* المعدلات المرتبطة :

يستدل الدارس على فهمه الحقيقي للمسألة إذا تمكن من سرد ما ورد فيها من معلومات بلغته الخاصة .

① كتابة علاقة أو معادلة رياضية بين المتغيرات والثوابت وذلك مما نحفظه من قواعد مثل قوانين الحجوم والمساحات وفيثاغورس وتشابه المثلثات

② الاختزال : حيث نختزل المتغيرات في القاعدة السابقة إلى اثنين إن أمكن وذلك من خلال ايجاد علاقة جديدة بين المتغيرات .

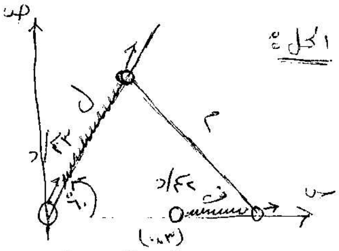
③ الاشتقاق : حيث نشتق المعادلة السابقة ضمنياً بالنسبة إلى الزمن

④ التعويض : حيث يتم التعويض بالمعلومات المعطاة فينتج المطلوب .

ملاحظة : دائماً نبدأ بالتعويض بعد الاشتقاق

مثال : ابتدأت حشرة صغيرة الحركة على محور السينات في الاتجاه الموجب منه ، مبتدأة من النقطة (٣،٠) بسرعة ٢سم/د وفي نفس الوقت ابتدأت حشرة أخرى الحركة في الربع الأول (لمحاور الاحداثيات) مبتدأة من نقطة الأصل على المستقيم الذي معادلته ص - $\sqrt{3}$ س = ٠ ، بسرعة ٣سم/د ، جد سرعة تباعد أو تقارب الحشرتين بعد ٤ دقائق من البدء .

الحل :



$$\text{ص} - \sqrt{3}\,\text{س} = ٠ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \sqrt{3} = ٠ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{ظاهـ} = \sqrt{3} \Leftarrow \text{هـ} = ٦٠^\circ$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢\text{سم/د} \qquad \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٣\text{سم/د} \qquad \text{المطلوب} : \left.\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=٤}$$

العلاقة : من قانون جيب التمام

$$\text{م}^2 = (\text{ف}+٣)^2 + \text{ل}^2 - ٢(\text{ف}+٣) \times \text{ل جتا}٦٠^\circ$$

لكن : المسافة = السرعة × الزمن

$$\Leftarrow \text{ف} = ٢ \times \text{ن}$$

$$\text{ل} = ٣ \times \text{ن}$$

خطوة الاختزال

$$\text{تصبح العلاقة} : \text{م}^2 = (٢\text{ن}+٣)^2 + (٣\text{ن})^2 - \cancel{٢}(٢\text{ن}+٣)(٣\text{ن}) \times \frac{١}{\cancel{٢}}$$

$$\Leftarrow \text{م}^2 = (٢\text{ن}+٣)^2 + ٩\text{ن}^2 - ٦\text{ن}^2 - ٩\text{ن}$$

$$\text{م}^2 = (٢\text{ن}+٣)^2 + ٣\text{ن}^2 - ٩\text{ن} \quad \text{---- ①} \quad \text{نشتق بالنسبة لـ ن}$$

$$\Leftarrow ٢\text{م} \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢(٢\text{ن}+٣) \times ٢ + ٦\text{ن} - ٩$$

$$\Leftarrow ٢\text{م} \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٤\text{ن} + ٣ \quad \text{--- ②} \quad \text{نعوض عند } \boxed{\text{ن} = ٤}$$

$$\text{من ①} \Leftarrow \text{م}^2 = ١٢١ + ٤٨ - ٣٦ \Leftarrow \text{م}^2 = ١٣٣ \Leftarrow \text{م} = \pm\sqrt{١٣٣}$$

$$\text{نأخذ } \boxed{\text{م} = \sqrt{١٣٣}}$$

$$\text{من ②} \Leftarrow ٢\sqrt{١٣٣}\,\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٤ \times ٤ + ٣ \Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{٥٩}{٢\sqrt{١٣٣}} \text{سم/د}$$

مثال: سلم طوله ١٠م ، يستند طرفه العلوي على حائط رأسي وطرفه السفلي على أرض أفقية ، فإذا انزلق السلم بحيث أن طرفه السفلي يتحرك بسرعة ٢م/د مبتعداً عن الحائط ، وفي لحظة ما كان الطرف السفلي على بعد ٨م عن الحائط. نجد كل مما يلي:

① معدل نزول الطرف العلوي للسلم

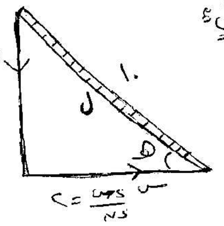
② معدل التغير في مساحة المثلث المكون من السلم والحائط والأرض

③ معدل التغير في الزاوية المحصورة بين السلم والأرض

الحل: المطلوب: ① $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ② $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ (معدل التغير في مساحة المثلث)

③ $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$ (معدل تغير الزاوية)

جميع المطلوب عندما $\boxed{\text{س} = ٨}$



① من نظرية فيثاغورس ⇐ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١٠٠$ نشتق الطرفين بالنسبة لـ ن

⇐ $٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$ ...... ① | لكن: $(٨)^٢ + \text{ص}^٢ = ١٠٠$ عوضنا $\boxed{\text{س} = ٨}$

⇐ $\boxed{\text{ص} = ٦}$ نعوضها في ①

⇐ $٢(٨)(٢) + ٢(٦) \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$

⇐ $١٢ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٣٢$ ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-٣٢}{١٢}$

⇐ $\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -\frac{٨}{٣}}$ م/د (الإشارة السالبة تدل أن المسافة ص تتناقص)

---

② لإيجاد $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$: $\text{م} = \frac{١}{٢} \text{س} \times \text{ص}$ نشتق

⇐ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}\text{س} \frac{\text{دص}}{\text{دن}} + \frac{١}{٢} \times \text{ص} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ نعوض

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}(٨)\left(\frac{-٨}{٣}\right) + ٦ \times \frac{١}{٢} \times ٢ = \frac{-٣٢}{٣} + ٦ = \frac{-١٤}{٣}$ م²/د

---

③ لإيجاد $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$: نختار $\text{جتاهـ} = \frac{\text{س}}{١٠}$ نشتق

⇐ $-\text{جاهـ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٠} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ -- نعوض

$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\left(-\frac{٦}{١٠}\right) \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٠} \times ٢$ ⇐ $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{٢}{١٠} \times \frac{-١٠}{٦} = \frac{-١}{٣}$ راديان/د

مثال: يزداد حجم بالون كروي بمعدل ١٠٠٠ سم³/د ، أوجد معدل الزيادة في مساحة سطحه في اللحظة التي يكون عندها نصف قطره ١٠ سم.

الحل: $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ١٠٠٠$ المطلوب: $\left.\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right|_{\text{نق} = ١٠}$

العلاقة

$\boxed{\text{م} = ٤ \pi \text{نق}^2}$ نشتقه ⇐ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨ \pi \text{نق} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ ؟؟

مساحة الدائرة

لكن: $\text{ح} = \frac{٤}{٣} \pi \text{نق}^3 \Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{٤}{\cancel{٣}} \pi \times \cancel{٣} \text{نق}^2 \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

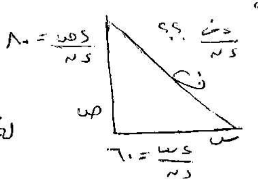
$\Leftarrow ١٠٠٠ = ٤ \pi \times ١٠٠ \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{١٠٠٠}{٤ \pi \times ١٠٠}$

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨ \pi \times ١٠ \times \frac{١٠٠٠}{٤ \pi \times ١٠٠} = ٢٠٠ \text{ سم}^2/\text{د}$

مثال: انطلقت سفينتان في نفس الوقت من الميناء أ ، فسارت الأولى نحو الميناء ب بسرعة ٦٠ كم/س ، وسارت الثانية نحو الميناء جـ بسرعة ٨٠ كم/س ، أوجد معدل تغير المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من الإبحار علماً بأن الزاوية ب أ جـ قائمة.

الحل: العلاقة $\text{ف}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$ (من نظرية فيثاغورس) فنشتق

$٢\text{ف} \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ---- ①



لكن: س بعد ساعتين $= ٦٠ \times ٢ = ١٢٠$

ص بعد ساعتين $= ٨٠ \times ٢ = ١٦٠$

$\Leftarrow \text{ف}^2 = (١٢٠)^2 + (١٦٠)^2 = ١٤٤٠٠ + ٢٥٦٠٠ = ٤٠٠٠٠$

$\Leftarrow \text{ف} = ٢٠٠$

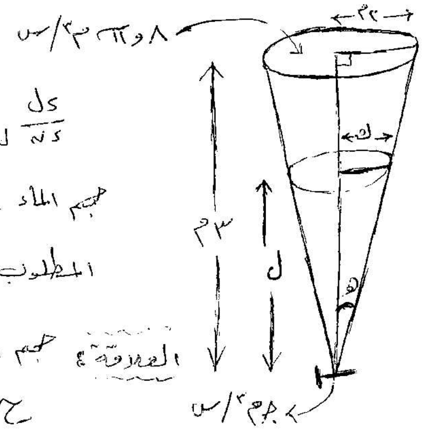
نعوض في ① $\Leftarrow ٢(٢٠٠) \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢(١٢٠)(٦٠) + (٢)(١٦٠)(٨٠)$

$\Leftarrow ٤٠٠ \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ١٤٤٠٠ + ٢٥٦٠٠ \Leftarrow ٤٠٠ \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٤٠٠٠٠$

$\therefore \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٤٠٠٠٠}{٤٠٠} = ١٠٠$ كم/س

مثال: خزان مياه على شكل مخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٢م وارتفاعه ٣م ، مثبت رأسياً بحيث تكون قاعدته أفقية إلى أعلى ورأسه إلى أسفل ، يصب فيه الماء بمعدل ٨و٠ π م³/س ويوزع منه الماء على المرافقة المجاورة بمعدل جـ م³/س ، لوحظ أن الماء يرتفع في الخزان بمعدل ٢و٠ م/س عندما كان ارتفاعه ١,٥م ، جد قيمة الثابت جـ .

الحل:



$\left.\frac{\text{دل}}{\text{دن}}\right|_{\text{ل}=١,٥} =$ ٢و٠ م/س

حجم الماء $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} =$ (٨و٠ π − جـ) م³/س

المطلوب : جـ

العلاقة: حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = $\frac{1}{3}$ π ك² ل

حجم مخروط الماء

لكن: من تشابه المثلثات

$\frac{\text{ك}}{2} = \frac{\text{ل}}{3}$ ⇒ ٣ك = ٢ل

$\boxed{\text{ك} = \frac{2\text{ل}}{3}}$ أو

ظاهـ = $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ ، ظاهـ = $\frac{2}{3}$

⇒ $\frac{\text{ك}}{\text{ل}} = \frac{2}{3}$ ⇒ ك = $\frac{2\text{ل}}{3}$

⇒ تصبح العلاقة: ح = $\frac{1}{3}$ π $\left(\frac{2\text{ل}}{3}\right)^2$ × ل

⇒ ح = $\frac{4\pi}{27}$ ل³ — — نشتق

⇒ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{4\pi}{9}$ ل² × $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ — نعوض المعطيات

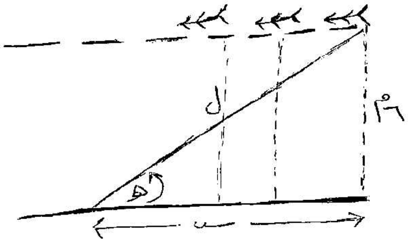
من المعطيات: ٨و٠ π − جـ = $\frac{4\pi}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2$ × ٢و٠

⇒ ٨و٠ π − جـ = ٢و٠ π

⇒ جـ = ٦و٠ π م³/س

مثال: من نقطة على الأرض بدأ أحد الأشخاص مراقبة طائرة تطير أفقياً على ارتفاع ٦٠٠٠م ، فلاحظ أن زاوية الارتفاع التي يشاهد بها الطائرة تتغير بمعدل $\frac{1}{4}$° في الدقيقة ، احسب سرعة الطائرة عندما تكون زاوية الارتفاع ٦٠° ؟

الحل:



$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \left(\frac{1}{4}\right)^\circ/\text{د} = \frac{\pi}{720}$ راديان/د

$180^\circ \longrightarrow \pi$

$\left(\frac{1}{4}\right)^\circ \longrightarrow$ ؟

المطلوب: سرعة الطائرة $\left.\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right|_{\text{هـ}=60^\circ}$

العلاقة: $\text{ظاهـ} = \frac{6000}{\text{س}} \Leftarrow \text{س ظاهـ} = 6000 \Leftarrow \text{س} = \frac{6000}{\text{ظاهـ}}$

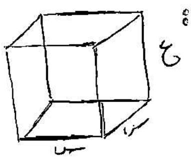
$\Leftarrow \text{س} = 6000\ \text{ظتاهـ}$ لا يوجد اختزال أو علاقة فرعية

نشتق $\Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 6000\left(-\text{قتا}^2\text{هـ}\right)\left(1 \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}\right)$ --- نعوض

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -6000 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{\pi}{720} \Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -6000 \times \frac{4}{3} \times \frac{\pi}{720} = -11{,}1\pi$ م/د

مثال: صندوق قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه يساوي ثلاثة أمثال طول ضلع القاعدة فإذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل $\frac{1}{4}$ سم/ث ، احسب معدل التغير في الحجم ومعدل التغير في مساحة السطح الكلية للصندوق عندما يكون طول الضلع ٨ سم ؟

الحل:



$\text{ع} = 3\text{س} \quad , \quad \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{1}{4} \quad , \quad \text{س} = 8$

العلاقة: $\text{ح} = \text{س} \times \text{س} \times \text{ع} = \text{س}^2 \times 3\text{س}$

$\text{ح} = 3\text{س}^3$ ---- نشتق

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 9\text{س}^2 \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 9 \times 8 \times 8 \times \frac{1}{4} = 144$ سم³/ث

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

مساحة السطح = (محيط القاعدة × الارتفاع) + مجموع مساحتي القاعدتين

أيضاً ⇐ العلاقة: $\text{م} = 2\text{س}^2 + 4\text{س ع} = 2\text{س}^2 + 4\text{س} \times 3\text{س}$

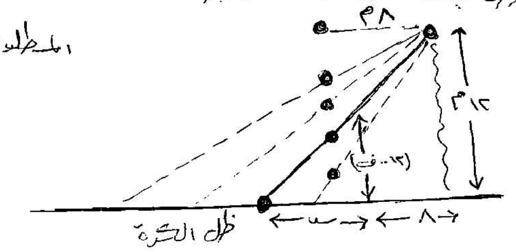
$\Leftarrow \text{م} = 2\text{س}^2 + 12\text{س}^2 \Leftarrow \text{م} = 14\text{س}^2$ نشتق

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 28\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 28 \times 8 \times \frac{1}{4} = 56$

مثال: مصباح كهربائي مثبت على ارتفاع ١٢م ، سقطت كرة صغيرة من نقطة تبعد عن المصباح ٨م أفقياً وعلى نفس الارتفاع ، فإذا علمت أن المسافة التي تتحركها الكرة رأسياً إلى أسفل تعطى حسب المعادلة ف = ٥ن^٢ ، احسب سرعة ظل الكرة على الأرض بعد ثانية من سقوطها .

الحل:

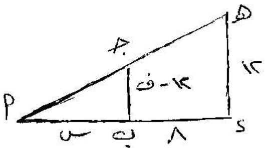
المطلوب: $\frac{د\text{س}}{د\text{ن}}\Big|_{\text{ن}=١}$



العلاقة: من تشابه المثلثات ΔΔ أ ب جـ ، أ د هـ

أو $\text{ظا هـ} = \frac{١٢-\text{ف}}{\text{س}}$

أيضاً: $\text{ظا هـ} = \frac{١٢}{٨+\text{س}}$



$\frac{١٢-\text{ف}}{١٢} = \frac{\text{س}}{\text{س}+٨} \Leftarrow ١٢\text{س} = (١٢-\text{ف})(\text{س}+٨)$

$\Leftarrow ١٢\text{س} = ١٢\text{س} + ٩٦ - \text{ف}\text{س} - ٨\text{ف}$

$\Leftarrow \text{ف}\text{س} = ٩٦ - ٨\text{ف} \Leftarrow \text{س} = \frac{٩٦}{\boxed{\text{ف}}} - ٨$

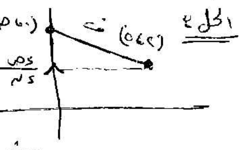
$\Leftarrow \text{س} = \frac{٩٦}{\boxed{٥\text{ن}^٢}} - ٨$ ـ ـ ـ من المعادلة

المشتقة $\Leftarrow \frac{د\text{س}}{د\text{ن}} = \frac{-٩٦ \times ١٠\text{ن}}{(٥\text{ن}^٢)^٢} = \frac{-٩٦٠}{٢٥} = -٣٨,٤$ م/ث

مثال: بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل وفي الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة ٣كم/ث جد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢،٥) بعد مرور ثانيتين من الحركة .

المطلوب: $\frac{د\text{ف}}{د\text{ن}}$

الحل:



ص بعد ٢ ثانية = ٣ × ٢ = ٦

$\frac{د\text{ص}}{د\text{ن}} = ٣$ **العلاقة:** $\text{ف} = \sqrt{(٠-٢)^٢ + (\text{ص}-٥)^٢}$ (قانون المسافة بين نقطتين)

$\Leftarrow \text{ف} = \sqrt{٤ + \text{ص}^٢ - ١٠\text{ص} + ٢٥} \Leftarrow \text{ف} = \sqrt{\text{ص}^٢ - ١٠\text{ص} + ٢٩}$

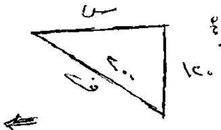
المشتقة $\Leftarrow \frac{د\text{ف}}{د\text{ن}} = \frac{٢\text{ص} - ١٠}{٢\sqrt{\text{ص}^٢ - ١٠\text{ص} + ٢٩}} \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}}$ نعوض $\Leftarrow \frac{د\text{ف}}{د\text{ن}} = \frac{٢ \times ٦ - ١٠}{٢\sqrt{٣٦ - ١٠ \times ٦ + ٢٩}} \times ٣$

$= \frac{٢}{٢\sqrt{٥}} \times ٣ = \frac{٣}{\sqrt{٥}}$

مثال: يمسك ولد بيده خيط طائرة ورقية مرتفعة ١٢٠م والرياح تأخذ الطائرة من الولد أفقياً بمعدل ٨م/ث، كم السرعة التي يرخي بها الولد الخيط عندما تبعد الطائرة عنه ٢٠٠م

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} : \text{المطلوب} \qquad ٢٠٠ = \text{ف} \qquad ٨ = \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

الحل:



$$\text{نشتق} \longrightarrow \text{ف}^٢ = (١٢٠)^٢ + \text{س}^٢$$

$$① \quad --- \quad \frac{\text{دس}}{\text{دن}}\text{س}٢ + ٠ = \frac{\text{دف}}{\text{دن}}\text{ف}٢ \Leftarrow$$

لكن: من نظرية فيثاغورس نجد س

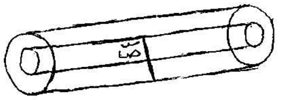
$$① \ \text{نعوض في} \quad ١٦٠ = \text{س} \Leftarrow (١٢٠)^٢ - (٢٠٠)^٢ = \text{س}^٢$$

$$\frac{٣٢}{٥} = \frac{٨ \times ١٦٠ \times ٢}{٢٠٠ \times ٢} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \Leftarrow ٨ \times ١٦٠ \times ٢ = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \times ٢٠٠ \times ٢ \Leftarrow$$

مثال: ماسورة من الحديد مجوفة طولها ثابت ونصفا قطريها الداخلي والخارجي يتغيرات بحيث يبقى حجم الحديد ثابت، فإذا كان نصف القطر الداخلي يزداد بمعدل ½ سم/ث أوجد معدل التغير في نصف القطر الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي ٦ سم والخارجي ٨ سم.

$$\begin{matrix}\text{عندما س} = ٦ \\ \text{ص} = ٨\end{matrix} \qquad ؟؟ \ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \qquad \frac{١}{٢} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

الحل:



العلاقة: حجم الحديد = الخارجي − الداخلي

$$\text{ح} = \pi\,\text{ص}^٢\text{ع} - \pi\,\text{س}^٢\text{ع} \qquad \qquad \text{ح، ع ثوابت}$$

$$(\text{ص}^٢ - \text{س}^٢)\,\text{ع}\,\pi = \text{ح} \Leftarrow$$

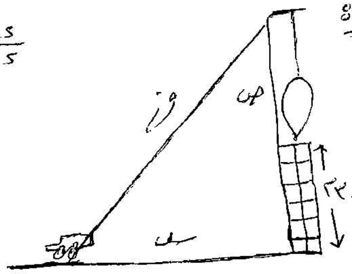
$$\text{نشتق} \longrightarrow \text{ص}^٢ - \text{س}^٢ = \overset{\text{ثابت}}{\boxed{\frac{\text{ح}}{\pi\,\text{ع}}}} \Leftarrow$$

$$\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٢ - \frac{\text{دص}}{\text{دن}} ٨ \times ٢ = ٠ \Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دن}}\text{س}٢ - \frac{\text{دص}}{\text{دن}}\text{ص}٢ = \text{صفر}$$

$$\frac{٣}{٨} = \frac{٦}{١٦} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دن}}١٦ = ٦ \Leftarrow$$

مثال: انطلق منطاد للحركة رأسياً إلى أعلى من سطح بناية ترتفع عن الأرض ٣٠م بسرعة ١٥م/د وفي نفس اللحظة انطلقت سيارة من أسفل البناية للحركة أفقياً مبتعدة عن البناية بسرعة ٤٠م/د ، احسب معدل تغير المسافة بين المنطاد والسيارة بعد دقيقتين .

الحل:



دص/دن = ١٥ م/د   دس/دن = ٤٠ م/د

المطلوب: دف/دن |ن=٢

العلاقة: ف^{2} = (ص + ٣٠)^{2} + س^{2} (فيثاغورس)

نحكم: المسافة = السرعة × الزمن
⇐ س = ٤٠ × ن
ص = ١٥ × ن
ن مجهول لما بعد الاشتقاق

تصبح العلاقة:

⇐ ف^{2} = (١٥ن + ٣٠)^{2} + (٤٠ن)^{2} ——— ①

نشتق ⇐ ٢ف دف/دن = ٢(١٥ن + ٣٠)(١٥) + ٢(٤٠ن)(٤٠)

⇐ ف دف/دن = ٢٢٥ن + ٤٥٠ + ١٦٠٠ن

⇐ ف دف/دن = ١٨٢٥ن + ٤٥٠ ——— ②   نعوض $\boxed{ن = ٢}$

⇐ من ① ⇐ ف^{2} = (٦٠)^{2} + (٨٠)^{2} ⇐ $\boxed{ف = ١٠٠}$

من (٢) ⇐ ١٠٠ دف/دن = ٣٦٥٠ + ٤٥٠ ⇐ ١٠٠ دف/دن = ٤١٠٠ ⇐ دف/دن = ٤١ م/د

مثال: تتحرك نقطة على منحنى ص = س^{3} + ٥س^{2} ، فإذا كان الاحداثي السيني يزداد بمعدل ٢سم/ث . أوجد: أ) معدل التغير في الاحداثي الصادي
ب) معدل التغير في ميل المماس عندما س=٢

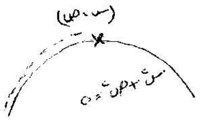
الحل: أ) ص = س^{3} + ٥س^{2} ⇐ دص/دن = (٣س^{2} + ١٠س) دس/دن = (٣×٤ + ١٠×٢)×٢
= ٦٤ سم/ث

ب) ميل المماس م = دص/دس = ٣س^{2} + ١٠س

دم/دن = (٦س + ١٠) دس/دن = (٦×٢ + ١٠)×٢ = ٤٤

مثال: تتحرك حشرة صغيرة على سلك من الحديد مثبت على مستوى الحائط ليأخذ شكل منحنى معادلته $س^2 + ص^2 = ٥$ ، عين موقع الحشرة على ذلك السلك (في المستوى) عندما يكون معدل التغير في الاحداثي السيني لموقعها ضعفي معدل التغير في الاحداثي الصادي لهذا الموقع.

الحل: المطلوب: (س، ص) عندما $\frac{دس}{دن} = ٢ \frac{دص}{دن}$



العلاقة: $س^2 + ص^2 = ٥$ ---- ① نشتق

$٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = صفر \Leftarrow س \frac{دس}{دن} + ص \frac{دص}{دن} = ٠$ نعوض ②

$\boxed{\frac{دس}{دن} = ٢ \frac{دص}{دن}} \Leftarrow$ من ② $\Leftarrow س \times ٢ \cancel{\frac{دص}{دن}} + ص \cancel{\frac{دص}{دن}} = ٠$

$\Leftarrow ٢س + ص = ٠$ ---- ③

$\Leftarrow ص = -٢س$ نعوض في ①

$\Leftarrow س^2 + ٤س^2 = ٥ \Leftarrow ٥س^2 = ٥ \Leftarrow س^2 = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

عندما $\boxed{س = -١}$ فإن $\boxed{ص = ٢}$ (−١، ٢)

عندما $\boxed{س = ١}$ فإن $\boxed{ص = -٢}$ (١، −٢)

مثال: مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول ضلعه بمعدل ٠٫٠١ سم/د ، فإذا علمت أن معدل تغير الحجم هو ١٢ سم³/د أوجد ⓐ طول ضلع المكعب ⓑ معدل التغير في المساحة الكلية للمكعب

الحل: $\frac{دح}{دن} = ١٢$ ، $\frac{دس}{دن} = ٠٫٠١$

ⓐ $ح = س^3 \Leftarrow \frac{دح}{دن} = ٣س^2 \frac{دس}{دن}$

$\Leftarrow ١٢ = ٣ \times س^2 \times ٠٫٠١ \Leftarrow س^2 = \frac{١٢}{٠٫٠٣} = ٤٠٠ \therefore \boxed{س = ٢٠}$

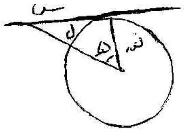
ⓑ $م = ٦س^2 \Leftarrow \frac{دم}{دن} = ١٢س \frac{دس}{دن} = ١٢ \times ٢٠ \times ٠٫٠١$

$= ٢٫٤$ سم²/د

المساحة الكلية

مثال: طريق دائري الشكل للسباق نصف قطره نق وفي مركزه كشاف ضوئي ويوجد جدار مستقيم طويل مماس للطريق في إحدى النقاط، وتسير سيارة على الطريق بسرعة ١٥٠ كم/س، وفي لحظة ما كانت السيارة عند نقطة التماس ا أوجد سرعة ظل السيارة على الجدار عندما تكون السيارة قد قطعت $\frac{1}{8}$ دورة.

الحل:



نق ثابت $\quad \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ١٥٠ \quad$ هـ $= \frac{1}{8}$ دورة في لحظة ما

$\text{هـ} = \frac{1}{8} \times ٢\pi = \frac{\pi}{٤}$

المطلوب: $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

العلاقة

$\text{ظاهـ} = \frac{\text{س}}{\text{نق}} \xRightarrow{\text{نشتق}} \text{قا}^2\text{هـ} \, \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{1}{\text{نق}} \, \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ —— ①

لكن: لإيجاد $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} \Leftarrow \boxed{\text{ل} = \text{نق} \times \text{هـ}} \Leftarrow \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{نق} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

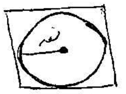
$\Leftarrow ١٥٠ = \text{نق} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} \Leftarrow \boxed{\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١٥٠}{\text{نق}}}$

لإيجاد $\text{قا}^2\text{هـ} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow \boxed{\text{قا}^2\text{هـ} = ٢}$

نعوض في ① $\Leftarrow ٢ \times \frac{١٥٠}{\cancel{\text{نق}}} = \frac{1}{\cancel{\text{نق}}} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣٠٠$

مثال: مربع يتمدد بحيث يزداد طول ضلعه بمعدل ٤ سم/د مرسوم داخله دائرة تتمدد معه بحيث تبقى ملامسة لأضلاعه، أوجد معدل التغير في المساحة بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع ٢٠ سم.

الحل:



المساحة = مساحة المربع - مساحة الدائرة

$\text{م} = \text{س}^2 - \pi \text{نق}^2 \qquad$ لكن: $\text{نق} = \frac{1}{2}\text{س}$

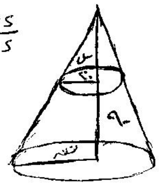
$\Leftarrow \text{م} = \text{س}^2 - \pi \times \frac{1}{4}\text{س}^2 \qquad \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٤ , \quad \text{س} = ٢٠$

نشتق $\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} - \frac{\pi}{٤} \times ٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ نعوض

$\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢ \times ٢٠ \times ٤ - \frac{\pi}{٤} \times ٢ \times ٢٠ \times ٤ = ١٦٠ - ٤٠\pi$

مثال: مصباح معلق فوق مركز طاولة دائرية أفقية ارتفاعها عن الأرض يساوي ٩٠ سم ونصف قطرها ٢٠ سم، تحرك المصباح رأسياً للأسفل نحو الطاولة بسرعة ٦ سم/ث، أوجد معدل تغير نصف قطر دائرة ظل الطاولة على الأرض عندما يكون ارتفاع المصباح عن الطاولة ٦٠ سم

الحل:



$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٦$ المطلوب $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

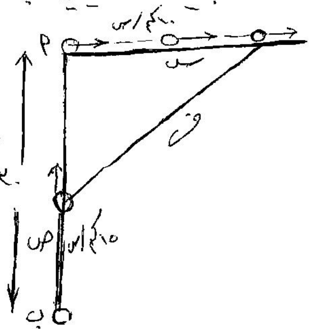
من تشابه $\Delta\Delta \Leftarrow \frac{٢٠}{\text{نق}} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٩٠}$

$\Leftarrow \text{نق} = \frac{٢٠(٩٠ + \text{س})}{\text{س}} \Leftarrow \text{نق} = \frac{١٨٠٠ + ٢٠\text{س}}{\text{س}} = \frac{١٨٠٠}{\text{س}} + ٢٠$

نشتق $\Leftarrow \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{-١٨٠٠}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{-١٨٠٠}{٦٠ \times ٦٠} \times -٦ = ٣$

مثال: ميناءان أ و ب، أ يقع على بعد ٣٠ كم إلى الشمال من ب، انطلقت سفينة من الميناء أ لتتحرك باتجاه الشرق بسرعة ١٠ كم/س، وبعد مرور ساعة انطلقت سفينة أخرى من الميناء ب بسرعة ١٥ كم/س باتجاه الشمال، احسب معدل التغير في المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من حركة الأولى.

الحل:



$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ١٥$ كم/س $\quad \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ١٠$كم/س

المطلوب: $\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=١}$

العلاقة: $\text{ف}^٢ = (\text{س} + ١٠)^٢ + (٣٠ - \text{ص})^٢$

لكن: المسافة = السرعة × الزمن

$\text{س} = ١٠\text{ن}$ ن مجهول لما بعد الاشتقاق

$\text{ص} = ١٥\text{ن}$

$\Leftarrow$ نضع العلاقة $\Leftarrow \text{ف}^٢ = (١٠\text{ن} + ١٠)^٢ + (٣٠ - ١٥\text{ن})^٢$ ——— ①

$\Leftarrow$ نشتق $٢\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢(١٠\text{ن} + ١٠)(١٠) + ٢(٣٠ - ١٥\text{ن})(-١٥)$

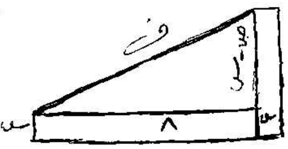
$\Leftarrow \text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ١٠٠\text{ن} + ١٠٠ - ٤٥٠ + ٢٢٥\text{ن} \Leftarrow \text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٣٢٥\text{ن} - ٣٥٠$ ——— ②

نعوض عند $\boxed{\text{ن} = ١} \Leftarrow$ ومن ① $\Leftarrow \text{ف}^٢ = (٢٠)^٢ + (١٥)^٢ \Leftarrow \boxed{\text{ف} = ٢٥}$

ومن ② $\Leftarrow ٢٥\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -٢٥ \Leftarrow \boxed{\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -١}$ أي أن السفينتان تتقاربان بسرعة ١كم/س

مثال: مصعدان واقفان في الطابق الأرضي من عمارة والمسافة الأفقية بينهما ٨م بدأ المصعد الأول يرتفع للأعلى بسرعة ٢م/ث، وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني يرتفع عمودياً بسرعة ١م/ث، أوجد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد مرور ثانيتين من تحرك المصعد الثاني.

الحل:



$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٢ \qquad \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ١$

العلاقة: $\text{ف}^٢ = (٨)^٢ + (\text{ص} - \text{س})^٢$

$\Leftarrow \text{ف} = \sqrt{٦٤ + (\text{ص} - \text{س})^٢}$

لحظة: س بعد ٢ث $= ٢ \times ١ = ٢$

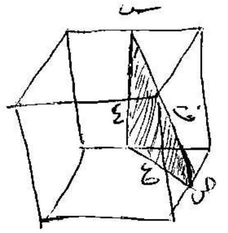
ص بعد ٤ث $= ٤ \times ٢ = ٨$

نشتق $\Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢(\text{ص} - \text{س}) \times \left(\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - \frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right)}{٢\sqrt{٦٤ + (\text{ص} - \text{س})^٢}} = \frac{٢(٨ - ٢)(٢ - ١)}{٢\sqrt{٦٤ + (٨ - ٢)^٢}} = \frac{٢ \times ٦}{٢ \times ١٠} = ٠٫٦$

مثال: في لحظة ما كانت الطائرة م تمر مباشرة فوق السيارة ب وعلى ارتفاع ٤كم فإذا كانت م تتحرك شرقاً أفقياً في خط مستقيم بسرعة ٣٠٠كم/س والسيارة تسير جنوباً أفقياً في خط مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س. أوجد معدل تغير المسافة بين الطائرة والسيارة بعد ٦ دقائق.

الحل:

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣٠٠ \qquad \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٩٠ \qquad$ المطلوب: $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$



$\text{ف}^٢ = \text{ع}^٢ + (٤)^٢ \Leftarrow \text{ف} = \sqrt{\text{ع}^٢ + ١٦}$

$\boxed{\text{لكن: } \text{ع}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$ $\therefore \text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ١٦}$

$\Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ١٦}}$

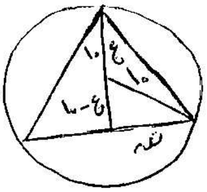
س بعد ٦ دقائق $= ٣٠٠ \times \frac{٦}{٦٠} = ٣٠$ (دقائق)

ص بعد ٦ دقائق $= ٩٠ \times \frac{٦}{٦٠} = ٩$

$\therefore \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢ \times ٣٠ \times ٣٠٠ + ٢ \times ٩ \times ٩٠}{٢\sqrt{٩٠٠ + ٨١ + ١٦}} = \frac{١٩٦٢٠}{٢\sqrt{٩٩٧}}$

مثال: كرة نصف قطرها ثابت = ١٠سم وضع داخلها مخروط قائم تتغير أبعاده وارتفاعه ع بحيث أن رأسه ومحيط قاعدته يتلامس مع سطح الكرة إذا كان ارتفاع المخروط يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣٢}$ سم/د ، أوجد معدل تغير حجم المخروط في اللحظة التي يكون فيها ارتفاعه ٨سم .

الحل:



$$ح = \frac{١}{٣}\pi \, نق^{٢} ع$$

$$\frac{دع}{دن} = \frac{١}{٣٢}$$

$$ع = ٨$$

لكن: $(ع - ١٠)^{٢} + نق^{٢} = (١٠)^{٢}$

$$\Leftarrow ع^{٢} - ٢٠ع + \cancel{١٠٠} + نق^{٢} = \cancel{١٠٠} \Leftarrow \boxed{نق^{٢} = ٢٠ع - ع^{٢}}$$

$$\therefore ح = \frac{١}{٣}\pi \times (٢٠ع - ع^{٢}) \times ع = \frac{١}{٣}\pi (٢٠ع^{٢} - ع^{٣})$$

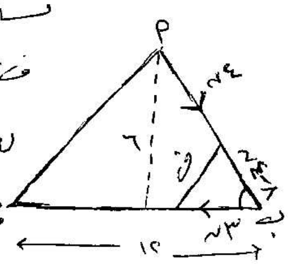
$$\xLeftarrow{نشتق} \frac{دح}{دن} = \frac{١}{٣}\pi (٤٠ع - ٣ع^{٢}) \times \frac{دع}{دن}$$

$$= \frac{\pi}{٣}\left(٤٠ \times ٨ - ٣ \times (٨)^{٢}\right) \times \frac{١}{٣٢} = \frac{\pi}{٣} \times ١٢٨ \times \frac{١}{٣٢} = \frac{٤\pi}{٣}$$

مثال: أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢سم تحركت نقطة من أ باتجاه ب بسرعة ٤سم/ث ، وفي نفس الوقت تحركت نقطة ثانية من ب باتجاه جـ بسرعة ٣سم/ث ، أوجد معدل التغير في المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانية واحدة .

الحل:

نستخدم قانون جيب التمام



$$ف^{٢} = (٨ - ٤ن)^{٢} + (٣ن)^{٢} - ٢(٨ - ٤ن)(٣ن) \times جتا ب$$

لكن: $جتا ب = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

$$\Leftarrow ف^{٢} = ٦٤ - ٦٤ن + ١٦ن^{٢} + ٩ن^{٢} - ٢ \times ٢(٤ - ٢ن)(٣ن) \times \frac{٣}{٤}$$

$$\Leftarrow ف^{٢} = ٦٤ - ٦٤ن + ١٦ن^{٢} + ٩ن^{٢} - ٣٦ن + ١٨ن^{٢}$$

$$ف^{٢} = ٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^{٢}$$

$$\Leftarrow ف = \sqrt{٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^{٢}} \xLeftarrow{نشتق} \frac{دف}{دن} = \frac{-١٠٠ + ٨٦ن}{٢\sqrt{٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^{٢}}}$$

وعندما $\boxed{ن = ١}$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{-١٠٠ + ٨٦}{٢\sqrt{٦٤ - ١٠٠ + ٤٣}} = \frac{-١٤}{٢\sqrt{٧}}$$

* التزايد والتناقص :

إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ، ب] وكانت س١، س٢ ∈ [أ، ب] عندئذ يكون الاقتران ق متزايد في الفترة [أ، ب] إذا كانت س٢ > س١ فإن ق(س٢) > ق(س١) ويكون الاقتران متناقصاً في [أ، ب] إذا كانت س٢ > س١ فإن ق(س٢) < ق(س١)

نظرية : ① إذا كانت ق′(س) > ٠ لكل س ∈ (أ، ب) فإن ق(س) يكون متزايداً في [أ، ب]

② إذا كانت ق′(س) < ٠ لكل س ∈ (أ، ب) فإن ق(س) يكون متناقصاً في [أ، ب]

③ إذا كانت ق′(س) = ٠ لكل س ∈ (أ، ب) فإن ق(س) يكون ثابتاً في [أ، ب]

مثال : حدد فترات التزايد والتناقص للاقترانات في ما يلي :

① ق(س) = س² + ٢س + ٥

الحل : ق′(س) = ٢س + ٢ ⟸ ٢س + ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{س = -١}$

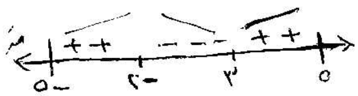
ق(س) متناقص في (-∞، -١]

ق(س) متزايد في [-١، ∞)

---

② ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س³ - $\frac{١}{٢}$ س² - ٦س ، س ∈ [-٥، ٥]

الحل : ق′(س) = س² - س - ٦ = ٠ ⟸ (س - ٣)(س + ٢) = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٣}$ أو $\boxed{س = -٢}$



ق(س) متزايد في [-٥، -٢] ، [٣، ٥]

ق(س) متناقص في [-٢، ٣]

---

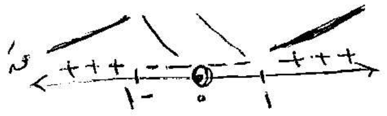
③ ق(س) = |٤ - ٤س| نعيد التعريف ⟸ |٤ - ٤س| = { ٤س - ٤ ، س ≥ ١
-٤س + ٤ ، س < ١

⟸ ق′(س) = { ٤ ، س > ١
-٤ ، س < ١
غ م ، س = ١

ق(س) متزايد في [١، ∞)

ق(س) متناقص في (-∞، ١]

④ ق(س) = س + $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ⟸ ق′(س) = ١ - $\frac{١}{س^٢}$ = ٠ ⟸ ١ = $\frac{١}{س^٢}$ ⟸ $\boxed{س = \pm ١}$



ق(س) متزايد في (-∞، -١] ، [١، ∞)

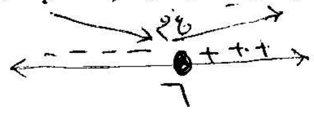
ق(س) متناقص في [-١، ٠) ، (٠، ١]

مثال: اذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{(س-٦)^{٢}}$ أوجد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى ق(س)

الحل: ق(س) = $(س-٦)^{\frac{٢}{٣}}$ ⟸ قَ(س) = $\frac{٢}{٣}(س-٦)^{\frac{-١}{٣}} \times ١$ ⟸ قَ(س) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س-٦}}$

تكون قَ(س) = ٠ اذا كان البسط = ٠ لكن البسط ٢ لا يمكن أن يساوي ٠

تكون قَ(س) غ م اذا كان المقام يساوي صفر (نقطة حرجة)



⟸ س - ٦ = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٦}$

ق(س) متناقص في (-∞، ٦]

ق(س) متزايد في [٦، ∞)

مثال: ق(س) = ٥ - ٢س - $س^{٣}$ أثبت أن ق متناقص على ح

الحل: قَ(س) = -٢ - ٣$س^{٢}$ < ٠ لكل س ∈ ح لأنه لا يمكن ٣$س^{٢}$ = -٢

∴ ق متناقصاً على ح

مثال: جد فترات تزايد وتناقص الاقتران ق(س) = ٣س + جتاس

الحل: قَ(س) = ٣ - جاس ⟸ $\boxed{جاس = ٣}$ لا يمكن لأن -١ ≤ جاس ≤ ١

∴ ق متزايد على ح

مثال: اذا كان ق(س) متزايداً على ح وكان هـ(س) متناقصاً على ح وكان ق، هـ قابلين للاشتقاق، وكان ل(س) = ٤ق(س) - ٣هـ(س) أثبت أن ل(س) متزايد على ح.

الحل: ق متزايد على ح ← قَ > ٠ لكل س ∈ ح ← ٤ قَ > ٠

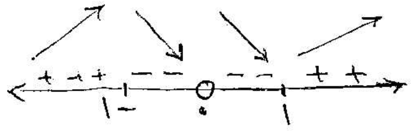
هـ متناقص على ح ← هـَ < ٠ لكل س ∈ ح ← -٣ هـَ > ٠ (تغيرت الإشارة لأننا ضربنا في سالب)

⟸ لَ(س) = ٤قَ - ٣هـَ = موجب + موجب = موجب

∴ ل(س) متزايد على ح

مثال: أثبت أن س + $\frac{١}{س}$ > ٢ إذا كانت س > ١

الحل: نفرض ق(س) = س + $\frac{١}{س}$



قَ(س) = ١ - $\frac{١}{س^{٢}}$ = ٠ ⟸ س = ±١

بما أنه ق(س) متزايد في [١، ∞)

∴ ق(س) > ق(١) لكل س ∈ (١، ∞)

∴ س + $\frac{١}{س}$ > ٢

مثال: اذا كانت ق′(س) > ك′(س) لجميع قيم س ∈ ح ، أثبت أن الاقتران ق(س) − ك(س) اقتران متزايد على ح ، وإذا كان ق(أ) = ك(أ) حيث أ ∈ ح فأثبت أن ق(ب) > ك(ب) حيث ب > أ

الحل: نفرض ل(س) = ق(س) − ك(س)

⇐ ل′(س) = ق′(س) − ك′(س) > ٠ لأنه ق′ > ك′ ∴ ل(س) متزايد على ح

وبما أن ل(س) متزايد وب > أ فإن ل(ب) > ل(أ)

⇐ ق(ب) − ك(ب) > ٠ حيث ق(أ) − ك(أ) = ٠ لأنه ق(أ) = ك(أ)

⇐ ق(ب) > ك(ب)

مثال: ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود معرفان على [١، ٤] ويقع كل منهما في الربع الأول فإذا كان ق(س) متزايداً في مجاله ، هـ(س) متناقصاً في مجاله ، هـ(س) ≠ ٠ ، أثبت أن $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) متزايد في [١، ٤] .

الحل: ق ، هـ في الربع الأول ← ق > ٠ ، هـ > ٠

$$\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(س) = \frac{هـ(س) \times ق'(س) - ق(س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^2}$$

هـ^2 > ٠ ، هـ(س) × ق′(س) > ٠ لأنه هـ > ٠ ، ق′ > ٠

ق(س) × هـ′(س) < ٠ لأنه ق > ٠ ، هـ′ < ٠ ∴ −ق × هـ′ > ٠

$\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(س) = \frac{\text{موجب + موجب}}{\text{موجب}}$ > ٠ ∴ $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$ متزايد في [١، ٤]

مثال: ق(س) = (س + ٢)^3 + جا^{2}س أثبت أن ق(س) متزايد في [٠، $\frac{\pi}{2}$]

الحل: ق′(س) = ٣(س + ٢)^2 + ٢ جاس جتاس

بما أن كلاً من ٣(س + ٢)^2 > ٠ ، جاس > ٠ ، جتاس > ٠ في (٠ ، $\frac{\pi}{2}$)

∴ ق′ > ٠ في (٠ ، $\frac{\pi}{2}$) ⟵ ق متزايد في [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]

مثال: إذا كانت ق(س) = $\frac{1}{2}$ جتا٢س + جا٢س أثبت أنه ق(س) ثابت

الحل: ق'(س) = $\frac{1}{2}$ × −جا٢س × ٢ + ٢جاس جتاس

= −جا٢س + جا٢س

= صفر

∴ ق(س) ثابت

مثال: إذا كانت ق'(س) = هـ(س) ، هـ'(س) = ق(س) وكان ل(س) = ق²(س) − هـ²(س)

أثبت أن ل(س) اقتران ثابت.

الحل: ل'(س) = ٢ق(س) × ق'(س) − ٢هـ(س) × هـ'(س)

وبما أن ق(س) = هـ'(س) ، ق'(س) = هـ(س)

∴ ل'(س) = ٢هـ'(س) × هـ(س) − ٢هـ(س) × هـ'(س) = صفر

∴ ل(س) اقتران ثابت

---

* **النقطة الحرجة:** تسمى (س١ ، ق(س١)) حيث س١ ∈ مجال الاقتران ق نقطة حرجة للاقتران ق إذا كانت ق'(س١) = صفر أو كانت ق'(س١) غير موجودة.

مثال: اذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣}$ عين جميع النقط الحرجة لـ ق(س)

الحل: ق'(س) = $\frac{(\text{س}^{٢}+٣)(١) - (\text{س})(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}+٣)^{٢}} = \frac{٣ - \text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+٣)^{٢}}$

النقط الحرجة

ق' = ٠
البسط = صفر
٣ − س² = ٠
س² = ٣
$\boxed{\text{س} = \pm\sqrt{٣}}$

ق' غ م
المقام = صفر
س² + ٣ = ٠
س² = −٣ ، لا يمكن

∴ النقاط الحرجة هي: {(−√٣ ، ق(−√٣)) ، (√٣ ، ق(√٣))}

مثال: ق(س) = س + |س − ١| ، أوجد قيم س والتي يوجد عندها نقاط حرجة للاقتران ق(س)

الحل: ق(س) = س + $\begin{cases} \text{س} - ١ ، & \text{س} \geq ١ \\ ١ - \text{س} ، & \text{س} < ١ \end{cases}$ = $\begin{cases} ٢\text{س} - ١ ، & \text{س} \geq ١ \\ ١ ، & \text{س} < ١ \end{cases}$

قَ(س) = $\begin{cases} ٢ ، & \text{س} > ١ \\ ٠ ، & \text{س} < ١ \\ \text{غ م} ، & \text{س} = ١ \end{cases}$

∴ النقط الحرجة

قَ = ٠ : س < ١ ، (−∞، ١)

قَ غ م : $\boxed{\text{س} = ١}$

∴ توجد قيم حرجة لكل س ∈ (−∞، ١]

مثال: اذا كان ق(س) معرفاً على ح وكانت قَ(س) = $\frac{\text{س} - ٥}{٢\text{س} + ١}$ أوجد قيم س التي توجد عندها نقاط حرجة للاقتران ق(س)

الحل: النقط الحرجة

قَ = ٠
البسط = ٠
س − ٥ = ٠
$\boxed{\text{س} = ٥}$

قَ غير موجودة
المقام = ٠
٢س + ١ = ٠
$\boxed{\text{س} = -\frac{١}{٢}}$

قيم س الحرجة هي ٥ ، $-\frac{١}{٢}$

مثال: ق(س) = [س + ٢] ، س ∈ [٠، ٣] أوجد قيم س التي توجد عندها نقاط حرجة لـ ق.

الحل: قَ(س) = $\begin{cases} ٠ ، & \text{س} \notin \text{ص} \\ \text{غ م} ، & \text{س} \in \text{ص} \end{cases}$

أو النقط الحرجة

قَ = ٠ : س ∉ ص

قَ غ م : س ∈ ص

∴ توجد نقاط حرجة لكل س ∈ [٠، ٣]

مثال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤ & ، -٥ \leq س < -١ \\ س^{٣} - ١٢س - ١٤ & ، -١ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ عين النقاط الحرجة لمنحنى ق(س)

الحل: $قَ(س) = \begin{cases} غ م ، & \boxed{س = -٥} \text{ طرف فترة} \\ ٢س ، & -٥ < س < -١ \\ غ م ، & \boxed{س = -١} \\ ٣س^{٢} - ١٢ ، & -١ < س < ٤ \\ غ م ، & \boxed{س = ٤} \text{ طرف فترة} \end{cases}$

عند $\boxed{س = -١}$

$قَ_{-}(-١) = ٢(-١) = -٢$

$قَ_{+}(-١) = ٣(-١)^{٢} - ١٢ = -٩$

$\therefore قَ(-١)$ غ م

عند النقاط الحرجة

$قَ = ٠$

$٢س = ٠ ، \notin (-٥ ، -١)$

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$س^{٢} = ٤$

$\cancel{س = -٢} ، \boxed{س = ٢}$

$\notin (-١ ، ٤)$

قَ غ م

عند $س = -٥$

$س = -١$

$س = ٤$

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

$\therefore$ النقاط الحرجة هي $\{(-٥ ، ق(-٥)) ، (-١ ، ق(-١)) ، (٢ ، ق(٢)) ، (٤ ، ق(٤))\}$

---

* **ملاحظة:** اقتران أكبر عدد صحيح جميع نقاطه في مجاله حرجة

سؤال: اذا كان $ق(س) = \frac{٦ - ٢س}{س^{٢} - ١}$ ، $س \neq -١ ، ١$ عين

① النقاط الحرجة ② مجالات التزايد والتناقص لمنحنى ق(س)

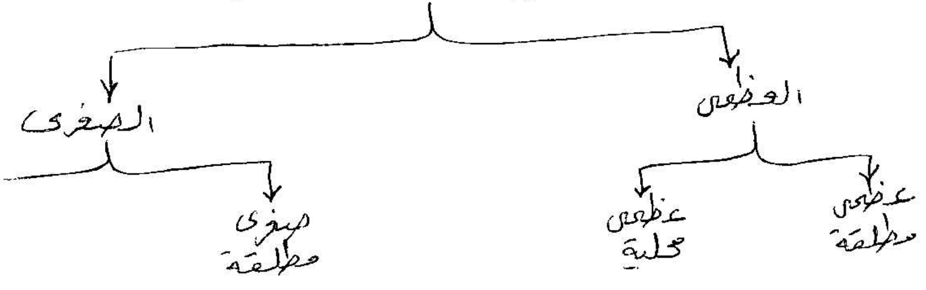
إرشاد: عند $قَ = ٠$ ⇐ نساوي البسط بصفر ونستخدم القانون العام لحل المعادلة التربيعية

وهو $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ ⇐ $س = ٣ \pm ٢\sqrt{٢}$

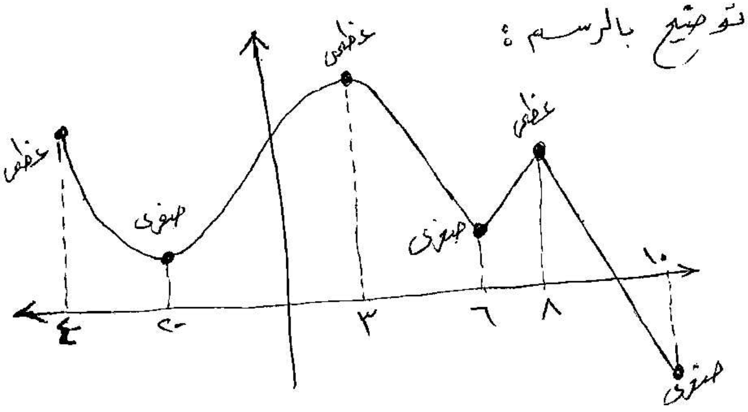
وعند قَ غ م $\cancel{س = \pm ١}$ خارج المجال

الإجابة: النقط الحرجة هي: $\{(٣ - ٢\sqrt{٢} ، ق(\text{—})) ، (٣ + ٢\sqrt{٢} ، ق(\text{—}))\}$

القيم القصوى للاقترانات



توضيح بالرسم :



ق(٣) عظمى مطلقة

ق(١٠) صغرى مطلقة

* خطوات ايجاد القيم القصوى للاقتران :-

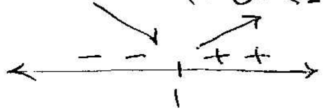
١) نجد المشتقة الأولى قَ(س)

٢) نجد قيم س الحرجة للاقتران ق(س) التي عندها قَ = ٠ أو قَ غ م

٣) ندرس إشارة قَ(س) لتحديد التزايد والتناقص

٤) إذا تحول الاقتران من متزايد إلى متناقص فإنه يمر بقمة عظمى وإذا تحول من متناقص إلى متزايد فإنه يمر بقمة صغرى .

مثال: أوجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $س^{٢}$ - ٢س - ٣



الحل: قَ(س) = ٢س - ٢ ⟸ ٢س - ٢ = ٠ ⟸ س = ١

يوجد قمة صغرى محلية عند س = ١ مقدارها ق(١) = ١ - ٢(١) - ٣ = -٤

(١، -٤)

مثال: أوجد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات التالية:

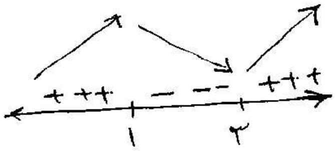
① $ق(س) = س(س - ٣)^{٢}$

الحل: $ق(س) = س(س^{٢} - ٦س + ٩) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س$

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠ \xRightarrow{\div ٣} س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

$\Leftarrow (س - ٣)(س - ١) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{س = ٣}$ أو $\boxed{س = ١}$

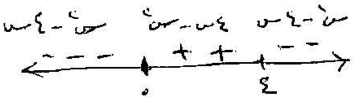


يوجد قيمة عظمى محلية عند $س = ١$ هي $ق(١) = ٤$

〃 قيمة صغرى محلية عند $س = ٣$ هي $ق(٣) = ٠$

② $ق(س) = |٤س - س^{٢}|$ نعيد التعريف

$٤س - س^{٢} = س(٤ - س) = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٠}$ أو $\boxed{س = ٤}$

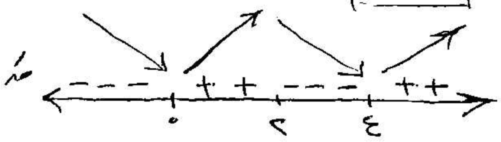


$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤س ، & س \le ٠ \\ ٤س - س^{٢} ، & ٠ < س \le ٤ \\ س^{٢} - ٤س ، & س > ٤ \end{cases} \Leftarrow ق'(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ ، & س < ٠ \\ ٤ - ٢س ، & ٠ < س < ٤ \\ ٢س - ٤ ، & س > ٤ \end{cases}$$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٢س - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٢ \notin (-\infty ، ٠)$

$٤ - ٢س = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

أيضاً ق′ غ م عند $\boxed{س = ٠}$ ، $\boxed{س = ٤}$ أطراف فترة



$ق(٠) = ٠$ صغرى محلية

$ق(٤) = ٠$ صغرى محلية

$ق(٢) = ٤$ عظمى محلية

سؤال: جد القيم القصوى المحلية إذا كان $ق(س) = س^{٢} \times |س - ٣|$

إرشاد: ⇐ النقط الحرجة $ق' = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، ٢$

$ق'$ غ م $\Leftarrow س = ٣$

$ق(٠) = ٠$ صغرى محلية

$ق(٣) = ٠$ صغرى محلية

$ق(٢) = ٤$ عظمى محلية

مثال: ليكن ق(س) = $|\text{س}^{٢} - ٥\text{س}|$ ، س ∈ [-٢، ٨] عين:

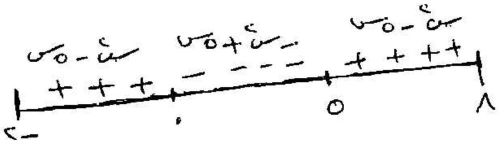
① النقط الحرجة لمنحنى ق(س)

② مجالات التزايد ومجالات التناقص لمنحنى ق(س)

③ القيم القصوى ونوعها لمنحنى ق(س)

الحل: نعيد تعريف $|\text{س}^{٢} - ٥\text{س}|$ ⟸ $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} = ٠$ ⟸ س(س - ٥) = ٠

⟸ $\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\boxed{\text{س} = ٥}$



$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٥\text{س} ، & -٢ \le \text{س} < ٠ \\ -\text{س}^{٢} + ٥\text{س} ، & ٠ \le \text{س} < ٥ \\ \text{س}^{٢} - ٥\text{س} ، & ٥ \le \text{س} \le ٨ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} \text{غ م} ، & \boxed{\text{س} = -٢} \\ ٢\text{س} - ٥ ، & -٢ < \text{س} < ٠ \\ \text{غ م} ، & \boxed{\text{س} = ٠} \\ -٢\text{س} + ٥ ، & ٠ < \text{س} < ٥ \\ \text{غ م} ، & \boxed{\text{س} = ٥} \\ ٢\text{س} - ٥ ، & ٥ < \text{س} < ٨ \\ \text{غ م} ، & \boxed{\text{س} = ٨} \end{cases}$$

عند $\boxed{\text{س} = ٠}$

$\text{ق}'_{-}(٠) = ٢(٠) - ٥ = -٥$

$\text{ق}'_{+}(٠) = -٢(٠) + ٥ = ٥$ ⟸ ق'(٠) غ م

عند $\boxed{\text{س} = ٥}$

$\text{ق}'_{-}(٥) \ne \text{ق}'_{+}(٥)$ ⟸ ق'(٥) غ م

عند النقط الحرجة

ق' = ٠

٢س - ٥ = ٠

$\text{س} = \frac{٥}{٢} \notin (-٢، ٠)$

-٢س + ٥ = ٠

$\text{س} = \frac{٥}{٢}$ ✓

ق' غ م

س = -٢

س = ٠

س = ٥

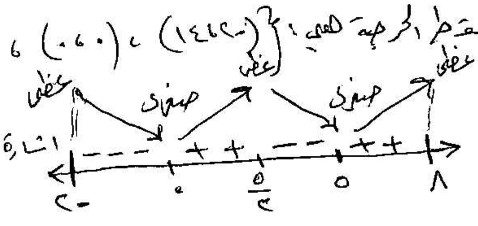
س = ٨

النقط الحرجة هي: $\{(-٢، ١٤) ، (٠، ٠) ، (\frac{٥}{٢} ، \frac{٢٥}{٢}) ، (٥، ٠) ، (٨، ٢٤)\}$

مجالات التزايد هي $[٠، \frac{٥}{٢}]$ ، $[٥، ٨]$

" التناقص هي $[-٢، ٠]$ ، $[\frac{٥}{٢} ، ٥]$

إشارة ق'



عند س = -٢ قيمة محلية عظمى ق(-٢) = ١٤

س = ٠ " محلية صغرى مطلقة ق(٠) = ٠

$\text{س} = \frac{٥}{٢}$ " " عظمى $\text{ق}(\frac{٥}{٢}) = \frac{٢٥}{٤}$

س = ٥ قيمة محلية صغرى مطلقة ق(٥) = ٠

عند س = ٨ قيمة محلية عظمى مطلقة ق(٨) = ٢٤

مثال: ليكن $\text{ق}(\text{س}) = (٣ - \text{س})^{٣}$ عين:

① النقط الحرجة ② مجالات التزايد والتناقص ③ القيم القصوى إن وجدت

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = ٣(٣ - \text{س})^{٢} \times -١ = -٣(٣ - \text{س})^{٢}$

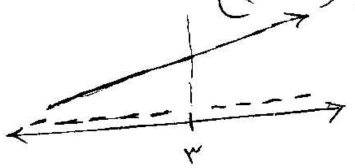
عند النقط الحرجة

ق' = ٠
$٣ - \text{س} = ٠$
$\boxed{\text{س} = ٣}$

ق' غ م
لا يوجد
لأنه كثير حدود معرف على ح

① النقاط الحرجة هي {(٣ ، ٠)}

نبحث إشارة ق'(س)



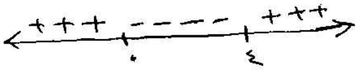
لأنه تربيعي موجب لكنه مضروب في سالب

②
مجال تناقص ق(س) هو (-∞ ، ∞) متناقص على ح
مجال تزايد ق(س) هو ϕ

③ لا يوجد قيم قصوى

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}}$ أوجد قيم س التي يوجد عندها نقط حرجة لـ ق(س)

الحل: يجب تحديد المجال ⇐ $\text{س}^{٢} - ٤\text{س} \geq ٠$ ، نضع $\text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٠$ ⇐ $\text{س}(\text{س} - ٤) = ٠$
⇐ $\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\boxed{\text{س} = ٤}$



∴ ق(س) معرف على (-∞ ، ٠] ∪ [٤ ، ∞)

⇐ $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} - ٤}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}}}$

عند النقط الحرجة

ق' = ٠
البسط = ٠
$٢\text{س} - ٤ = ٠$
$\text{س} = ٢ \notin$ المجال
ليست قيمة حرجة

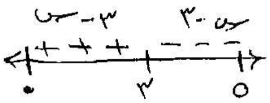
ق' غ م
$\text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٠$
$\text{س}(\text{س} - ٤) = ٠$
س = ٠ أو س = ٤

∴ قيم س الحرجة هي {٠ ، ٤}

سؤال: جد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة لـ ق(س) فيما يلي:

① ق(س) = ٧ - |س - ٣| ، س ∈ [٠، ٥]

الحل: نعيد تعريف |س - ٣| ⟸ س - ٣ = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٣}$



⟸ ق(س) = ٧ - { ٣ - س ، ٠ ≤ س < ٣
                 س - ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٥

⟸ ق(س) = { س + ٤ ، ٠ ≤ س < ٣
            ١٠ - س ، ٣ ≤ س ≤ ٥

⟸ ق'(س) = { غ م ، $\boxed{س = ٠}$
             ١ ، ٠ < س < ٣
             غ م ، $\boxed{س = ٣}$
             -١ ، ٣ < س < ٥
             غ م ، $\boxed{س = ٥}$

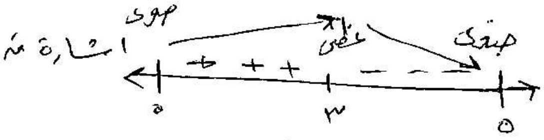
عند $\boxed{س = ٣}$ ⟸ ق'₋(٣) = ١
ق'₊(٣) = -١ ⟸ ق'(٣) غ م

عند النقط الحرجة

ق' = ٠
١ ≠ ٠ لا يمكن
-١ ≠ ٠ لا يمكن

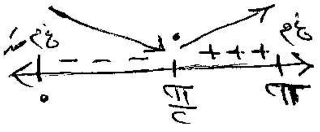
ق' غ م
س = ٠
س = ٣
س = ٥

قيم س الحرجة هي {٠، ٣، ٥}



عند س = ٠ قيمة صغرى ق(٠) = ٤ ⟸ قيمة صغرى مطلقة
عند س = ٣ قيمة عظمى ق(٣) = ٧ ⟸ قيمة عظمى مطلقة
عند س = ٥ قيمة صغرى ق(٥) = ٥

② ق(س) = جتا٢س ، س ∈ [٠، π]
ق'(س) = -جا٢س × ٢ = -٢جا٢س = ٠ ⟸ ٢س = π ⟸ س = $\frac{π}{٢}$



ق(٠) = ١
ق(π) = ١] قيم عظمى مطلقة

ق($\frac{π}{٢}$) = -١ قيمة صغرى مطلقة

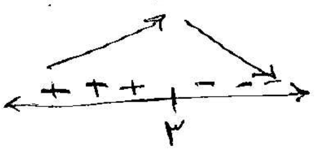
مثال: $ق(س) = ٦س - س^{٢}$

ⓐ جد قيمة س التي يوجد عندها قيمة عظمى محلية للاقتران ق

ⓑ جد القيمة العظمى المحلية للاقتران ق

ⓒ جد نقطة القيمة العظمى المحلية لـ ق

الحل: $ق'(س) = ٦ - ٢س \Rightarrow ٦ - ٢س = ٠ \Rightarrow \boxed{س = ٣}$



ⓐ عظمى عند س = ٣

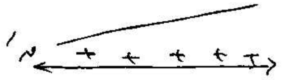
ⓑ القيمة العظمى هي $ق(٣) = ٩$

ⓒ النقطة هي (٣، ٩)

مثال: أثبت أنه لا توجد قيم قصوى لكل من:

ⓐ $ق(س) = ٧س + جتاس$ ⓑ $ق(س) = ٥ - ٢س - س^{٣}$

الحل: ⓐ $ق'(س) = ٧ - جاس = ٠ \Rightarrow جاس = ٧$ (لا يمكن)



∴ ق متزايد على ح ولا توجد قيم قصوى

ⓑ $ق'(س) = -٢ - ٣س^{٢} = ٠ \Rightarrow س^{٢} = \frac{-٢}{٣}$ (لا يوجد)

ق متناقص على ح ولا توجد قيم قصوى

مثال: $ق(س) = س + \frac{٩}{س}$ ، س ≠ ٠ ، أوجد النقط الحرجة لـ ق(س) وفترات التزايد والتناقص

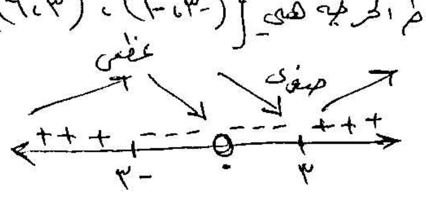
الحل: $ق(س) = \frac{س^{٢} + ٩}{س} \Rightarrow ق'(س) = \frac{س(٢س) - (س^{٢}+٩)(١)}{س^{٢}} = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢}}$

عند النقط الحرجة

ق′ = ٠
البسط = ٠
$س^{٢} - ٩ = ٠$
$\boxed{س = -٣}$
$\boxed{س = ٣}$

ق′ غ م
المقام = ٠
$س^{٢} = ٠$
س = ٠ ∉ المجال
لأنه س ≠ ٠

∴ النقط الحرجة هي {(-٣، -٦)، (٣، ٦)}



فترات التزايد (-∞، -٣] ، [٣، ∞)

فترات التناقص [-٣، ٠) ، (٠، ٣]

مثال: $ق(س) = ٢س^{٣} + أس^{٢}$ ما قيمة أ إذا كان للاقتران ق(س) قيمة قصوى محلية عندما $س = -١$

الحل: $قَ(س) = ٦س^{٢} + ٢أس$ له قيمة قصوى محلية عند $س = -١ \Leftarrow قَ(-١) = ٠$

$\Leftarrow ٠ = ٦ + (-٢أ) \Leftarrow ٢أ = ٦ \Leftarrow \boxed{أ = ٣}$

مثال: $ق(س) = |أ - ٢س|$ ما قيمة أ إذا كان للاقتران ق(س) قيمة صغرى مطلقة عند $س = ٣$

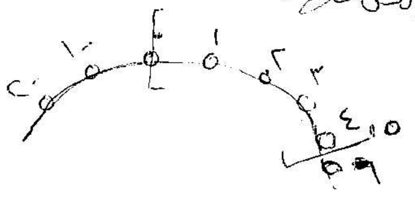
الحل: $أ - ٢س = ٠ \Leftarrow س = \frac{أ}{٢}$ حيث قَ(٣) غ م $\therefore \frac{أ}{٢} = ٣ \Leftarrow \boxed{أ = ٦}$

مثال: $ق(س) = [\frac{١}{٢}س + ١]$ ، $س \in [٠، ٥]$

أ) أوجد قيم س الحرجة للاقتران ق(س)

ب) جد قيم القصوى المحلية وجد الإحداثي السيني لكل منها

جـ) جد قيم القصوى المطلقة وجد الإحداثي السيني لكل منها.



الحل: نعيد تعريف $[\frac{١}{٢}س + ١]$ $ل = \frac{١}{|\frac{١}{٢}|} = ٢$

$$ق(س) = \begin{cases} ١ ، & ٠ \le س < ٢ \\ ٢ ، & ٢ \le س < ٤ \\ ٣ ، & ٤ \le س \le ٥ \end{cases}$$

$$\Leftarrow قَ(س) = \begin{cases} ٠ ، & ٠ < س < ٢ \\ ٠ ، & ٢ < س < ٤ \\ ٠ ، & ٤ < س < ٥ \end{cases}$$

جميع نقاطه حرجة

قيم س الحرجة هي كل $س \in [٠، ٥]$

ولا نستفيد هنا من بحث إشارة المشتقة الأولى لذلك نستخدم الاقتران الأصلي

ب) عند $س \in \overset{فترة}{(٠، ٢)}$ عظمى محلية هي ١

عند $س \in [٢، ٤)$ عظمى محلية هي ٢

عند $س \in [٤، ٥)$ عظمى محلية هي ٣

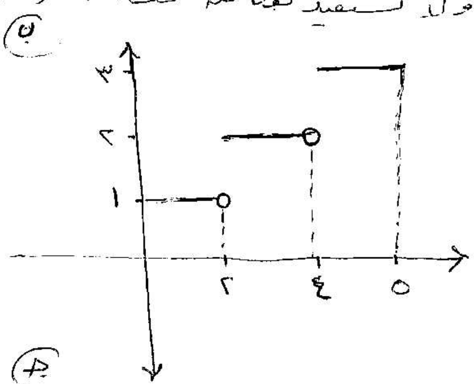
عند $س \in (٠، ٢)$ صغرى محلية هي ١

عند $س \in (٢، ٤)$ صغرى محلية هي ٢

عند $س \in (٤، ٥)$ صغرى محلية هي ٣

جـ) عند $س \in [٤، ٥]$ عظمى مطلقة هي ٣

عند $س \in [٠، ٢)$ صغرى مطلقة هي ١



ملاحظات: - عند رسم المشتقة الأولى للاقتران ق(س)

① النقاط الحرجة عندما قَ = ٠ أو غير موجودة (عند الأطراف وعندما تقطع محور السينات)

② قَ > ٠ (فوق محور السينات) ق متزايد

قَ < ٠ (تحت محور السينات) ق متناقص

③ عندما تقطع قَ محور السينات توجد القيم القصوى:

إذا قطعت س (فوق إلى تحت) قيمة عظمى

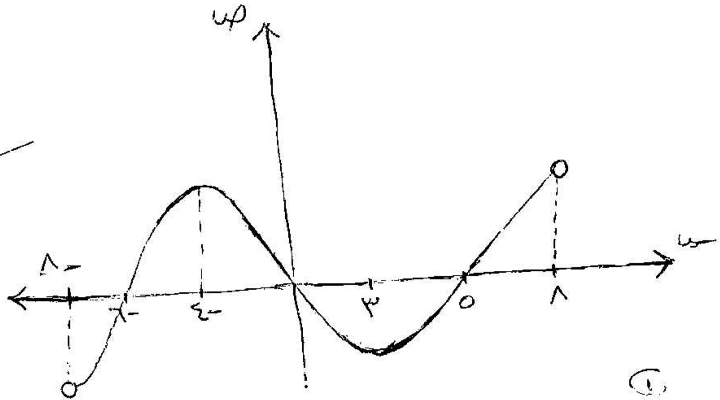
إذا قطعت س (تحت إلى فوق) قيمة صغرى

مثال: من الرسم المجاور الذي يمثل قَ(س) حيث ق(س) متصل على [-٨، ٨]

① جد قيم س الحرجة لـ ق(س)

② جد فترات التزايد والتناقص لـ ق(س)

③ جد قيم س التي توجد عندها قيم قصوى محلية مبيناً نوعها



الحل: ① قيم س الحرجة هي {-٨، ٨، -٦، ٠، ٥} الأطراف وعندما تقطع محور السينات

② ق متناقص في [-٨، -٦] ، [٠، ٥] تحت محور السينات

ق متزايد في [-٦، ٠] ، [٥، ٨] فوق محور السينات

③ عظمى محلية عند $\boxed{س = ٠}$ من فوق للتحت

صغرى محلية عند $\boxed{س = -٦}$ ، $\boxed{س = ٥}$ من تحت للفوق

* مسائل عملية على القيم القصوى :

خطوات الحل : ① رسم الشكل إن أمكن

② تكوين المعادلة حسب المقدار المطلوب (أقل ما يمكن أو أكبر ما يمكن)

③ الاختزال (اذا كان أكثر من متغير نحولها بدلالة متغير واحد)

④ ايجاد القيم القصوى وبيان اذا كانت كبرى أو صغرى .

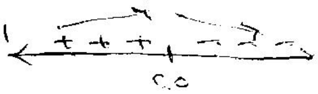
مثال : أوجد عددين موجبين مجموعهما ٥٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

الحل : نفرض أحد العددين س المطلوب : حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

يكون العدد الآخر ٥٠ − س

$\text{ح} = \text{س}(\text{٥٠} - \text{س}) = \text{٥٠س} - \text{س}^{\text{٢}}$

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}} = \text{٥٠} - \text{٢س} \Leftarrow \text{٥٠} - \text{٢س} = \text{٠} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{٢٥}}$



اشارة ح َ قيمة عظمى

∴ العددان هما (٢٥ ، ٢٥)

مثال : أوجد عددين موجبين بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن علماً بأن مجموع العددين هو ٣٠

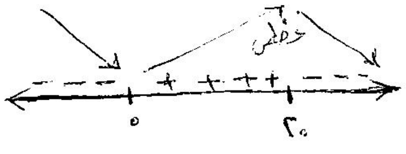
أكبر ما يمكن (عظمى)

الحل : نفرض أحد العددين س يكون العدد الآخر ٣٠ − س

$\text{ح} = (\text{٣٠} - \text{س}) \times \text{س}^{\text{٢}} = \text{٣٠س}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٣}}$ نشتق

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}} = \text{٦٠س} - \text{٣س}^{\text{٢}} \Leftarrow \text{٦٠س} - \text{٣س}^{\text{٢}} = \text{٠} \Leftarrow \text{٣س}(\text{٢٠} - \text{س}) = \text{٠}$

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{٠}} \text{ ، } \boxed{\text{س} = \text{٢٠}}$



قيمة عظمى عند $\boxed{\text{س} = \text{٢٠}}$

∴ العددان هما (٢٠ ، ١٠)

---

* قاعدة : اختبار المشتقة الثانية :-

هناك طريقة لايجاد القيم القصوى وذلك باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

* نجد المشتقة الأولى ونساويها بالصفر ثم نجد الجذور

* نجد المشتقة الثانية ونعوض جذور المشتقة الأولى

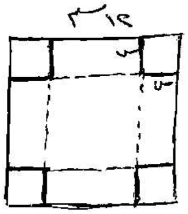
Ⓐ اذا كانت القيمة موجبة ← قيمة صغرى

Ⓑ اذا كانت القيمة سالبة ← قيمة عظمى

Ⓒ اذا كانت القيمة صفر ← يفشل الاختبار ونعود لاختبار المشتقة الأولى

مثال: صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢سم ، قص من زواياه الاربع أربعة مربعات متساوية طول كل منها س ، ثم طوينا الجوانب بحيث أصبحت الصفيحة بشكل علبة مفتوحة من الأعلى ، جد قيمة س ليكون حجم العلبة أكبر ما يمكن ؟

الحل:



ح = الطول × العرض × الارتفاع

ح = (١٢ - ٢س) (١٢ - ٢س) (س)

= ١٤٤س - ٤٨$\text{س}^{٢}$ + ٤$\text{س}^{٣}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دس}}$ = ١٤٤ - ٩٦س + ١٢$\text{س}^{٢}$ بالقسمة على (١٢)

= ١٢ - ٨س + $\text{س}^{٢}$

= $\text{س}^{٢}$ - ٨س + ١٢ = ٠

⇐ (٦ - س)(٢ - س) = ٠ ، ومنها س = ٦ ، ٢

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ح}}{\text{دس}^{٢}}$ = -٩٦ + ٢٤س

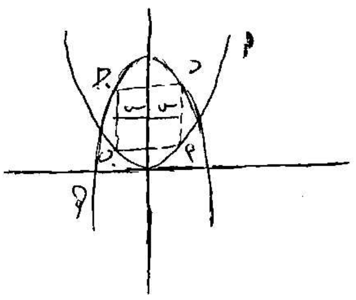
عندما $\boxed{\text{س} = ٢}$ ح'' = - قيمة عظمى

عندما $\boxed{\text{س} = ٦}$ ح'' = + قيمة صغرى

∴ الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما $\boxed{\text{س} = ٢}$ ⇐ ح = ٨ × ٨ × ٢ = ١٢٨ $\text{سم}^{٣}$

مثال: أ ب جـ د مستطيل يقع داخل المنحنيين ق(س) = ٢$\text{س}^{٢}$ ، هـ(س) = ٣٦ - $\text{س}^{٢}$ بحيث أن رأسيه أ ، ب يقعان على المنحنى ق(س) ورأسيه جـ ، د يقعان على هـ(س) . جد بعد المستطيل أ ب جـ د والتي تمكن رسمها لتكون مساحته أكبر ما يمكن .

الحل:



م = الطول × العرض

= (٢س)(هـ(س) - ق(س))

= (٢س) (٣٦ - $\text{س}^{٢}$ - ٢$\text{س}^{٢}$)

= ٧٢س - ٦$\text{س}^{٣}$

م' = ٧٢ - ١٨$\text{س}^{٢}$ ⇐ ٧٢ - ١٨$\text{س}^{٢}$ = ٠

⇐ س = ٢ أو $\cancel{\text{س} = -٢}$ مرفوضة

م'' = -٣٦س

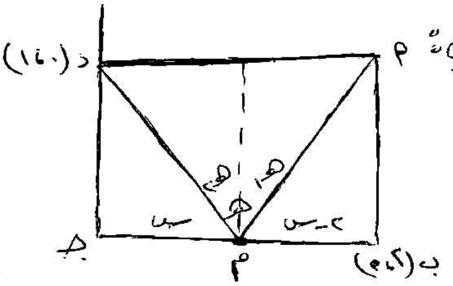
م''(٢) = ⊖ قيمة عظمى

∴ المساحة أكبر ما يمكن عندما س = ٢

م = ٧٢ × ٢ - ٦$(٢)^{٣}$ = ٩٦

مثال: الشكل المجاور المستطيل أ ب جـ د حيث ب(٢،٠) ، د(٠،١) اذا فرضت النقطة م على الضلع ب جـ وعلى بعد س من نقطة الأصل جـ ووصل م أ ، م د فتكونت الزاوية المتغيرة هـ ، جد قياس س التي تجعل هـ في نهايتها العظمى .

الحل:



$$\text{هـ} = \text{هـ}_1 + \text{هـ}_2$$

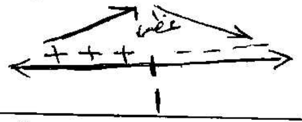
$$\text{ظا هـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ظا}(\text{هـ}_1) + \text{ظا}(\text{هـ}_2)}{1 - \text{ظا}(\text{هـ}_1)\ \text{ظا}(\text{هـ}_2)}$$

$$\Leftarrow \text{ظا هـ} = \frac{2 - \text{س} + \text{س}}{1 - (2-\text{س})(\text{س})}$$

$$\Leftarrow \text{ظا هـ} = \frac{2}{1 - 2\text{س} + \text{س}^2}$$ نشتق بالنسبة إلى س

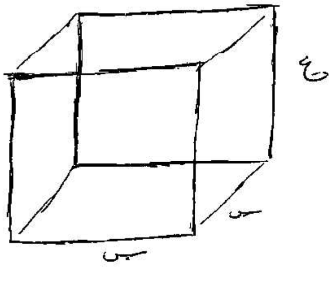
$$\Leftarrow \text{قا}^2\text{هـ}\ \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \frac{-2(-2+2\text{س})}{(1-2\text{س}+\text{س}^2)^2} \Leftarrow 4 - 4\text{س} = 0 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 1}$$



تكون هـ في نهايتها العظمى عندما $\boxed{\text{س} = 1}$

مثال: نريد صنع صندوق بلا غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه ٣٢ سم³ ، أوجد أبعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة لصنعه أقل ما يمكن .

الحل:



كمية المادة اللازمة = مادة القاعدة + مادة الجوانب

$$\text{ك} = \text{س}^2 + \underbrace{4\text{س} \times \text{ع}}$$ ← المساحة الجانبية

$$\text{لكن: ح} = 32 \Leftarrow 32 = \text{س} \times \text{س} \times \text{ع}$$

$$\Leftarrow 32 = \text{س}^2\text{ع} \Leftarrow \boxed{\text{ع} = \frac{32}{\text{س}^2}}$$

$$\therefore \text{ك} = \text{س}^2 + 4\text{س} \times \frac{32}{\text{س}^2} = \text{س}^2 + \frac{128}{\text{س}}$$ نشتق

$$\text{ك}' = 2\text{س} - \frac{128}{\text{س}^2} = 0 \Leftarrow 2\text{س} = \frac{128}{\text{س}^2} \Leftarrow 2\text{س}^3 = 128 \Leftarrow \text{س}^3 = 64$$

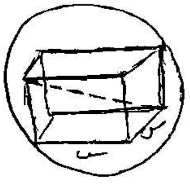
$$\Leftarrow \boxed{\text{س} = 4}$$

$$\text{ك}'' = 2 + \frac{128 \times 2\text{س}}{\text{س}^4} \Leftarrow \text{ك}''(4) = 2 + \frac{128 \times 2 \times 4}{(4)^4} = \textcircled{+} > 0$$

$\therefore$ قيمة صغرى عند $\boxed{\text{س} = 4}$

مثال: كرة مصمتة نصف قطرها ١٠سم ، حفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ع ، أثبت أن حجم متوازي المستطيلات يعطى بالعلاقة الآتية: $ح = ٢٠٠ع - \frac{١}{٢}ع^٣$ ، جد أبعاد متوازي المستطيلات لتعطي أكبر حجم ممكن له .

الحل: نلاحظ أن: قطر متوازي المستطيلات = قطر الكرة



$$ح = \underbrace{س^٢}_{\text{مساحة القاعدة}} \times \underbrace{ع}_{\text{الارتفاع}}$$

$$\text{القطر} = س^٢ + س^٢ + ع^٢ = ٤٠٠ \Rightarrow ٢س^٢ + ع^٢ = ٤٠٠ \Rightarrow س^٢ = \frac{٤٠٠ - ع^٢}{٢}$$

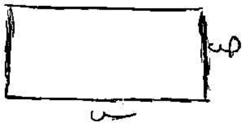
$$\Rightarrow ح = \frac{٤٠٠ - ع^٢}{٢} \times ع = \frac{٤٠٠ع - ع^٣}{٢} \quad \text{نشتق} \quad \left(٢٠٠ع - \frac{١}{٢}ع^٣\right)$$

$$ح' = \frac{٤٠٠ - ٣ع^٢}{٢} = ٠ \Rightarrow ٤٠٠ - ٣ع^٢ = ٠ \Rightarrow ع = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$$

$$ح'' = -٦ع \Rightarrow ح''\left(\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}\right) = \ominus < ٠$$ ، قيمة عظمى له أكبر حجم .

مثال: قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠م ، جد بعدي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن .

الحل: المحيط = ٦٠٠م المطلوب: س ، ص



$$\underbrace{م}_{\text{المساحة}} = س \times ص$$

المحيط: $٢س + ٢ص = ٦٠٠$

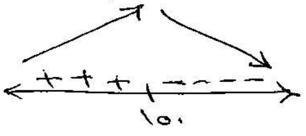
$\Rightarrow ٢ص = ٦٠٠ - ٢س$

$\Rightarrow ص = ٣٠٠ - س$

$\Rightarrow م = س(٣٠٠ - س) = ٣٠٠س - س^٢$

$م' = ٣٠٠ - ٢س$

$٣٠٠ - ٢س = ٠ \Rightarrow \boxed{س = ١٥٠}$



$\therefore ص = ٣٠٠ - ١٥٠$

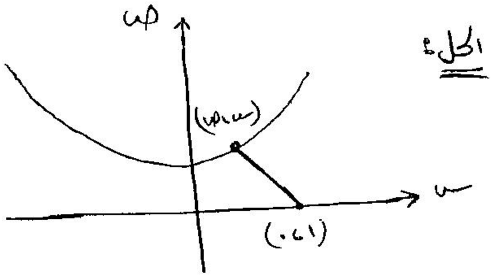
$\boxed{ص = ١٥٠}$

∴ أبعاد قطعة الأرض هي: الطول $س = ١٥٠$

العرض $ص = ١٥٠$

مثال: جد النقطة التي تقع على المنحنى $ص = \sqrt{س^٢ + ٦س + ١٠}$ وبعدها عن النقطة (١،٠) أقل ما يمكن .

الحل:



$ف = \sqrt{(س - ١)^٢ + (ص - ٠)^٢}$ (قانون المسافة بين نقطتين)

$= \sqrt{س^٢ - ٢س + ١ + ص^٢}$

لكن: $ص^٢ = س^٢ + ٦س + ١٠$ من معادلة المنحنى

$\therefore ف = \sqrt{س^٢ - ٢س + ١ + س^٢ + ٦س + ١٠} \Leftarrow ف = \sqrt{٢س^٢ + ٤س + ١١}$ نشتق

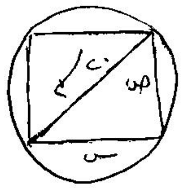
$ف' = \dfrac{٤س + ٤}{٢\sqrt{٢س^٢ + ٤س + ١١}} \Leftarrow ٤س + ٤ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = -١}$

$ف'' = \textcircled{+} > ٠$ يوجد قيمة صغرى عند $س = -١$

$ص = \sqrt{١ - ٦ + ١٠} = \sqrt{٥}$ $\therefore$ النقطة $(-١، \sqrt{٥})$

مثال: أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم

الحل:



$م = س \times ص$

$م = س \times \sqrt{٤٠٠ - س^٢}$

لكن: $س^٢ + ص^٢ = ٤٠٠$ فيثاغورس

$ص^٢ = ٤٠٠ - س^٢$

$\Leftarrow ص = \sqrt{٤٠٠ - س^٢}$

$\Leftarrow م' = \dfrac{س \times -٢س}{٢\sqrt{٤٠٠ - س^٢}} + \sqrt{٤٠٠ - س^٢} \times ١$

$م' = \dfrac{-س^٢}{\sqrt{٤٠٠ - س^٢}} + \sqrt{٤٠٠ - س^٢} = ٠$ نساوي البسط والمقام بالصفر

$\Leftarrow \sqrt{٤٠٠ - س^٢} = \dfrac{س^٢}{\sqrt{٤٠٠ - س^٢}} \Leftarrow ٤٠٠ - س^٢ = س^٢$

$\Leftarrow ٤٠٠ = ٢س^٢ \Leftarrow س^٢ = ٢٠٠$

$\Leftarrow س = \sqrt{٢٠٠}$

$م'' = \textcircled{-} < ٠$ عندما $س = \sqrt{٢٠٠}$ قيمة عظمى

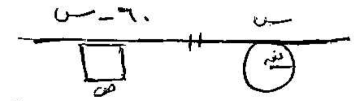
$\therefore ص = \sqrt{٤٠٠ - ٢٠٠} = \sqrt{٢٠٠}$

$\therefore$ أكبر مساحة مستطيل $م = \sqrt{٢٠٠} \times \sqrt{٢٠٠} = ٢٠٠$

مثال: سلك طوله ٦٠ سم نريد قطعه إلى جزئين نكون من أحدهما مربع ومن الآخر دائرة ، فأين نقطع السلك بحيث يكون مجموع المساحة .

أ) أقل ما يمكن ب) أكبر ما يمكن

الحل:



مساحة الدائرة = $π$ نق^٢ | لكن: محيط الدائرة = $٢π$ نق

$س = ٢π$ نق $\Leftarrow \boxed{نق = \frac{س}{٢π}}$

$\therefore$ مساحة الدائرة $= π \times \left(\frac{س}{٢π}\right)^٢$

$= π \times \frac{س^٢}{٤π^٢} = \frac{س^٢}{٤π}$

$\Leftarrow$ مساحة المربع = ص^٢ | لكن: محيط المربع = ٤ص

$٦٠ - س = ٤ص$

$\Leftarrow \boxed{ص = ١٥ - \frac{س}{٤}}$

$\therefore$ مساحة المربع $= \left(١٥ - \frac{س}{٤}\right)^٢$

$\Leftarrow$ المساحة الكلية = مساحة الدائرة + مساحة المربع

$\Leftarrow م = \frac{س^٢}{٤π} + \left(١٥ - \frac{س}{٤}\right)^٢$ نشتق

$\Leftarrow م' = \frac{٢س}{٤π} + ٢\left(١٥ - \frac{س}{٤}\right) \times -\frac{١}{٤} = \frac{س}{٢π} - \frac{١٥}{٢} + \frac{س}{٨} =$ صفر $/ \times ٨π$

$\Leftarrow ٤س + πس = ٦٠π \Leftarrow س(٤+π) = ٦٠π \Leftarrow س = \frac{٦٠π}{٤+π}$

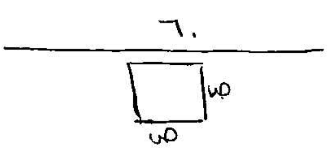
$م'' = \frac{١}{٢π} + \frac{١}{٨} > ٠$ قيمة صغرى عند $س = \frac{٦٠π}{π+٤}$

ب) تحدث القيم العظمى عندما لا نقطع السلك فيكون الشكل إما دائرة أو مربع فقط

١) دائرة $\Leftarrow م = π$ نق^٢ | لكن $٢π$ نق $= ٦٠$

نق $= \frac{٦٠}{٢π} = \frac{٣٠}{π}$

$\therefore م = π \times \left(\frac{٣٠}{π}\right)^٢ = \frac{٩٠٠}{π}$



٢) مربع $\Leftarrow م = ص^٢$ | لكن ٤ص = ٦٠

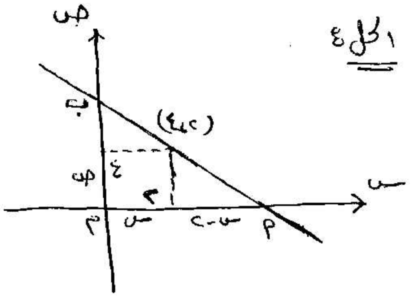
$\Leftarrow ص = ١٥$

$\therefore م = (١٥)^٢ = ٢٢٥$

لكن $\frac{٩٠٠}{π} > ٢٢٥$ $\therefore$ الشكل دائرة

مثال: مستقيم بالنقطة (٢، ٤) فيقطع محوري السينات والصادات الموجبين في أ، ب أوجد أقل مساحة للمثلث أ م ب حيث م نقطة الأصل.

الحل:



$م = \frac{1}{2} س \times ص$ لكن من التشابه $\frac{س}{س - ٢} = \frac{ص}{٤}$

$\therefore م = \frac{1}{2} س \times \frac{٤ س}{س - ٢}$ $ص = \frac{٤ س}{س - ٢}$

$م = \frac{٢ س^2}{س - ٢}$ نشتق

$$م' = \frac{(س - ٢) \times ٤ س - ٢ س^2 \times ١}{(س - ٢)^2} = \frac{٤ س^2 - ٨ س - ٢ س^2}{(س - ٢)^2} = \frac{٢ س^2 - ٨ س}{(س - ٢)^2} = \text{صفر}$$

$\Leftarrow ٢ س^2 - ٨ س = ٠ \Leftarrow ٢ س (س - ٤) = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ١}$ أو $\boxed{س = ٤}$

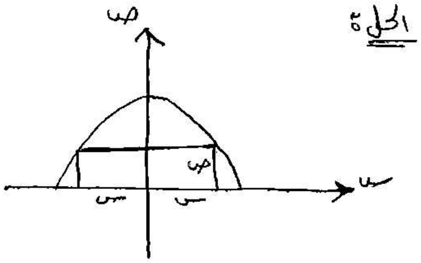
$$م'' = \frac{(س - ٢)^2 \times (٤ س - ٨) - \left((٢ س^2 - ٨ س) \times ٢ (س - ٢)\right)}{(س - ٢)^4}$$

$م''(٤) = \frac{٤ \times ٨ - \text{صفر}}{٤} = ٣٢ > ٠$ قيمة صغرى عند $\boxed{س = ٤}$

$\therefore ص = \frac{٢ \times ٤}{٤ - ٢} = ٨$ $\therefore م = \frac{1}{2} \times ٤ \times ٨ = ١٦$

مثال: أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يقع أحد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى $ص = ١٢ - س^2$.

الحل:



$ص' = - ٢ س = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ (محور التماثل هو محور الصادات)

$م = \underbrace{٢ س}_{\text{طول}} \times \underbrace{ص}_{\text{عرض}}$ لكن: $\boxed{ص = ١٢ - س^2}$

$\Leftarrow م = ٢ س (١٢ - س^2) = ٢٤ س - ٢ س^2$ نشتق

$\Leftarrow م' = ٢٤ - ٦ س^2 = ٠$ بالقسمة على ٦

$\Leftarrow ٤ - س^2 = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$

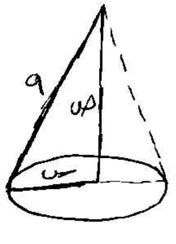
$م'' = - ١٢ س \Leftarrow م''(٢) = - ٢٤ < ٠$ قيمة عظمى عند $\boxed{س = ٢}$

$ص = ١٢ - (٢)^2 = ٨$

$\therefore م = ٢ \times ٢ \times ٨ = ٣٢$

مثال: مثلث قائم الزاوية طول وتره ثابت ويساوي ٩ سم وطول ضلعي القائمة س، ص فإذا دار المثلث حول أحد ضلعي القائمة فتكون مخروط أوجد أكبر حجم ممكن للمخروط

الحل:



$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi\,\text{س}^2\,\text{ص}$ لكن: $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ٨١$ ، $\text{س}^2 = ٨١ - \text{ص}^2$

$\therefore \text{ح} = \frac{1}{3}\pi\,(٨١ - \text{ص}^2) \times \text{ص}$

$= \frac{1}{3}\pi\,(٨١\text{ص} - \text{ص}^3)$ نشتق

$\Leftarrow \text{ح}' = \frac{1}{3}\pi\,(٨١ - ٣\text{ص}^2) \Leftarrow ٨١ - ٣\text{ص}^2 = ٠ \Leftarrow \text{ص}^2 = ٢٧ \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \sqrt{٢٧}}$

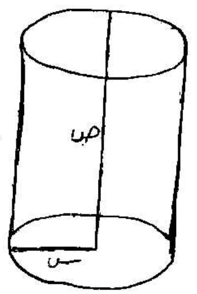
$\text{ح}'' = \frac{1}{3}\pi \times -٦\text{ص} = -٢\pi\,\text{ص}$

$\text{ح}''(\sqrt{٢٧}) = -٢\pi \times \sqrt{٢٧} < ٠$ قيمة عظمى عند $\text{ص} = \sqrt{٢٧}$

$\therefore \text{س}^2 = ٨١ - ٢٧ = ٥٤$ $\quad \therefore \text{ح} = \frac{1}{3}\pi \times ٥٤ \times \sqrt{٢٧} = $ ——

مثال: مستطيل محيطه ٣٦ سم دار حول أحد أضلاعه فتكون أسطوانة. أوجد أكبر حجم ممكن للأسطوانة.

الحل:



$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$= \pi\,\text{س}^2\,\text{ص}$

لكن: $٢\text{س} + ٢\text{ص} = ٣٦$

$\text{س} + \text{ص} = ١٨$

$\text{ص} = ١٨ - \text{س}$

$\therefore \text{ح} = \pi\,\text{س}^2\,(١٨ - \text{س})$

$= \pi\,(١٨\text{س}^2 - \text{س}^3)$ نشتق

$\text{ح}' = \pi\,(٣٦\text{س} - ٣\text{س}^2) = ٠ \Leftarrow ٣٦\text{س} - ٣\text{س}^2 = ٠ \Leftarrow ٣\text{س}\,(١٢ - \text{س}) = ٠$

$\boxed{\text{س} = ٠}$ أو $\boxed{\text{س} = ١٢}$

$\text{ح}'' = \pi\,(٣٦ - ٦\text{س}) \Leftarrow \text{ح}''(١٢) = \pi\,(٣٦ - ٦ \times ١٢) = -٣٦\pi < ٠$ $\therefore$ عظمى عند $\text{س} = ١٢$

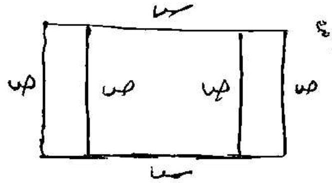
$\therefore \text{ص} = ١٨ - ١٢ = ٦$

$\Leftarrow \text{ح} = \pi \times ١٢ \times ١٢ \times ٦ = ٨٦٤\pi$ سم^3

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: لدى رجل حقل مستطيل يريد سياجه، ثم قسمته إلى ٣ أقسام بسياجين يوازيان أحد أضلاعه فإذا كان عنده ١٠٠٠ متر من السياج، أوجد أكبر مساحة يمكن سياجها.

الحل:



$\text{م} = \text{س} \times \text{ص}$

لكن السياج = ١٠٠٠ م

$\Leftarrow 2\text{س} + 4\text{ص} = 1000$ بالقسمة على (٢)

$\Leftarrow \text{س} + 2\text{ص} = 500 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 500 - 2\text{ص}}$

$\therefore \text{م} = (500 - 2\text{ص}) \times \text{ص} = 500\text{ص} - 2\text{ص}^2$ نشتق

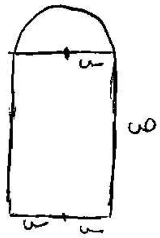
$\text{م}' = 500 - 4\text{ص} \Leftarrow 500 - 4\text{ص} = 0 \Leftarrow \boxed{\text{ص} = 125}$

$\text{م}'' = -4 < 0$ ، يوجد قيمة عظمى عند $\text{ص} = 125$

$\therefore \text{س} = 500 - 2 \times 125 = 250 \quad \therefore \text{م} = 125 \times 250 = 31250$

مثال: نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة، فإذا كان محيط النافذة يساوي ٣٠ قدم، أوجد نصف قطر الدائرة بحيث تمر أكبر كمية ممكنة من الضوء.

الحل: المساحة = مساحة المستطيل + نصف الدائرة



$\text{م} = 2\text{س} \times \text{ص} + \frac{1}{2}\pi \text{س}^2$

لكن:

$2\text{س} + 2\text{ص} + \pi\text{س} = 30$

$2\text{ص} = 30 - 2\text{س} - \pi\text{س}$

$\text{ص} = \frac{1}{2}(30 - 2\text{س} - \pi\text{س})$

$\therefore \text{م} = 2\text{س} \times \frac{1}{2}(30 - 2\text{س} - \pi\text{س}) + \frac{1}{2}\pi\text{س}^2$

$= 30\text{س} - 2\text{س}^2 - \pi\text{س}^2 + \frac{1}{2}\pi\text{س}^2$

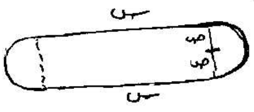
$\Leftarrow \text{م}' = 30 - 4\text{س} - 2\pi\text{س} + \pi\text{س} = 0$

$30 - 4\text{س} - \pi\text{س} = 0 \Leftarrow 30 = 4\text{س} + \pi\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{30}{4+\pi}$

$\text{م}'' = -4 - \pi < 0$ ، يوجد قيمة عظمى عند $\text{س} = \frac{30}{4+\pi}$

سؤال: ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة، فإذا كان محيط الملعب ٢٤٠ م أوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن.

إرشاد:



م = مساحة المستطيل + مساحة الدائرة

$\text{م} = \text{س} \times 2\text{ص} + \pi\text{ص}^2$

$= 2\text{س}\text{ص} + \pi\text{ص}^2$

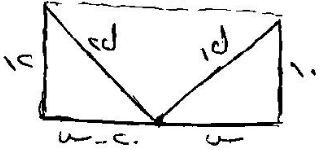
لكن: $2400 = 2\text{س} + 2\pi\text{ص}$

$2\text{س} = \text{—} - \text{——}$

نعوض في م ثم نشتق ونساوي بالصفر

سؤال: عمودان رأسيان قائمان على أرض شارع أفقية ارتفاعهما ١٠م ، ١٢م والبعد بينهما (بين قاعدتيهما) ٢٠م ، أوجد موضع نقطة على المسافة بين قاعدتي العمودين بحيث يكون مجموع مربعي بعدي قمتي العمودين عن تلك النقطة أقل ما يمكن.

الحل:



$ف = ل_1^2 + ل_2^2$ نجد: $ل_1^2 = (١٠)^2 + س^2$

$ل_2^2 = (١٢)^2 + (٢٠ - س)^2$

$\Leftarrow ف = (١٠)^2 + س^2 + (١٢)^2 + (٢٠ - س)^2$

$\Leftarrow ف' = ٢س + ٢(٢٠ - س) \times -١$

$= ٢س - ٤٠ + ٢س = ٠ \Leftarrow ٤س = ٤٠$

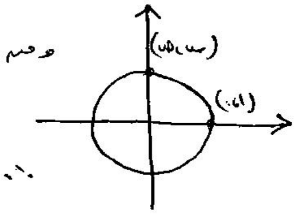
$\Leftarrow \boxed{س = ١٠}$

$ف'' = ٤ > ٠$ قيمة عظمى عند $\boxed{س = ١٠}$

مثال: طريق حول مدينة معادلته في المستوى الديكارتي هي $٥س^2 + ١٠ص^2 = ٥٠$ ، النقطة (١،٠) تمثل موقع مولد كهرباء ، أوجد احداثيات النقط على الطريق التي يمكن أن توضع عندها محطة للمحروقات بحيث تكون أقرب ما يمكن إلى مولد الكهرباء ، ثم أوجد المسافة بين المحطة والمولد.

الحل:

$ف = \sqrt{(س - ١)^2 + (ص - ٠)^2} = \sqrt{س^2 - ٢س + ١ + ص^2}$

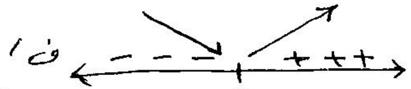


ومن العلاقة $٥س^2 + ١٠ص^2 = ٥٠ \Leftarrow ١٠ص^2 = ٥٠ - ٥س^2$ $\div ١٠$

$\Leftarrow ص^2 = ٥ - \frac{1}{2}س^2$

$\therefore ف = \sqrt{س^2 - ٢س + ١ + ٥ - \frac{1}{2}س^2} = \sqrt{\frac{1}{2}س^2 - ٢س + ٦}$

$\Leftarrow ف' = \frac{س - ٢}{٢\sqrt{\frac{1}{2}س^2 - ٢س + ٦}} = ٠ \Leftarrow س - ٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$



صغرى عند $\boxed{س = ٢}$

لإيجاد النقاط نعوض في $٥س^2 + ١٠ص^2 = ٥$

$٥(٢)^2 + ١٠ص^2 = ٥٠ \Leftarrow ١٠ص^2 = ٥٠ - ٢٠ \Leftarrow ١٠ص^2 = ٣٠$

$\Leftarrow ص^2 = ٣ \Leftarrow ص = \pm\sqrt{٣}$

النقاط هي $(٢، \sqrt{٣})$ ، $(٢، -\sqrt{٣})$

$ف = \sqrt{\frac{1}{2} \times (٢)^2 - ٢ \times ٢ + ٦} = \sqrt{٤} = ٢$