}} \dfrac{٤\cancel{(\text{س}-٢)}}{\cancel{\text{س}-٢}} = ٤ .$$

وبما أنه $\text{ق}'_{-}(٢) = \text{ق}'_{+}(٢)$

∴ ق'(٢) موجودة حيث ق'(٢) = ٤

④ $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^{٢} - ٩|$ عند $\text{س} = ٣$

الحل: نفحص التعريف حول العدد (٣) ⟸ $\text{س}^{٢} - ٩ = ٠$ ⟸ $\text{س} = \pm ٣$



$$\text{ق}'_{-}(٣) = \lim_{\text{س}\to ٣^{-}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣)}{\text{س} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣^{-}} \frac{٩ - \text{س}^{٢} - ٠}{\text{س} - ٣} = \lim_{\text{س}\to ٣^{-}} \frac{\overset{-١}{(\cancel{٣ - \text{س}})}(٣ + \text{س})}{\cancel{\text{س} - ٣}} = -(٣ + ٣) = -٦$$

$$\text{ق}'_{+}(٣) = \lim_{\text{س}\to ٣^{+}} \frac{\text{س}^{٢} - ٩ - ٠}{\text{س} - ٣} = \lim_{\text{س}\to ٣^{+}} \frac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٣}} = (٣ + ٣) = ٦$$

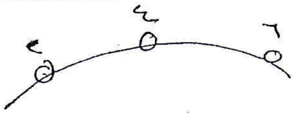
وبما أن $\text{ق}'_{-}(٣) \neq \text{ق}'_{+}(٣)$ فإن $\text{ق}'(٣)$ غير موجودة .

---

⑤ $\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{\text{س}}{٢} + ٥\right]$ عند $\text{س} = ٤$

الحل: نفحص تعريف حول العدد (٤)

طول الدرجة $= \frac{١}{|\frac{١}{٢}|} = ٢$



$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٦ \text{ ، } & ٢ \le \text{س} < ٤ \\ ٧ \text{ ، } & ٤ \le \text{س} < ٦ \end{cases}$$

$$\text{ق}'_{-}(٤) = \lim_{\text{س}\to ٤^{-}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٤)}{\text{س} - ٤} = \lim_{\text{س}\to ٤^{-}} \frac{٦ - ٧}{\text{س} - ٤} = \lim_{\text{س}\to ٤^{-}} \frac{-١}{\text{س} - ٤} \text{ غير موجودة}$$

∴ $\text{ق}'(٤)$ غير موجودة

---

⑥ $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}٢\text{س}$ ، عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

الحل: $\text{ق}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}\left(\frac{\pi}{٤}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}٢\text{س} - \text{جا}٢\frac{\pi}{٤}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

$$= \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\,\text{جتا}\frac{٢\text{س} + ٢\frac{\pi}{٤}}{٢}\,\text{جا}\frac{٢\text{س} - ٢\frac{\pi}{٤}}{٢}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} ٢\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right) \times \frac{\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

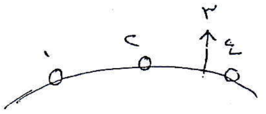
$$= ٢\,\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٤}\right) \times ١$$

$$= ٢\,\text{جتا}\frac{\pi}{٢} \times ١$$

$$= ٢(\text{صفر}) \times ١$$

$$= \text{صفر}$$

⑦ $ق(س) = \left[\frac{س}{٢} + ٥\right]$ ، عند $س = ٣$



الحل: نعيد التعريف حول العدد (٣) $ل = \frac{١}{|\frac{١}{٢}|} = ٢$

$$ق(س) = \left\{ ٦ \text{ ، } ٢ \leq س < ٤ \right.$$

$$ق'(٣) = \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{٦ - ٦}{س - ٣} = \text{صفر}$$

---

⑧ $ق(س) = \frac{١}{\sqrt{٤س + ١}}$ عند $س = ٢$

الحل: $ق'(٢) = \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{\sqrt{٤س+١}} - \frac{١}{٣}}{س - ٢}$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٣ - \sqrt{٤س+١}}{٣\sqrt{٤س+١}\,(س - ٢)} \times \frac{٣ + \sqrt{٤س+١}}{٣ + \sqrt{٤س+١}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٩ - (٤س + ١)}{\sqrt{٤س+١}\,(س-٢)\,(٣ + \sqrt{٤س+١})} = \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{٤\overset{-١}{\cancel{(٢ - س)}}}{٣\sqrt{٩}\,\cancel{(س-٢)}\,(٣+٣)}$$

$$= \frac{-٤}{٩(٦)} = \frac{-٤}{٥٤} = \frac{-٢}{٢٧}$$

---

⑨ $ق(س) = س^٢[س]$ عند $س = ٠$

الحل: نعيد التعريف حول (٠) $\Leftarrow ل = ١$

$$[س] = \begin{cases} -١ \text{ ، } -١ \leq س < ٠ \\ ٠ \text{ ، } ٠ \leq س < ١ \end{cases} \Leftarrow ق(س) = \begin{cases} -س^٢ \text{ ، } -١ \leq س < ٠ \\ ٠ \text{ ، } ٠ \leq س < ١ \end{cases}$$

$$ق'_{-}(٠) = \text{نهـا}_{س \to ٠^-} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠} = \text{نهـا}_{س \to ٠^-} \frac{-س^٢ - ٠}{س} = \text{نهـا}_{س \to ٠^-} -س = \text{صفر}$$

$$ق'_{+}(٠) = \text{نهـا}_{س \to ٠^+} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠} = \text{نهـا}_{س \to ٠^+} \frac{\text{صفر} - \text{صفر}}{س} = \text{صفر}$$

$$\therefore ق'(٠) = \text{صفر}$$

مثال: اذا كان ل(س) متصلاً عند س = أ وكان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}-\text{أ})\,\text{ل}(\text{س})$ أثبت أن:

$\text{ق}'(\text{أ}) = \text{ل}(\text{أ})$

الحل: $\text{ق}'(\text{أ}) = \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س}-\text{أ}} = \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{(\text{س}-\text{أ})\,\text{ل}(\text{س}) - \overset{\text{صفر}}{\cancel{(\text{أ}-\text{أ})\,\text{ل}(\text{أ})}}}{\text{س}-\text{أ}}$

$= \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\cancel{(\text{س}-\text{أ})}\,\text{ل}(\text{س})}{\cancel{\text{س}-\text{أ}}} = \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ل}(\text{س}) = \text{ل}(\text{أ})$

مثال: اذا كانت $\text{ق}(٣) = ٤$ ، $\text{ق}'(٣) = ٥$ وكان $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س})$ فجد $\text{ل}'(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة.

نضيف ونطرح ٩ق(س)

الحل: $\text{ل}'(٣) = \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{ل}(\text{س}) - \text{ل}(٣)}{\text{س}-٣} = \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}) - ٩\,\text{ق}(٣)}{\text{س}-٣}$

$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}) - ٩\,\text{ق}(\text{س}) + ٩\,\text{ق}(\text{س}) - ٩\,\text{ق}(٣)}{\text{س}-٣}$

$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}) - ٩\,\text{ق}(\text{س})}{\text{س}-٣} + \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٩\,\text{ق}(\text{س}) - ٩\,\text{ق}(٣)}{\text{س}-٣}$

$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س})\,\overset{\text{س}+٣}{\cancel{(\text{س}^{٢}-٩)}}}{\text{س}-٣} + \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٩\,(\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣))}{\text{س}-٣}$

$= \lim_{\text{س}\to ٣} \text{ق}(\text{س})(\text{س}+٣) + ٩\,\text{ق}'(٣) = \text{ق}(٣)(٣+٣) + ٩\,\text{ق}'(٣)$

$= ٤ \times ٦ + ٩(٥)$

$= ٢٤ + ٤٥ = ٦٩$

مثال: اذا كان $\text{ق}'(٣) = ٨$ فجد ① $\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣+\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}}$ ② $\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣+٥\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{٤\text{هـ}}$

③ $\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٣+٢\text{هـ})}{٥\text{هـ}}$ ④ $\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٧\text{هـ}}{\text{ق}(٣+\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}$

⑤ $\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣+\text{هـ}) - \text{ق}(٣-\text{هـ})}{\text{هـ}}$ ⑥ $\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣+٥\text{هـ}) - \text{ق}(٣-٤\text{هـ})}{٢\text{هـ}}$

الحل: ① $\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣+\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}} = \text{ق}'(٣) = ٨$

② $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(3+5\text{هـ}) - \text{ق}(3)}{4\text{هـ}}$ نفرض ٥هـ = و ⟸ هـ = $\frac{\text{و}}{5}$

هـ ← ٠، فإن و ← ٠

$= \lim_{\text{و}\to 0} \frac{\text{ق}(3+\text{و}) - \text{ق}(3)}{\frac{4\text{و}}{5}} = \frac{5}{4} \lim_{\text{و}\to 0} \frac{\text{ق}(3+\text{و}) - \text{ق}(3)}{\text{و}}$

$= \frac{5}{4} \times \text{ق}'(3)$

$= \frac{5}{4} \times 8 = 10$

نلاحظ أن: $\boxed{\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{أ}\,\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ب}\,\text{هـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\, \text{ق}'(\text{س})}$

---

③ $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(3) - \text{ق}(3+2\text{هـ})}{5\text{هـ}} = \frac{-2}{5}\, \text{ق}'(3) = \frac{-2}{5} \times 8 = \frac{-16}{5}$

---

④ $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{7\text{هـ}}{\text{ق}(3+\text{هـ}) - \text{ق}(3)}$ نقسم البسط والمقام على (هـ)

$\Leftarrow \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\frac{7\text{هـ}}{\text{هـ}}}{\frac{\text{ق}(3+\text{هـ}) - \text{ق}(3)}{\text{هـ}}} = \frac{7}{\text{ق}'(3)} = \frac{7}{8}$

---

⑤ $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(3+\text{هـ}) - \text{ق}(3-\text{هـ})}{\text{هـ}}$ نطرح ونضيف ق(٣)

$\Leftarrow \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(3+\text{هـ}) - \text{ق}(3) + \text{ق}(3) - \text{ق}(3-\text{هـ})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(3+\text{هـ}) - \text{ق}(3)}{\text{هـ}} + \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(3) - \text{ق}(3-\text{هـ})}{\text{هـ}}$

نفرض ص = ٣ − هـ ⟸ ٣ = ص + هـ ، عندما هـ ← ٠، فإن ص = ٣

$= \text{ق}'(3) + \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{ص}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{ص})}{\text{هـ}} = \text{ق}'(3) + \text{ق}'(\text{ص})$

$= \text{ق}'(3) + \text{ق}'(3) = 2\,\text{ق}'(3) = 2 \times 8 = 16$

---

⑥ $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(3+5\text{هـ}) - \text{ق}(3-4\text{هـ})}{2\text{هـ}}$ نفس طريقة الفرع (٥) ولكن نضرب بالثوابت

$= \frac{5}{2}\, \text{ق}'(3) + \frac{4}{2}\, \text{ق}'(3) = \frac{5}{2} \times 8 + 2 \times 8 = 36$

<u>مثال</u>: اذا كان $ق'(٢) = ٧$ فجد: (أ) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$

(ب) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س^٢ + س - ٦}$ (ج) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٨}{ق(٢) - ق(س)}$

<u>الحل</u>: (أ) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = ق'(٢) = ٧$

(ب) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س^٢ + س - ٦} = \text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{(س - ٢)(س + ٣)} = ق'(٢) \times \text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{١}{س + ٣}$

$= ق'(٢) \times \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٥}$

(ج) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٨}{ق(٢) - ق(س)} = \text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{ق(٢) - ق(س)}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{س - ٢}{ق(٢) - ق(س)} \times \text{نها}_{س \leftarrow ٢} س^٢ + ٢س + ٤$

$= \frac{-١}{ق'(٢)} \times (٤ + ٤ + ٤) = \frac{-١}{٧} \times ١٢ = \frac{-١٢}{٧}$

<u>مثال</u>: اذا كان مقدار التغير في $ق(س)$ يساوي $٥س^٢هـ + ٨س هـ^٢$ فجد $ق'(٢)$

<u>الحل</u>: $ق(س + هـ) - ق(س) = ٥س^٢هـ + ٨س هـ^٢$ نقسم على هـ ونأخذ النهاية عندما هـ ← ٠.

$\Leftarrow \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \left(\frac{٥س^٢هـ}{هـ} + \frac{٨س هـ^٢}{هـ} \right)$

$\Leftarrow ق'(س) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} ٥س^٢ + ٨س هـ = ٥س^٢ + ٠ = ٥س^٢$

$\therefore ق'(٢) = ٥ \times ٤ = ٢٠$

<u>مثال</u>: اذا كان مقدار التغير في الاقتران $ق(س)$ عندما تتغير س من ٢ إلى ع هو $ع^٣ - ٨$ فجد $ق'(٢)$.

<u>الحل</u>: $ق(ع) - ق(٢) = ع^٣ - ٨$

$ق'(٢) = \text{نها}_{ع \leftarrow ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢} = \text{نها}_{ع \leftarrow ٢} \frac{ع^٣ - ٨}{ع - ٢} = \text{نها}_{ع \leftarrow ٢} \frac{\cancel{(ع - ٢)}(ع^٢ + ٢ع + ٤)}{\cancel{ع - ٢}}$

$= ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}+\text{ص}) = \text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{ص}) + ٧\,\text{س}\,\text{ص}$ حيث $\lim\limits_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{ص})}{\text{ص}} = ٨$

جد $\text{ق}'(\text{س})$.

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\cancel{\text{ق}(\text{س})} + \text{ق}(\text{هـ}) + ٧\,\text{س}\,\text{هـ} - \cancel{\text{ق}(\text{س})}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{هـ})}{\text{هـ}} + \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٧\,\text{س}\,\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}} = ٨ + ٧\,\text{س}$

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}+\text{ص}) = \text{ق}(\text{س}) \times \text{ق}(\text{ص})$ وكان $\text{ق}(٠) = \text{ق}'(٠) = ١$ أثبت أنه:

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$

الحل: $\text{ق}'(٠) = \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٠+\text{هـ}) - \text{ق}(٠)}{\text{هـ}} = ١ \Leftarrow \boxed{\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{هـ}) - ١}{\text{هـ}} = ١}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}) \times \text{ق}(\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

عامل مشترك

$= \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س})\left(\text{ق}(\text{هـ}) - ١\right)}{\text{هـ}} = \text{ق}(\text{س}) \times ١ = \text{ق}(\text{س})$

أ. عماد مسك

0795153669

* الاتصال والاشتقاق

نظرية: إذا كان ق قابلاً للاشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$ فإنه يكون متصلاً عند $\text{س} = \text{أ}$

برهان النظرية: بما أن $\text{ق}'(\text{أ})$ موجودة ∴ ق معرفاً عند $\text{س} = \text{أ}$

$\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ}) = \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} \times \text{س} - \text{أ}$ نأخذ عندما $\text{س} \to \text{أ}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) - \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \text{ق}(\text{أ}) = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} \times \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \text{س} - \text{أ}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) - \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}'(\text{أ}) \times \text{صفر} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$ ∴ $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = \text{أ}$

مثال: إذا كان $\text{ق}'(٢) = ٤$ ، $\text{ق}(٢) = ٦$ جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} (٣\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{س}^٢)$

الحل: بما أن $\text{ق}'(٢)$ موجودة فيكون $\text{ق}(\text{س})$ متصلاً عند $\text{س} = ٢$

∴ $\text{ق}(٢) = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = ٦$

∴ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} (٣\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{س}^٢) = ٣(٦) - ٢(٤) = ١٨ - ٨ = ١٠$

---

* **ملاحظة:** عكس النظرية ليس دائماً صحيح فمن الممكن أن يكون الاقتران متصلاً عند نقطة ولكن المشتقة غير موجودة عند تلك النقطة.

فمثلاً: $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ٢|$ متصل عند $\text{س} = ٢$ ولكن $\text{ق}'(٢)$ غير موجودة

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ ، & \text{س} \leq ١ \\ ٤\text{س} - ٢ ، & \text{س} > ١ \end{cases}$ متصلاً عند $\text{س} = ١$ ولكن $\text{ق}'(١)$ غير موجودة

نظرية: إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ غير متصل عند $\text{س} = \text{أ}$ فإن $\text{ق}(\text{س})$ يكون غير قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}^٢ + ٥} ، & \text{س} \leq ٢ \\ \frac{٨}{\text{س}^٣} + ٧\text{س} ، & \text{س} > ٢ \end{cases}$ هل ق قابل للاشتقاق عند $\text{س} = ٢$ ؟

الحل:

$\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}} \sqrt{٤ + ٥} = ٣$

$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \frac{٨}{\text{س}^٣} + ٧\text{س} = \frac{٨}{٨} + ١٤ = ١٥$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

$\text{ق}(٢) = ٣$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س})$ غير متصل عند $\boxed{\text{س} = ٢}$ ∴ $\text{ق}(\text{س})$ غير قابل للاشتقاق عند $\boxed{\text{س} = ٢}$

سؤال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} & ، \ \text{س} < \text{١} \\ \sqrt{\text{س}} & ، \ \text{س} \geq \text{١} \end{cases}$

أ) أثبت أن $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = \text{١}$

ب) باستخدام تعريف المشتقة، ابحث قابلية الاشتقاق عند $\text{س} = \text{١}$

---

* **قواعد الاشتقاق**: هي طرق ايجاد المشتقة بصورة سريعة ومختصرة ..

① اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر}$ ⟸ مشتقة الثابت = صفر

البرهان: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \frac{\text{جـ} - \text{جـ}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{صفر}$

مثل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{٥} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{٢٤} - \sqrt[\text{٣}]{\text{١٣}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر}$

② اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{١}}$

مثل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٤}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{٤}\text{س}^{\text{٣}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-\text{٧}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -\text{٧}\text{س}^{-\text{٨}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٤}}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}\text{س}^{-\frac{\text{١}}{\text{٤}}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[\text{٣}]{\text{س}} \Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{-\frac{\text{٢}}{\text{٣}}}$

سؤال: أثبت أن اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{١}}$ حيث ن عدد طبيعي موجب

البرهان: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}\left(\text{ع}^{\text{ن}-\text{١}} + \text{ع}^{\text{ن}-\text{٢}} \times \text{س}^{\text{١}} + \text{ع}^{\text{ن}-\text{٣}} \times \text{س}^{\text{٢}} + \text{———} + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}}\right)}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$= \text{س}^{\text{ن}-\text{١}} + \text{س}^{\text{ن}-\text{٢}} \times \text{س}^{\text{١}} + \text{س}^{\text{ن}-\text{٣}} \times \text{س}^{\text{٢}} + \text{———} + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}}$$

$$= \text{س}^{\text{ن}-\text{١}} + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}} + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}} + \text{———} + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{١}}$$

③ اذا كان $ق(س) = أ \times ل(س)$ فإن $ق'(س) = أ \times ل'(س)$

البرهان: $ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{أ ل(ع) - أ ل(س)}{ع - س}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{أ \left(ل(ع) - ل(س)\right)}{ع - س} = أ \times ل'(س)$

مثل: $ق(س) = ٢ س^{٣} \Leftarrow ق'(س) = ٢ \times ٣ س^{٢} = ٦ س^{٢}$

$ق(س) = -٤ س \Leftarrow ق'(س) = -٤$

$ق(س) = ٢٠ س^{١٠} \Leftarrow ق'(س) = ٢٠ \times ١٠ س^{٩} = ٢٠٠ س^{٩}$

$ق(س) = \frac{٥}{س^{٤}} \Leftarrow ق(س) = ٥ س^{-٤} \Leftarrow ق'(س) = -٤ \times ٥ س^{-٥} = -٢٠ س^{-٥}$

---

④ اذا كان $ق(س) = ل(س) \pm هـ(س)$ فإن $ق'(س) = ل'(س) \pm هـ'(س)$

مثال: اذا كانت $ق(س) = ٢ س^{٥} - ٧ س^{٣} + ٩ س^{٢} - ١٥ س + ٦$ جد $ق'(س)$

الحل: $ق'(س) = ١٠ س^{٤} - ٢١ س^{٢} + ١٨ س - ١٥$

مثال: $ق(س) = ٢ س^{٣} (٣ س^{٢} - ٥ س)$ جد $ق'(١)$

الحل: $ق(س) = ٦ س^{٥} - ١٠ س^{٤} \Leftarrow ق'(س) = ٣٠ س^{٤} - ٤٠ س^{٣}$

$ق'(١) = ٣٠ (١)^{٤} - ٤٠ (١)^{٣} = ٣٠ - ٤٠ = -١٠$

مثال: $ق(س) = \frac{٤}{س^{٣}} - \frac{٥}{س^{٤}}$ جد $ق'(١)$

الحل: $ق(س) = ٤ س^{-٣} - ٥ س^{-٤}$

$ق'(س) = -١٢ س^{-٤} + ٢٠ س^{-٥} \Leftarrow ق'(س) = \frac{-١٢}{س^{٤}} + \frac{٢٠}{س^{٥}}$

$\Leftarrow ق'(١) = \frac{-١٢}{١} + \frac{٢٠}{١} = ٨$

سؤال: أثبت انه اذا كان $ق(س) = ل(س) + م(س)$ فإن $ق'(س) = ل'(س) + م'(س)$

الحل: $ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\left(ل(ع) + م(ع)\right) - \left(ل(س) + م(س)\right)}{ع - س}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س} + \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = ل'(س) + م'(س)$

(٢) اذا كان ق(س) = ل(س) × هـ(س) فإن

ق′(س) = ل(س) × هـ′(س) + م(س) × ل′(س) حيث م ، ل قابلين للاشتقاق

الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

مثال: ق(س) = (س^{٢} + ٢س)(٥س^{٣} − ٣س^{٢}) جد ق′(س)

الحل: ق′(س) = (س^{٢} + ٢س)(١٥س^{٢} − ٦س) + (٥س^{٣} − ٣س^{٢})(٢س + ٢)

= ١٥س^{٤} − ٦س^{٣} + ٣٠س^{٣} − ١٢س^{٢} + ١٠س^{٤} + ١٠س^{٣} − ٦س^{٣} − ٦س^{٢}

= ٢٥س^{٤} + ٢٨س^{٣} − ١٨س^{٢}

مثال: إذا كان ق(س) = (٢س + ١)(س^{٢}) جد ق′(٢)

الحل: ق′(س) = (٢س + ١)(٢س) + (س^{٢})(٢)

ق′(٢) = (٤ + ١)(٤) + (٤)(٢) = ٢٠ + ٨ = ٢٨

مثال: اذا كان ق(س) = س^{٢}(٢س − ١)(٢س^{٢} − ٥س + ٤) جد ق′(١)

الحل: ق(س) = (٢س^{٣} − س^{٢})(٢س^{٢} − ٥س + ٤)

ق′(س) = (٢س^{٣} − س^{٢})(٤س − ٥) + (٢س^{٢} − ٥س + ٤)(٦س^{٢} − ٢س)

ق′(١) = (٢ − ١)(٤ − ٥) + (٢ − ٥ + ٤)(٦ − ٢)

= −١ + ٤ = ٣

مثال: أثبت أن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (ل × م × هـ) = ل × م × هـ′ + ل × هـ × م′ + م × هـ × ل′

الحل: $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (ل × م × هـ) = $\underbrace{(\text{ل} \times \text{م})}_{①} \times \underbrace{\text{هـ}}_{②}$

= (ل × م) × هـ′ + هـ × (ل × م)′

= ل × م × هـ′ + هـ × (ل × م′ + م × ل′)

= ل × م × هـ′ + هـ × ل × م′ + هـ × م × ل′

المشتقة بالنسبة لـ س

٦) اذا كان $ق(س) = \frac{ل(س)}{م(س)}$ فإن :

$$ق'(س) = \frac{م(س) \times ل'(س) - ل(س) \times م'(س)}{\left(م(س)\right)^٢} \Leftarrow \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^٢}$$

مثال: $ق(س) = \frac{٢س^٢ - ٥}{٣س^٢ + ٤س}$ جد $ق'(س)$

الحل: $$ق'(س) = \frac{(٣س^٢+٤س)(٤س) - \left((٢س^٢-٥)(٦س+٤)\right)}{(٣س^٢+٤س)^٢}$$

$$= \frac{١٢س^٣ + ١٦س^٢ - (١٢س^٣ + ٨س^٢ - ٣٠س - ٢٠)}{(٣س^٢+٤س)^٢}$$

$$= \frac{-٨س^٢ + ٤٦س + ٢٠}{(٣س^٢+٤س)^٢}$$

مثال: $ق(س) = \frac{س^٣ + ٢}{س^٢ + ١}$ جد $ق'(٢)$

الحل: $$ق'(س) = \frac{(س^٢+١)(٣س^٢) - (س^٣+٢)(٢س)}{(س^٢+١)^٢}$$

$$ق'(٢) = \frac{(٤+١)(١٢) - (٨+٢)(٤)}{(٤+١)^٢} = \frac{٦٠ - ٤٠}{٢٥} = \frac{٢٠}{٢٥}$$

مثال: $هـ(س) = \frac{س^٢}{٥ - ٣س}$ جد $هـ'(٢)$

الحل: $$هـ'(س) = \frac{(٥-٣س)(٢س) - (س^٢)(-٣)}{(٥-٣س)^٢}$$

$$هـ'(٢) = \frac{(٥-٦)(٤) + ٤(٣)}{(٥-٦)^٢} = \frac{-٤+١٢}{١} = ٨$$

* نتائج لقواعد الإشتقاق :-

① اذا كانت $\text{ص} = \text{أ} \times \text{ق}(\text{س})$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ} \times \text{ق}'(\text{س})$

مشتقة ثابت × اقتران = الثابت × مشتقة الاقتران

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \text{٨}(\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٥س})$ جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \text{٨}(\text{٨س} + \text{٥})$

مثال: $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{٥}\pi}{\text{١٣}}(\text{س}^{\text{٤}} + \text{٥س})$ جد $\text{هـ}'(\text{س})$

الحل: $\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{\text{٥}\pi}{\text{١٣}}(\text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٥})$

---

② اذا كانت $\text{ص} = \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{أ}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{أ}}$

مشتقة $\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}} = \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت}}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٨س}^{\text{٥}} - \text{٣س}^{\text{٣}} + \text{٤س}^{\text{٢}}}{\text{٢٠}}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{٤٠س}^{\text{٤}} - \text{٩س}^{\text{٢}} + \text{٨س}}{\text{٢٠}}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٥}} - \frac{\text{٦س}^{\text{١٠}}}{\text{٧}} + \frac{\text{س}^{\text{٨}}}{\text{٤}}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{٦ص}}{\text{٥}} - \frac{\text{٦٠س}^{\text{٩}}}{\text{٧}} + \frac{\text{٨س}^{\text{٧}}}{\text{٤}}$

$= \frac{\text{٦}}{\text{٥}}\text{س} - \frac{\text{٦٠}}{\text{٧}}\text{س}^{\text{٩}} + \text{٢س}^{\text{٧}}$

---

③ اذا كانت $\text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{ق}(\text{س})}$ فإنه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{أ} \times \text{ق}'(\text{س})}{(\text{ق}(\text{س}))^{\text{٢}}}$

مشتقة $\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}} = \frac{-\text{الثابت} \times \text{مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^{\text{٢}}}$

مثل: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{٣}(\text{٢س})}{(\text{س}^{\text{٢}}+\text{١})^{\text{٢}}} = \frac{-\text{٦س}}{(\text{س}^{\text{٢}}+\text{١})^{\text{٢}}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٣}}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{٤}(\text{٣س}^{\text{٢}})}{(\text{س}^{\text{٣}})^{\text{٢}}} = \frac{-\text{١٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٦}}} = \frac{-\text{١٢}}{\text{س}^{\text{٤}}}$

مثال: $ق(س) = \frac{٩}{٣-٢س} - \frac{١}{س}$ جد $ق'(١)$

الحل: $ق'(س) = \frac{-٩ \times -٢}{(٣-٢س)^٢} - \frac{(-١) \times ١}{س^٢} = \frac{١٨}{(٣-٢س)^٢} + \frac{١}{س^٢}$

$ق'(١) = \frac{١٨}{(٣-٢)^٢} + \frac{١}{١} = ١٨+١ = ١٩$

مثال: $ق(س) = \frac{٥}{(أس-٣)}$ وكانت $ق'(٢) = -١٠$. نجد أ ؟

الحل: $ق'(س) = \frac{-٥ \times أ}{(أس-٣)^٢} \Leftarrow ق'(٢) = \frac{-٥أ}{(٢أ-٣)^٢} = -١٠$ بالضرب التبادلي

$\Leftarrow -٥أ = -١٠(٢أ-٣)^٢$ بالقسمة على -٥

$\Leftarrow أ = ٢(٤أ^٢ - ١٢أ + ٩) \Leftarrow أ = ٨أ^٢ - ٢٤أ + ١٨$

$\Leftarrow ٨أ^٢ - ٢٥أ + ١٨أ = ٠$

$\Leftarrow (أ-٢)(٨أ-٩) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{أ=٢}$ أو $\boxed{أ = \frac{٩}{٨}}$

مثال: أثبت أن اذا كان $ق(س) = س^ن$ حيث ن عدد صحيح سالب فإنه $ق'(س) = ن س^{ن-١}$

الحل: نفرض $ن = -م$

$\therefore ق(س) = س^{-م} = \frac{١}{س^م}$

$\Leftarrow ق'(س) = \frac{-١ \times م س^{م-١}}{(س^م)^٢} = \frac{-م س^{م-١}}{س^{٢م}} = -م س^{م-١-٢م}$

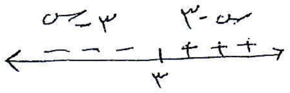
$= -م س^{-م-١}$

وبإعادة الفرض $= ن س^{ن-١}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٣

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢}} = \text{س}^{٢}|\text{س} - ٣|$

نعيد تعريف $|\text{س} - ٣|$ ⟸ $\text{س} - ٣ = ٠$ ⟸ $\text{س} = ٣$



$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}(\text{س} - ٣) \text{ ، } \text{س} \geq ٣ \\ \text{س}^{٢}(٣ - \text{س}) \text{ ، } \text{س} < ٣ \end{cases} = \begin{cases} \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} \text{ ، } \text{س} \geq ٣ \\ ٣\text{س}^{٢} - \text{س}^{٣} \text{ ، } \text{س} < ٣ \end{cases}$$

ق(س) متصل على ح لأنه حاصل ضرب متصلين ⟸ ∴ ق(س) متصل عند س = ٣

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} \text{ ، } \text{س} > ٣ \\ ٦\text{س} - ٣\text{س}^{٢} \text{ ، } \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\text{ق}'_{+}(٣) = ٣(٣)^{٢} - ٦(٣) = ٩$$

$$\text{ق}'_{-}(٣) = ٦(٣) - ٣(٣)^{٢} = -٩$$

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - [\text{س} + ٠٫٥]$ ، جد $\text{ق}'(٢)$

الحل: عندما س = ٢ يكون $[\text{س} + ٠٫٥] = ٢$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} \Leftarrow \text{ق}'(٢) = ٣(٢)^{٢} = ١٢$

مثال: بدأ شخص ينفخ بالون على شكل كرة ، جد قاعدة عامة لحساب معدل تغير حجم البالون بالنسبة إلى نصف قطره ، ثم جد معدل تغير الحجم عندما نق = ١٠ سم .

الحل: معنى معدل التغير يعني المشتقة الأولى

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}\text{نق}^{٣}\pi \Leftarrow \text{ح} = \frac{٤}{٣}\text{نق}^{٣}\pi$

$\Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{دنق}} = ٤\text{نق}^{٢}\pi$ وعندما نق = ١٠

معدل التغير $\frac{\text{دع}}{\text{دنق}} = ٤(١٠)^{٢}\pi = ٤٠٠\pi$

مثال: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ ، جـ ثابت وكان:

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢+\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}} = -٩$$ جد قيمة جـ

الحل: $$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢+\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}} = \text{ق}'(٢)$$

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٢\,\text{جـ}\,\text{س} + ٣$$

$$\text{ق}'(٢) = ٤\,\text{جـ} + ٣ \Leftarrow ٤\,\text{جـ} + ٣ = -٩$$

$$\Leftarrow ٤\,\text{جـ} = -١٢ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = -٣}$$

*** مشتقة الجذور:**

مشتقة الجذر التربيعي:-

$$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{هـ}(\text{س})} \quad \text{فإن} \quad \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$$

$$\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$$

وبشكل عام لجميع الجذور: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[\text{ن}]{\text{هـ}(\text{س})}$ فإن:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{\text{ن}\sqrt[\text{ن}]{(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١}}}$$

الاثبات: $$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{هـ}(\text{ع})} - \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{هـ}(\text{ع})} + \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}{\sqrt{\text{هـ}(\text{ع})} + \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{(\text{ع} - \text{س})\left(\sqrt{\text{هـ}(\text{ع})} + \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}\right)}$$

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}(\text{ع})} + \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$$

$$= \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$$

مثال: اذا كانت العلاقة $\frac{1}{ع} = \frac{1}{س} + \frac{1}{ص}$ تربط بين البعد البؤري (ع) لعدسة محدبة. س، ص تمثلان بعد جسم موضوع أمام العدسة وبعد الصورة المتكونة له عن مركز العدسة على الترتيب. فإذا كانت ع = ٢ جد:

أ) صيغة عامة لإيجاد معدل تغير ص بالنسبة إلى س

ب) معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = ١٢سم

الحل: أ) $\frac{1}{٢} = \frac{1}{س} + \frac{1}{ص} \Leftarrow \frac{1}{ص} = \frac{1}{٢} - \frac{1}{س}$ نوحد المقامات

$$\Leftarrow \frac{1}{ص} = \frac{س-٢}{٢س} \Leftarrow ص = \frac{٢س}{س-٢}$$

معدل التغير هو $\frac{دص}{دس}$:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{(س-٢)(٢) - (٢س)(١)}{(س-٢)^٢} = \frac{-٤}{(س-٢)^٢}$$

ب) $$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١٢} = \frac{-٤}{(١٢-٢)^٢} = \frac{-٤}{١٠٠} = \frac{-١}{٢٥}$$

مثال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س \leq ١ \\ أس + ب & ، س > ١ \end{cases}$ قابلاً للاشتقاق عند س = ١ جد كلاً من أ ، ب

الحل: بما أنه قابل للاشتقاق فإنه ① متصل ② $ق'_{-}(١) = ق'_{+}(١)$

بما أنه متصل $\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س) \Leftarrow \lim_{س \to ١^+} أس + ب = \lim_{س \to ١} ٣س^٢$

$\Leftarrow أ + ب = ٣$ —— ①

وبما أنه قابل للاشتقاق $ق'_{+}(١) = ق'_{-}(١)$

$أ = ٦س$ وعند $\boxed{س = ١}$

$\boxed{أ = ٦}$

وبالتعويض في ① فإن $٦ + ب = ٣ \Leftarrow \boxed{ب = -٣}$

* المشتقات العليا :

إذا كان $ص = ق(س)$ فإننا نرمز للمشتقة الأولى $ص'$ أو $\frac{دص}{دس}$ أو $ق'(س)$ والمشتقة الثانية $ص''$ أو $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ أو $ق''(س)$ ... وهكذا

مثال : $ق(س) = ٤س^{٥} + ٢س^{٣}$

⇐ $ق'(س) = ٢٠س^{٤} + ٦س^{٢}$

$ق''(س) = ٨٠س^{٣} + ١٢س$

$ق'''(س) = ٢٤٠س^{٢} + ١٢$

$ق^{(٤)}(س) = ٤٨٠س$

مثال : إذا كان $ق(س) = \frac{٣}{س^{٢}}$ جد $ق'''(١)$ $ق(س) = ٣س^{-٢}$

الحل : $ق'(س) = -٦س^{-٣}$

$ق''(س) = ١٨س^{-٤}$

$ق'''(س) = -٧٢س^{-٥}$ ⇐ $ق'''(١) = -٧٢$

سؤال : $ق(س) = ٢س^{٤} + \frac{١٦}{س}$ جد $ق'''(٢)$

مثال : اذا كان $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{ن}$ وكانت $ق'''(س) = ٤٠س^{ن-٣}$ جد ن

الحل : $ق'(س) = \frac{١}{٣} × ن × س^{ن-١}$ ، $ق''(س) = \frac{١}{٣} × ن × (ن-١) × س^{ن-٢}$

$ق'''(س) = \frac{١}{٣} × ن × (ن-١) × (ن-٢) × س^{ن-٣} = ٤٠س^{ن-٣}$

$\therefore \frac{١}{٣} × ن × (ن-١) × (ن-٢) = ٤٠$ ⇐ $ن(ن-١)(ن-٢) = ١٢٠$

⇐ نبحث عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها ١٢٠

⇐ $٦ × ٥ × ٤$

$\therefore \boxed{ن = ٦}$

مثال: - اذا كان $ق(س) = ٢س^{ن}$ وكانت $ق^{(٤)}(س) = أس^{٤}$ ، جد قيمة أ .

الحل: $ق'(س) = ٢ن س^{ن-١}$ ، $ق''(س) = ٢ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$$ق'''(س) = ٢ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$$

$$ق^{(٤)}(س) = ٢ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)س^{ن-٤} = أس^{٤}$$

$$\therefore ن-٤ = ٤ \Rightarrow \boxed{ن = ٨}$$

$$\therefore أ = ٢ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) = ٢\times٨\times٧\times٦\times٥ = ٣٣٦٠$$

مثال: اذا كان $ص = أس^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$ أثبت أن $س^{٢} \times \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ن(ن-١)ص$

الحل: $ص = أس^{ن} + ب س^{-ن+١}$

$$\frac{دص}{دس} = ن أ س^{ن-١} + ب(-ن+١)س^{-ن}$$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ن(ن-١) أ س^{ن-٢} + ب(-ن+١)(-ن)س^{-ن-١}$$

$$= ن(ن-١) أ س^{ن-٢} + ب(ن-١)(ن)س^{-ن-١}$$ نضرب في $س^{٢}$ للطرفين

$$س^{٢} \times \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \left(ن(ن-١) أ س^{ن-٢} + ب(ن-١)(ن)س^{-ن-١}\right) \times س^{٢}$$

$$= ن(ن-١) أ س^{ن} + ب(ن)(ن-١)س^{-ن+١}$$

$$= \underbrace{ن(ن-١)}_{\text{عامل مشترك}}\underbrace{\left(أ س^{ن} + ب س^{-ن+١}\right)}_{ص}$$

$$\therefore س^{٢} \times \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ن(ن-١)ص$$

مثال: اذا كانت $ص = س^{٣} + ٨س$ جد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما $س = ٢$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + ٨ \Rightarrow \left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٢} = ٣(٢)^{٢} + ٨ = ١٢ + ٨$

$= ٢٠$

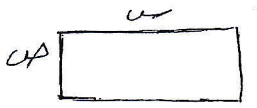
مثال: احسب معدل التغير في حجم المكعب بالنسبة لطول ضلعه عندما يكون طول الضلع س = ١٠ سم.

الحل: $ح = س^{٣} \Leftarrow \frac{دح}{دس} = ٣س^{٢}$ وعندما س = ١٠ سم

$$\frac{دح}{دس}\Big|_{س=١٠} = ٣(١٠)^{٢} = ٣٠٠$$

مثال: مستطيل طوله مثلي عرضه، احسب معدل تغير مساحته بالنسبة لطوله عندما يكون طوله يساوي ١٠ سم

الحل: $م = س \times ص$



لكن: $\boxed{س = ٢ص}$ ← طوله مثلي عرضه

$\Leftarrow ص = \frac{س}{٢}$

$م = س \times \frac{س}{٢} = \frac{س^{٢}}{٢} \Leftarrow \frac{دم}{دس} = \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}} = س$

$\Leftarrow \frac{دم}{دس} = ١٠$

مثال: مخروط دائري قائم يتناقص بحيث يبقى ارتفاعه مساوياً لقطر قاعدته، جد معدل التغير في حجمه بالنسبة لارتفاعه عندما يكون ارتفاعه = ٣٠ سم.

الحل: حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi نق^{٢} ع$ لكن: $ع = ٢نق \Longleftarrow \boxed{نق = \frac{ع}{٢}}$

$\Leftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi \left(\frac{ع}{٢}\right)^{٢} ع = \frac{١}{٣}\pi \frac{ع^{٢}}{٤} \times ع = \frac{\pi}{١٢} ع^{٣}$

$\Leftarrow \frac{دح}{دع} = ٣ \frac{\pi}{١٢} ع^{٢} = \frac{\pi}{٤} ع^{٢}$

$\Leftarrow \frac{دح}{دع}\Big|_{ع=٣٠} = \frac{\pi}{٤}(٣٠)^{٢} = \frac{٩٠٠}{٤}\pi = ٢٢٥\pi$

سؤال: كرة تتمدد، فإذا كان معدل تغير حجمها بالنسبة لنصف قطرها يساوي ٣٦π، فجد نصف القطر ______ $\boxed{جـ \rightarrow نق = ٣}$

مثال: احسب معدل التغير في مساحة المربع بالنسبة لمحيطه عندما يكون طول ضلعه ٤٠ سم .

الحل: المساحة : $\text{م} = \text{س}^{٢} \Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

المحيط : $\text{ل} = ٤\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دل}}{\text{دس}} = ٤$

$\Leftarrow \frac{\text{م}'}{\text{ل}'} = \frac{٢\text{س}}{٤} = \frac{٢ \times ٤٠}{٤} = ٢٠$

مثال: اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي قطر قاعدتها ، احسب معدل تغير حجمها بالنسبة لمساحتها الجانبية وذلك عندما يكون نصف القطر = ١٢ سم .

الحل: بما أن ارتفاع الأسطوانة يساوي قطر قاعدتها فإن ع = ٢ نق

$\Leftarrow \text{ح} = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} = \pi\,\text{نق}^{٢} \times ٢\,\text{نق} = ٢\pi\,\text{نق}^{٣}$

$\text{ح}' = ٦\pi\,\text{نق}^{٢}$

$\Leftarrow \text{م} = ٢\pi\,\text{نق}\,\text{ع} = ٢\pi\,\text{نق} \times ٢\,\text{نق} = ٤\pi\,\text{نق}^{٢}$

$\text{م}' = ٨\pi\,\text{نق}$

$\therefore \frac{\text{ح}'}{\text{م}'} = \frac{٦\cancel{\pi}\,\text{نق}^{٢}}{٨\cancel{\pi}\,\text{نق}} = \frac{٣}{٤}\,\text{نق} = \frac{٣ \times ١٢}{٤} = ٩$

---

* نهايات على صورة مشتقات :-

عندما تكون النهاية على صورة تعريف المشتقة فإننا نستخدم تلك المشتقة لايجاد تلك النهاية .

$\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}} = \text{ق}'(\text{أ})$ ، $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}'(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{ق}'(\text{أ})}{\text{هـ}} = \text{ق}''(\text{أ})$

$\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{ب}\,\text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{جـ}\,\text{هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \times \text{ق}'(\text{أ})$

أيضاً : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ق}'(\text{أ})$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ق}''(\text{أ})$

<u>مثال</u>: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٢} - ٥\text{س}$ جد:

① $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٤ + \text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}}$ ② $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣)}{\text{س} - ٣}$

<u>الحل</u>: $\text{ق}'(\text{س}) = ٨\text{س} - ٥$

① $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٤ + \text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}} = \text{ق}'(٤)$

$\text{ق}'(٤) = ٨(٤) - ٥ = ٣٢ - ٥ = ٢٧$

② $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣)}{\text{س} - ٣} = \text{ق}'(٣)$

$\text{ق}'(٣) = ٨(٣) - ٥ = ٢٨ - ٥ = ٢٣$

<u>مثال</u>: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٢$ جد:

① $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}'(٤ + \text{هـ}) - \text{ق}'(٤)}{\text{هـ}}$ ② $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(٥)}{\text{س} - ٥}$

③ $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(٢ + ٣\text{هـ})}{٥\text{هـ}}$ ④ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}$

<u>الحل</u>: $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س}$ $\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س} + ٢$

① $\text{ق}''(٤) = ٢٤ + ٢ = ٢٦$

② $\text{ق}''(٥) = ٣٠ + ٢ = ٣٢$

③ $-\frac{٣}{٥}\text{ق}'(٢) = -\frac{٣}{٥}(١٢ + ٢) = -\frac{٣}{٥} \times ١٤ = -\frac{٤٨}{٥}$

④ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(\text{س})}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(\text{س})}{\text{س} - ٣} \times \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{١}{\text{س} + ٢}$

$= -\text{ق}'(٣) \times \frac{١}{٥}$

$= -(٢٧ + ٦) \times \frac{١}{٥}$

$= -\frac{٣٣}{٥}$

مثال: اذا كان $ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} - ٢$ وكانت $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق'(٢+هـ) - ق'(٢)}{هـ} = ٢٠$

جد قيمة أ ؟

الحل: $ق''(٢) = ٢٠$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢أس$

$ق''(س) = ٦س + ٢أ \Leftarrow ق''(٢) = ١٢ + ٢أ$

$\Leftarrow ٢٠ = ١٢ + ٢أ \Leftarrow ٢أ = ٨ \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

مثال: جد $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{٨(١+هـ)^{٥} - ٨}{هـ}$

الحل: $ق'(١)$ أي أن $ق(س) = ٨س^{٥} \Leftarrow ق'(س) = ٤٠س^{٤}$

$\Leftarrow ق'(١) = ٤٠$

مثال: جد $\underset{س \leftarrow ١}{نها} \frac{س^{٢٠} - ١}{س - ١}$

تعني $ق'(١)$ أي أن $ق(س) = س^{٢٠} \Leftarrow ق'(س) = ٢٠س^{١٩}$

$\Leftarrow ق'(١) = ٢٠(١)^{١٩} = ٢٠$

مثال: اذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{س^{ن} - ٢^{ن}}{س - ٢} = ١٢$ جد قيمة ن

الحل: تعني $ق'(٢)$ أي أن $ق(س) = س^{ن} \Leftarrow ق'(س) = ن س^{ن-١}$

$\Leftarrow ق'(٢) = ن(٢)^{ن-١}$

$\Leftarrow ١٢ = ن(٢)^{ن-١}$

$\Leftarrow ٣(٢)^{٢} = ن(٢)^{ن-١}$

$\therefore \boxed{ن = ٣}$

مثال- اذا كانت $ق'(٠) = ٤$ جد $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(٠) - ق(٣هـ)}{٢هـ}$

الحل: $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(٠) - ق(٣هـ)}{٢هـ} = \frac{-٣}{٢} ق'(٠) = \frac{-٣}{٢} \times ٤ = -٦$