* **قاعدة السلسلة:**

اذا كانت $\text{ص} = \text{ق}(\text{ع})$ ، $\text{ع} = \text{هـ}(\text{س})$ فإن:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

أمثلة:-

(1) اذا كانت $\text{ص} = \text{ع}^3 + 2$ ، $\text{ع} = \text{س}^2 - 2\text{س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 3\text{ع}^2$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 2$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{ع}^2 \times 2\text{س} - 2 = 3(\text{س}^2 - 2\text{س})^2(2\text{س} - 2)$

سؤال: اذا كانت $\text{ص} = \text{ن}^2 - \frac{\text{ن}^3}{3}$ ، $\text{ن} = \text{س}^2 + 2$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=1}$ —— $\boxed{-60}$

سؤال: اذا كانت $\text{ص} = (\text{س}^2 - 3)$ ، $\text{ع} = (\text{س}^2 + 1)(5\text{س} - 4)$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ عندما $\text{س} = -1$ —— $\boxed{\frac{-1}{14}}$

مثال:- $\text{ص} = \text{ع}^2 + 3\text{ع} + 5$ ، $\text{ع} = |3\text{س} - 2|$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = -1$

الحل: عند $\text{س} = -1$ فإن $\text{ع} = 2 - 3\text{س} \Leftarrow \text{ع} = 5$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 2\text{ع} + 3$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -3$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (2\text{ع} + 3)(-3) = (2(5) + 3)(-3) = -39$$

مثال: $\text{ص} = \text{ظا}\,\text{ع}$ ، $\text{ع} = \text{س}^3 + 5\text{س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \text{قا}^2\text{ع}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 + 5$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{ع} \times (3\text{س}^2 + 5) = \text{قا}^2(\text{س}^3 + 5\text{س}) \times (3\text{س}^2 + 5)$$

مثال: $\text{ص} = \text{ع}^{٢} - ٧\text{ع} + ٣$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٣} - ١$ أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٩ \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} - ٦\text{س}^{٥} = ٠$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٢\text{ع} - ٧$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢\text{ع} - ٧)(٣\text{س}^{٢}) = \left(٢(\text{س}^{٣} - ١) - ٧\right) \times ٣\text{س}^{٢}$$

$$= (٢\text{س}^{٣} - ٩)(٣\text{س}^{٢})$$

$$= ٦\text{س}^{٥} - ٢٧\text{س}^{٢}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٩ \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} - ٦\text{س}^{٥} = ٦\text{س}^{٥} - ٢٧\text{س}^{٢} + ٩(\cancel{٣\text{س}^{٢}}) - ٦\text{س}^{٥} = \text{صفر}$$

مثال: إذا كانت $\text{ع} = \frac{\text{ص} + ٢}{\text{ص} - ١}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{س} + ٤}{\text{س} - ٢}$ أثبت أن $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢}$

الحل: $\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = \frac{(\text{ص} - ١)(١) - (\text{ص} + ٢)(١)}{(\text{ص} - ١)^{٢}} = \frac{\text{ص} - ١ - \text{ص} - ٢}{(\text{ص} - ١)^{٢}} = \frac{-٣}{(\text{ص} - ١)^{٢}}$

$$= \frac{-٣}{\left(\frac{\text{س} + ٤}{\text{س} - ٢} - ١\right)^{٢}} = \frac{-٣}{\left(\frac{\text{س} + ٤ - \text{س} + ٢}{\text{س} - ٢}\right)^{٢}} = \frac{-٣}{\left(\frac{٦}{\text{س} - ٢}\right)^{٢}} = \frac{-٣}{\frac{٣٦}{(\text{س} - ٢)^{٢}}}$$

$$= \frac{-٣(\text{س} - ٢)^{٢}}{٣٦}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س} - ٢)(١) - (\text{س} + ٤)(١)}{(\text{س} - ٢)^{٢}} = \frac{\text{س} - ٢ - \text{س} - ٤}{(\text{س} - ٢)^{٢}} = \frac{-٦}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{دع}}{\text{دص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٣\cancel{(\text{س} - ٢)^{٢}}}{٣٦} \times \frac{-٦}{\cancel{(\text{س} - ٢)^{٢}}} = \frac{١٨}{٣٦} = \frac{١}{٢}$$

سؤال: إذا كانت $\text{ص} = ٢\text{ع}^{٢} - ٥\text{ع} + ٤$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٢} + ٣$ جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$

الإجابة $\boxed{٢٤\text{س}^{٢} + ١٤}$

مثال: $\text{ص} = \text{ن}^3 + \text{ن}^2$ ، $\text{س} = \text{ن}^2 + 1$ جد $\left.\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}\right|_{\text{ن}=5}$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = 3\text{ن}^2 + 2\text{ن}$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = 2\text{ن}$

$\Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (3\text{ن}^2 + 2\text{ن}) \times \frac{1}{2\text{ن}} = \frac{3\text{ن}^2 + 2\text{ن}}{2\text{ن}} = \frac{3\text{ن}}{2} + 1$

المطلوب: $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}$ نفرض $\text{ع} = \frac{3\text{ن}}{2} + 1$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ لكن ع دالة في ن نستخدم السلسلة مرة أخرى.

$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}} \Leftarrow \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2\text{ن}} = \frac{3}{4\text{ن}}$

$\left.\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}\right|_{\text{ن}=5} = \frac{3}{4(5)} = \frac{3}{20}$

مثال: $\text{س} = \text{جا ن}$ ، $\text{ص} = \text{جتا ن}$ جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}$ عندما $\text{ن} = \frac{\pi}{3}$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{جتا ن}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = -\text{جا ن} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{جا ن} \times \frac{1}{\text{جتا ن}} = \frac{-\text{جا ن}}{\text{جتا ن}} = -\text{ظا ن}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ ∴ نفرض $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ع} \Leftarrow \text{ع} = -\text{ظا ن}$

$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}}$

$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = -\text{قا}^2\text{ن} \times \frac{1}{\text{جتا ن}} = \frac{-\text{قا}^2\text{ن}}{\text{جتا ن}} = \frac{-1}{\text{جتا}^3\text{ن}}$

$\left.\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}\right|_{\text{ن}=\frac{\pi}{3}} = \frac{-1}{\text{جتا}^3\frac{\pi}{3}} = \frac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{-1}{\frac{1}{8}} = -8$

مثال: جد معدل التغير في مساحة المربع بالنسبة لمحيطه عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم ؟

الحل: $\text{م} = \text{س}^{٢}$ المطلوب: $\left.\frac{d\text{م}}{d\text{ح}}\right|_{\text{س}=١٠}$

$\text{ح} = ٤\text{س}$ ← المحيط

$\frac{d\text{م}}{d\text{س}} = ٢\text{س}$ $\frac{d\text{ح}}{d\text{س}} = ٤$

$$\frac{d\text{م}}{d\text{ح}} = \frac{d\text{م}}{d\text{س}} \times \frac{d\text{س}}{d\text{ح}} = ٢\text{س} \times \frac{١}{٤} = \frac{\text{س}}{٢}$$

$$\left.\frac{d\text{م}}{d\text{ح}}\right|_{\text{س}=١٠} = \frac{١٠}{٢} = ٥$$

مثال: اذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٣} + ١$ جد $\frac{d\text{ص}}{d(٥\text{س})}$

الحل: $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٣} + ١$ $\text{ع} = ٥\text{س}$ المطلوب: $\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}}$

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = ٢\text{س} - ١٢\text{س}^{٢}$ $\frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = ٥$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} \times \frac{d\text{س}}{d\text{ع}} = (٢\text{س} - ١٢\text{س}^{٢})\left(\frac{١}{٥}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{٢\text{س} - ١٢\text{س}^{٢}}{٥}$$

* **قانون القوس**:

اذا كان $\text{ص} = (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}}$ فإن $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{ن}\,(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$

البرهان: نفرض $\text{ع} = \text{هـ}(\text{س})$

$$\Leftarrow \frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = \text{هـ}'(\text{س})$$

$$\therefore \text{ص} = \text{ع}^{\text{ن}} \Leftarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \text{ن}\,\text{ع}^{\text{ن}-١}$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} \times \frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = \text{ن}\,\text{ع}^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$$

$$= \text{ن}\,(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$$

مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فيما يلي:

① $\text{ص} = (٢\text{س} - \text{س}^٣)^٣ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(٢\text{س} - \text{س}^٣)^٢(٢ - ٣\text{س}^٢)$

② $\text{ص} = \sqrt[٥]{(٥\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٢)} \Leftarrow \text{ص} = \left((٥\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٢)\right)^{\frac{١}{٥}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٥}\left((٥\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٢)\right)^{\frac{-٤}{٥}}\left((٥\text{س} - ٣)(٢\text{س}) + (\text{س}^٢ + ٢)(٥)\right)$

③ $\text{ص} = \frac{-٢}{(\text{س}^٣ - ١)^٤} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢ \times ٤(\text{س}^٣ - ١)^٣(٣\text{س}^٢)}{(\text{س}^٣ - ١)^٨} = \frac{٢٤\text{س}^٢}{(\text{س}^٣ - ١)^٥}$

④ $\text{ص} = (\text{ظاس} + \text{ظتاس})^٤$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤(\text{ظاس} + \text{ظتاس})^٣(\text{قا}^٢\text{س} - \text{قتا}^٢\text{س})$

$\Leftarrow \left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = ٤(١ + ١)^٣\left((\sqrt{٢})^٢ - (\sqrt{٢})^٢\right) = ٤(٨)(\text{صفر}) = \text{صفر}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \left(\text{س}^٢ - \frac{٤}{\text{س}}\right)^٣$ جد $\text{ق}'(٢)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\left(\text{س}^٢ - \frac{٤}{\text{س}}\right)^٢\left(٢\text{س} + \frac{٤}{\text{س}^٢}\right)$

$\text{ق}'(٢) = ٣(٤ - ٢)^٢ \times (٤ + ١) = ٣ \times ٤ \times ٥ = ٦٠$

مثال: $\text{ص} = \left(\frac{\text{ع} + ١}{\text{ع} - ١}\right)^٢$ ، $\text{ع} = \text{س}^٢ + ٢\text{س}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١}$

الحل: عند $\text{س} = ١$ فإن $\text{ع} = (١)^٢ + ٢(١) = ٣$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٢\left(\frac{\text{ع} + ١}{\text{ع} - ١}\right) \times \frac{(\text{ع} - ١)(١) - (\text{ع} + ١)(١)}{(\text{ع} - ١)^٢} = ٢\left(\frac{\text{ع} + ١}{\text{ع} - ١}\right) \times \frac{-٢}{(\text{ع} - ١)^٢}$

وعند $\text{ع} = ٣ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٢\left(\frac{٣ + ١}{٣ - ١}\right) \times \frac{-٢}{(٣ - ١)^٢} = ٢ \times \frac{٤}{٢} \times \frac{-٢}{٤} = -٢$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ٢ \Leftarrow \left.\frac{\text{دع}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = ٤$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -٢ \times ٤ = -٨$

مثال: اذا كانت ص $= ($قاس + ظاس$)^{ن}$ ، أثبت أن $\frac{دص}{دس} =$ ن ص قاس

الحل: $\frac{دص}{دس} =$ ن (قاس + ظاس)$^{ن-1} \times$ (قاس ظاس + قا^{2}س)

$=$ ن (قاس + ظاس)$^{ن-1} \times$ قاس (ظاس + قاس)

$=$ ن (قاس + ظاس)$^{ن} \times$ قاس $=$ ن ص قاس

مثال: ص $=$ قا^5 ٣س + ظتا^3 س^2 جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٥$ قا^4 ٣س $\times$ قا٣س ظا٣س $\times ٣ + ٣$ ظتا^2 س$^2 \times -$ قتا^2 س$^2 \times$ ٢س

$= ١٥$ قا^5 ٣س ظا٣س $-$ ٦س ظتا^2 س^2 قتا^2 س^2

سؤال: (١) ص $=$ س ظا$\frac{1}{س}$ جد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ ــــــــــــــ الاجابة: $\frac{٢}{س^3}$ قا$^2\frac{1}{س}$ ظا$\frac{1}{س}$

(٢) ص $=$ س^2 جتا$^3\frac{1}{س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ ــــــــــــــ الاجابة: ٣ جتا$^2\frac{1}{س}$ جا$\frac{1}{س}$ + ٢س جتا$^3\frac{1}{س}$

مثال: ص $=$ جتا^4 ٢س + جا$^3\frac{\pi}{٢}$ + ٥ ظا$^3\frac{\pi}{٤}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٤$ جتا^3 ٢س $\times -$ جا٢س $\times ٢$ + صفر + صفر

$= -٨$ جتا^3 ٢س جا٢س

مثال: جد النهايات التالية:

(١) نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{جا^3(\frac{\pi}{٣} + هـ) - جا^3\frac{\pi}{٣}}{هـ}$ $=$ مشتقة جا^{3}س عند س $= \frac{\pi}{٣}$

$=$ ٣ جا^{2}س $\times$ جتاس

$= ٣$ جا$^2(\frac{\pi}{٣}) \times$ جتا$(\frac{\pi}{٣}) = ٣(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^2 \times \frac{1}{٢} = ٣ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{1}{٢} = \frac{٩}{٨}$

(٢) نها$_{س \to \frac{\pi}{٨}}$ $\frac{ظتا^2 ٢س - ظتا^2\frac{\pi}{٤}}{٨س - \pi}$ $=$ نها$_{س \to \frac{\pi}{٨}}$ $\frac{ظتا^2 ٢س - ظتا^2\frac{\pi}{٤}}{٨(س - \frac{\pi}{٨})}$

$= \frac{1}{٨} \times$ مشتقة ظتا^2 ٢س عند س $= \frac{\pi}{٨}$

$= \frac{1}{٨} \times ٢$ ظتا٢س $\times -$ قتا^2 ٢س $\times ٢ = -\frac{1}{٢} \times$ ظتا$\frac{\pi}{٤}$ قتا$^2\frac{\pi}{٤}$

$= -\frac{1}{٢} \times ١ \times ٢$

$= -١$

مثال: $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[5]{(\text{س}^3 + 4\text{س})^8}$ جد $\text{د}'(\text{س})$

الحل: $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^3 + 4\text{س})^{\frac{8}{5}} \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \frac{8}{5}(\text{س}^3 + 4\text{س})^{\frac{3}{5}} \times (3\text{س}^2 + 4)$

مثال: أثبت صحة ما يلي:

(١) $\text{ص} = \text{ظا}^2\text{س}$ فإن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2(1+\text{ص})(1+3\text{ص})$

(٢) $\text{ص} = \text{س ظا س}$ فإن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2(1+\text{ص})\,\text{قا}^2\text{س}$

الحل: (١) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{ظا س قا}^2\text{س}$

$\Leftarrow \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\,\text{ظا س} \times 2\,\text{قا س} \times \text{قا س ظا س} + \text{قا}^2\text{س} \times 2\,\text{قا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(2\,\text{ظا}^2\text{س} + \text{قا}^2\text{س}) = 2(1 + \text{ظا}^2\text{س})(2\,\text{ظا}^2\text{س} + 1 + \text{ظا}^2\text{س})$

$= 2(1+\text{ص})(2\text{ص} + 1 + \text{ص})$

$= 2(1+\text{ص})(1+3\text{ص})$

(٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \text{قا}^2\text{س} + \text{ظا س} \times 1$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{س} \times 2\,\text{قا س قا س ظا س} + \text{قا}^2\text{س} \times 1 + \text{قا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{س قا}^2\text{س ظا س} + 2\,\text{قا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(\text{س ظا س} + 1) = 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(\text{ص} + 1)$

سؤال: أثبت صحة ما يلي:

(١) $\text{ص} = \text{ظا س} + \frac{1}{3}\text{ظا}^3\text{س}$ فإنه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^4\text{س}$

(٢) $\text{ص} = \text{جا س} - \frac{1}{3}\text{جا}^3\text{س}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}^3\text{س}$

(٣) $\text{ص} = \text{ظتا س} + \text{قتا س}$ فإنه $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{ص}^2\,\text{قتا س}$

* **قاعدة:** اذا كانت $ص = هـ(ق(س))$ فإن $\frac{دص}{دس} = هـ'(ق(س)) \times ق'(س)$

مثال: اذا كانت $ص = هـ(٥س)$ ، $هـ'(١٠) = -٢$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٢$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٥\, هـ'(٥س) \Leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢} = ٥ \times هـ'(١٠) = ٥ \times -٢ = -١٠$

مثال: اذا كانت $ص = هـ(س^٢ - ٣س + ٤)$ ، $هـ'(٣) = ٤$ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = (٢س - ٣)\, هـ'(س^٢ - ٣س + ٤)$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} = (٢-٣)\, هـ'(٢) = -١ \times ٤ = -٤$

مثال: اذا كانت $ص = هـ(جاس)$ ، $هـ'(\frac{١}{\sqrt{٢}}) = -٢$ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{٣\pi}{٤}}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = جتاس\, هـ'(جاس)$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{٣\pi}{٤}} = جتا\frac{٣\pi}{٤}\, هـ'(جا\frac{٣\pi}{٤}) = -\frac{١}{\sqrt{٢}}\, هـ'(\frac{١}{\sqrt{٢}}) = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times -٢ = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

مثال:- اذا كان $هـ(جاس) = جتاس - ظاس$ حيث س في الربع الأول جد $هـ'(\frac{١}{٢})$

الحل: $جتاس\, هـ'(جاس) = -جاس - قا^٢س$

$جتا\frac{\pi}{٦}\, هـ'(جا\frac{\pi}{٦}) = -جا\frac{\pi}{٦} - قا^٢\frac{\pi}{٦}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}\, هـ'(\frac{١}{٢}) = -\frac{١}{٢} - \frac{٤}{٣} \Leftarrow \frac{\sqrt{٣}}{٢}\, هـ'(\frac{١}{٢}) = -\frac{١١}{٦}$

$\Leftarrow هـ'(\frac{١}{٢}) = \frac{-١١}{٦} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{-١١}{٣\sqrt{٣}}$

مثال: اذا كانت $ص = (\sqrt{قتاس - ظتاس})^ن$ اثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ن}{٢}\, قتاس\, ص$

$ص = (قتاس - ظتاس)^{\frac{ن}{٢}}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{ن}{٢}(قتاس - ظتاس)^{\frac{ن}{٢}-١} \times (-قتاس\, ظتاس + قتا^٢س)$

$= \frac{ن}{٢}(قتاس - ظتاس)^{\frac{ن}{٢}-١} \times قتاس\,(قتاس - ظتاس)$

$= \frac{ن}{٢}(قتاس - ظتاس)^{\frac{ن}{٢}} \times قتاس$

$= \frac{ن}{٢} \times ص \times قتاس$

مثال: اذا كان $ل(س) = \begin{cases} هـ^٢(س) + ٥ &،\ س \leq ١ \\ ٦س^٢ + ٣ &،\ س > ١ \end{cases}$ وكانت هـ(س) > ٠ ، ل(س)

قابلاً للاشتقاق عند س = ١ فإذا كان م(س) = ٥س × هـ(س) نجد م′(١)

الحل: يجب معرفة هـ(١) ، هـ′(١)

ل(س) متصل عند س = ١ ⟸ هـ^٢(١) + ٥ = ٦(١)^٢ + ٣

⟸ هـ^٢(١) = ٩ − ٥ = ٤

⟸ ∴ هـ(١) = ٢ ، −٢ نأخذ هـ(١) = ٢

$ل′(س) = \begin{cases} ٢هـ(س) × هـ′(س) &،\ س \leq ١ \\ ١٢س &،\ س > ١ \end{cases}$

ل′₋(١) = ل′₊(١) ⟸ ٢هـ(١) × هـ′(١) = ١٢ × ١

⟸ ٢ × ٢ × هـ′(١) = ١٢

⟸ هـ′(١) = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

⟸ م′(س) = ٥س × هـ′(س) + هـ(س) × ٥ ⟸ م′(١) = ٥ × ٣ + ٢ × ٥ = ٢٥

* مشتقة الاقترانات المركبة :-

اذا كان م ، هـ قابلين للاشتقاق فإن: (م ∘ هـ)′(س) = م′(هـ(س)) × هـ′(س)

(هـ ∘ م)′(س) = هـ′(م(س)) × م′(س)

مثال: اذا كان م(س) = س^٢ + ٣ ، هـ(س) = $\frac{٥}{س}$ جد

أ) (م ∘ هـ)′(س) ب) (هـ ∘ م)′(س)

الحل: م′(س) = ٢س هـ′(س) = $\frac{-٥}{س^٢}$

أ) (م ∘ هـ)′(س) = م′(هـ(س)) × هـ′(س)

= م′($\frac{٥}{س}$) × $\frac{-٥}{س^٢}$ = ٢($\frac{٥}{س}$)($\frac{-٥}{س^٢}$) = $\frac{-٥٠}{س^٣}$

ب) (هـ ∘ م)′(س) = هـ′(م(س)) × م′(س)

= هـ′(س^٢ + ٣) × ٢س = $\frac{-٥}{(س^٢+٣)^٢}$ × ٢س = $\frac{-١٠س}{(س^٢+٣)^٢}$

مثال: اذا كان $ق(س) = س^2 - ٢س$ ، $هـ(س) = ٤س^2 - ٦س$ فجد:

أ) $(ق \circ هـ)'(١)$ ب) $(هـ \circ ق)'(٢)$ جـ) $(ق \circ ق)'(٣)$

الحل: $ق'(س) = ٢س - ٢$ ، $هـ'(س) = ٨س - ٦$

أ) $(ق \circ هـ)'(١) = ق'(هـ(١)) \times هـ'(١) = ق'(-٢) \times ٢ = -٦ \times ٢ = -١٢$

ب) $(هـ \circ ق)'(٢) = هـ'(ق(٢)) \times ق'(٢) = هـ'(٠) \times ٢ = -٦ \times ٢ = -١٢$

جـ) $(ق \circ ق)'(٣) = ق'(ق(٣)) \times ق'(٣) = ق'(٣) \times ٤ = ٤ \times ٤ = ١٦$

مثال: اذا كان $ق(س) = ظا^3 س$ ، $هـ(س) = \frac{٥}{٣س - ٢}$ جد $(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٤})$

الحل: $ق'(س) = ٣ ظا^2 س \times قا^2 س$ ، $هـ'(س) = \frac{-١٥}{(٣س - ٢)^2}$

$$(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٤}) = هـ'(ق(\frac{\pi}{٤})) \times ق'(\frac{\pi}{٤})$$

$$= هـ'(١) \times (٣ \times ١ \times ٢) = -١٥ \times ٦ = -٩٠$$

مثال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + ٣س & ، س \leq ٢ \\ س^3 & ، س > ٢ \end{cases}$ ، $هـ(س) = (س^2 - ٣)^4$

جد: $(ق \circ هـ)'(٢)$

الحل: $ق'(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & ، س < ٢ \\ ٣س^2 & ، س > ٢ \end{cases}$ $هـ'(س) = ٤(س^2 - ٣)^3 \times ٢س$

$$\Leftarrow (ق \circ هـ)'(٢) = ق'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$$

$$= ق'(١) \times (٤ \times ١ \times ٤)$$

$$= (٢ + ٣) \times ١٦$$

$$= ٨٠$$

مثال: $م(س) = س^{٣}$ ، $هـ(٢) = ٣$ ، $هـ'(٢) = -٢$ ، $هـ''(٢) = ٥$

أوجد $(م \circ هـ)''(٢)$ ؟

الحل: $(م \circ هـ)'(س) = م'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$\Leftarrow (م \circ هـ)''(س) = م'(هـ(س))\, هـ''(س) + هـ'(س)\, م''(هـ(س))\, هـ'(س)$

$(م \circ هـ)''(٢) = م'(هـ(٢))\, هـ''(٢) + هـ'(٢)\, م''(هـ(٢))\, هـ'(٢)$

$= م'(٣) \times ٥ + -٢ \times م''(٣) \times -٢$

$= ٢٧ \times ٥ - ٢ \times ١٨ \times -٢$

$= ١٣٥ + ٧٢ = ٢٠٧$

$م'(س) = ٣س^{٢}$

$م''(س) = ٦س$

مثال: $م(س) = \sqrt{س+١}$ ، $ل(س) = أ\,س^{٣}$ أوجد الثابت أ علماً بأنه $(ل \circ م)'(٣) = ١٢$

الحل: $(ل \circ م)'(٣) = ل'(م(٣)) \times م'(٣)$

$١٢ = ل'(٢) \times \frac{١}{٤} \Leftarrow ١٢ = ١٢أ \times \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

$م'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

$ل'(س) = ٣أ\,س^{٢}$

مثال: $م(س^{٣}+٢) = ٣س^{٢} + ٥س + ٢$ أوجد $م'(١٠)$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow م'(س^{٣}+٢)(٣س^{٢}) = ٦س + ٥$

$\Leftarrow م'(١٠)(١٢) = ١٧$

$\Leftarrow م'(١٠) = \frac{١٧}{١٢}$

$س^{٣} + ٢ = ١٠$

$س^{٣} = ٨$

$س = ٢$

سؤال: $ل(س) = س^{٢} - ٣$ ، $ع(س) = س^{٣} + أس$ ، $(ل \circ ع)'(١) = ٣٠$

أوجد أ ؟؟

سؤال: $م(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = س^{٢} - ٤$ ، $(م \circ هـ)'(س) = صفر$ ، أوجد قيم س ؟!

مثال: س د(٢س + ١) = ٢س^{٣} + ٢ أوجد د$'$(٣) اذا كانت د(٣) = ٤

الحل: نشتق الطرفين ← س د$'$(٢س + ١)(٢) + د(٢س + ١) = ٦س^{٢}

← د$'$(٣)(٢) + د(٣) = ٦

← د$'$(٣)(٢) = ٦ − د(٣)

← د$'$(٣)(٢) = ٦ − ٤

← د$'$(٣) = $\frac{٢}{٢}$ = ١

٢س + ١ = ٣

٢س = ٢

س = ١

مثال: اذا كان د(س) = س^{٢} + ٣ ، هـ(س) = |س − ٢| ، جد (د ∘ هـ)$'$(٢)

الحل: لا نستطيع تطبيق قاعدة السلسلة مباشرة لأننا نحتاج هـ$'$(٢) ولكن هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ لذلك نجد (د ∘ هـ)(س) ثم نشتقه

← (د ∘ هـ)(س) = د(هـ(س)) = د(|س − ٢|) = (|س − ٢|)^{٢} + ٣

= (س − ٢)^{٢} + ٣

← (د ∘ هـ)$'$(س) = ٢(س − ٢)

∴ (د ∘ هـ)$'$(٢) = ٢(٢ − ٢) = صفر

مثال: اذا كان د(س) = $\sqrt[٥]{(٧س^{٢} + ٤)^{٣}}$ ، هـ(س) = $\frac{٨}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$ جد: (د ∘ هـ)$'$(١)

الحل: د(س) = (٧س^{٢} + ٤)$^{\frac{٣}{٥}}$ ← د$'$(س) = $\frac{٣}{٥}$ (٧س^{٢} + ٤)$^{\frac{-٢}{٥}}$ × ١٤س = $\frac{٤٢ س}{٥(٧س^{٢} + ٤)^{\frac{٢}{٥}}}$

هـ(س) = ٨(س^{٢} + ١)$^{-٢}$ ← هـ$'$(س) = −١٦(س^{٢} + ١)$^{-٣}$(٢س) = $\frac{-٣٢ س}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$

(د ∘ هـ)$'$(١) = د$'$(هـ(١)) × هـ$'$(١) = د$'$(٢) × $\frac{-٣٢}{(١ + ١)^{٣}}$ = $\frac{٤٢ × ٢}{٥(٢٨ + ٤)^{\frac{٢}{٥}}}$ × $\frac{-٣٢}{٨}$

= $\frac{٨٤}{٥ × (٣٢)^{\frac{٢}{٥}}}$ × −٤ = $\frac{٨٤}{٥(\sqrt[٥]{٣٢})^{٢}}$ × −٤

= $\frac{٨٤}{٥(\sqrt[٥]{٣٢})^{٢}}$ × −٤ = $\frac{٨٤}{٥ × \cancel{٤}}$ × $\cancel{-٤}$ = $\frac{-٨٤}{٥}$

مثال: اذا كانت $ص = ق(س^٣ + س^٢)$ وكانت $ق'(١) = ٤$ ، $ق'(٢) = ٧$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ١$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ق'(س^٣ + س^٢)(٣س^٢ + ٢س)$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} = ق'(٢)(٥) = ٧ \times ٥ = ٣٥$

مثال: اذا كان $ق(ظاس) = ٦ جا٢س - ٨ جتا٢س$ ، $س \in (٠ ، \frac{\pi}{٢})$ جد $ق'(١)$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ق'(ظاس) \times قا^٢س = ١٢ جتا٢س + ١٦ جا٢س$

نضع ظاس = ١ $\Leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$

$\Leftarrow ق'(١) \times قا^٢\frac{\pi}{٤} = ١٢ جتا\frac{\pi}{٢} + ١٦ جا\frac{\pi}{٢}$

$\Leftarrow ق'(١) \times ٢ = ٠ + ١٦ \Leftarrow ق'(١) = \frac{١٦}{٢} = ٨$

مثال: اذا كان $ق(س^٢+١) = ٢س^٤ + ٨س^٣$ جد $ق''(٥)$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ق'(س^٢+١)(٢س) = ٨س^٣ + ٢٤س^٢$ بالقسمة على ٢س

$\Leftarrow ق'(س^٢+١) = ٤س^٢ + ١٢س$

نشتق مرة أخرى $\Leftarrow ق''(س^٢+١)(٢س) = ٨س + ١٢$

$\Leftarrow ق''(س^٢+١) = \frac{٨س + ١٢}{٢س}$

نضع $س^٢ + ١ = ٥$

$س^٢ = ٤$

$س = \pm ٢$

$\Leftarrow$ عندما $س = -٢ \Leftarrow ق''(٥) = \frac{-١٦ + ١٢}{-٤} = ١$

$\Leftarrow$ عندما $س = ٢ \Leftarrow ق''(٥) = \frac{١٦ + ١٢}{٤} = ٧$

مثال: اذا كان $ق(س) = س \times ل(\sqrt{س})$ جد $ق'(٤)$ اذا علمت أن $ل(٢) = ٣$ ، $ل'(٢) = ١$

الحل: $ق'(س) = س \times ل'(\sqrt{س}) \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ل(\sqrt{س}) \times ١$

$ق'(٤) = ٤ ل'(٢) \times \frac{١}{٤} + ل(٢) = ٤(١) \times \frac{١}{٤} + ٣ = ١ + ٣ = ٤$

سؤال: اذا كان $ق(جاس) = قتا٢س$ ، جد $ق'(\frac{١}{٢})$ حيث $س \in (٠ ، \frac{\pi}{٣})$

$\boxed{الاجابة\ ق'(\frac{١}{٢}) = -٤}$

مثال: $ق(س) = \begin{cases} س^{2}+1 &، س \geq 1 \\ 3س &، س < 1 \end{cases}$ ، $هـ(س) = س^{3}+1$ جد: ① $(ق \circ هـ)'(1)$ ② $(ق \circ هـ)'(0)$

الحل: ندرس اتصال هـ(س) عند $س = 1$ ← متصل

ق(س) عند $هـ(1) = 2$ ← متصل

$ق'(س) = \begin{cases} 2س &، س > 1 \\ 3 &، س < 1 \end{cases}$ $هـ'(س) = 3س^{2}$

① $(ق \circ هـ)'(1) = ق'(هـ(1)) \times هـ'(1)$

$= ق'(2) \times 3$

$= 4 \times 3$

$= 12$

② $(ق \circ هـ)'(0)$ ⇐ ندرس الاتصال ← هـ(س) متصل عند $س = 0$ ، ← ق غير متصل عند $هـ(0) = 1$

∴ $(ق \circ هـ)'(0)$ غير موجودة

مثال: $ق(س) = |س-1|$ ، $هـ(س) = س^{2}+1$ أوجد $(ق \circ هـ)'(0)$

الحل: نعيد تعريف $|س-1|$ ⇐ $س-1 = 0$ ⇐ $س = 1$

1−س ، س−1
− − − − | + + + +
1

$ق(س) = \begin{cases} 1-س &، س < 1 \\ س-1 &، س \geq 1 \end{cases}$ هـ متصل عند $س = 0$ ، ق متصل عند $هـ(0) = 1$

⇐ $ق'(س) = \begin{cases} -1 &، س < 1 \\ 1 &، س > 1 \end{cases}$ $هـ'(س) = 2س$

ق غير قابل للاشتقاق عند $س = 1$ لذلك نجد قاعدة $(ق \circ هـ)(س)$ ثم نشتقها

$(ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س)) = |س^{2}+1-1| = |س^{2}| = س^{2}$

⇐ $(ق \circ هـ)'(س) = 2س$ ⇐ $(ق \circ هـ)'(0) = $ صفر

* الإشتقاق الضمني :

أنواع العلاقات

صريحة — ضمنية

صريحة مثل : ص = ٣ س - ٥ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣

ضمنية مثل : ٤ ص + ٥ س^{٢} = ص^{٣}

قاعدة :- مشتقة ص بالنسبة لـ س هي $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مشتقة س بالنسبة لـ س هي (١)

انتباه : س ص (علاقة ضرب)

$\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (علاقة قسمة)

مثال : $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (س^{٣} + ص^{٢}) = ٣ س^{٢} + ٢ ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ٥

الحل : ٢س + ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ⟸ ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = -٢س

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{-٢س}}{\text{٢ص}}$ = $\frac{\text{-س}}{\text{ص}}$

مثال : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان س ص + ٥ س^{٢} = ٧ س

الحل : س $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ص (١) + ١٠ س = ٧ ⟸ س $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٧ - ص - ١٠ س

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٧ - ص - ١٠ س}}{\text{س}}$

مثال : س^{٢} + $\sqrt{\text{ص}}$ = ٥ س أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل : ٢ س + $\frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{\text{٢}\sqrt{\text{ص}}}$ = ٥

⟸ $\frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{\text{٢}\sqrt{\text{ص}}}$ = ٥ - ٢ س (بالضرب التبادلي)

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (٥ - ٢ س) (٢ $\sqrt{\text{ص}}$)

مثال: اذا كانت $س^3 + ص^2 = 5 س ص - 1$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $(2 ، 1)$ ؟

الحل: $3س^2 + 2ص \frac{دص}{دس} = 5س \frac{دص}{دس} + 5ص$

$2ص \frac{دص}{دس} - 5س \frac{دص}{دس} = 5ص - 3س^2$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس}(2ص - 5س) = 5ص - 3س^2$

$\frac{دص}{دس} = \frac{5ص - 3س^2}{2ص - 5س} \Leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{(2،1)} = \frac{5(1) - 3(2)^2}{2(1) - 5(2)} = \frac{5-12}{2-10} = \frac{-7}{-8}$

$= \frac{7}{8}$

مثال: $س = \sqrt[4]{ص^2 + 2}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $س = \sqrt[4]{ص^2+2}$ نتخلص من الجذر $\Leftarrow س^4 = ص^2 + 2$ نشتقه

$\Leftarrow 4س^3 = 2ص \frac{دص}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{4س^3}{2ص}$

مثال: اذا كانت $\frac{3}{س} + \frac{ص^2}{س^2} = 4$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل: $\frac{3س + ص^2}{س^2} = 4 \Leftarrow 3س + ص^2 = 4س^2$ نشتقه

$\Leftarrow 3 + 2ص \frac{دص}{دس} = 8س \Leftarrow 2ص \frac{دص}{دس} = 8س - 3 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{8س - 3}{2ص}$

سؤال: $(س^2 + ص)^3 = 5س$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ ⟵ الاجابة $\frac{دص}{دس} = \frac{5}{3(س^2+ص)^2} - 2س$

مثال: $س^3 + ص^3 = 5 س ص - 3$ جد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عند $(1 ، 1)$

الحل: $3س^2 + 3ص^2 \frac{دص}{دس} = 5س \frac{دص}{دس} + 5ص$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{5ص - 3س^2}{3ص^2 - 5س} \Leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{(1،1)} = \frac{5(1) - 3(1)^2}{3(1)^2 - 5(1)} = \frac{2}{-2} = -1$

نعوض مباشرة

$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{\left(3ص^2 - 5س\right)\left(5\frac{دص}{دس} - 6س\right) - \left(\left(5ص - 3س^2\right)\left(6ص\frac{دص}{دس} - 5\right)\right)}{(3ص^2 - 5س)^2}$

$\frac{د^2ص}{دس^2}\Big|_{(1،1)} = \frac{(3-5)\left(5(-1) - 6(1)\right) - \left(\left(5(1) - 3(1)^2\right)\left(6(1)(-1) - 5\right)\right)}{(3-5)^2}$

$= \frac{22 + 22}{4} = \frac{44}{4} = 11$

مثال: اذا كانت $س^2 - ص^2 = 1$ ، أثبت أن $ص^3 \times ص'' + 1 = صفر$

الحل: نشتق $\Leftarrow 2س - 2ص\,ص' = 0 \Leftarrow 2س = 2ص\,ص'$

$$\Leftarrow ص' = \frac{2س}{2ص} = \frac{س}{ص}$$

نشتق مرة ثانية: $ص'' = \frac{ص(1) - س\,ص'}{ص^2} = \frac{ص - س\left(\frac{س}{ص}\right)}{ص^2}$

$$\Leftarrow ص'' = \frac{ص - \frac{س^2}{ص}}{ص^2} = \frac{ص^2 - س^2}{ص^3} \Leftarrow ص'' = \frac{-1}{ص^3}$$

من السؤال

$$\Leftarrow ص^3 \times ص'' = -1$$

$$\therefore ص^3 \times ص'' + 1 = -1 + 1 = صفر$$

مثال: اذا كانت $س = ظا ص$ أثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-2س}{(1+س^2)^2}$

الحل: $1 = قا^2 ص \frac{دص}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{1}{قا^2 ص} = \frac{1}{1 + ظا^2 ص} = \frac{1}{1 + س^2}$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-1(2س)}{(1+س^2)^2} = \frac{-2س}{(1+س^2)^2}$$

مثال: $ص^ن = س$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{ن\,س}$

الحل: $ن\,ص^{ن-1} \frac{دص}{دس} = 1 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{1}{ن\,ص^{ن-1}} = \frac{1}{ن\,ص^ن \times ص^{-1}}$

$$= \frac{ص}{ن\,ص^ن} = \frac{ص}{ن\,س}$$

مثال: اذا كانت $ص^2 + س^2 = 5س$ أوجد قيمة س التي تجعل $\frac{دص}{دس} = صفر$

الحل: $2ص \frac{دص}{دس} + 2س = 5 \Leftarrow 2ص \frac{دص}{دس} = 5 - 2س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{5 - 2س}{2ص}$

$$\Leftarrow \frac{5 - 2س}{2ص} = صفر \Leftarrow 5 - 2س = صفر$$

$$-2س = -5 \Leftarrow \boxed{س = \frac{5}{2}}$$

مثال: اذا كانت $س^2 + ص^2 = 2ص$ أثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{1}{(1-ص)^3}$

الحل: $2س + 2ص\frac{دص}{دس} = 2\frac{دص}{دس} \Rightarrow 2ص\frac{دص}{دس} - 2\frac{دص}{دس} = -2س$

$\frac{دص}{دس}(2ص-2) = -2س \Rightarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-2س}{2ص-2} = \frac{-س}{ص-1} = \frac{س}{1-ص}$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{(1-ص)(1) - (س \times -\frac{دص}{دس})}{(1-ص)^2} = \frac{(1-ص) + س\left(\frac{س}{1-ص}\right)}{(1-ص)^2}$$

$$= \frac{\frac{(1-ص)^2 + س^2}{1-ص}}{(1-ص)^2} = \frac{1 - 2ص + ص^2 + س^2}{(1-ص)^3} = \frac{1}{(1-ص)^3}$$

مثال: اذا كانت $ص^2 = \frac{س}{س+1}$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^3}{2س^2}$

الحل: $2ص\frac{دص}{دس} = \frac{(س+1)(1) - (س)(1)}{(س+1)^2} = \frac{س+1-س}{(س+1)^2} = \frac{1}{(س+1)^2}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{1}{(س+1)^2}}{2ص} = \frac{1}{2ص(س+1)^2} = \frac{1}{2ص(س+1)^2} \times \frac{ص^3}{ص^3}$$ (ضربنا البسط والمقام في $ص^3$)

$\Leftarrow = \frac{ص^3}{2ص^4(س+1)^2}$

لاحظ: $ص^2 = \frac{س}{س+1} \Rightarrow س = ص^2(س+1)$

وبالتربيع $\Rightarrow س^2 = ص^4(س+1)^2$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{ص^3}{2س^2}$

سؤال: ظا $(س ص) = ص$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عند $(\frac{\pi}{4} ، 1)$

الاجابة — $\frac{دص}{دس} = \frac{-2}{\frac{\pi}{2} - 1}$

مثال: اذا كانت $س + ص + جاص = ٣$ أثبت أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{جاص}{(١ + جتاص)^٣}$

الحل: $١ + \frac{دص}{دس} + جتاص \times \frac{دص}{دس} = ٠ \Leftarrow \frac{دص}{دس}(١ + جتاص) = -١$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-١}{١ + جتاص}$

$$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{١ \times -جاص \frac{دص}{دس}}{(١ + جتاص)^٢} = \frac{-جاص \times \frac{-١}{١ + جتاص}}{(١ + جتاص)^٢} = \frac{جاص}{(١ + جتاص)^٣}$$

مثال: اذا كانت $س = جاص$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^٢}}$

الحل: $س = جاص$ نشتق

$١ = جتاص \frac{دص}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{جتاص} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^٢}}$

$جا^٢ص + جتا^٢ص = ١$
$جتا^٢ص = ١ - جا^٢ص$
$= ١ - س^٢$
$جتاص = \sqrt{١ - س^٢}$

مثال: اذا كانت $س = ظاص$ أثبت أن $صً(١ + س^٢) = -جا٢ص$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ١ = قا^٢ص \times صَ \Leftarrow صَ = \frac{١}{قا^٢ص} = جتا^٢ص$

$\Leftarrow صً = ٢ جتاص \times -جاص \times صَ = -(٢ جاص جتاص) \times \frac{١}{قا^٢ص}$

$\Leftarrow صً = -جا٢ص \times \frac{١}{١ + ظا^٢ص} \Leftarrow صً = -جا٢ص \times \frac{١}{١ + س^٢}$

$\Leftarrow صً(١ + س^٢) = -جا٢ص$

مثال: اذا كانت $ص = \sqrt{س + ص}$ أثبت أن: $ص''(٢ص - ١)^٣ = -٢$

الحل: $ص^٢ = س + ص$ نشتق

$٢ص ص' = ١ + ص' \Leftarrow ٢ص ص' - ص' = ١ \Leftarrow ص'(٢ص - ١) = ١$

$\Leftarrow ص' = \frac{١}{٢ص - ١}$

$ص'' = \frac{-١ \times ٢ص'}{(٢ص - ١)^٢} \Leftarrow ص'' = \frac{-١ \times ٢\left(\frac{١}{٢ص - ١}\right)}{(٢ص - ١)^٢}$

ضربنا تبادلي

$\Leftarrow ص'' = \frac{-٢}{(٢ص - ١)^٣} \Leftarrow \therefore ص''(٢ص - ١)^٣ = -٢$

مثال: اذا كانت $ص = \frac{ظاس}{س}$ أثبت أن $س ص'' + ٢ص' - ٢س ص - ٢س^٣ ص^٣ = ٠$

الحل: $س ص = ظاس$ نشتق

$س ص' + ص = قا^٢س$ نشتق مرة أخرى

$س ص'' + ص'(١) + ص' = ٢قاس \times قاس ظاس$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' = ٢قا^٢س ظاس$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' = ٢(١ + ظا^٢س) ظاس$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' = ٢(١ + س^٢ص^٢) س ص$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' = ٢س ص + ٢س^٣ ص^٣$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' - ٢س ص - ٢س^٣ ص^٣ = ٠$

مثال: اذا كانت $س = جتاص$ أثبت أن: $\frac{ص''}{(ص')^٢} = -ظتاص$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ١ = -جاص ص' \Leftarrow ص' = \frac{-١}{جاص} = -قتاص$

$\Leftarrow$ نشتق مرة أخرى $\Leftarrow ص'' = -(-قتاص ظتاص \times ص') \Leftarrow ص'' = قتاص ظتاص ص'$

$\Leftarrow ص'' = -ص' ظتاص \times ص' = -(ص')^٢ ظتاص$

$ص'' = -(ص')^٢ ظتاص$ نقسم الطرفين على $(ص')^٢$

$\Leftarrow \frac{ص''}{(ص')^٢} = -ظتاص$