الوحدة
الثانية

التفاضل

الفرع الأدبي

المستوى الثالث

2017/2016

الأستاذ : عماد مسك
0795153669

التحـــدّي

* الوحدة الثانية :- التفاضل

---

* متوسط التغير : يرمز للتغير بالرمز Δ

مثال : جد مقدار التغير في س إذا تغيرت من س$_{١}$ = ٥ إلى س$_{٢}$ = ٨

الحل : Δس = س$_{٢}$ - س$_{١}$ = ٨ - ٥ = ٣

مثال : جد مقدار التغير في س إذا تغيرت من س$_{١}$ = -٢,٥ إلى س$_{٢}$ = ١,٥

الحل : Δس = س$_{٢}$ - س$_{١}$ = ١,٥ - (-٢,٥) = ١,٥ + ٢,٥ = ٤

مثال : إذا كان ص = ق(س) = س^{٣} وتغيرت س من ٢ إلى ٣ احسب :

① التغير في س ② التغير في ص

الحل :- Δس = س$_{٢}$ - س$_{١}$ = ٣ - ٢ = ١

ص$_{١}$ = ق(س$_{١}$) = ق(٢) = (٢)^{٣} = ٨

ص$_{٢}$ = ق(س$_{٢}$) = ق(٣) = (٣)^{٣} = ٢٧

Δص = ص$_{٢}$ - ص$_{١}$ = ٢٧ - ٨ = ١٩

---

* **قاعدة :-** متوسط التغير ⟸ $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$ = $\frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

مثال : ص = ق(س) = س^{٢} + ٢س - ٥ س ∈ [١ ، ٢] احسب :-

① التغير في س ② التغير في ص ③ $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ (متوسط التغير)

الحل :- ① Δس = س$_{٢}$ - س$_{١}$ = ٢ - ١ = ١

② ص$_{١}$ = ق(س$_{١}$) = (١)^{٢} - ٢(١) - ٥ = -٢

ص$_{٢}$ = ق(س$_{٢}$) = (٢)^{٢} + ٢(٢) - ٥ = ٣

Δص = ص$_{٢}$ - ص$_{١}$ = ٣ - (-٢) = ٥

③ $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{٥}{١}$ = ٥

مثال: - احسب متوسط التغير إذا كان ص = ق(س) = $\sqrt{س+١}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

الحل: - متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{\sqrt{٣+١} - \sqrt{٠+١}}{٣ - ٠} = \frac{٢ - ١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

مثال: - احسب متوسط التغير إذا كان ص = ق(س) = $\frac{س+١}{٢}$ ، س ∈ [١ ، ٥]

الحل: - $\Delta س = س_٢ - س_١ = ٥ - ١ = ٤$

$ص_١ = ق(س_١) = \frac{١+١}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$

$ص_٢ = ق(س_٢) = \frac{٥+١}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = ٣ - ١ = ٢$

$\Leftarrow \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

مثال: ص = ق(س) = $س^٢$ وكان متوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٨$ وكان التغير في س ($\Delta س$) = ٤ ، احسب التغير في ص ($\Delta ص$)

الحل: - متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} \Longleftarrow ٨ = \frac{\Delta ص}{٤}$

$\Leftarrow \boxed{\Delta ص = ٣٢}$

مثال: - ق(س) = أ$س^٢$ + ٤ ، س ∈ [١ ، ٢] وكان التغير في الاقتران = ٩ ، جد قيمة أ ؟

الحل: - $\Delta ص = ق(٢) - ق(١) = ٩$

$$\left(أ(٢)^٢ + ٤\right) - \left(أ(١)^٢ + ٤\right) = ٩$$

$$٤أ + ٤ - (أ + ٤) = ٩$$

$$٤أ + \cancel{٤} - أ - \cancel{٤} = ٩ \Leftarrow \frac{٣أ}{٣} = \frac{٩}{٣}$$

$\Leftarrow \boxed{أ = ٣}$

* **سؤال** :- اذا كان ق(س) = س^{٢} + أس س ∈ [١،٣] وكان التغير في الاقتران = ٤،
جد قيمة (أ) ؟ ـــــ الاجابة $\boxed{\text{أ} = ٨}$

* **سؤال** :- ق(س) = أس^{٣} + ٤س س ∈ [١،٢] وكان التغير في الاقتران = ١٨
فما قيمة (أ) ؟ ـــــ الإجابة $\boxed{\text{أ} = ٢}$

وزارة

---

* **مثال** :- اذا كانت ق(س) = ل(س) − س^{٢} س ∈ [١،٣] وكان متوسط التغير لـ (ل(س)) = ٥ ، جد متوسط التغير لـ ق(س) ؟؟

الحل :- متوسط التغير لـ ق(س) = $\underbrace{\text{متوسط التغير ل(س)}}_{٥}$ − متوسط التغير لـ س^{٢}

$$\text{متوسط التغير لـ س}^{٢} = \frac{(٣)^{٢} - (١)^{٢}}{٣ - ١} = \frac{٩ - ١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

∴ متوسط التغير لـ ق(س) = ٥ − ٤ = ١

---

* **سؤال** :- اذا كان ق(س) = هـ(س) + ٢س س ∈ [٢،٤] وكان متوسط التغير لـ (هـ(س)) = ٧
جد متوسط التغير لـ ق(س) ؟ ـــــ الإجابة (٩)

---

* **ميل القاطع** :- هو متوسط التغير = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

مثال :- ص = ق(س) = ٣ − س^{٢} جد ميل القاطع المار بالنقطتين $(\underset{\text{س}_{١}}{١}، \underset{\text{ص}_{١}}{٢})$ $(\underset{\text{س}_{٢}}{-٣}، \underset{\text{ص}_{٢}}{-٦})$ ؟

الحل :- ميل القاطع = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{-٦ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{-٨}{-٤} = ٢$

* **سؤال** : ص = ق(س) = ٤ س^{٢} + ١ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠،١) ، (٢،−٣) ؟

$$\text{م} = \frac{-٣ - ١}{٢ - ٠} = \frac{-٤}{٢} = \boxed{-٢}$$

*مثال:- $ص = ق(س) = ٣س^{٢}$

جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١، ق(١)) (٤، ق(٤)) ؟

الحل:- ميل القاطع = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

$ص_{١} = ق(س_{١}) = ٣(١)^{٢} = ٣$

$ص_{٢} = ق(س_{٢}) = ٣(٤)^{٢} = ٤٨$

⟸ ميل القاطع = $\frac{٤٨ - ٣}{٤ - ١} = \frac{٤٥}{٣} = ١٥$

---

*سؤال:- $ص = ق(س) = س^{٣} - ٧$

جد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠، ق(٠)) ، (١، ق(١)) ——— الاجابة (١)

*سؤال:- $ص = ق(س) = ٥ - س^{٢}$ جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١، ق(١)) (٣، ق(٣)) -- الاجابة (-٤)

---

*السرعة المتوسطة:-

$ع = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_{٢}) - ف(ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}}$ حيث: ف المسافة بالأمتار

ن الزمن بالثانية

مثال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٢} + ٢$ حيث ف المسافة بالأمتار و ن الزمن بالثانية

احسب السرعة المتوسطة في الفترة $[\underset{ن_{١}}{٢}، \underset{ن_{٢}}{٤}]$ ؟

الحل:- $ع = \frac{ف(ن_{٢}) - ف(ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}}$

$ف(٤) = (٤)^{٢} + ٢ = ١٨$

$ف(٢) = (٢)^{٢} + ٢ = ٦$

$ع = \frac{١٨ - ٦}{٤ - ٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$ م/ث

سؤال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٢} + ٢ن$ احسب ع في الفترة [٢، ٣] - ——— ٧م/

سؤال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٣}$ احسب ع في الفترة [٠، ٢] - ——— ٤م/ث

سؤال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٢} + ٥ن + ١$ ، احسب ع في الفترة [٠، ١] - ——— ٦م/ث

سؤال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٥س} ، & \text{س} < \text{٢} \\ \text{س}^{\text{٢}} ، & \text{س} \geq \text{٢} \end{cases}$ جد ميل القاطع المار بالنقطتين $(\text{٠}، \text{ق}(\text{٠}))$ ، $(\text{٤}، \text{ق}(\text{٤}))$

---

* المشتقة الأولى: (تعريف المشتقة الأولى):-

مهارات أساسية:
① $\text{٥}(\text{س}+\text{٦}) = \text{٥س} + \text{٣٠}$

② $-\text{٤}(\text{س}+\text{٣}) = -\text{٤س} - \text{١٢}$

③ $(\text{س} + \text{هـ})^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س هـ} + \text{هـ}^{\text{٢}}$

④ $(\text{س} + \text{هـ})^{\text{٣}} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{٣س}^{\text{٢}}\text{هـ} + \text{٣س هـ}^{\text{٢}} + \text{هـ}^{\text{٣}}$

* اذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ فإنه $\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\Delta\text{س} \to \text{٠}} \dfrac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

$$= \lim_{\Delta\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$$

نضع $\boxed{\Delta\text{س} = \text{هـ}}$

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

يرمز للمشتقة الأولى بالرموز التالية: ① $\text{ق}'(\text{س})$ ② $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ③ $\text{ص}'$

* إستخدام تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لـ $\text{ق}(\text{س})$

خطوات الحل:-

① كتابة القانون
② التعويض في القانون
③ نفك الأقواس
④ نخرج هـ عامل مشترك من البسط ونختصرها مع هـ التي في المقام
⑤ نعوض بدل هـ = ، وتخرج لنا المشتقة الأولى بدون هـ .

مثال: * استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية:؟

① $\text{ق}(\text{س}) = ٥\text{س} - ٧$

الحل:- $$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٥(\text{س}+\text{هـ}) - ٧ - (٥\text{س} - ٧)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{٥\text{س}} + ٥\text{هـ} - \cancel{٧} - \cancel{٥\text{س}} + \cancel{٧}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٥\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}} = ٥$$

---

② $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ - ٤$

الحل:- $$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣(\text{س}+\text{هـ})^٢ - ٤ - (٣\text{س}^٢ - ٤)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣(\text{س}^٢ + ٢\text{هـ}\text{س} + \text{هـ}^٢) - ٤ - ٣\text{س}^٢ + ٤}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{٣\text{س}^٢} + ٦\text{هـ}\text{س} + ٣\text{هـ}^٢ - \cancel{٤} - \cancel{٣\text{س}^٢} + \cancel{٤}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٦\text{هـ}\text{س} + ٣\text{هـ}^٢}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{\text{هـ}}(٢\text{س} + \text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} ٣(٢\text{س} + \text{هـ}) = ٣(٢\text{س} + ٠)$$

$$= ٦\text{س}$$

---

③ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ - ٤$

الحل:- $$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^٣ - ٤ - (\text{س}^٣ - ٤)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}^٣} + ٣\text{س}^٢\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^٢ + \text{هـ}^٣ - \cancel{٤} - \cancel{\text{س}^٣} + \cancel{٤}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{هـ}}(٣\text{س}^٢ + ٣\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^٢)}{\cancel{\text{هـ}}} = ٣\text{س}^٢ + ٣\text{س}(٠) + (٠)^٢$$

$$= ٣\text{س}^٢$$

سؤال: استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى للاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٥$ ———— الإجابة (٢س)

مثال :- $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\cancel{\text{س}} + \text{هـ} - \cancel{\text{س}}}{\text{هـ}\left(\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}\right)} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}\left(\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}\right)} = \frac{١}{\sqrt{\text{س} + ٠} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

سؤال :- استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لـ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$. ـــــ $\frac{-٢}{\text{س}^٢}$

* **تعريف المشتقة عند نقطة س١ :**

$$\text{ق}'(\text{س}_١) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$$

مثال :- استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لـ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٥\text{س}$ عند $\text{س} = ٢$

الحل :- $\text{ق}'(٢) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(٢ + \text{هـ})^٢ + ٥(٢ + \text{هـ}) - ١٤}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\cancel{٤} + ٤\text{هـ} + \text{هـ}^٢ + \cancel{١٠} + ٥\text{هـ} - \cancel{١٤}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}^٢ + ٩\text{هـ}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\cancel{\text{هـ}}(\text{هـ} + ٩)}{\cancel{\text{هـ}}} = ٠ + ٩ = ٩$$

سؤال :- استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لـ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٥$ $\boxed{\text{عندما س} = -١}$

مثال :- $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ١}$ عند $\text{س} = ٥$

الحل :- $\text{ق}'(٥) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٥ + \text{هـ}) - \text{ق}(٥)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\sqrt{٥ + \text{هـ} - ١} - \sqrt{٥ - ١}}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\sqrt{٤ + \text{هـ}} - ٢}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{٤ + \text{هـ}} + ٢}{\sqrt{٤ + \text{هـ}} + ٢} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\cancel{٤} + \text{هـ} - \cancel{٤}}{\text{هـ}\left(\sqrt{٤ + \text{هـ}} + ٢\right)}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}\left(\sqrt{٤ + \text{هـ}} + ٢\right)} = \frac{١}{\sqrt{٤ + ٠} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

سؤال: استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لـ $ق(س) = \frac{٢}{س - ٣}$ ، $س \neq ٣$ عند $س = ٤$

---

* قواعد الاشتقاق :-

اذا كان هناك الاقتران ق(س) فإن المشتقة الأولى يرمز لها بالرمز $ق'(س)$

وإذا كانت ص فإن المشتقة الأولى $\frac{دص}{دس}$

* $\boxed{\text{قاعدة (١)}}$:- $ق(س) = \text{عدد} \Leftarrow ق'(س) = \text{صفر}$

مثال :- $ق(س) = ٥ \Leftarrow ق'(س) = \text{صفر}$

$ق(س) = -٢ \Leftarrow ق'(س) = \text{صفر}$

$ق(س) = \frac{١}{٢} \Leftarrow ق'(س) = \text{صفر}$

$ق(س) = \left(\frac{٣}{٨}\right)^٢ \Leftarrow ق'(س) = \text{صفر}$

* $\boxed{\text{قاعدة (٢)}}$:- $ق(س) = س^ن \Leftarrow ق'(س) = ن س^{ن-١}$

مثال :- جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية :

① $ق(س) = س^٢ \Leftarrow ق'(س) = ٢س$

② $ق(س) = س^٣ \Leftarrow ق'(س) = ٣س^٢$

③ $ق(س) = س^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

④ $ق(س) = س^{-٢} \Leftarrow ق'(س) = -٢ س^{-٣}$

⑤ $ق(س) = س^{-١٠} \Leftarrow ق'(س) = -١٠ س^{-١١}$

⑥ $ق(س) = س^{\frac{٣}{٢}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$

ملاحظة :- $\frac{١}{س^م} = س^{-م}$

$\sqrt{س^م} = س^{\frac{م}{٢}}$

* $\boxed{\text{قاعدة (٣)}}$:- $ق(س) = جـ \times م(س)$

$\Leftarrow ق'(س) = جـ \times م'(س)$

مثال :- ① $ق(س) = ٥س^٣ \Leftarrow ق'(س) = ١٥س^٢$

② $ق(س) = ٥\sqrt[٣]{س} = ٥س^{\frac{١}{٣}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{١}{٣} \times ٥ س^{-\frac{٢}{٣}}$

$ق'(س) = \frac{٥}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{٥}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

مثال ١٨:- $ق(س) = \frac{٧}{س^{٥}} = ٧س^{-٥}$

$ق'(س) = -٣٥س^{-٦} = \frac{-٣٥}{س^{٦}}$

* $ق(س) = ٢س^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow ق'(س) = س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{س}}$

* $ق(س) = ٤س^{-٧} \Leftarrow ق'(س) = -٢٨س^{-٨} = \frac{-٢٨}{س^{٨}}$

---

*\boxed{قاعدة (٤)}:- في حالة الجمع والطرح نشتق كل قاعدة لوحدها

مثال:- جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية:-

١) $ق(س) = ٤س^{٧} - ٢س^{٥} - ٣$

$ق'(س) = ٢٨س^{٦} - ١٠س^{٤}$

٢) $ق(س) = \sqrt{س} + س^{٢} - ١٠٠ \Leftarrow ق(س) = س^{\frac{١}{٢}} + س^{٢} - ١٠٠$

$ق'(س) = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} + ٢س = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٢س$

---

*\boxed{قاعدة (٥)}:- مشتقة الاقترانات الدائرية:-

١) $ق(س) = جاس \Leftarrow ق'(س) = جتاس$

٢) $ق(س) = جتاس \Leftarrow ق'(س) = -جاس$

٣) $ق(س) = ظاس \Leftarrow ق'(س) = قا^{٢}س$

مثال:- أوجد ق'(س) لكل من الاقترانات التالية:-

١) $ق(س) = ٣ظاس - ٥جتاس + جاس$

$ق'(س) = ٣قا^{٢}س + ٥جاس + جتاس$

٢) $ق(س) = ٣جاس + ٥جتاس - ٧ظاس \Leftarrow ق'(س) =$ ________

٣) $ق(س) = ٥\sqrt[٣]{س} + جاس \Leftarrow ق'(س) =$ ________

* القاعدة (٦): - مشتقة الاقتران الأسي: -

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

* مشتقة الاقتران اللوغاريتمي: -

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

أمثلة: -

① $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٥} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٣\text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٥\text{س}^{٤} + \frac{١}{\text{س}} + ٣\text{هـ}^{\text{س}}$

ملاحظة: $\text{لو}_{\text{هـ}}١ = ٠$

$\text{هـ}^{٠} = ١$

② $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس} - \frac{١}{\text{س}}$

③ $\text{ص} = \text{س}^{٤} - ٣\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}$ أوجد المشتقة الأولى عند س = ٠

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س}^{٣} - ٣\text{هـ}^{\text{س}} - ٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٠} = ٤(٠)^{٣} - ٣\text{هـ}^{٠} - ٢ = ٠ - ٣(١) - ٢ = -٥$

---

④ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٣\text{هـ}^{\text{س}}$ أوجد المشتقة الأولى عند س = ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}} - ٣\text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=١} = \frac{١}{١} - ٣\text{هـ}^{١} = ١ - ٣\text{هـ}$

---

⑤ $\text{ق}(\text{س}) = -٢\text{هـ}^{\text{س}} - ٤\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٣\text{س}^{٢}$ أوجد ق'(س) عند س = ٢

$\text{ق}'(\text{س}) = -٢\text{هـ}^{\text{س}} - ٤\left(\frac{١}{\text{س}}\right) + ٦\text{س} = -٢\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{٤}{\text{س}} + ٦\text{س}$

$\text{ق}'(٢) = -٢\text{هـ}^{٢} - \frac{٤}{٢} + ٦(٢) = -٢\text{هـ}^{٢} - ٢ + ١٢$

$= -٢\text{هـ}^{٢} + ١٠$

* القاعدة (٧) :- قاعدة الضرب

هـ(س) = الأول × الثاني

هـ'(س) = (الأول) × (مشتقة الثاني) + (الثاني) × (مشتقة الأول)

هـ(س) = ل(س) × م(س)

هـ'(س) = ل(س) × م'(س) + م(س) × ل'(س)

---

* مثال :- أوجد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية :-

① هـ(س) = (٢س − ١)(س^{٢} − ٣)

هـ'(س) = (٢س − ١)(٢س) + (س^{٢} − ٢)(٢)

---

② هـ(س) = (س^{٣} + ٤)(٢س^{٢} + ٥) جد هـ'(−١)

هـ'(س) = (س^{٣} + ٤)(٤س) + (٢س^{٢} + ٥)(٣س^{٢})

هـ'(−١) = ((−١)^{٣} + ٤)(٤(−١)) + (٢(−١)^{٢} + ٥)(٣(−١)^{٢})

= (٣)(−٤) + (٧)(٣)

= −١٢ + ٢١ = ٩

---

* القاعدة (٨) :- قاعدة القسمة :-

هـ(س) = $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ ⟸ هـ'(س) = $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

---

* مثال :- أوجد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية :-

① هـ(س) = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س}^{٢}}$

هـ'(س) = $\frac{\text{س}^{٢}\text{(١)} - \text{((س + ١)(٢س))}}{\text{(س}^{٢}\text{)}^{٢}}$ = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{(٢س}^{٢}\text{ + ٢س)}}{\text{س}^{٤}}$ = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{٢س}^{٢} - \text{٢س}}{\text{س}^{٤}}$

= $\frac{\text{−س}^{٢} - \text{٢س}}{\text{س}^{٤}}$

② $هـ(س) = \frac{٣س - ٥}{٨س - ٣}$ جد $هـ'(١)$

$$هـ'(س) = \frac{(٨س - ٣)(٣) - \left[(٣س - ٥)(٨)\right]}{(٨س - ٣)^٢}$$

$$هـ'(ك) = \frac{\cancel{٢٤س} - ٩ - (\cancel{٢٤س} - ٤٠)}{(٨س - ٣)^٢} = \frac{٣١}{(٨س - ٣)^٢}$$

$$هـ'(١) = \frac{٣١}{(٨(١) - ٣)^٢} = \frac{٣١}{٢٥}$$

---

③ $ع(س) = \frac{٢س + ١}{س^٣ + ١}$ جد $ع'(٢)$ ———— $\boxed{واجب}$

---

* مشتقة ثابت على اقتران :- (حالة خاصة)

$م(س) = \frac{ثابت}{اقتران}$ أو $\frac{جـ}{م(س)}$ $\Leftarrow$ $ع'(س) = \frac{- جـ (م'(س))}{(م(س))^٢}$

* مثال :- جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية :-

① $م(س) = \frac{٤}{س^٣ + ٥س + ١}$ جد $ع'(س)$

$$ع'(س) = \frac{-٤ (٣س^٢ + ٥)}{(س^٣ + ٥س + ١)^٢}$$

---

② $م(س) = \frac{-٢}{س^٢ + ١٠س}$ $\Leftarrow$ $ع'(س) = \frac{٢ (٢س + ١٠)}{(س^٢ + ١٠س)^٢}$

---

③ $م(س) = \frac{٨}{(٢س - ١)}$ $\Leftarrow$ جد $ع'(١)$

$$ع'(س) = \frac{-٨ (٢)}{(٢س - ١)^٢}$$

$$ع'(١) = \frac{-١٦}{(٢(١) - ١)^٢} = \frac{-١٦}{١} = -١٦$$

* **مشتقة الجذر التربيعي :-**

$ق(س) = \sqrt{م(س)} \Rightarrow ق'(س) = \frac{م'(س)}{٢\sqrt{م(س)}}$

مثال :- جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية :-

① $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ٨}$

$ق'(س) = \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^٢ + ٨}} = \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ٨}}$

② $ق(س) = \sqrt{٢س^٣ + ٣س^٢}$

$ق'(س) = \frac{٦س^٢ + ٦س}{٢\sqrt{٢س^٣ + ٣س^٢}}$

③ $هـ(س) = \sqrt{س^٢ + ٣س}$ جد $هـ'(٢)$

$هـ'(س) = \frac{٢س + ٣}{٢\sqrt{س^٢ + ٣س}} \Rightarrow هـ'(١) = \frac{٢(١) + ٣}{٢\sqrt{(١)^٢ + ٣(١)}} = \frac{٥}{٤}$

---

* **المشتقات العليا :-**

إذا كان $ص = ق(س)$ فإن المشتقة الأولى هي $\frac{ءص}{ءس} \longrightarrow ق'(س)$

المشتقة الثانية هي $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} \longrightarrow ق''(س)$

مثال : $ق(س) = ٩س^٣ - ٣س^٢ - ٥$ جد $ق''(٢)$

$ق'(س) = ٢٧س^٢ - ٦س$

$ق''(س) = ٥٤س - ٦ \Rightarrow ق''(٢) = ٥٤(٢) - ٦ = ١٠٢$

سؤال : أوجد المشتقة الثانية لكل مما يلي :

Ⓐ $ق(س) = لو_{هـ}س$

Ⓑ $ق(س) = س^٣ هـ^س$

* التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة :-

١) التفسير الهندسي (ميل المماس للاقتران س) :-

ملاحظة :- ميل المماس (م) عند س١ هو $\text{ق}'(\text{س}_١)$

أمثلة :- جد ميل المماس لكل من الاقترانات التالية عند قيم س إزاء كل منها :-

① $\text{ق(س)} = \text{س}^٣ + \text{س}^٢ + ٣$ $\boxed{\text{س} = ١}$

$\text{م} = \text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ + ٢\text{س}$

$\text{ق}'(١) = ٣(١)^٢ + ٢(١) = ٣ + ٢ = ٥$

---

② $\text{ق(س)} = \frac{٤}{\text{س}} + ٩\text{س}$ $\boxed{\text{س} = ٢}$

$\text{م} = \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٤}{\text{س}^٢} + ٩$

$\text{ق}'(٢) = \frac{-٤}{(٢)^٢} + ٩ = -١ + ٩ = ٨$

---

③ $\text{ق(س)} = \frac{٣\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$ $\boxed{\text{س} = ٤}$

$\text{م} = \text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}+١)(٣) - [(٣\text{س} - ٢)(١)]}{(\text{س}+١)^٢} \Leftarrow \text{ق}'(٤) = \frac{(٤+١)(٣) - [(٣(٤) - ٢)(١)]}{(٤+١)^٢}$

$\text{ق}'(٤) = \frac{(٥)(٣) - [(١٠)(١)]}{٢٥} = \frac{١٥ - ١٠}{٢٥} = \frac{٥}{٢٥} = \frac{١}{٥}$

---

* كيفية إيجاد معادلة المماس :-

① نجد ميل المماس

② نكتب المعادلة $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$

③ نعوض مكان س١، ص١ من النقطة المعطاة في السؤال

*ملاحظة :- إذا لم يعطينا ص١ نجدها بالتعويض في المسألة الأصلية

مثال :- جد معادلة المماس عند النقطة (١، ٦) إذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ٣$

الحل :- $\text{م} = \text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$

$\text{ق}'(١) = ٣(١)^{٢} + ٤(١) = ٧$

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - ٦ = ٧(\text{س} - ١) \Leftarrow \text{ص} - ٦ = ٧\text{س} - ٧$

$\Leftarrow \boxed{\text{ص} = ٧\text{س} - ١} \leftarrow$ معادلة المماس

مثال :- $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + ٢}$ جد معادلة المماس عند النقطة $(٢، \frac{١}{٤})$

الحل :- $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-١(١)}{(\text{س}+٢)^{٢}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-١}{(\text{س}+٢)^{٢}} \Leftarrow \text{ق}'(٢) = \frac{-١}{١٦} \rightarrow \text{م}$

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١}) \Leftarrow \text{ص} - \frac{١}{٤} = \frac{-١}{١٦}(\text{س} - ٢)$

$\Leftarrow \text{ص} - \frac{١}{٤} = \frac{-\text{س}}{١٦} + \frac{١}{٨}$

$\Leftarrow \text{ص} = \frac{-\text{س}}{١٦} + \frac{١}{٨} + \frac{١\times٢}{٤\times٢} \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \frac{-\text{س}}{١٦} + \frac{٣}{٨}}$

مثال :- $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}$ جد معادلة المماس عند النقطة (٢، ٣)

الحل :- $\text{م} = \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}}$

$\text{ق}'(٢) = \frac{٢}{\sqrt{(٢)^{٢}+٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٧}}$

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١}) \Leftarrow \text{ص} - ٣ = \frac{٢}{\sqrt{٧}}(\text{س} - ٢)$

$\Leftarrow \text{ص} - ٣ = \frac{٢}{\sqrt{٧}}\text{س} - \frac{٤}{\sqrt{٧}}$

$\Leftarrow \boxed{\text{ص} = \frac{٢}{\sqrt{٧}}\text{س} - \frac{٤}{\sqrt{٧}} + ٣}$

* التفسير الفيزيائي للمشتقة :-

بما أن السرعة والتسارع مرتبطان بالزمن فإن علاقة المسافة دائماً تكون ف(ن) والسرعة هي ع(ن) والتسارع ت(ن)

بعض المصطلحات والرموز :-

ف ← المسافة بوحدة (م)
ن ← الزمن بوحدة (ث)
ع ← السرعة بوحدة (م/ث)
ت ← التسارع بوحدة (م/ث^{٢})

*** ملاحظة :-** المشتقة الأولى للمسافة = السرعة

فَ(ن) = ع(ن)

المشتقة الثانية للمسافة (الأولى للسرعة) = التسارع

فً(ن) = عَ(ن) = ت(ن)

* مشتقة المسافة تعطي السرعة اللحظية (أي في لحظة معينة)

مفاتيح لإيجاد الزمن :-

١) تنعدم السرعة ع = صفر
٢) يتوقف الجسم فَ = صفر
٣) ينعدم التسارع ت = صفر

مثال :- يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} + $\frac{٥}{٢}$ن^{٢} + ٧ن − ١ حيث ف المسافة بالأمتار و ن الزمن بالثانية، جد السرعة و التسارع عندما ن = ٢ ثانية

الحل :- ع(ن) = فَ(ن) = ن^{٢} + ٥ن + ٧

ع(٢) = (٢)^{٢} + ٥(٢) + ٧ = ٤ + ١٠ + ٧ = ٢١ م/ث

ت(ن) = فً(ن) = عَ(ن) = ٢ن + ٥

ت(٢) = ٢(٢) + ٥ = ٩ م/ث^{٢}

مثال :- يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٣} − ١٢ن^{٢} + ٣ جد السرعة عندما ينعدم التسارع ؟

المطلوب : السرعة في اللحظة التي يصبح فيها ت = .

الحل :- ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} − ٢٤ن

ت(ن) = عَ(ن) = ٦ن − ٢٤ ⇐ ٦ن − ٢٤ = صفر ⇐ ٦ن = ٢٤ ⇐ $\boxed{ن = ٤}$

ع(٤) = ٣(٤)^{٢} − ٢٤(٤) = ٤٨ − ٩٦ = −٤٨ م/ث

مثال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^{٢}$ − ٤ن + ٦ جد متى تنعدم السرعة؟

المطلوب:- في أي ثانية تصبح السرعة صفر (الزمن)

الحل:- ع(ن) = فَ(ن) = ٢ن − ٤   ع(ن) = صفر

٢ن − ٤ = صفر

٣ن = ٤ ⟸ $\boxed{ن = ٢}$ ثانية

مثال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^{٣}$ − ٣ن + ٦ جد التسارع عندما تنعدم السرعة؟

المطلوب:- التسارع عندما ع = صفر

الحل:- ع(ن) = فَ(ن) = ٣$ن^{٢}$ − ٣   تَ(ن) = ٦ن

٣$ن^{٢}$ − ٣ = صفر

٣$ن^{٢}$ = ٣ ⟸ $ن^{٢}$ = ١ ⟸ ن = $\pm\sqrt{١}$ = $\cancel{-١}$ ، ١

تهمل لأنه لا يوجد زمن سالب

تَ(١) = ٦(١) = ٦ م/$ث^{٢}$

سؤال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^{٣}$ − ٦$ن^{٢}$ + ٧ن + ١ جد السرعة عندما التسارع = ٦ م/$ث^{٢}$

سؤال: يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{١}{٣}$$ن^{٣}$ − $\frac{٥}{٢}$$ن^{٢}$ + ٨ن + ٧ جد التسارع عندما السرعة = ٢م/ث

الحل:- ع(ن) = فَ(ن) = $ن^{٢}$ − ٥ن + ٨

تَ(ن) = عَ(ن) = ٢ن − ٥

$ن^{٢}$ − ٥ن + ٨ = ٢ ⟸ $ن^{٢}$ − ٥ن + ٦ = صفر

عبارة تربيعية

⟸ (ن − ٢)(ن − ٣) = صفر

ن = ٢ أو ن = ٣

تَ(٢) = ٢(٢) − ٥ = ٤ − ٥ = −١ م/$ث^{٢}$

تَ(٣) = ٢(٣) − ٥ = ٦ − ٥ = ١ م/$ث^{٢}$

سؤال: يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^{٢}$ + ٢ن + ٧ جد المسافة عندما السرعة = ٦ م/ث ؟

مثال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{١}{٣}ن^{٣} - \frac{٥}{٢}ن^{٢}$ + ٨ن + ٧ جد التسارع عندما السرعة = ٢ م/ث

الحل:- ع(ن) = ف′(ن) = $ن^{٢}$ − ٥ن + ٨

$ن^{٢}$ − ٥ن + ٨ = ٢ ⟸ $ن^{٢}$ − ٥ن + ٦ = صفر ⟸ (ن − ٢)(ن − ٣) = صفر

عبارة تربيعية تحلل بالأقواس

ن = ٢ أو ن = ٣

ت(ن) = ٢ن − ٥

ت(٢) = ٢(٢) − ٥ = −١ م/$ث^{٢}$

ت(٣) = ٢(٣) − ٥ = ١ م/$ث^{٢}$

سؤال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{١}{٣}ن^{٣} - \frac{٧}{٢}ن^{٢}$ + ١٠ن + ٥ جد التسارع عندما السرعة = −٢ م/ث ——— واجب

سؤال:- يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{١}{٣}ن^{٣} - \frac{٣}{٢}ن^{٢}$ + ن + ١ جد التسارع عندما السرعة = −١ م/ث ——— واجب

---

* قاعدة السلسلة *

نستخدم قاعدة السلسلة إذا كان لدينا معادلتين وطلب منا إيجاد المشتقة.

مثل: ص = اقتران يعتمد على ع

ع = اقتران يعتمد على س «تعني ع هي وسيط»

*** كيفية ايجاد المشتقة $\frac{دص}{دس}$:-**

١) نضع الأسهم الدالة ص ← ع ← س

) نكتب القانون $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

) نضرب المشتقات

) نضع مكان ع قيمتها

مثال:- اذا كان $ص = ع^{٧}$ ، $ع = ٣س^{٢} + ٢$ جد $\frac{دص}{دس}$ ؟؟

الحل:- ① ص ← ع ← س

② $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

③ $ص = ع^{٧} \Rightarrow \frac{دص}{دع} = ٧ع^{٦}$

$ع = ٣س^{٢} + ٢ \Rightarrow \frac{دع}{دس} = ٦س$

$\frac{دص}{دس} = ٧ع^{٦} \times ٦س \Rightarrow \frac{دص}{دس} = ٧(٣س^{٢} + ٢)^{٦} \times ٦س$

$= ٤٢س (٣س^{٢} + ٢)^{٦}$

مثال:- اذا كان $ص = ع^{٢} + ٥$ ، $ع = ٣س - ٢$ جد $\frac{دص}{دس}$ ؟؟

الحل:- $\frac{دص}{دع} = ٢ع$ $\frac{دع}{دس} = ٣$

$\frac{دص}{دس} = ٢ع \times ٣ = ٦ع$

$\frac{دص}{دس} = ٦(٣س - ٢) = ١٨س - ١٢$

مثال:- اذا كان $ص = ع^{٣} + ٥ع$ ، $ع = ٣س^{٢} - ٢$ جد $\frac{دص}{دس}$ ؟؟

الحل:- $\frac{دص}{دع} = ٣ع^{٢} + ٥$ $\frac{دع}{دس} = ٦س$

$\frac{دص}{دس} = (٣ع^{٢} + ٥)(٦س) = ١٨س ع^{٢} + ٣٠س$

$\frac{دص}{دس} = ١٨س (٣س^{٢} - ٢)^{٢} + ٣٠س$

سؤال:- اذا كان $ص = جاع$ ، $ع = س^{٥}$ جد $\frac{دص}{دس}$ ؟؟

الحل:- $\frac{دص}{دع} = جتاع$ $\frac{دع}{دس} = ٥س^{٤}$

$\frac{دص}{دس} = جتاع \times ٥س^{٤} = ٥س^{٤} جتاع$

$\frac{دص}{دس} = ٥س^{٤} (جتاس^{٥})$

مثال:- اذا كان $\text{ص} = \text{ل}^3 + 2$ ، $\text{ل} = \frac{3}{2\text{س}+1}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟؟

الحل:- $\frac{\text{دص}}{\text{دل}} = 3\text{ل}^2$ $\frac{\text{دل}}{\text{دس}} = \frac{-3(2)}{(2\text{س}+1)^2} = \frac{-6}{(2\text{س}+1)^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{ل}^2 \left(\frac{-6}{(2\text{س}+1)^2}\right)$ ⟸ نعوض قيمة ل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\left(\frac{3}{2\text{س}+1}\right)^2 \left(\frac{-6}{(2\text{س}+1)^2}\right)$

سؤال:- اذا كان $\text{ص} = \text{ع}^3 + \text{ع}^2$ ، $\text{ع} = 3\text{س} + 1$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = 0$ ؟؟

مثال:- اذا كان $\text{ص} = \text{ع}^3$ ، $\text{ع} = 3\text{س}^2 + 1$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\boxed{\text{س} = -1}$

الحل:- $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 3\text{ع}^2$ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 6\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{ع}^2 \times 6\text{س} = 18\text{س}\,\text{ع}^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 18\text{س}\,(3\text{س}^2 + 1)^2$ وعندما $\text{س} = -1$ فإن $\text{ع} = 3(-1)^2 + 1$

$\boxed{\text{ع} = 4}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 18(-1)\left[3(-1)^2 + 1\right]^2$

$= -18(16) = -288$

سؤال:- $\text{ص} = \text{ع}^2 + 5$ ، $\text{ع} = 4\text{س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\boxed{\text{س} = 1}$ ؟؟

الحل:- $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 2\text{ع}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 4$ . . ——— أكمل

* قواعد قاعدة السلسلة :-

مشتقة القوة أولاً × مشتقة الاقتران

٢) $ص = (ق(س))^{ن}$ فإن $\frac{دص}{دس} = ن\,(ق(س))^{ن-١} \times ق'(س)$

مثال :- أ) $ص = (٣س^{٢} + ٥)^{٢}$ جد $\frac{دص}{دس}$ ؟؟

الحل :- $\frac{دص}{دس} = ٢(٣س^{٢}+٥) \times (٦س)$

ب) $ص = (س^{٣} + ٥س)^{٦}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل :- $\frac{دص}{دس} = ٦(س^{٣}+٥س)^{٥}(٣س^{٢}+٥)$

ج) $ص = (س^{٢} - س)^{٤}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل :- $\frac{دص}{دس} = ٤(س^{٢}-س)^{٣}(٢س-١)$

د) $ص = \sqrt[٣]{س^{٣}-٤}$ جد $\frac{دص}{دس}$ $\Leftarrow$ $ص = (س^{٣}-٤)^{\frac{١}{٣}}$

الحل :- $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣}(س^{٣}-٤)^{\frac{-٢}{٣}}(٣س^{٢}) = \frac{٣س^{٢}}{٣(س^{٣}-٤)^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{\cancel{٣}س^{٢}}{\cancel{٣}\sqrt[٣]{(س^{٣}-٤)^{٢}}} = \frac{س^{٢}}{\sqrt[٣]{(س^{٣}-٤)^{٢}}}$

هـ) $ص = \frac{١}{(س^{٣}-٤)^{٢}}$ جد $\frac{دص}{دس}$ $\Leftarrow$ $ص = (س^{٣}-٤)^{-٣}$

$\frac{دص}{دس} = -٣(س^{٣}-٤)^{-٤}(٣س^{٢}) = -٩س^{٢}(س^{٣}-٤)^{-٤} = \frac{-٩س^{٢}}{(س^{٣}-٤)^{٤}}$

و) $ص = \sqrt[٣]{(س^{٢}-٤)^{٢}}$ جد $\frac{دص}{دس}$ $\Leftarrow$ $ص = \left((س^{٢}-٤)^{٢}\right)^{\frac{١}{٣}} = (س^{٢}-٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٣}(س^{٢}-٤)^{\frac{-١}{٣}}(٢س) = \frac{٤س}{٣(س^{٢}-٤)^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٤س}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}-٤}}$

ز) $ص = (٤س-٣)^{٧}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ١$

$\frac{دص}{دس} = ٧(٤س-٣)^{٦}(٤) = ٢٨(٤س-٣)^{٦}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١} = ٢٨(٤(١)-٣)^{٦} = ٢٨(١)^{٦} = ٢٨$

٢) مشتقة الاقتران الأسي :-

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$ مشتقة الأس × نفسه

مثال : أ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢س}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :- $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \times \text{هـ}^{\text{٢س}}$

ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^٢ + \text{٣س} + ٥}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{٢س} + ٣) \times \text{هـ}^{\text{س}^٢ + \text{٣س} + ٥}$

جـ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} \times \text{هـ}^{\text{جاس}}$

هـ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^٢ - ٤}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} \times \text{هـ}^{\text{س}^٢ - ٤}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٢} = ٢(٢) \times \text{هـ}^{(٢)^٢ - ٤} = ٤\,\text{هـ}^{٠} = ٤ \times ١ = ٤$

و) $\text{ص} = \underbrace{\text{س}^٢}_{\text{الأول}} \times \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}^٢ - \text{٤س}}}_{\text{الثاني}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^٢ \times \left((\text{٢س} - ٤)(\text{هـ}^{\text{س}^٢ - \text{٤س}})\right) + \text{هـ}^{\text{س}^٢ - \text{٤س}}(\text{٢س})$

مثال :- إذا كان $\text{ص} = \underbrace{\text{جتاس}}_{\text{الأول}}\ \underbrace{\text{هـ}^{\text{جاس}}}_{\text{الثاني}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :- $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} \times (\text{جتاس هـ}^{\text{جاس}}) + \text{هـ}^{\text{جاس}} \times (-\text{جاس})$

$= \text{جتا}^٢\text{س هـ}^{\text{جاس}} - \text{جاس هـ}^{\text{جاس}}$

٣) مشتقة الاقتران اللوغاريتمي :-

إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق(س)}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق(س)}}$

مثال : أ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}}$

ب) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^٢$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ص} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٢}{\text{س}}$

جـ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥س} + ٨$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥}{\text{٥س} + ٨}$

د) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥س}^٢ + ٨$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١٠س}}{\text{٥س}^٢ + ٨}$

هـ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

و) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

ز) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}$

ح) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^٣ - \text{٢س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندها س = ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٣س}^٢ - ٢}{\text{س}^٣ - \text{٢س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=١} = \frac{٣(١)^٢ - ٢}{(١)^٣ - ٢(١)} = \frac{٣ - ٢}{١ - ٢} = \frac{١}{-١} = -١$