مثال: إذا كانت ق'(٣) = ٥ ، جد $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٣+٢\text{هـ}) - \text{ق}(٣-٥\text{هـ})}{\text{هـ}}$

الحل: نضيف ونطرح ق(٣) ⇐ $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٣+٢\text{هـ}) - \text{ق}(٣) + \text{ق}(٣) - \text{ق}(٣-٥\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٣+٢\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٣-٥\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= ٢\,\text{ق}'(٣) + -(-٥)\,\text{ق}'(٣) = ٢ \times ٥ + ٥ \times ٥ = ١٠ + ٢٥ = ٣٥$

مثال: إذا كان ق(٧) = ٣ ، ق'(٧) = ٥ ، هـ(٧) = ٢ ، هـ'(٧) = −٤

جد: (١) $(\text{ق}+\text{هـ})'(٧)$ (٢) $(٤\text{ق}-٢\text{هـ})'(٧)$ (٣) $(\text{ق} \times \text{هـ})'(٧)$

(٤) $\left(\dfrac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٧)$ (٥) $\left(\dfrac{\text{هـ}(٧)}{\text{ق}}\right)'(٧)$ (٦) $\left((\text{ق} \times \text{هـ})(٧)\right)'$

الحل: (١) $(\text{ق}+\text{هـ})'(٧) = \text{ق}'(٧) + \text{هـ}'(٧) = ٥ + (-٤) = ١$

(٢) $(٤\text{ق}-٢\text{هـ})'(٧) = ٤\,\text{ق}'(٧) - ٢\,\text{هـ}'(٧) = ٤ \times ٥ - ٢ \times -٤ = ٢٠ + ٨ = ٢٨$

(٣) $(\text{ق} \times \text{هـ})'(٧) = \text{ق}(٧) \times \text{هـ}'(٧) + \text{هـ}(٧) \times \text{ق}'(٧)$

$= ٣ \times -٤ + ٢ \times ٥$

$= -١٢ + ١٠ = -٢$

(٤) $\left(\dfrac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٧) = \dfrac{\text{هـ}(٧) \times \text{ق}'(٧) - \text{ق}(٧) \times \text{هـ}'(٧)}{(\text{هـ}(٧))^٢} = \dfrac{٢ \times ٥ - ٣ \times -٤}{٤}$

$= \dfrac{١٠ + ١٢}{٤} = \dfrac{٢٢}{٤}$

(٥) $\left(\dfrac{\text{هـ}(٧)}{\text{ق}}\right)'(٧) = \left(\dfrac{٢}{\text{ق}}\right)'(٧) = \dfrac{-٢ \times \text{ق}'(٧)}{(\text{ق}(٧))^٢} = \dfrac{-٢ \times ٥}{٩} = -\dfrac{١٠}{٩}$

(٦) $\left((\text{ق} \times \text{هـ})(٧)\right)' = (٣ \times ٢)' = \text{صفر}$

مثال: اذا كان $م(٣) = ٢$ ، $مَ(٣) = ٥$ وكان $هـ(س) = س^2 \times م(س) + \frac{٨س}{م(س)}$

جد : $هـَ(٣)$

الحل: $هـَ(س) = س^2 \times مَ(س) + م(س) \times ٢س + \frac{م(س) \times ٨ - ٨س \times مَ(س)}{(م(س))^2}$

$هـَ(٣) = ٩ \times ٥ + ٢ \times ٦ + \frac{٢ \times ٨ - ٢٤ \times ٥}{٤}$

$= ٤٥ + ١٢ + \frac{١٦ - ١٢٠}{٤} = ٥٧ + \frac{-١٠٤}{٤} = ٥٧ - ٢٦ = ٣١$

مثال: اذا كان $م(س) = ل(س) \times (٣س^2 + ٤)$ وكان $م(١) = ٢$ ، $مَ(١) =$ صفر

جد $لَ(١)$.

الحل: $ل(س) = \frac{م(س)}{٣س^2 + ٤} \Leftarrow لَ(س) = \frac{(٣س^2 + ٤) \times مَ(س) - م(س) \times ٦س}{(٣س^2 + ٤)^2}$

$\Leftarrow لَ(١) = \frac{(٣ + ٤) \times ٠ - ٢ \times ٦}{(٣ + ٤)^2} = \frac{-١٢}{٤٩}$

مثال: اذا كان $ص(٤) = ٥$ ، $صَ(٤) = -١$ ، $ص''(٤) = ٢$ فما قيمة $\left(\frac{ص}{صَ}\right)'(٤)$

الحل: $\left(\frac{ص}{صَ}\right)'(٤) = \frac{صَ(٤) \times صَ(٤) - ص(٤) \times ص''(٤)}{(صَ(٤))^2}$

$= \frac{-١ \times -١ - ٥ \times ٢}{١}$

$= \frac{١ - ١٠}{١}$

$= -٩$

عماد مسك

0795153669

* مشتقة الاقتران المتشعب المعرف بأكثر من قاعدة :

نشتق كل قاعدة لوحدها وتكون المشتقة موجودة عند نقطة التشعب إذا كان :
① ق متصل عند تلك النقطة ② المشتقة من اليمين تساوي المشتقة من اليسار .

مثال : $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^3 + 1 & \text{، س} < 1 \\ \text{س}^2 + \text{س} & \text{، } 1 \le \text{س} \le 4 \\ 5\text{س} & \text{، س} > 4 \end{cases}$

جد : $\text{ق}'(-2)$ ، $\text{ق}'(3)$ ، $\text{ق}'(7)$ ، $\text{ق}'(1)$ ، $\text{ق}'(4)$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س}^2 & \text{، س} < 1 \\ 2\text{س} + 1 & \text{، } 1 < \text{س} < 4 \\ 5 & \text{، س} > 4 \end{cases}$

$\text{ق}'(-2) = 3(-2)^2 = 12$ ، $\text{ق}'(3) = 2(3) + 1 = 7$ ، $\text{ق}'(7) = 5$

لإيجاد $\text{ق}'(1)$ ⇐ عند $\boxed{\text{س} = 1}$ $\text{ق}(1) = \lim_{\text{س} \to 1} \text{ق}(\text{س})$ ∴ ق متصل عند س = 1

$\text{ق}'_{-}(1) = 3(1)^2 = 3$ ، $\text{ق}'_{+}(1) = 2(1) + 1 = 3$ ⇐ $\text{ق}'(1) = 3$

لإيجاد $\text{ق}'(4)$ ⇐ عند $\boxed{\text{س} = 4}$ $\text{ق}(4) = \lim_{\text{س} \to 4} \text{ق}(\text{س})$ ∴ ق متصل عند س = 4

$\text{ق}'_{-}(4) = 2(4) + 1 = 9$ ، $\text{ق}'_{+}(4) = 5$ ⇐ $\text{ق}'_{-}(4) \ne \text{ق}'_{+}(4)$ ∴ $\text{ق}'(4)$ غير موجودة

ملاحظة : عند نقطة التشعب لا نضع المساواة في المشتقة إلا إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند تلك النقطة ، في المثال السابق يجوز وضع المساواة عند العدد (1) مع الحد 3س^2 أو $2\text{س} + 1$ بينما لا يجوز وضعها عند العدد (4)

مثال : $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ س}^2 + 8\text{س} & \text{، س} \le 2 \\ \text{س}^3 + \text{ب} & \text{، س} > 2 \end{cases}$ جد أ ، ب إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند $\boxed{\text{س} = 2}$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{أ س} + 8 & \text{، س} \le 2 \\ 3\text{س}^2 & \text{، س} > 2 \end{cases}$

$\text{ق}'_{-}(2) = \text{ق}'_{+}(2) \Leftarrow 2\text{أ} \times 2 + 8 = 3 \times 4 \Leftarrow 4\text{أ} = 12 - 8 \Leftarrow 4\text{أ} = 4 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 1}$

ق(س) متصل عند س = 2 ⇐ $\lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow 1 \times 4 + 8 \times 2 = (2)^3 + \text{ب}$

$\Leftarrow 20 = 8 + \text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 12}$

مثال: ق(س) = { أ$س^{٢}$ + ب س + جـ ، س ≤ ١ ؛ $س^{٣}$ ، س > ١ } جد أ ، ب ، جـ اذا كانت ق''(١) موجودة

الحل: ق'(س) = { ٢أ س + ب ، س ≤ ١ ؛ ٣$س^{٢}$ ، س > ١ }

ق''(س) = { ٢أ ، س ≤ ١ ؛ ٦س ، س > ١ }

ق''₋(١) = ق''₊(١) ⟸ ٢أ = ٦(١) ⟸ $\boxed{\text{أ = ٣}}$

ق'₋(١) = ق'₊(١) ⟸ ٢(٣)(١) + ب = ٣$(١)^{٢}$ ⟸ ٦ + ب = ٣ ⟸ $\boxed{\text{ب = -٣}}$

وبما أن ق متصل عند س = ١ ⟸ نها (س ← ١⁻) ق(س) = نها (س ← ١⁺) ق(س)

⟸ ٣$(١)^{٢}$ + (-٣)(١) + جـ = $(١)^{٣}$ ⟸ $\boxed{\text{جـ = ١}}$

مثال: ق(س) = { أ$س^{٢}$ - ب س ، س ≤ ٢ ؛ ٤ - ب$س^{٣}$ + أس ، س > ٢ } جد أ ، ب اذا كانت ق'(٢) موجودة

الحل: ق(س) متصل عند س = ٢ ⟸ نها (س ← ٢⁻) ق(س) = نها (س ← ٢⁺) ق(س)

⟸ ٤أ - ٢ب = ٤ - ٨ب + ٢أ

⟸ ٢أ + ٦ب = ٤ ———— (١)

ق'(س) = { ٢أس - ب ، س ≤ ٢ ؛ -٣ب$س^{٢}$ + أ ، س > ٢ }

ق'₋(٢) = ق'₊(٢) ⟸ ٤أ - ب = -١٢ب + أ

⟸ ٣أ + ١١ب = ٠ ———— (٢)

نحل المعادلتين (١) و (٢)

٢أ + ٦ب = ٤ ‏× ٣

٣أ + ١١ب = ٠ ‏× -٢

٦أ + ١٨ب = ١٢

-٦أ - ٢٢ب = ٠

-٤ب = ١٢ ⟸ $\boxed{\text{ب = -٣}}$

نعوض في (١) ٢أ + ٦(-٣) = ٤

٢أ - ١٨ = ٤

٢أ = ٢٢ ⟸ $\boxed{\text{أ = ١١}}$

مثال 3: جد ق'(3) في كل مما يلي:

1) $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 4س ، & س \neq 3 \\ 7 ، & س = 3 \end{cases}$

2) $ق(س) = \begin{cases} س^2 + س ، & س \neq 3 \\ 12 ، & س = 3 \end{cases}$

3) $ق(س) = \begin{cases} س^2 ، & س < 3 \\ 6س ، & س \geq 3 \end{cases}$

4) $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 9 ، & س < 3 \\ 6س ، & س \geq 3 \end{cases}$

الحل: 1) ق غير متصل عند س = 3 لذلك ق'(3) غير موجودة

2) ق متصل عند س = 3 $\Leftarrow$ $ق(س) = \begin{cases} س^2 + س ، & س < 3 \\ س^2 + س ، & س > 3 \\ 12 ، & س = 3 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $ق'(س) = \begin{cases} 2س + 1 ، & س < 3 \\ 2س + 1 ، & س > 3 \end{cases}$

$ق'_-(3) = ق'_+(3)$ $\therefore$ $ق'(3) = 7$

3) ق غير متصل عند س = 3 لذلك ق'(3) غير موجودة

4) ق متصل عند س = 3 $\Leftarrow$ $ق'(س) = \begin{cases} 2س ، & س < 3 \\ 6 ، & س > 3 \end{cases}$ $ق'_-(3) = ق'_+(3)$ $\therefore$ $ق'(3) = 6$

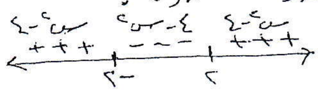
---

* **اشتقاق القيمة المطلقة**

نعيد تعريف الاقتران ثم نشتق كل قاعدة لوحدها مع الانتباه لنقاط التشعب.

مثال: $ق(س) = |س^2 - 4|$ أوجد ق'(2) ، ق'(1) ؟

الحل: $س^2 - 4 = 0 \Leftarrow س = \pm 2$



$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 4 ، & س \leq -2 \\ 4 - س^2 ، & -2 < س \leq 2 \\ س^2 - 4 ، & س > 2 \end{cases}$

عند س = 2 متصل

$\Leftarrow ق'(س) = \begin{cases} 2س ، & س < -2 \\ -2س ، & -2 < س < 2 \\ 2س ، & س > 2 \end{cases}$

$\begin{cases} ق'_-(2) = -2(2) = -4 \\ ق'_+(2) = 2(2) = 4 \end{cases}$ $\Leftarrow$ ق'(2) غير موجودة

$ق'(1) = -2(1) = -2$

مثال ٣: ق(س) = ٣س |٢س| جد ق'(٠) ، ق''(٠) ، ق'''(٠)

الحل: ٢س = ٠ ⟸ س = ٠

(−٢س: − − −) ٠ (٢س: + + +)

ق(س) = { −٦س² ، س < ٠ ؛ ٦س² ، س ≥ ٠ } ⟸ ق'(س) = { −١٢س ، س < ٠ ؛ ١٢س ، س > ٠ }

ق''(س) = { −١٢ ، س < ٠ ؛ ١٢ ، س > ٠ } ، ق'''(س) = { ٠ ، س < ٠ ؛ ٠ ، س > ٠ }

ق متصل عند س = ٠ ، ق'₋(٠) = ق'₊(٠) ∴ ق'(٠) = ٠

ق' متصل عند س = ٠ ، لكن ق''₋(٠) ≠ ق''₊(٠) ∴ ق''(٠) غير موجودة

ق'''(٠) غير موجودة لأنه ق''(٠) غير موجودة

---

* **ملاحظة:** إذا كانت مشتقة الصفة المطلقة مطلوبة عند عدد نعوض ذلك العدد فإذا كان ناتج التعويض داخل المطلق يعطي عدداً موجباً نأخذ الجزء الموجب ونشتق وإذا كان يعطي عدداً سالباً نأخذ الجزء السالب ونشتق.

مثال: ق(س) = |س³ + ٦س − ١٠| أوجد ق'(٢) ، ق'(١)

الحل: س = ٢ ⟸ ق(س) = س³ + ٦س − ١٠

ق'(س) = ٣س² + ٦

ق'(٢) = ١٨

س = ١ ⟸ ق(س) = −س³ − ٦س + ١٠

ق'(س) = −٣س² − ٦

ق'(١) = −٣ − ٦ = −٩

مثال ٤: ق(س) = |س² − ٥س + ٦| − √(س² − ٦س + ٩) أوجد ق'(١) ؟!

الحل: ق(س) = |س² − ٥س + ٦| − √((س − ٣)²) = |س² − ٥س + ٦| − |س − ٣|

عند س = ١ ⟸ ق(س) = س² − ٥س + ٦ + س − ٣

ق(س) = س² − ٤س + ٣

ق'(س) = ٢س − ٤

ق'(١) = −٢

*** مشتقة اقتران [س] :-**

$$\frac{د}{د س}\left[ع(س)\right] = \begin{cases} صفر & : ع(س) \notin ص \\ غير موجودة & : ع(س) \in ص \end{cases}$$

مثال: ق(س) = $\left[٩ - \frac{س}{٢}\right]$ جد ق$'$(٥) ، ق$'$(٨)

الحل: ق$'$(٥) = صفر ، ق$'$(٨) = غير موجودة

مثال: ق(س) = [٢س + ٦و٠] جد ق$'$(٤) ، ق$'$(٢و١)

الحل: ق$'$(٤) = صفر ، ق$'$(١و٢) = غير موجودة

مثال: ق(س) = $\left[\sqrt{٢س + ١}\right]$ جد ق$'$(١)

الحل: ق$'$(١) = صفر

مثال: ق(س) = [٣س + ٢] جد ق$'$(س)

الحل: ق$'$(س) = [٣س + ٢]$'$ ⇐ ق$'$(س) = $\begin{cases} غير موجودة & : ٣س \in ص \leftarrow س \in \frac{ص}{٣} \\ صفر & : ٣س \notin ص \leftarrow س \notin \frac{ص}{٣} \end{cases}$

مثال: ق(س) = $س^{٣}$ [س] جد ق$'$(٠) ، ق$'$(١)

الحل: نعيد تعريف [س] ⇐ ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} \times -١ & ، -١ \le س < ٠ \\ س^{٣} \times ٠ & ، ٠ \le س < ١ \\ س^{٣} \times ١ & ، ١ \le س < ٢ \end{cases}$ = $\begin{cases} -س^{٣} & ، -١ \le س < ٠ \\ ٠ & ، ٠ \le س < ١ \\ س^{٣} & ، ١ \le س < ٢ \end{cases}$

⇐ ق$'$(س) = $\begin{cases} -٣س^{٢} & ، -١ < س < ٠ \\ ٠ & ، ٠ < س < ١ \\ ٣س^{٢} & ، ١ < س < ٢ \end{cases}$

ق متصل عند س = ٠ ، $\begin{cases} ق'_{-}(٠) = ٠ \\ ق'_{+}(٠) = ٠ \end{cases}$ ⇐ ق$'$(٠) = ٠

ق غير متصل عند س = ١ لذلك فإن ق$'$(١) غير موجودة .

* الحالات التي يكون عندها م(س) غير قابل للاشتقاق ؟

① عند نقاط عدم الاتصال

② عندما تكون المشتقة من اليمين ≠ المشتقة من اليسار

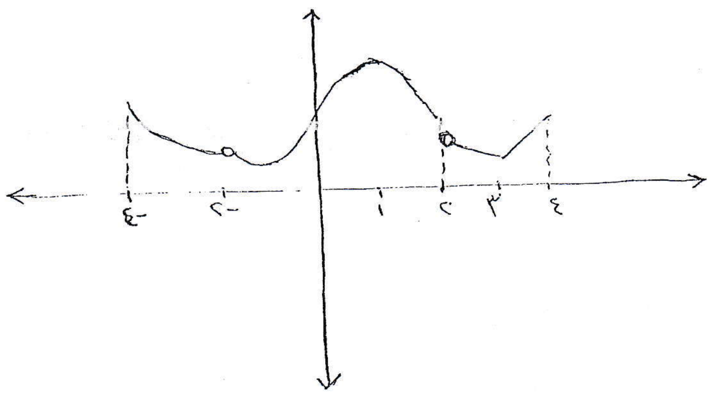
③ عندما يصبح (صفر مقام)

④ عند أطراف المجال المغلق

⑤ في [م(س)] عندما يكون لوحده ويكون م(س) ∈ ص

⑥ من الرسم : عند الأطراف وعند نقطة عدم الاتصال وعند الرؤوس المدببة ($م'_+ \neq م'_-$) عندها

مثال : معتمداً على الرسم التالي الذي يمثل م(س) في [-٤، ٤] جد قيم ‎أ ∈ [-٤، ٤] حيث م'(أ) غير موجودة مع ذكر السبب.



الحل : م' غير موجودة لكل س

س ∈ {-٤، ٤، -٢، ٢، ٣}

-٤، ٤ أطراف المجال (أطراف فترة)

عند س = ٢، -٢ غير معرف عندها

عند س = ٣ رأس مدبب حيث أن $م'_-(٣) \neq م'_+(٣)$

سؤال : م(س) = $س^{\frac{٤}{٣}}$ ، س ∈ [-٢، ٣] ابحث قابلية الاشتقاق لـ م(س) على [-٢، ٣]

م(س) = |٤س - $س^٢$| ابحث قابلية الاشتقاق لـ م(س) على [-٢، ٥]

كيف نعين جد نقاط يكون عندها م(س) غير قابل للاشتقاق

مثال: ق(س) = س² × |س − ٣| ابحث قابلية الاشتقاق على ح

الحل: نعيد تعريف |س − ٣| ⇐ س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣

|س − ٣| = { س − ٣ ، س ≥ ٣
           ٣ − س ، س < ٣

⇐ ق(س) = { ٣س² − س³ ، س < ٣
            س³ − ٣س² ، س ≥ ٣

ق′(س) = { ٦س − ٣س² ، س < ٣
           ٣س² − ٦س ، س > ٣

ق متصل عند $\boxed{س = ٣}$

ق′₋(٣) = −٩   ق′₊(٣) = ٩   ∴ ق′(٣) غير موجودة

مثال: ابحث قابلية اشتقاق ق(س) على [٠ ، ٤]   ق(س) = { [س + ١] ، ٠ ≤ س < ٢
                                                        ½ س² ، ٢ ≤ س ≤ ٤

الحل: نعيد تعريف [س + ١]   ل = ١

⇐ ق(س) = { ١ ، ٠ ≤ س < ١
            ٢ ، ١ ≤ س < ٢
            ½ س² ، ٢ ≤ س ≤ ٤

⇐ ق′(س) = { ٠ ، ٠ < س < ١
             ٠ ، ١ < س < ٢
             س ، ٢ < س < ٤

ق′ غير موجودة عند س = ٠ ، ٤ لأنها أطراف فترة

ق غير متصل عند س = ١   ∴ ق′(١) غير موجودة

ق متصل عند س = ٢ لكنه ق′₋(٢) ≠ ق′₊(٢)   ∴ ق′(٢) غير موجودة

مثال: ق(س) = |س − ٥| + |٢س| ابحث قابلية اشتقاق ق(س) على ح

الحل: س − ٥ = ٠ ⇐ س = ٥   ،   ٢س = ٠ ⇐ س = ٠

|س − ٥| = { ٥ − س ، س < ٥
            س − ٥ ، س ≥ ٥

|٢س| = { −٢س ، س < ٠
          ٢س ، س ≥ ٠

⇐ ق(س) = { ٥ − ٣س ، س ≤ ٠
            س + ٥ ، ٠ < س < ٥
            ٣س − ٥ ، س ≥ ٥

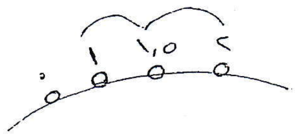
ق′(س) = { −٣ ، س < ٠
           ١ ، ٠ < س < ٥
           ٣ ، س > ٥

ق متصل عند س = ٠ لكنه ق′₋(٠) ≠ ق′₊(٠)   ∴ ق′(٠) غ م

ق متصل عند س = ٥ لكنه ق′₋(٥) ≠ ق′₊(٥)   ∴ ق′(٥) غ م

مثال: ق(س) = { س^2 − ٣س + ٤ ، −٢ ≤ س < ١
[٢س] ، ١ ≤ س < ٢
|٧ − ٢س| ، ٢ ≤ س ≤ ٦

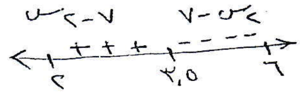
جد ق'(س) لكل س ∈ [−٢، ٦]



الحل: نعيد تعريف [٢س] ⇐ ل = $\frac{1}{2}$

[٢س] = { ٢ ، ١ ≤ س < ١,٥
٣ ، ١,٥ ≤ س < ٢

نعيد تعريف |٧ − ٢س| ⇐ ٧ − ٢س = ٠ ⇐ س = ٣,٥



|٧ − ٢س| = { ٧ − ٢س ، ٢ ≤ س ≤ ٣,٥
٢س − ٧ ، ٣,٥ ≤ س ≤ ٦

⇐ ق(س) = { س^2 − ٣س + ٤ ، −٢ ≤ س < ١
٢ ، ١ ≤ س < ١,٥
٣ ، ١,٥ ≤ س < ٢
٧ − ٢س ، ٢ ≤ س ≤ ٣,٥
٢س − ٧ ، ٣,٥ ≤ س ≤ ٦

⇐ ق'(س) = { ٢س − ٣ ، −٢ < س < ١
٠ ، ١ < س < ١,٥
٠ ، ١,٥ < س < ٢
−٢ ، ٢ < س < ٣,٥
٢ ، ٣,٥ < س < ٦

ق متصل عند س = ١ لكنه ق'₋(١) = ق'₊(١) ∴ ق'(١) = صفر

ق'(−٢) ، ق'(٦) غير موجودة أطراف فترات

ق'(١,٥) غير موجودة لأنه ق غير متصل عند س = ١,٥

ق'(٢) ، ق'(٣,٥) غير موجودة لأنه ق'₋(٢) ≠ ق'₊(٢) أيضاً ق'₋(٣,٥) ≠ ق'₊(٣,٥)

سؤال: ق(س) = سⁿ ، ق$^{(3)}$(س) = ٦٠ س$^{ن-3}$

أوجد ن ؟! ــــــــ الإجابة $\boxed{ن = ٥}$

عماد مسك
0795153669

* مشتقات الاقترانات الدائرية:

ق(س) = جاس ⇐ ق'(س) = جتاس

ق(س) = جتاس ⇐ ق'(س) = − جاس

ق(س) = ظاس ⇐ ق'(س) = قا²س

ق(س) = ظتاس ⇐ ق'(س) = − قتا²س

ق(س) = قاس ⇐ ق'(س) = قاس ظاس

ق(س) = قتاس ⇐ ق'(س) = − قتاس ظتاس

* كل اقتران دائري يحتوي على حرف (تا) فإن مشتقته تضرب بسالب

سؤال: أثبت أن ق'(جاس) = جتاس

الحل: نستخدم تعريف المشتقة ق'(س) = نها_{ع←س} $\frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$ = نها_{ع←س} $\frac{\text{جاع} - \text{جاس}}{\text{ع} - \text{س}}$

= نها_{ع←س} $\frac{2\ \text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\ \text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{\text{ع} - \text{س}}$ = نها_{ع←س} 2 جتا$\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}$ × نها_{ع←س} $\frac{\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{\text{ع} - \text{س}}$

= 2 جتا$\frac{\text{س}+\text{س}}{2}$ × $\frac{1}{2}$

= 2 جتاس × $\frac{1}{2}$ = جتاس

---

* ق(س) = (جا هـ(س))^ن ⇐ ق'(س) = ن (جا هـ(س))^(ن−1) × جتا هـ(س) × هـ'(س)

⇐ مشتقة القوس × مشتقة الاقتران الدائري × مشتقة الزاوية

مثال: اذا كان ق(س) = جا(−س) جد ق'(س)

الحل: ق'(س) = − جتا(−س)

مثال: ق(س) = س ظتاس جد ق'(س) ثم جد ق'($\frac{\pi}{4}$)

الحل: ق'(س) = س(− قتا²س) + ظتاس

ق'($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{\pi}{4}$ × − قتا²($\frac{\pi}{4}$) + ظتا($\frac{\pi}{4}$)

= $-\frac{\pi}{2} + 1$

مثال: ص = جا πس + جتا $\frac{\pi}{\text{س}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = 2

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتا πس × π + (− جا$\frac{\pi}{\text{س}}$) × $\frac{-\pi}{\text{س}^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=2}$ = جتا 2π × π + جا $\frac{\pi}{2}$ × $\frac{\pi}{4}$ = 1 × π + 1 × $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{5\pi}{4}$

مثال: $\text{ص} = \dfrac{\text{جاس}}{1 + \text{جتاس}}$ جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{(1+\text{جتاس})(\text{جتاس}) - (\text{جاس})(-\text{جاس})}{(1+\text{جتاس})^2} = \dfrac{\text{جتاس} + \text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}{(1+\text{جتاس})^2}$

$= \dfrac{1 + \text{جتاس}}{(1+\text{جتاس})^2} = \dfrac{1}{1 + \text{جتاس}}$

مثال: $\text{ص} = \text{س}^2 \, \text{قتا} \dfrac{1}{\text{س}}$ جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 \times -\text{قتا}\dfrac{1}{\text{س}} \, \text{ظتا}\dfrac{1}{\text{س}} \times \dfrac{-1}{\text{س}^2} + \text{قتا}\dfrac{1}{\text{س}} \times 2\text{س}$

$= \text{قتا}\dfrac{1}{\text{س}} \, \text{ظتا}\dfrac{1}{\text{س}} + 2\text{س} \, \text{قتا}\dfrac{1}{\text{س}}$

مثال: $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{1 - \text{ظاس}}$ جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{(1-\text{ظاس})(1) - (\text{س})(-\text{قا}^2\text{س})}{(1-\text{ظاس})^2} = \dfrac{1 - \text{ظاس} + \text{س}\,\text{قا}^2\text{س}}{(1-\text{ظاس})^2}$

مثال: $\text{ق(س)} = \text{جتا}^4 2\text{س}$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$

الحل: $\text{ق}'\text{(س)} = 4\,\text{جتا}^3 2\text{س} \times -\text{جا} 2\text{س} \times 2$

$= -8\,\text{جتا}^3 2\text{س} \; \text{جا} 2\text{س}$

مثال: $\text{ق(س)} = \text{جا}^6(\text{س}^2 + 3\text{س} - 1)$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$

الحل: $\text{ق}'\text{(س)} = 6\,\text{جا}^5(\text{س}^2+3\text{س}-1) \times \text{جتا}(\text{س}^2+3\text{س}-1) \times (2\text{س}+3)$

$= (12\text{س}+18)\,\text{جتا}(\text{س}^2+3\text{س}-1)\,\text{جا}^5(\text{س}^2+3\text{س}-1)$

مثال: $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{ظاس}}$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$

الحل: $\text{ق}'\text{(س)} = \dfrac{\text{قا}^2\text{س}}{2\sqrt{\text{ظاس}}}$

مثال: $\text{ق(س)} = \text{قتا}^3\text{س}$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$

الحل: $\text{ق}'\text{(س)} = 3\,\text{قتا}^2\text{س} \times -\text{قتاس}\,\text{ظتاس} = -3\,\text{قتا}^3\text{س}\,\text{ظتاس}$

مثال: ص = جا^{2} ٣س + جتا^{2} ٣س جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: ص = ١ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = صفر

مثال: ص = جتا^{2} س − جا^{2} س جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا س × − جا س × ٢ − (٢ جا س × جتا س × ٢)

= −٤ جتا س جا س − ٤ جتا س جا س

= −٨ جتا س جا س

مثال: اذا كان ق(س) = ٥ جا ٣س وكانت ق$''$(س) = أ ق(س) جد أ ؟

الحل: ق$'$(س) = ٥ جتا ٣س × ٣ = ١٥ جتا ٣س

ق$''$(س) = ١٥ × − جا ٣س × ٣ = −٤٥ جا ٣س

⇐ ق$''$(س) = أ ق(س) ⇐ −٤٥ جا ٣س = ٥أ جا ٣س

⇐ ٥أ = −٤٥ ⇐ $\boxed{أ = -٩}$

مثال: اذا كان ق(س) = (س^{2} + ٢س + ١) × $\frac{د}{دس}$ (جتا^{2} س) جد ق$'$(٠)

الحل: $\frac{د}{دس}$ (جتا^{2} س) = −٢ جا ٢س

∴ ق(س) = $\underbrace{(س^{2} + ٢س + ١)}_{1}$ × $\underbrace{(-٢ جا ٢س)}_{2}$

ق$'$(س) = (س^{2} + ٢س + ١) × (−٢ × ٢ جتا ٢س) + (−٢ جا ٢س)(٢س + ٢)

⇐ ق$'$(١) = (٠ + ٠ + ١) × (−٤ × ١) + (٠)(٠ + ٢) = −٤ + ٠ = −٤

مثال: اذا كان ص = أ جا س + ب جتا س ، أ، ب ∈ ح فاثبت أن:

(ص$'$)^{2} + ص^{2} = أ^{2} + ب^{2}

الحل: ص$'$ = أ جتا س − ب جا س

(ص$'$)^{2} + ص^{2} = (أ جتا س − ب جا س)^{2} + (أ جا س + ب جتا س)^{2}

= أ^{2} جتا^{2} س ~~− ٢أب جا س جتا س~~ + ب^{2} جا^{2} س + أ^{2} جا^{2} س ~~+ ٢أب جا س جتا س~~

+ ب^{2} جتا^{2} س

= أ^{2} (جا^{2} س + جتا^{2} س) + ب^{2} (جا^{2} س + جتا^{2} س)

= أ^{2} (١) + ب^{2} (١) = أ^{2} + ب^{2}

مثال: أثبت أن ص = جتاس ، ص = جاس حلولاً للمعادلة ص + ص'' = صفر

الحل: (1) ص = جتاس

ص' = − جاس

ص'' = − جتاس

⇐ ص + ص'' = جتاس − جتاس = صفر ∴ ص = جتاس هي حل

(2) ص = جاس

ص' = جتاس

ص'' = − جاس

⇐ ص + ص'' = جاس − جاس = صفر ∴ ص = جاس هي حل

سؤال: اذا كانت ص = جاس + جتاس أثبت أن (ص')² + ص² = 2

سؤال: (أ) ق(س) = قا²س جد ق'($\frac{\pi}{6}$)

ب) ق(س) = ظتاس = $\frac{جتاس}{جاس}$ جد ق'(س)

ج) ق(س) = قاس = $\frac{1}{جتاس}$ جد ق'(س)

د) ق(س) = قتاس = $\frac{1}{جاس}$ جد ق'(س)

مثال: جد النهايات (أ) نها هـ←0 $\frac{ظا(3س+3هـ) - ظا3س}{3هـ}$

ب) نها ع←س $\frac{ظتا5ع - ظتا5س}{2س - 2ع}$

ج) نها هـ←0 $\frac{5 جتا\frac{\pi}{2} - 5 جتا(\frac{\pi}{2}+هـ)}{هـ}$

د) نها هـ←0 $\frac{جا(س+هـ) - جتا(\frac{\pi}{2}-س)}{هـ}$

هـ) نها هـ←0 $\frac{قا(\frac{\pi}{3}+هـ) - \frac{\pi}{3}}{هـ}$

الحل: (أ) $\frac{1}{3}$ × مشتقة ظا3س = $\frac{1}{3}$ قا²3س × 3 = قا²3س

ب) $-\frac{1}{2}$ × مشتقة ظتا5س = $-\frac{1}{2}$ × −قتا²5س × 5 = $\frac{5}{2}$ قتا²5س

ج) −5 × مشتقة جتاس عندما س = $\frac{\pi}{2}$ وتساوي 5 جاس = 5 جا$\frac{\pi}{2}$ = 5

د) لاحظ أن جتا($\frac{\pi}{2}$ − س) = جاس ∴ مشتقة جاس = جتاس

هـ) مشتقة قا$\frac{\pi}{3}$ وتساوي قا$\frac{\pi}{3}$ ظا$\frac{\pi}{3}$ = 2 × $\sqrt{3}$ = 2$\sqrt{3}$

مثال : إذا كانت ص = قاس + ظاس أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{1-\text{جاس}}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قاس ظاس + قا^{2}س = $\frac{1}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{\text{جاس} + 1}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \frac{1 + \text{جاس}}{1 - \text{جا}^2\text{س}} = \frac{\cancel{1 + \text{جاس}}}{(1 - \text{جاس})\cancel{(1 + \text{جاس})}} = \frac{1}{1 - \text{جاس}}$

مثال : جد ق$'$(س) حيث س ≠ ٠ ، ثم جد ق$'$(٠) باستخدام التعريف .

أ) ق(س) = $\sqrt[3]{\text{س}}$ جاس

ب) ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 \text{ جا} \frac{1}{\text{س}} & \text{، س} \neq 0 \\ \text{صفر} & \text{، س} = 0 \end{cases}$

الحل : أ) ق(س) = س$^{\frac{1}{3}}$ جاس

ق$'$(س) = س$^{\frac{1}{3}}$ جتاس + جاس × $\frac{1}{3}$ س$^{-\frac{2}{3}}$ = $\sqrt[3]{\text{س}}$ جتاس + $\frac{\text{جاس}}{3 \text{ س}^{\frac{2}{3}}}$

ق$'$(٠) = $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(٠)}}{\text{س} - 0} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} \text{ جاس} - 0}{\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \sqrt[3]{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ = صفر × ١ = صفر

ب) ق$'$(س) = س^2 × جتا$\frac{1}{\text{س}}$ × $\frac{-1}{\text{س}^2}$ + جا$\frac{1}{\text{س}}$ × ٢س

= − جتا$\frac{1}{\text{س}}$ + ٢س جا$\frac{1}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

ق$'$(٠) = $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(٠)}}{\text{س} - 0} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 \text{ جا}\frac{1}{\text{س}} - 0}{\text{س} - 0} = \lim\limits_{\text{س} \to 0}$ س جا$\frac{1}{\text{س}}$ = صفر

في المثالين السابقين لا يمكن إيجاد ق$'$(٠) من خلال قواعد الاشتقاق

سؤال : جد ق$'$(س) لكل مما يلي :

أ) ق(س) = ٥ س جتا٢ س .... $\boxed{-20 \text{ س جتا٢س} - 20 \text{ جا٢س}}$

ب) ق(س) = جا٣ س^2 .... $\boxed{-36 \text{ س}^2 \text{ جا٣س}^2 + 6 \text{ جتا٣س}^2}$

* **قاعدة السلسلة:**

إذا كانت ص = م(ع) ، ع = هـ(س) فإنه:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

أمثلة:-

(١) إذا كانت ص = ع^{٣} + ٢ ، ع = س^{٢} - ٢س جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دع}$ = ٣ع^{٢} ، $\frac{دع}{دس}$ = ٢س - ٢

⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٣ع^{٢} × ٢س - ٢ = ٣(س^{٢} - ٢س)^{٢} (٢س - ٢)

سؤال: إذا كانت ص = ن^{٢} - $\frac{ن^{٣}}{٣}$ ، ن = س^{٢} + ٢ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١}$ —— $\boxed{-٦}$

سؤال: إذا كانت ص = (ع^{٢} - ٣) ، ع = (س^{٢} + ١)(٥س - ٤) جد $\frac{دص}{دع}$ عندما س = -١ —— $\boxed{\frac{-١}{١٢}}$

مثال:- ص = ع^{٢} + ٣ع + ٥ ، ع = |٣س - ٢| جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = -١

الحل: عند س = -١ فإن ع = ٢ - ٣س ⇐ ع = ٥

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$\frac{دص}{دع}$ = ٢ع + ٣ ، $\frac{دع}{دس}$ = -٣

$\frac{دص}{دس}$ = (٢ع + ٣)(-٣) = (٢(٥) + ٣)(-٣) = -٣٩

مثال: ص = ظاع ، ع = س^{٣} + ٥س جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دع}$ = قا^{٢}ع ، $\frac{دع}{دس}$ = ٣س^{٢} + ٥

$\frac{دص}{دس}$ = قا^{٢}ع × (٣س^{٢} + ٥) = قا^{٢}(س^{٣} + ٥س) × (٣س^{٢} + ٥)

مثال: $ص = ع^٢ - ٧ع + ٣$ ، $ع = س^٣ - ١$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} + ٩ \times \frac{دع}{دس} - ٦س^٥ = ٠$

الحل: $\frac{دص}{دع} = ٢ع - ٧$ ، $\frac{دع}{دس} = ٣س^٢$

$$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = (٢ع - ٧)(٣س^٢) = \left(٢(س^٣ - ١) - ٧\right) \times ٣س^٢$$

$$= (٢س^٣ - ٩)(٣س^٢)$$

$$= ٦س^٥ - ٢٧س^٢$$

$$\Leftarrow \frac{دص}{دس} + ٩ \times \frac{دع}{دس} - ٦س^٥ = ٦س^٥ - ٢٧س^٢ + ٩(٣س^٢) - ٦س^٥ = صفر$$

مثال: اذا كانت $ع = \frac{ص + ٢}{ص - ١}$ ، $ص = \frac{س + ٤}{س - ٢}$ أثبت أن $\frac{دع}{دس} = \frac{١}{٢}$

الحل: $\frac{دع}{دص} = \frac{(ص - ١)(١) - (ص + ٢)(١)}{(ص - ١)^٢} = \frac{ص - ١ - ص - ٢}{(ص - ١)^٢} = \frac{-٣}{(ص - ١)^٢}$

$$= \frac{-٣}{\left(\frac{س + ٤}{س - ٢} - ١\right)^٢} = \frac{-٣}{\left(\frac{س + ٤ - س + ٢}{س - ٢}\right)^٢} = \frac{-٣}{\left(\frac{٦}{س - ٢}\right)^٢} = \frac{-٣}{\frac{٣٦}{(س - ٢)^٢}}$$

$$= \frac{-٣(س - ٢)^٢}{٣٦}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{(س - ٢)(١) - (س + ٤)(١)}{(س - ٢)^٢} = \frac{س - ٢ - س - ٤}{(س - ٢)^٢} = \frac{-٦}{(س - ٢)^٢}$$

$$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس} = \frac{-٣\cancel{(س - ٢)^٢}}{٣٦} \times \frac{-٦}{\cancel{(س - ٢)^٢}} = \frac{١٨}{٣٦} = \frac{١}{٢}$$

سؤال: اذا كانت $ص = ٢ع^٢ - ٩ع + ٤$ ، $ع = س^٢ + ٣$ جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

الإجابة $\boxed{٢٤س^٢ + ١٤}$

مثال: ص = ن^{٣} + ن^{٢} ، س = ن^{٢} + ١ ، جد $\left.\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right|_{ن=٥}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دص}{دن} = ٣ن^{٢} + ٢ن$ ، $\frac{دس}{دن} = ٢ن$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = (٣ن^{٢} + ٢ن) \times \frac{١}{٢ن} = \frac{٣ن^{٢}+٢ن}{٢ن} = \frac{٣ن}{٢} + ١$

المطلوب: $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ نفرض ع $= \frac{٣ن}{٢} + ١$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{دع}{دس}$ لكن ع دالة بدلالة ن نستخدم السلسلة مرة أخرى،

$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دن} \times \frac{دن}{دس} \Leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢ن} = \frac{٣}{٤ن}$

$\left.\frac{دع}{دس}\right|_{ن=٥} = \frac{٣}{٤(٥)} = \frac{٣}{٢٠}$

مثال: س = جان ، ص = جتان جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عندما ن = $\frac{\pi}{٣}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دس}{دن} = $ جتان

$\frac{دص}{دن} = -$جان $\Leftarrow \frac{دص}{دس} = -$جان $\times \frac{١}{جتان} = \frac{-جان}{جتان} = -$ظان

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{دع}{دس}$ ∴ نفرض $\frac{دص}{دس} =$ ع $\Leftarrow$ ع $= -$ظان

$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دع}{دس} = -$قا^{٢}ن $\times \frac{١}{جتان} = \frac{-قا^{٢}ن}{جتان} = \frac{-١}{جتا^{٣}ن}$

$\left.\frac{دع}{دس}\right|_{ن=\frac{\pi}{٣}} = \frac{-١}{جتا^{٣}\frac{\pi}{٣}} = \frac{-١}{(\frac{١}{٢})^{٢}} = \frac{-١}{\frac{١}{٨}} = -٨$

مثال: جد معدل التغير في مساحة المربع بالنسبة لمحيطه عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم ؟

الحل: $\text{م} = \text{س}^2$ المطلوب: $\left.\frac{\text{دم}}{\text{دح}}\right|_{\text{س}=10}$

$\text{ح} = 4\text{س}$ ← المحيط

$\frac{\text{دم}}{\text{دس}} = 2\text{س}$ ، $\frac{\text{دح}}{\text{دس}} = 4$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دح}} = \frac{\text{دم}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دح}} = 2\text{س} \times \frac{1}{4} = \frac{\text{س}}{2}$$

$$\left.\frac{\text{دم}}{\text{دح}}\right|_{\text{س}=10} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال: اذا كانت $\text{ص} = \text{س}^4 - 4\text{س}^3 + 1$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{د}(5\text{س})}$

الحل: $\text{ص} = \text{س}^4 - 4\text{س}^3 + 1$ ، $\text{ع} = 5\text{س}$ المطلوب: $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^3 - 12\text{س}^2$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 5$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دع}} = (4\text{س}^3 - 12\text{س}^2)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{4\text{س}^3 - 12\text{س}^2}{5}$$

---

* **قانون القوس:**

اذا كان $\text{ص} = (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}\,(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-1} \times \text{هـ}'(\text{س})$

البرهان: نفرض $\text{ع} = \text{هـ}(\text{س})$

$\Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{هـ}'(\text{س})$

$\therefore \text{ص} = \text{ع}^{\text{ن}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \text{ن}\,\text{ع}^{\text{ن}-1}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{ن}\,\text{ع}^{\text{ن}-1} \times \text{هـ}'(\text{س})$$

$$= \text{ن}\,(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-1} \times \text{هـ}'(\text{س})$$

مثال: جد $\frac{دص}{دس}$ فيما يلي:

① $ص = (٢س - س^٣)^٣ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣(٢س - س^٣)^٢ (٢ - ٣س^٢)$

② $ص = \sqrt[٥]{(٥س - ٣)(س^٢ + ٢)} \Leftarrow ص = \left((٥س - ٣)(س^٢ + ٢)\right)^{\frac{١}{٥}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٥}\left((٥س - ٣)(س^٢ + ٢)\right)^{\frac{-٤}{٥}} \left((٥س - ٣)(٢س) + (س^٢ + ٢)(٥)\right)$

③ $ص = \frac{-٢}{(س^٣ - ١)^٤} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٢ \times ٤ (س^٣ - ١)^٣ (٣س^٢)}{(س^٣ - ١)^٨} = \frac{٢٤س^٢}{(س^٣ - ١)^٥}$

④ $ص = (ظاس + ظتاس)^٤$ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س = \frac{\pi}{٤}}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٤(ظاس + ظتاس)^٣ (قا^٢س - قتا^٢س)$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س = \frac{\pi}{٤}} = ٤(١ + ١)^٣ \left((\sqrt{٢})^٢ - (\sqrt{٢})^٢\right) = ٤(٨)(صفر) = صفر$

مثال: $ق(س) = (س^٢ - \frac{٤}{س})^٣$ جد $ق'(٢)$

الحل: $ق'(س) = ٣(س^٢ - \frac{٤}{س})^٢ (٢س + \frac{٤}{س^٢})$

$ق'(٢) = ٣(٤ - ٢)^٢ \times (٤ + ١) = ٣ \times ٤ \times ٥ = ٦٠$

مثال: $ص = \left(\frac{ع + ١}{ع - ١}\right)^٢$ ، $ع = س^٢ + ٢س$ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س = ١}$

الحل: عند $س = ١$ فإن $ع = (١)^٢ + ٢(١) = ٣$

$\frac{دص}{دع} = ٢\left(\frac{ع + ١}{ع - ١}\right) \times \frac{(١)(ع - ١) - (١)(ع + ١)}{(ع - ١)^٢} = ٢\left(\frac{ع + ١}{ع - ١}\right) \times \frac{-٢}{(ع - ١)^٢}$

وعند $ع = ٣ \Leftarrow \frac{دص}{دع} = ٢\left(\frac{٣ + ١}{٣ - ١}\right) \times \frac{-٢}{(٣ - ١)^٢} = ٢ \times \frac{٤}{٢} \times \frac{-٢}{٤} = -٢$

$\frac{دع}{دس} = ٢س + ٢ \Leftarrow \frac{دع}{دس}\Big|_{س = ١} = ٤$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = -٢ \times ٤ = -٨$

(٥،٨)

مثال: اذا كانت ص = (قاس + ظاس)^ن ، أثبت أن دص/دس = ن ص قاس

الحل: دص/دس = ن (قاس + ظاس)^(ن-١) × (قاس ظاس + قا^٢س)

= ن (قاس + ظاس)^(ن-١) × قاس (ظاس + قاس)

= ن (قاس + ظاس)^ن × قاس = ن ص قاس

مثال: ص = قا^٥ ٣س + ظتا^٣ س^٢ جد دص/دس

الحل: دص/دس = ٥ قا^٤ ٣س × قا٣س ظا٣س × ٣ + ٣ ظتا^٢ س^٢ × - قتا^٢ س^٢ × ٢س

= ١٥ قا^٥ ٣س ظا٣س - ٦س ظتا^٢ س^٢ قتا^٢ س^٢

سؤال: (١) ص = س ظا(١/س) جد د^٢ص/دس^٢ .... الاجابة: ٢/س^٣ قا^٢(١/س) ظا(١/س)

(٢) ص = س^٢ جتا^٣(١/س) جد دص/دس .... الاجابة: ٣ جتا^٢(١/س) جا(١/س) + ٢س جتا^٣(١/س)

مثال: ص = جتا^٤ ٢س + جا^٣(π/٢) + ٥ ظا^٣(π/٤) جد دص/دس

الحل: دص/دس = ٤ جتا^٣ ٢س × - جا ٢س × ٢ + صفر + صفر

= - ٨ جتا^٣ ٢س جا ٢س

مثال: جد النهايات التالية:

(١) نها_(هـ ← ٠) [جا^٣(π/٣ + هـ) - جا^٣(π/٣)] / هـ = مشتقة جا^٣س عند س = π/٣

= ٣ جا^٢س × جتاس

= ٣ جا^٢(π/٣) × جتا(π/٣) = ٣ (√٣/٢)^٢ × ١/٢ = ٣ × ٣/٤ × ١/٢ = ٩/٨

(٢) نها_(س ← π/٨) [ظتا^٢ ٢س - ظتا^٢(π/٤)] / (٨س - π) = نها_(س ← π/٨) [ظتا^٢ ٢س - ظتا^٢(π/٤)] / ٨(س - π/٨)

= ١/٨ × مشتقة ظتا^٢ ٢س عند س = π/٨

= ١/٨ × ٢ ظتا ٢س × - قتا^٢ ٢س × ٢ = - ١/٢ × ظتا(π/٤) قتا^٢(π/٤)

= - ١/٢ × ١ × ٢

= - ١

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[5]{(\text{س}^3 + 4\text{س})^8}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^3 + 4\text{س})^{\frac{8}{5}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{8}{5}(\text{س}^3 + 4\text{س})^{\frac{3}{5}} \times (3\text{س}^2 + 4)$

سؤال: أثبت صحة ما يلي:

① ص = ظا²س فإن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2(1+\text{ص})(1+3\text{ص})$

② ص = س ظاس فإن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2(1+\text{ص})\,\text{قا}^2\text{س}$

الحل: ① $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{ظاس}\,\text{قا}^2\text{س}$

$\Leftarrow \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\,\text{ظاس} \times 2\,\text{قاس} \times \text{قاس}\,\text{ظاس} + \text{قا}^2\text{س} \times 2\,\text{قا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{قا}^2\text{س}(2\,\text{ظا}^2\text{س} + \text{قا}^2\text{س}) = 2(1 + \text{ظا}^2\text{س})(2\,\text{ظا}^2\text{س} + 1 + \text{ظا}^2\text{س})$

$= 2(1+\text{ص})(2\text{ص} + 1 + \text{ص})$

$= 2(1+\text{ص})(1+3\text{ص})$

---

② $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \text{قا}^2\text{س} + \text{ظاس} \times 1$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{س} \times 2\,\text{قاس}\,\text{قاس}\,\text{ظاس} + \text{قا}^2\text{س} \times 1 + \text{قا}^2\text{س}$

$= 2\text{س}\,\text{قا}^2\text{س}\,\text{ظاس} + 2\,\text{قا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{قا}^2\text{س}(\text{س}\,\text{ظاس} + 1) = 2\,\text{قا}^2\text{س}(\text{ص} + 1)$

سؤال: أثبت صحة ما يلي:

① ص = ظاس + $\frac{1}{3}$ ظا³س فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^4\text{س}$

② ص = جاس − $\frac{1}{3}$ جا³س فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}^3\text{س}$

③ ص = ظتاس + قتاس فإن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{ص}^2\,\text{قتاس}$

* **قاعدة:** اذا كانت $ص = هـ(ق(س))$ فإن $\frac{دص}{دس} = هـَ(ق(س)) \times قَ(س)$

مثال: اذا كانت $ص = هـ(٥س)$ ، $هـَ(١٠) = -٢$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٢$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٥ هـَ(٥س) \Leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢} = ٥ \times هـَ(١٠) = ٥ \times -٢ = -١٠$

مثال: اذا كانت $ص = هـ(س^٢ - ٣س + ٤)$ ، $هـَ(٣) = ٤$ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = (٢س - ٣)\, هـَ(س^٢ - ٣س + ٤)$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} = (٢ - ٣)\, هـَ(٢) = -١ \times ٤ = -٤$

مثال: اذا كانت $ص = هـ(جاس)$ ، $هـَ(\frac{١}{\sqrt{٢}}) = -٢$ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{٣\pi}{٤}}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = جتاس\, هـَ(جاس)$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{٣\pi}{٤}} = جتا\frac{٣\pi}{٤}\, هـَ(\frac{٣\pi}{٤}) = \frac{-١}{\sqrt{٢}}\, هـَ(\frac{١}{\sqrt{٢}}) = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times -٢ = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

مثال: اذا كانت $هـ(جاس) = جتاس - ظاس$ حيث س في **الربع الأول** جد $هـَ(\frac{١}{٢})$

الحل: $جتاس\, هـَ(جاس) = -جاس - قا^٢س$

$جتا\frac{\pi}{٦}\, هـَ(جا\frac{\pi}{٦}) = -جا\frac{\pi}{٦} - قا^٢\frac{\pi}{٦}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}\, هـَ(\frac{١}{٢}) = -\frac{١}{٢} - \frac{٤}{٣} \Leftarrow \frac{\sqrt{٣}}{٢}\, هـَ(\frac{١}{٢}) = -\frac{١١}{٦}$

$\Leftarrow هـَ(\frac{١}{٢}) = \frac{-١١}{٦} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{-١١}{٣\sqrt{٣}}$

مثال: اذا كانت $ص = \left(\sqrt{قتاس - ظتاس}\right)^ن$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ن}{٢}\, قتاس\, ص$

$ص = (قتاس - ظتاس)^{\frac{ن}{٢}}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{ن}{٢}(قتاس - ظتاس)^{\frac{ن}{٢}-١} \times (-قتاس\, ظتاس + قتا^٢س)$

$= \frac{ن}{٢}(قتاس - ظتاس)^{\frac{ن}{٢}-١} \times قتاس\,(قتاس - ظتاس)$

$= \frac{ن}{٢}(قتاس - ظتاس)^{\frac{ن}{٢}} \times قتاس$

$= \frac{ن}{٢} \times ص \times قتاس$

مثال: اذا كان ل(س) = { هـ²(س) + ٥ ، س ≤ ١ ؛ ٦س² + ٣ ، س > ١ } وكانت هـ(س) > ٠ ، ل(س) قابلاً للاشتقاق عند س = ١ فإذا كان ق(س) = ٥س × هـ(س) فجد ق'(١)

الحل: يجب معرفة هـ(١) ، هـ'(١)

ل(س) متصل عند س = ١ ⇐ هـ²(١) + ٥ = ٦(١)² + ٣

⇐ هـ²(١) = ٩ − ٥ = ٤

⇐ ∴ هـ(١) = ٢ ، −٢　نأخذ هـ(١) = ٢

ل'(س) = { ٢هـ(س) × هـ'(س) ، س < ١ ؛ ١٢س ، س > ١ }

ل'₋(١) = ل'₊(١) ⇐ ٢هـ(١) × هـ'(١) = ١٢ × ١

⇐ ٢ × ٢ × هـ'(١) = ١٢

⇐ هـ'(١) = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

⇐ ق'(س) = ٥س × هـ'(س) + هـ(س) × ٥ ⇐ ق'(١) = ٥ × ٣ + ٢ × ٥ = ٢٥

---

* مشتقة الاقترانات المركبة:

اذا كان ق ، هـ قابلين للاشتقاق فإن: (ق ∘ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) × هـ'(س)

(هـ ∘ ق)'(س) = هـ'(ق(س)) × ق'(س)

مثال: اذا كان ق(س) = س² + ٣ ، هـ(س) = $\frac{٥}{س}$ جد:

أ) (ق ∘ هـ)'(س)　　ب) (هـ ∘ ق)'(س)

الحل: ق'(س) = ٢س　　هـ'(س) = $\frac{-٥}{س^2}$

أ) (ق ∘ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) × هـ'(س)

= ق'($\frac{٥}{س}$) × $\frac{-٥}{س^2}$ = ٢($\frac{٥}{س}$)($\frac{-٥}{س^2}$) = $\frac{-٥٠}{س^3}$

ب) (هـ ∘ ق)'(س) = هـ'(ق(س)) × ق'(س)

= هـ'(س² + ٣) × ٢س = $\frac{-٥}{(س^2+٣)^2}$ × ٢س = $\frac{-١٠س}{(س^2+٣)^2}$

مثال: اذا كان م(س) = س^{٢} − ٢س ، هـ(س) = ٤س^{٢} − ٦س ، جد:

أ) (م∘هـ)'(١)   ب) (هـ∘م)'(٢)   جـ) (م∘م)'(٣)

الحل: م'(س) = ٢س − ٢   هـ'(س) = ٨س − ٦

أ) (م∘هـ)'(١) = م'(هـ(١)) × هـ'(١) = م'(−٢) × ٢ = −٦ × ٢ = −١٢

ب) (هـ∘م)'(٢) = هـ'(م(٢)) × م'(٢) = هـ'(٠) × ٢ = −٦ × ٢ = −١٢

جـ) (م∘م)'(٣) = م'(م(٣)) × م'(٣) = م'(٣) × ٤ = ٤ × ٤ = ١٦

مثال: اذا كان م(س) = ظا^{٣}س ، هـ(س) = $\frac{٥}{٣س - ٢}$. جد (هـ∘م)'($\frac{\pi}{٤}$)

الحل: م'(س) = ٣ظا^{٢}س × قا^{٢}س ، هـ'(س) = $\frac{-١٥}{(٣س - ٢)^{٢}}$

(هـ∘م)'($\frac{\pi}{٤}$) = هـ'(م($\frac{\pi}{٤}$)) × م'($\frac{\pi}{٤}$)

= هـ'(١) × (٣ × ١ × ٢) = −١٥ × ٦ = −٩٠

مثال: اذا كان م(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣س ، & س \le ٢ \\ س^{٣} ، & س > ٢ \end{cases}$ ، هـ(س) = (س^{٢} − ٣)^{٤}

جد: (م∘هـ)'(٢)

الحل: م'(س) = $\begin{cases} ٢س + ٣ ، & س < ٢ \\ ٣س^{٢} ، & س > ٢ \end{cases}$ هـ'(س) = ٤(س^{٢} − ٣)^{٣} × ٢س

⇐ (م∘هـ)'(٢) = م'(هـ(٢)) × هـ'(٢)

= م'(١) × (٤ × ١ × ٤)

= (٢ + ٣) × ١٦

= ٨٠

مثال: $ق(س) = س^3$ ، $هـ(2) = 3$ ، $هـ'(2) = -2$ ، $هـ''(2) = 5$

أوجد $(ق \circ هـ)''(2)$ ؟

الحل: $(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$\Leftarrow (ق \circ هـ)''(س) = ق'(هـ(س))\, هـ''(س) + هـ'(س)\, ق''(هـ(س))\, هـ'(س)$

$(ق \circ هـ)''(2) = ق'(هـ(2))\, هـ''(2) + هـ'(2)\, ق''(هـ(2))\, هـ'(2)$

$= ق'(3) \times 5 + -2 \times ق''(3) \times -2$

$= 27 \times 5 - 2 \times 18 \times -2$

$= 135 + 72 = 207$

$ق'(س) = 3س^2$

$ق''(س) = 6س$

مثال: $ق(س) = \sqrt{س+1}$ ، $ل(س) = أ\, س^3$ أوجد الثابت أ علماً بأن $(ل \circ ق)'(3) = 12$

الحل: $(ل \circ ق)'(3) = ل'(ق(3)) \times ق'(3)$

$12 = ل'(2) \times \frac{1}{4} \Leftarrow 12 = 12أ \times \frac{1}{4}$

$\Leftarrow \boxed{أ = 4}$

$ق'(س) = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$

$ل'(س) = 3أ\, س^2$

مثال: $ق(س^3 + 2) = 3س^2 + 5س + 2$ أوجد $ق'(10)$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ق'(س^3+2)(3س^2) = 6س + 5$

$\Leftarrow ق'(10)(12) = 17$

$\Leftarrow ق'(10) = \frac{17}{12}$

$س^3 + 2 = 10$

$س^3 = 8$

$س = 2$

سؤال: $ل(س) = س^2 - 3$ ، $ع(س) = س^3 + أ\, س$ ، $(ل \circ ع)'(1) = 30$

أوجد أ ؟؟

سؤال: $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = س^2 - 4$ ، $(ق \circ هـ)'(س) =$ صفر ، أوجد قيم س ؟!

مثال: $\text{س}\,\text{ق}(٢\text{س}+١) = ٢\text{س}^{٣}+٢$ أوجد $\text{ق}'(٣)$ اذا كانت $\text{ق}(٣)=٤$

الحل: نشتق الطرفين ⇐ $\text{س}\,\text{ق}'(٢\text{س}+١)(٢) + \text{ق}(٢\text{س}+١) = ٦\text{س}^{٢}$

$$\Leftarrow \text{ق}'(٣)(٢) + \text{ق}(٣) = ٦ \qquad ٢\text{س}+١ = ٣$$
$$\Leftarrow \text{ق}'(٣)(٢) = ٦ - \text{ق}(٣) \qquad ٢\text{س} = ٢$$
$$\Leftarrow \text{ق}'(٣)(٢) = ٦-٤ \qquad \text{س} = ١$$
$$\Leftarrow \text{ق}'(٣) = \frac{٢}{٢} = ١$$

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}+٣$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = |\text{س}-٢|$ ، جد $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(٢)$

الحل: لا نستطيع تطبيق قاعدة السلسلة مباشرة لأننا نحتاج $\text{هـ}'(٢)$ ولكن هـ غير قابل للاشتقاق عند س=٢ لذلك نجد $(\text{ق}\circ\text{هـ})(\text{س})$ ثم نشتقه

$$\Leftarrow (\text{ق}\circ\text{هـ})(\text{س}) = \text{ق}(\text{هـ}(\text{س})) = \text{ق}(|\text{س}-٢|) = |\text{س}-٢|^{٢}+٣$$
$$= (\text{س}-٢)^{٢}+٣$$

$$\Leftarrow (\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = ٢(\text{س}-٢)$$
$$\therefore (\text{ق}\circ\text{هـ})'(٢) = ٢(٢-٢) = \text{صفر}$$

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٥]{(٧\text{س}^{٢}+٤)^{٣}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{٨}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$ جد: $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(١)$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = (٧\text{س}^{٢}+٤)^{\frac{٣}{٥}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣}{٥}(٧\text{س}^{٢}+٤)^{\frac{-٢}{٥}} \times ١٤\text{س} = \frac{٤٢\text{س}}{٥(٧\text{س}^{٢}+٤)^{\frac{٢}{٥}}}$

$$\text{هـ}(\text{س}) = ٨(\text{س}^{٢}+١)^{-٢} \Leftarrow \text{هـ}'(\text{س}) = -١٦(\text{س}^{٢}+١)^{-٣}(٢\text{س}) = \frac{-٣٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١)^{٣}}$$

$$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(١) = \text{ق}'(\text{هـ}(١)) \times \text{هـ}'(١) = \text{ق}'(٢) \times \frac{-٣٢}{(١+١)^{٣}} = \frac{٤٢\times٢}{٥(٢٨+٤)^{\frac{٢}{٥}}} \times \frac{-٣٢}{٨}$$

$$= \frac{٨٤}{٥\times(٣٢)^{\frac{٢}{٥}}} \times -٤ = \frac{٨٤}{٥(\sqrt[٥]{٣٢})^{٢}} \times -٤$$

$$= \frac{٨٤}{٥(\sqrt[٥]{٣٢})^{٢}} \times -٤ = \frac{٨٤}{٥\times\cancel{٤}} \times -\cancel{٤} = \frac{-٨٤}{٥}$$

مثال: اذا كانت ص = ق(س³ + س²) وكانت ق'(1) = 4 ، ق'(2) = 7 جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = 1

الحل: $\frac{دص}{دس}$ = ق'(س³ + س²)(3س² + 2س)

⇐ $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=1}$ = ق'(2)(5) = 7 × 5 = 35

مثال: اذا كان ق(ظاس) = 6 جا²س − 8 جتا²س ، س ∈ (0 ، $\frac{\pi}{2}$) جد ق'(1)

الحل: نشتق الطرفين ⇐ ق'(ظاس) × قا²س = 12 جتا2س + 16 جا2س

نضع ظاس = 1

⇐ س = $\frac{\pi}{4}$

⇐ ق'(1) × قا² $\frac{\pi}{4}$ = 12 جتا $\frac{\pi}{2}$ + 16 جا $\frac{\pi}{2}$

⇐ ق'(1) × 2 = 0 + 16 ⇐ ق'(1) = $\frac{16}{2}$ = 8

مثال: اذا كان ق(س² + 1) = 2س⁴ + 8س³ جد ق''(5)

الحل: نشتق الطرفين ⇐ ق'(س² + 1)(2س) = 8س³ + 24س² بالقسمة على 2س

⇐ ق'(س² + 1) = 4س² + 12س

نشتق مرة أخرى ⇐ ق''(س² + 1)(2س) = 8س + 12

⇐ ق''(س² + 1) = $\frac{8س + 12}{2س}$

نضع س² + 1 = 5

س² = 4

س = ± 2

⇐ عندما س = −2 ⇐ ق''(5) = $\frac{-16 + 12}{-4}$ = 1

⇐ عندما س = 2 ⇐ ق''(5) = $\frac{16 + 12}{4}$ = 7

مثال: اذا كان ق(س) = س × ل($\sqrt{س}$) جد ق'(4) اذا علمت أن ل(2) = 3 ، ل'(2) = 1

الحل: ق'(س) = س × ل'($\sqrt{س}$) × $\frac{1}{2\sqrt{س}}$ + ل($\sqrt{س}$) × 1

ق'(4) = 4 ل'(2) × $\frac{1}{4}$ + ل(2) = 4(1) × $\frac{1}{4}$ + 3 = 1 + 3 = 4

سؤال: اذا كان ق(جاس) = قتاس ، جد ق'($\frac{1}{2}$) حيث س ∈ (0 ، $\frac{\pi}{3}$)

$\boxed{\text{الاجابة ق'}(\tfrac{1}{2}) = -4}$

مثال: ق(س) = { س^2 + ١ ، س ≥ ١ ؛ ٣س ، س < ١ } ، هـ(س) = س^3 + ١ جد ① (ق ∘ هـ)$'$(١)

② (ق ∘ هـ)$'$(١)

الحل: ندرس اتصال هـ(س) عند س = ١ ⟵ متصل

ق(س) عند هـ(١) = ٢ ⟵ متصل

ق$'$(س) = { ٢س ، س > ١ ؛ ٣ ، س < ١ } هـ$'$(س) = ٣س^2

①
(ق ∘ هـ)$'$(١) = ق$'$(هـ(١)) × هـ$'$(١)

= ق$'$(٢) × ٣

= ٤ × ٣

= ١٢

---

② (ق ∘ هـ)$'$(١) ⇐ ندرس الاتصال ⟵ هـ(س) متصل عند س = ١

⟵ ق غير متصل عند هـ(١) = ١

∴ (ق ∘ هـ)$'$(١) غير موجودة

مثال: ق(س) = |س − ١| ، هـ(س) = س^2 + ١ أوجد (ق ∘ هـ)$'$(١)

الحل: نعيد توليف |س − ١| ⇐ س − ١ = ٠ ⇐ س = ١

(١ − س ، − − | + + ، س − ١)

ق(س) = { ١ − س ، س < ١ ؛ س − ١ ، س ≥ ١ } هـ متصل عند س = ١

ق متصل عند هـ(١) = ١

⇐ ق$'$(س) = { −١ ، س < ١ ؛ ١ ، س > ١ } هـ$'$(س) = ٢س

ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١ لذلك نجد قاعدة (ق ∘ هـ)(س) ثم نشتقها

(ق ∘ هـ)(س) = ق(هـ(س)) = |س^2 + ١ − ١| = |س^2| = س^2

⇐ (ق ∘ هـ)$'$(س) = ٢س ⇐ (ق ∘ هـ)$'$(١) = ٢

* الاشتقاق الضمني :

أنواع العلاقات
- صريحة
- ضمنية

صريحة مثل: $\text{ص} = ٣\text{س} - ٥ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣$

ضمنية مثل: $٤\text{ص} + ٥\text{س}^{٢} = \text{ص}^{٣}$

قاعدة: مشتقة ص بالنسبة لـ س هي $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مشتقة س بالنسبة لـ س هي (١)

انتباه: س ص (علاقة ضرب)

$\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (علاقة قسمة)

مثال: $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٢}) = ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال: اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ اذا كان $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٥$

الحل: $٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠ \Leftarrow ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س}}{٢\text{ص}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

مثال: اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ اذا كان $\text{س ص} + ٥\text{س}^{٢} = ٧\text{س}$

الحل: $\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}(١) + ١٠\text{س} = ٧ \Leftarrow \text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٧ - \text{ص} - ١٠\text{س}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٧ - \text{ص} - ١٠\text{س}}{\text{س}}$

مثال: $\text{س}^{٢} + \sqrt{\text{ص}} = ٥\text{س}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل: $٢\text{س} + \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{٢\sqrt{\text{ص}}} = ٥$

$\Leftarrow \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{٢\sqrt{\text{ص}}} = ٥ - ٢\text{س}$ (بالضرب التبادلي)

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٥ - ٢\text{س})(٢\sqrt{\text{ص}})$

مثال: اذا كانت $\text{س}^٣ + \text{ص}^٢ = ٥\text{س ص} - ١$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $(٢،١)$ ؟

الحل: $٣\text{س}^٢ + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٥\text{ص}$

$٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٥\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥\text{ص} - ٣\text{س}^٢$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}(٢\text{ص} - ٥\text{س}) = ٥\text{ص} - ٣\text{س}^٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥\text{ص} - ٣\text{س}^٢}{٢\text{ص} - ٥\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(٢،١)} = \frac{٥(١) - ٣(٢)^٢}{٢(١) - ٥(٢)} = \frac{٥ - ١٢}{٢ - ١٠} = \frac{-٧}{-٨}$

$= \frac{٧}{٨}$

مثال: $\text{س} - \sqrt[٤]{\text{ص}^٢ + ٢} = ٠$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $\text{س} = \sqrt[٤]{\text{ص}^٢ + ٢}$ نتخلص من الجذر $\Leftarrow \text{س}^٤ = \text{ص}^٢ + ٢$ نشتق

$\Leftarrow ٤\text{س}^٣ = ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤\text{س}^٣}{٢\text{ص}}$

مثال: اذا كانت $\frac{٣}{\text{س}} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{س}^٢} = ٤$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل: $\frac{٣\text{س} + \text{ص}^٢}{\text{س}^٢} = ٤ \Leftarrow ٣\text{س} + \text{ص}^٢ = ٤\text{س}^٢$ نشتق

$\Leftarrow ٣ + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٨\text{س} \Leftarrow ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٨\text{س} - ٣ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٨\text{س} - ٣}{٢\text{ص}}$

سؤال: $(\text{س}^٢ + \text{ص})^٣ = ٥\text{س}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ⟵ الإجابة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥}{٣(\text{س}^٢ + \text{ص})^٢} - ٢\text{س}$

مثال: $\text{س}^٣ + \text{ص}^٣ = ٥\text{س ص} - ٣$ جد $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢}$ عند $(١،١)$

الحل: $٣\text{س}^٢ + ٣\text{ص}^٢\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٥\text{ص}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥\text{ص} - ٣\text{س}^٢}{٣\text{ص}^٢ - ٥\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(١،١)} = \frac{٥(١) - ٣(١)^٢}{٣(١)^٢ - ٥(١)} = \frac{٢}{-٢} = -١$

نعوض مباشرة

$$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{(٣\text{ص}^٢ - ٥\text{س})\left(٥\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٦\text{س}\right) - \left((٥\text{ص} - ٣\text{س}^٢)\left(٦\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٥\right)\right)}{(٣\text{ص}^٢ - ٥\text{س})^٢}$$

$$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢}\Big|_{(١،١)} = \frac{(٣ - ٥)\left(٥(-١) - ٦(١)\right) - \left((٥(١) - ٣(١)^٢)(٦(١)(-١) - ٥)\right)}{(٣ - ٥)^٢}$$

$$= \frac{٢٢ + ٢٢}{٤} = \frac{٤٤}{٤} = ١١$$

مثال: اذا كانت $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = 1$ ، أثبت أن $\text{ص}^3 \times \text{ص}'' + 1 = \text{صفر}$

الحل: نشتق $\Leftarrow 2\text{س} - 2\text{ص}\,\text{ص}' = 0 \Leftarrow 2\text{س} = 2\text{ص}\,\text{ص}'$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{2\text{س}}{2\text{ص}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

نشتق مرة ثانية: $\text{ص}'' = \dfrac{\text{ص}(1) - \text{س}\,\text{ص}'}{\text{ص}^2} = \dfrac{\text{ص} - \text{س}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)}{\text{ص}^2}$

ص١٣ السؤال

$$\Leftarrow \text{ص}'' = \frac{\text{ص} - \frac{\text{س}^2}{\text{ص}}}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ص}^2 - \text{س}^2}{\text{ص}^3} \Leftarrow \text{ص}'' = \frac{-1}{\text{ص}^3}$$

$$\Leftarrow \text{ص}^3 \times \text{ص}'' = -1$$

$$\therefore \text{ص}^3 \times \text{ص}'' + 1 = -1 + 1 = \text{صفر}$$

مثال: اذا كانت $\text{س} = \text{ظا}\,\text{ص}$ أثبت أن $\dfrac{د^2\text{ص}}{د\text{س}^2} = \dfrac{-2\text{س}}{(1+\text{س}^2)^2}$

الحل: $1 = \text{قا}^2\text{ص}\,\dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} \Leftarrow \dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \dfrac{1}{\text{قا}^2\text{ص}} = \dfrac{1}{1 + \text{ظا}^2\text{ص}} = \dfrac{1}{1+\text{س}^2}$

$$\frac{د^2\text{ص}}{د\text{س}^2} = \frac{-1(2\text{س})}{(1+\text{س}^2)^2} = \frac{-2\text{س}}{(1+\text{س}^2)^2}$$

مثال: $\text{ص}^{ن} = \text{س}$ أثبت أن $\dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \dfrac{\text{ص}}{ن\,\text{س}}$

الحل: $ن\,\text{ص}^{ن-1}\dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = 1 \Leftarrow \dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \dfrac{1}{ن\,\text{ص}^{ن-1}} = \dfrac{1}{ن\,\text{ص}^{ن} \times \text{ص}^{-1}}$

$$= \frac{\text{ص}}{ن\,\text{ص}^{ن}} = \frac{\text{ص}}{ن\,\text{س}}$$

مثال: اذا كانت $\text{ص}^2 + \text{س}^2 = 5\text{س}$ أوجد قيمة س التي تجعل $\dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \text{صفر}$

الحل: $2\text{ص}\dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} + 2\text{س} = 5 \Leftarrow 2\text{ص}\dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = 5 - 2\text{س} \Leftarrow \dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \dfrac{5 - 2\text{س}}{2\text{ص}}$

$$\Leftarrow \frac{5 - 2\text{ص}}{2\text{ص}} = \text{صفر} \Leftarrow 5 - 2\text{س} = \text{صفر}$$

$$-2\text{س} = -5 \Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{5}{2}}$$

مثال: اذا كانت $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 2\text{ص}$ أثبت أن $\frac{د^2\text{ص}}{د\text{س}^2} = \frac{1}{(1-\text{ص})^3}$

الحل: $2\text{س} + 2\text{ص}\,\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = 2\,\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} \Leftarrow 2\text{ص}\,\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} - 2\,\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = -2\text{س}$

$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}(2\text{ص} - 2) = -2\text{س} \Leftarrow \frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{-2\text{س}}{2\text{ص}-2} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}-1} = \frac{\text{س}}{1-\text{ص}}$

$\frac{د^2\text{ص}}{د\text{س}^2} = \frac{(1-\text{ص})(1) - (\text{س} \times -\frac{د\text{ص}}{د\text{س}})}{(1-\text{ص})^2} = \frac{(1-\text{ص}) + \text{س}\left(\frac{\text{س}}{1-\text{ص}}\right)}{(1-\text{ص})^2}$

$= \frac{\frac{(1-\text{ص})^2 + \text{س}^2}{1-\text{ص}}}{(1-\text{ص})^2} = \frac{1 - 2\text{ص} + \text{ص}^2 + \text{س}^2}{(1-\text{ص})^3} = \frac{1}{(1-\text{ص})^3}$

مثال: اذا كانت $\text{ص}^2 = \frac{\text{س}}{1+\text{س}}$ أثبت أن $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{\text{ص}^3}{2\text{س}^2}$

الحل: $2\text{ص}\,\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{(1+\text{س})(1) - (\text{س})(1)}{(1+\text{س})^2} = \frac{1 + \text{س} - \text{س}}{(1+\text{س})^2} = \frac{1}{(1+\text{س})^2}$

$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{\frac{1}{(1+\text{س})^2}}{2\text{ص}} = \frac{1}{2\text{ص}(1+\text{س})^2} = \frac{1}{2\text{ص}(1+\text{س})^2} \times \frac{\text{ص}^3}{\text{ص}^3}$ (ضربنا البسط والمقام في ص^3)

$\Leftarrow = \frac{\text{ص}^3}{2\text{ص}^4(1+\text{س})^2}$

للتذكير: $\text{ص}^2 = \frac{\text{س}}{1+\text{س}} \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^2(1+\text{س})$

وبالتربيع $\Leftarrow \text{س}^2 = \text{ص}^4(1+\text{س})^2$

$\therefore \frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{\text{ص}^3}{2\text{س}^2}$

سؤال: $\text{ظا}(\text{س ص}) = \text{ص}$ ، جد $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}$ عند $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

— الإجابة $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{-2}{\frac{\pi}{2} - 1}$

مثال: اذا كانت س + ص + جاص = ٣ أثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{\text{جاص}}{(\text{١} + \text{جتاص})^3}$

الحل: $\text{١} + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{جتاص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٠} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}(\text{١} + \text{جتاص}) = -\text{١}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{١}}{\text{١} + \text{جتاص}}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{\text{١} \times -\text{جاص}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{(\text{١} + \text{جتاص})^2} = \frac{-\text{جاص} \times \frac{-\text{١}}{\text{١} + \text{جتاص}}}{(\text{١} + \text{جتاص})^2} = \frac{\text{جاص}}{(\text{١} + \text{جتاص})^3}$

مثال: اذا كانت س = جاص أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١} - \text{س}^2}}$

الحل: س = جاص نشتق

$\text{١} = \text{جتاص}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\text{جتاص}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١} - \text{س}^2}}$

$$\left.\begin{aligned} &\text{جا}^2\text{ص} + \text{جتا}^2\text{ص} = \text{١} \\ &\text{جتا}^2\text{ص} = \text{١} - \text{جا}^2\text{ص} \\ &= \text{١} - \text{س}^2 \\ &\text{جتاص} = \sqrt{\text{١} - \text{س}^2} \end{aligned}\right\}$$

مثال: اذا كانت س = ظاص أثبت أن $\text{ص}''(\text{١} + \text{س}^2) = -\text{جا٢ص}$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow \text{١} = \text{قا}^2\text{ص} \times \text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{١}}{\text{قا}^2\text{ص}} = \text{جتا}^2\text{ص}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = \text{٢جتاص} \times -\text{جاص} \times \text{ص}' = -(\text{٢جاص جتاص}) \times \frac{\text{١}}{\text{قا}^2\text{ص}}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = -\text{جا٢ص} \times \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{ظا}^2\text{ص}} \Leftarrow \text{ص}'' = -\text{جا٢ص} \times \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{س}^2}$

$\Leftarrow \text{ص}''(\text{١} + \text{س}^2) = -\text{جا٢ص}$

مثال: اذا كانت $ص = \sqrt{س + ص}$ أثبت أن: $ص''(٢ص - ١)^٣ = -٢$

الحل: $ص^٢ = س + ص$ نشتق

$٢ص ص' = ١ + ص' \Rightarrow ٢ص ص' - ص' = ١ \Rightarrow ص'(٢ص - ١) = ١$

$\Rightarrow ص' = \dfrac{١}{٢ص - ١}$

$ص'' = \dfrac{-١ \times ٢ص'}{(٢ص - ١)^٢} \Rightarrow ص'' = \dfrac{-١ \times ٢\left(\dfrac{١}{٢ص - ١}\right)}{(٢ص - ١)^٢}$

ضربنا تبادلي

$\Rightarrow ص'' = \dfrac{-٢}{(٢ص - ١)^٣} \Rightarrow \therefore ص''(٢ص - ١)^٣ = -٢$

مثال: اذا كانت $ص = \dfrac{ظاس}{س}$ أثبت أن $س ص'' + ٢ص' - ٢س ص - ٢س^٣ ص^٣ = ٠$

الحل: $س ص = ظاس$ نشتق

$س ص' + ص = قا^٢س$ نشتق مرة أخرى

$س ص'' + ص'(١) + ص' = ٢قاس \times قاس ظاس$

$\Rightarrow س ص'' + ٢ص' = ٢قا^٢س ظاس$

$\Rightarrow س ص'' + ٢ص' = ٢(١ + ظا^٢س) ظاس$

$\Rightarrow س ص'' + ٢ص' = ٢(١ + س^٢ص^٢) س ص$

$\Rightarrow س ص'' + ٢ص' = ٢س ص + ٢س^٣ ص^٣$

$\Rightarrow س ص'' + ٢ص' - ٢س ص - ٢س^٣ ص^٣ = ٠$

مثال: اذا كانت $س = جتاص$ أثبت أن: $\dfrac{ص''}{(ص')^٢} = -ظتاص$

الحل: نشتق الطرفين $\Rightarrow ١ = -جاص ص' \Rightarrow ص' = \dfrac{-١}{جاص} = -قتاص$

$\Rightarrow$ نشتق مرة أخرى $\Rightarrow ص'' = -(-قتاص ظتاص \times ص') \Rightarrow ص'' = قتاص ظتاص ص'$

$\Rightarrow ص'' = -ص' ظتاص \times ص' = -(ص')^٢ ظتاص$

$ص'' = -(ص')^٢ ظتاص$ نقسم الطرفين على $(ص')^٢$

$\Rightarrow \dfrac{ص''}{(ص')^٢} = -ظتاص$

مثال: اذا كانت جتاص = جاس أثبت أن: $\frac{\text{ص}''}{1-(\text{ص}')^2} = \text{ظتاص}$

الحل: نشتق ⇐ $-\text{جاص} \times \text{ص}' = \text{جتاس}$ نشتق مرة أخرى $\Big\{\ \text{ص}' = \frac{-\text{جتاس}}{\text{جاص}}$

⇐ $-\text{جاص} \times \text{ص}'' + \text{ص}' \times -\text{جتاص} \times \text{ص}' = -\text{جاس}$ نقسم على $(-\text{جاص})$

⇐ $\text{ص}'' + (\text{ص}')^2 \times \frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}} = + \frac{\text{جاس}}{\text{جاص}}$ وبما أن جاس = جتاص

∴ $\text{ص}'' + (\text{ص}')^2 \times \text{ظتاص} = \frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}}$ ⇐ $\text{ص}'' + (\text{ص}')^2 \times \text{ظتاص} = \text{ظتاص}$

⇐ $\text{ص}'' = \text{ظتاص} - (\text{ص}')^2 \times \text{ظتاص}$

⇐ $\text{ص}'' = \text{ظتاص}\left(1-(\text{ص}')^2\right)$ ⇐ $\text{ظتاص} = \frac{\text{ص}''}{1-(\text{ص}')^2}$

عامل مشترك

سؤال: س = ظتاص أثبت أن: $\text{ص}''(1+\text{س}^2) = \text{جا}2\text{ص}$

مثال: اذا كانت $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 2$ أثبت أن $\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$

الحل: نشتق الطرفين ⇐ $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 0$

⇐ $\frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{-1}{2\sqrt{\text{س}}}$ ⇐ $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{-\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$

$$\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \frac{\sqrt{\text{س}} \times \frac{-1}{2\sqrt{\text{ص}}}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} - (-\sqrt{\text{ص}}) \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}}$$

$$= \frac{1}{\text{س}} \times \left(\sqrt{\text{س}} \times \frac{-1}{2\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{-\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{ص}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\right) = \frac{1}{\text{س}} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\text{ص}}}{2\sqrt{\text{س}}}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{س}}+\sqrt{\text{ص}}}{2\sqrt{\text{س}}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$$

مثال: $\text{س} + \text{ص} = \text{س ص}$ أثبت أن $\text{ص}'' = \frac{2\text{ص}^3}{\text{س}^3}$

الحل:

$\text{س} + \text{ص} = \text{س ص} \Leftarrow \text{س} = \text{س ص} - \text{ص}$

$\Leftarrow \text{س} = \text{ص}(\text{س} - 1) \Leftarrow \text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س} - 1}$ نشتق

$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{(\text{س} - 1)(1) - (\text{س})(1)}{(\text{س} - 1)^2} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{\cancel{\text{س}} - 1 - \cancel{\text{س}}}{(\text{س} - 1)^2}$

$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{-1}{(\text{س} - 1)^2}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = \frac{2(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 1)^4} = \frac{2}{(\text{س} - 1)^3}$

من السؤال:

$\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س} - 1}$

$\text{س} - 1 = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ نكعب

$(\text{س} - 1)^3 = \frac{\text{س}^3}{\text{ص}^3}$

$\text{ص}'' = \frac{2\text{ص}^3}{\text{س}^3}$

مثال: إذا كان $\text{جاص} = \text{ظاس}$ أثبت أن: $\text{ظاص} = \frac{\text{ص}''}{2\text{قا}^2\text{س} + (\text{ص}')^2}$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow \text{جتاص} \times \text{ص}' = \text{قا}^2\text{س}$ نشتق مرة أخرى

$\Leftarrow \text{جتاص} \times \text{ص}'' + \text{ص}' \times - \text{جاص} \times \text{ص}' = 2\,\text{قاس} \times \text{قاس ظاس}$

نستبدل ظاس ب جاص $\Leftarrow \text{جتاص} \times \text{ص}'' - \text{جاص}(\text{ص}')^2 = 2\,\text{قا}^2\text{س جاص}$

بالقسمة على جتاص $\Leftarrow \text{ص}'' - \text{ظاص} \times (\text{ص}')^2 = 2\,\text{قا}^2\text{س ظاص}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = 2\,\text{قا}^2\text{س ظاص} + \text{ظاص} \times (\text{ص}')^2$

$\Leftarrow \text{ص}'' = \text{ظاص}\left(2\,\text{قا}^2\text{س} + (\text{ص}')^2\right)$

$\Leftarrow \text{ظاص} = \frac{\text{ص}''}{2\,\text{قا}^2\text{س} + (\text{ص}')^2}$

مثال: اذا كان $ق^3(ص^2) = ٥س^3 + ٣$ وكانت ص = ١ عند س = ١ وأيضاً $قَ(١) = ٥$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١ ، ص = ١

الحل: نشتق الطرفين ⇐ $٣ق^2(ص^2) \times قَ(ص^2) \times ٢ص \frac{دص}{دس} = ١٥س^2$

نضع $\boxed{س = ١}$ $\boxed{ص = ١}$

⇐ $٣ق^2(١) \times قَ(١) \times ٢ \frac{دص}{دس} = ١٥$

ولإيجاد ق(١) ⇐ $ق^3(١) = ٥ + ٣ = ٨$ ⇐ $ق(١) = \sqrt[3]{٨} = ٢$

⇐ $٣ \times ٤ \times ٥ \times ٢ \frac{دص}{دس} = ١٥$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{١٥}{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٢} = \frac{١}{٨}$

مثال: اذا كان $\frac{دص}{دس} = أ\sqrt{ص}$ وكانت $\frac{د^2ص}{دس^2} = ٨$ جد أ

الحل: $\frac{د^2ص}{دس^2} = أ \frac{\frac{دص}{دس}}{٢\sqrt{ص}} = \frac{أ \times أ\cancel{\sqrt{ص}}}{٢\cancel{\sqrt{ص}}} = \frac{أ^2}{٢}$

⇐ $\frac{أ^2}{٢} = ٨$ ⇐ $أ^2 = ١٦$ ⇐ $\boxed{أ = \pm ٤}$

مثال: جد النقطة على منحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ والتي تحقق المعادلة $صَ = -٢$

الحل: نشتق ⇐ $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times صَ = ٠$ وبوضع $\boxed{صَ = -٢}$

⇐ $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times -٢ = ٠$ ⇐ $\frac{١}{٢\sqrt{س}} - \frac{٢}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

⇐ $\frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{ص}}$ ⇐ $\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$ نعوض في المعادلة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$

⇐ $\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٣$ ⇐ $٣\sqrt{س} = ٣$ ⇐ $\sqrt{س} = ١$ ⇐ $\boxed{س = ١}$

لإيجاد صورة العدد (١) (الاحداثي الصادي) نعوض في $\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$ أو بالمعادلة الأصلية

⇐ $\sqrt{ص} = ٢\sqrt{١}$ ⇐ $\sqrt{ص} = ٢$ ⇐ $\boxed{ص = ٤}$ ∴ النقطة (١، ٤)

قاعدة:

اذا كانت ص = ق(ن) ، س = هـ(ن) فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{\text{ق}'(\text{ن})}{\text{هـ}'(\text{ن})}$

مثال: اذا كانت ص = ن^{٣} + ٢ن^{٢} ، س = ٣ن^{٢} + ٥ن ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\boxed{\text{ن} = ١}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣\text{ن}^{٢} + ٤\text{ن}$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٦\text{ن} + ٥ \Leftarrow \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{١}{٦\text{ن} + ٥}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{٣\text{ن}^{٢} + ٤\text{ن}}{٦\text{ن} + ٥} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{ن}=١} = \frac{٧}{١١}$

مثال: اذا كانت ص = $\sqrt{\text{ن}^{٢} + ٥}$ ، س = $\frac{٦}{٢\text{ن} - ٣}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\boxed{\text{ن} = ٢}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{ن}}{٢\sqrt{\text{ن}^{٢} + ٥}} = \frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{ن}^{٢} + ٥}} = \frac{٢}{\sqrt{٤ + ٥}} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{-٦(٢)}{(٢\text{ن} - ٣)^{٢}} = \frac{-١٢}{(٤ - ٣)^{٢}} = -١٢ \Leftarrow \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{-١}{١٢}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\cancel{٢}^{١}}{٣} \times \frac{-١}{\cancel{١٢}_{٦}} = \frac{-١}{١٨}$

سؤال: أ) ص = ظا^{٢}٥ن ، س = قا٥ن جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

ب) ص = جتا٧ن ، س = جا٧ن جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال: ص = جا^{٢}٣ن ، س = جتا٣ن جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٢\text{جا}٣\text{ن} \times \text{جتا}٣\text{ن} \times ٣$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٣\text{جا}٣\text{ن} \Leftarrow \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{-١}{٣\text{جا}٣\text{ن}}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{٢\cancel{\text{جا}٣\text{ن}} \times \text{جتا}٣\text{ن} \times \cancel{٣}}{-\cancel{\text{جا}٣\text{ن}} \times \cancel{٣}} = -٢\text{جتا}٣\text{ن}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = -٢ \times -\text{جا}٣\text{ن} \times ٣ \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = ٢\cancel{\text{جا}٣\text{ن}} \times \cancel{٣} \times \frac{-١}{\cancel{٣}\cancel{\text{جا}٣\text{ن}}} = -٢$

سؤال: $ص = ٢ن^{٣} + ٨ن$ ، $س = \frac{٢}{ن}$ جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$

مثال: اذا كانت $ص = \sqrt{س + \sqrt{١ + س^{٢}}}$ أثبت أن $٢\sqrt{١+س^{٢}} \times ص' = ص$

الحل: بالتربيع للطرفين $\Leftarrow ص^{٢} = س + \sqrt{١+س^{٢}}$ نشتق الطرفين

$$\Leftarrow ٢ص \times ص' = ١ + \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{١+س^{٢}}} = \frac{\sqrt{١+س^{٢}} + س}{\sqrt{١+س^{٢}}} = \frac{ص^{٢}}{\sqrt{١+س^{٢}}}$$

$$\therefore ٢ص \times ص' = \frac{ص^{٢}}{\sqrt{١+س^{٢}}} \Leftarrow ٢ص \times ص' \times \sqrt{١+س^{٢}} = ص^{٢}$$

بالقسمة على ص

$$\Leftarrow ٢ص'\sqrt{١+س^{٢}} = \frac{ص^{٢}}{ص} \Leftarrow ٢ص'\sqrt{١+س^{٢}} = ص$$

مثال: اذا كانت $ص = ظتا٢س$ أثبت أن $ص'' - ٨ص(ص^{٢}+١) = ٠$

الحل: نشتق $\Leftarrow ص' = -٢ قتا^{٢}٢س$

$$ص'' = -٤ قتا٢س \times -قتا٢س ظتا٢س \times ٢ = ٨ ظتا٢س قتا^{٢}٢س$$

متطابقة

$$\Leftarrow ص'' = ٨ ظتا٢س (١ + ظتا^{٢}٢س) = ٨ص(١+ص^{٢})$$

$$\Leftarrow ص'' - ٨ص(١+ص^{٢}) = صفر$$

نهاية الوحدة الثانية (التفاضل)