الوحدة الأولى النهايات والاتصال

الفرع العلمي

المستوى الثالث

2017/2016

الأستاذ : عماد مسك

0795153669

التحـــــدّي

الأصر تجمعهم وحدة أهدافهم

برعاية

أنا توجيهي

مراجعة بعض المواضيع المهمة :-

① **إشارة الاقتران** :- نجد أصفار الاقتران ق(س) ونضعها على خط الأعداد ونختبر إشارة هذا الاقتران

مثال :- ادرس إشارة كل من الاقترانات التالية :-

أ) ق(س) = س + ٢

ب) ق(س) = ٢س − ١٠

جـ) ق(س) = ٣س − س²

د) ق(س) = س² − س − ٦

هـ) ق(س) = س³ − ٤س

و) ق(س) = $\frac{\text{س} - ٣}{٥ - \text{س}}$

الحل :- أ) ق(س) = س + ٢

س + ٢ = صفر ⇐ $\boxed{\text{س} = -٢}$

− − − − | + + +
−٢

ب) ق(س) = ٢س − ١٠

٢س − ١٠ = صفر ⇐ ٢س = ١٠ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٥}$

− − − | + + +
٥

جـ) ق(س) = ٣س − س²

٣س − س² = صفر ⇐ س (٣ − س) = صفر

$\boxed{\text{س} = ٠}$ أو $\boxed{\text{س} = ٣}$

− − − | + + + | − − −
٠ ٣

د) ق(س) = س² − س − ٦

س² − س − ٦ = صفر ⇐ (س − ٣) (س + ٢) = صفر

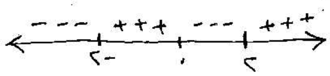
$\boxed{\text{س} = ٣}$ أو $\boxed{\text{س} = -٢}$

+ + + | − − − − | + + +
−٢ ٣

هـ) ق(س) = س^{٣} − ٤س

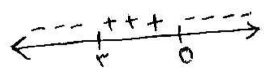
س^{٣} − ٤س = صفر ⇐ س(س^{٢} − ٤) = صفر

⇐ س(س − ٢)(س + ٢) = صفر



$\boxed{\text{س = ٠}}$ أو $\boxed{\text{س = ٢}}$ أو $\boxed{\text{س = −٢}}$

و) ق(س) = $\frac{\text{س − ٣}}{\text{٥ − س}}$



س − ٣ = صفر ⇐ $\boxed{\text{س = ٣}}$

٥ − س = صفر ⇐ $\boxed{\text{س = ٥}}$

٢) التحليل إلى العوامل :-

أ) اخراج عامل مشترك:

مثال: س^{٢} − ٨س = س(س − ٨)

٦س^{٣} + ٢٤س^{٢} = ٦س^{٢}(س + ٤)

ب) الفرق بين مربعين :- القاعدة ← أ^{٢} − ب^{٢} = (أ − ب)(أ + ب)

مثال:- س^{٢} − ٩ = (س − ٣)(س + ٣)

٤س^{٢} − ٤٩ = (٢س + ٧)(٢س − ٧)

جـ) الفرق بين مكعبين :- القاعدة ← أ^{٣} − ب^{٣} = (أ − ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})

مثال:- س^{٣} − ٨ = (س − ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)

٢٧س^{٣} − ١٢٥ = (٣س − ٥)(٩س^{٢} + ١٥س + ٢٥)

د) مجموع مكعبين :- القاعدة ← $أ^٣ + ب^٣ = (أ + ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$

مثال :- $س^٣ + ٢٧ = (س + ٣)(س^٢ - ٣س + ٩)$

$٨س^٣ + ١ = (٢س + ١)(٤س^٢ - ٢س + ١)$

هـ) العبارة التربيعية $أس^٢ + بس + جـ$:-

عندما نفتح الأقواس يجب أن تكون الاشارات كما يلي :-

اشارة الحد الأوسط	اشارة الحد الأخير	
+	+	= (+)(+)
−	+	= (−)(−)
+	−	= (+)(−)
−	−	= (+)(−)

* وللتحقق من صحة التحليل نقوم بضرب الحدين البعيدين ونجمعهم مع حاصل ضرب الحدين القريبين ⇐ يجب أن يكون الناتج يساوي الحد الأوسط

أمثلة :- $س^٢ - ٣س + ٢ = (س - ٢)(س - ١)$

$س^٢ - س - ٦ = (س - ٣)(س + ٢)$

$س^٢ + ٥س + ٦ = (س + ٢)(س + ٣)$

$٣س^٢ - س - ٢ = (٣س + ٢)(س - ١)$

٣) اقتران القيمة المطلقة :- $|أ| = أ$ $|-أ| = أ$

نعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة |ق(س)| بايجاد أصفار الاقتران وبحث الإشارة :

$$⇐ |ق(س)| = \begin{cases} ق(س) & : س \geq ٠ \\ -ق(س) & : س < ٠ \end{cases}$$

مثال :- أعد تعريف كل من الاقترانات التالية دون استخدام رمز القيمة المطلقة :

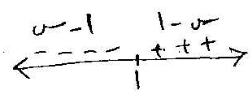
أ) ق(س) = |س − ١| ب) ق(س) = |س² − س − ١٢|

جـ) ق(س) = |س³ − ٤س| د) ق(س) = |جاس| ، س ∈ [٠ ، ٢π]

هـ) ق(س) = |س³ − ٢س²| ـــ واجب و) ق(س) = |٤ − س²| ـــ واجب

الحل :- أ) س − ١ = صفر

$\boxed{\text{س} = ١}$

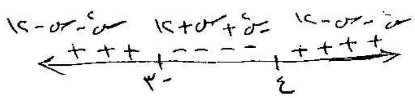


⇐ ق(س) = { س − ١ ، س ≥ ١
  ١ − س ، س < ١

ب) س² − س − ١٢ = صفر

(س − ٤)(س + ٣) = صفر

⇐ $\boxed{\text{س} = ٤}$ أو $\boxed{\text{س} = −٣}$

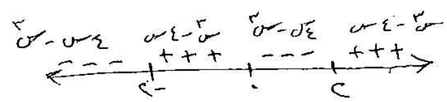


ق(س) = { س² − س − ١٢ ، س < −٣
  −س² + س + ١٢ ، −٣ ≤ س < ٤
  س² − س − ١٢ ، س ≥ ٤

جـ) س³ − ٤س = صفر

س(س² − ٤) = صفر

⇐ $\boxed{\text{س} = ٠}$ أو $\boxed{\text{س} = ٢}$ أو $\boxed{\text{س} = −٢}$



ق(س) = { ٤س − س³ ، س ≤ −٢
  س³ − ٤س ، −٢ < س ≤ ٠
  ٤س − س³ ، ٠ < س ≤ ٢
  س³ − ٤س ، س > ٢

④ جاس = صفر

س = π

جاس -جاس

ه(س) = { جاس ، س ≤ π
-جاس ، س > π

مثال ②: أعد تعريف ه(س) = |س² - ٣| + |٤ - س| + |س³ - ١٠| عند س = ٢

الحل:- (٢)² - ٣ = ٤ - ٣ = ١ (موجب)

٤ - ٢ = ٢ (موجب)

(٢)³ - ١٠ = -٢ (سالب)

∴ ه(س) = س² - ٣ + ٤ - س - س³ + ١٠

---

③ ه(س) = |٥س³ - ٩س² + ١| عند س = ١

الحل:- ٥(١)³ - ٩(١)² + ١ = -٣ (سالب)

∴ ه(س) = -٥س³ + ٩س² - ١

---

* بعض خواص القيمة المطلقة:-

① √س² = |س|

مثال:- √(س - ٢)² = |س - ٢| √جتا²س = |جتاس|

② |ه(س)| = ه(س) إذا كان ه(س) ≥ ٠

مثال: |س²| = س²

|س⁴ + ١| = س⁴ + ١

③ إذا كان |س| = أ وكان أ > ٠ ، فإن س = أ أو س = -أ

مثال: |س| = ٦

⇐ س = ٦ أو س = -٦

④ * اذا كان |س| < أ حيث أ > ٠ فإن -أ < س < أ

* اذا كان |س| > أ فإن س > أ أو س < -أ

مثال : |س| < ٧ ⟸ -٧ < س < ٧

|س| > ٣ ⟸ س > ٣ أو س < -٣

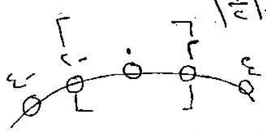
رابعاً : اقتران أكبر عدد صحيح :- [س]

[٢] = ٢ ، [٥,٦] = ٥ ، [-٤,٣] = -٥ ، [-١,٧] = -٢

ولإعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح نجد طول الدرجة = $\frac{١}{|\text{معامل س}|}$ ويمكن أن يكون البدء من س = ٠ اذا كان ب عدداً صحيحاً في المقدار أس + ب

مثال :- أعد تعريف الاقتران ق(س) = [½ س] دون استخدام رمز الصحيح حيث س ∈ [-٢، ٢]

الحل :- طول الدرجة = $\frac{١}{|\frac{١}{٢}|}$ = ٢



البدء من س = ٠

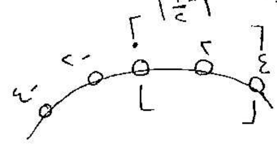
∴ ق(س) = [½ س] = { -١ ، -٢ ≤ س < ٠
٠ ، ٠ ≤ س < ٢
١ ، س = ٢

مثال :- أعد تعريف كل من الاقترانات التالية دون استخدام رمز الصحيح :-

أ) ق(س) = [٦ - ½ س] حيث س ∈ [٠، ٤]

الحل :- طول الدرجة (ل) = $\frac{١}{|-\frac{١}{٢}|}$ = ٢

البدء من س = ٠



⟸ ق(س) = { ٦ ، س = ٠
٥ ، ٠ < س ≤ ٢
٤ ، ٢ < س ≤ ٤

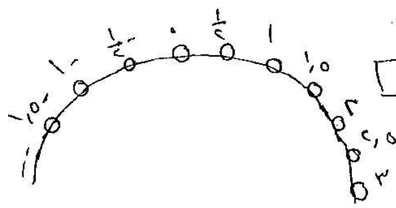
ب) ق(س) = [٥ − س] ، س ∈ [١ ، ٤]

الحل:- ل = $\frac{1}{|-1|}$ = ١ ، البدء عند $\boxed{س = ٠}$

∴ ق(س) = { ٣ ، ١ < س ≤ ٢
٢ ، ٢ < س ≤ ٣
١ ، ٣ < س ≤ ٤

ويسمى أيضاً ق(س) = [س] بالاقتران الدرجي

جـ) ق(س) = [٢س + ٢] ، س ∈ [١ ، ٣]



الحل:- ل = $\frac{1}{|2|}$ = $\frac{1}{2}$ ، البدء عند $\boxed{س = ٠}$

∴ ق(س) = [٢س + ٢] = { ٤ ، ١ ≤ س < ١٫٥
٥ ، ١٫٥ ≤ س < ٢
٦ ، ٢ ≤ س < ٢٫٥
٧ ، ٢٫٥ ≤ س < ٣

---

* خواص [س] :-

١) اذا كان أ عدداً صحيحاً فإن [س + أ] = [س] + أ

مثال: [س + ٣] = [س] + ٣

[٤س + ١] = [٤س] + ١

[٢س + ٢٫٤] ≠ [٢س] + ٢٫٤

٢) إذا كان أ عدداً صحيحاً وكان [س] = أ فإن: أ ≤ س < أ + ١

مثال:- [س] = ٤ فإن ٤ ≤ س < ٥

⑤ التمثيل البياني لبعض الاقترانات :-

أ) الاقتران الخطي : $ق(س) = أس + ب$

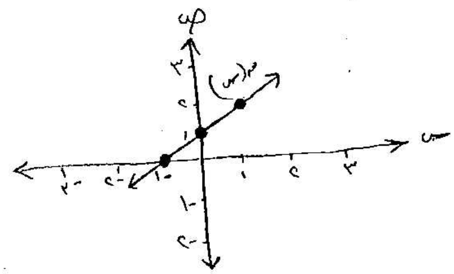
مثال ١ : ارسم الاقتران $ق(س) = س + ١$

ب) $ق(س) = ٣ - ٢س$ ------ $\boxed{\text{واجب}}$

جـ) $ق(س) = \begin{cases} س + ٣ ، & س < ١ \\ ٣ - ٢س ، & س \geq ١ \end{cases}$

الحل :- أ)

س	٠	١	-١
ق(س)	١	٢	٠



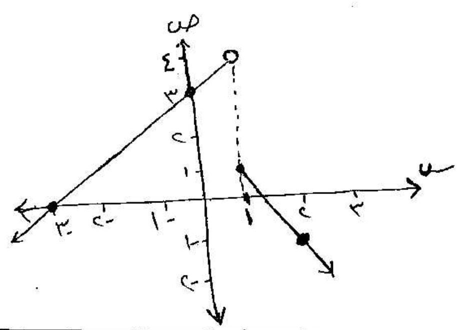
جـ) نأخذ كل قاعدة لوحدها

١) $ق(س) = س + ٣$ ، $س < ١$

س	١	٠	-٣
ق(س)	٤	٣	٠

٢) $ق(س) = ٣ - ٢س$ ، $س \geq ١$

س	١	٢
ق(س)	١	-١



② الاقتران التربيعي :- $ق(س) = أس^٢ + ب س + جـ$

يكون على شكل قطع مكافئ، مفتوح للأعلى إذا كانت إشارة معامل $س^٢$ موجبة ومفتوحة للأسفل إذا كانت إشارة معامل $س^٢$ سالبة

نجد نقطة رأس القطع عن طريق العلاقة $س = \frac{-ب}{٢أ}$ ، حيث أ معامل $س^٢$

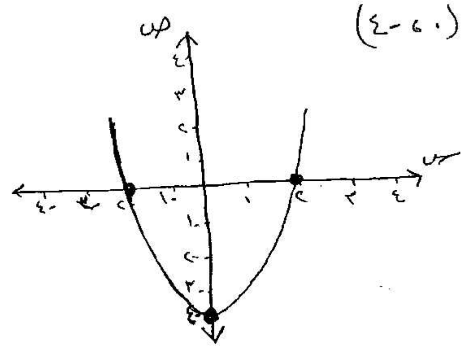
ب معامل س

مثال ٤: ارسم الاقتران ق(س) = س² - ٤

الحل: لايجاد نقطة الرأس س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ⟸ س = $\frac{٠}{٢(١)}$ = صفر

النقطة هي (٠ ، -٤)

مفتوحاً للأعلى لأن (أ) معامل س² موجب



س	٠	٢	-٢
ق(س)	-٤	٠	٠

سؤال: ارسم كلاً من الاقترانات: أ) ق(س) = ٢س - س²

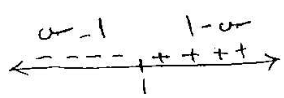
ب) ق(س) = س² + ٢س - ٣

٣) رسم اقتران القيمة المطلقة |س|:

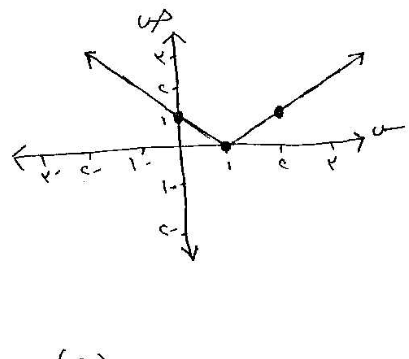
مثال: مثل بيانياً الاقتران ق(س) = |س - ١|

الحل: س - ١ = صفر

$\boxed{س = ١}$



س	١	٠	٢
ق(س)	٠	١	١



سؤال: ارسم كلاً من الاقترانات

أ) ق(س) = ٢ - |س|

ب) ق(س) = |٢س + ٢|

٦) خاصية التوزيع في حالة الضرب والقسمة :-

$\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ مثل: $\frac{\text{س}+١}{٣} = \frac{\text{س}}{٣} + \frac{١}{٣}$

$\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} - \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ مثل: $\frac{\text{س}-١}{٣} = \frac{\text{س}}{٣} - \frac{١}{٣}$

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}+\text{ب}} \neq \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ مثل: $\frac{٣}{\text{س}+١} \neq \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٣}{١}$

$\frac{\text{أ}\times\text{ب}}{\text{جـ}} \neq \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

$\frac{\text{أ}\times\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{أ} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \text{ب}$ مثل: $\frac{\text{س}\times٢}{٣} = \text{س}\times\frac{٢}{٣} = \frac{\text{س}}{٣}\times٢$

$\frac{\text{أ}\times\text{ب}}{\text{جـ}^٢} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \Leftarrow$ مثل: $\frac{\text{س}\times٢}{٣^٢} = \frac{\text{س}}{٣} \times \frac{٢}{٣}$

* نهايـة الاقترانات عند نقطة :-

مثال: ق(س) = ٣س - ١

نها ق(س) = ٣(١) - ١ = ٢ أي أن الاقتران ق(س) يأخذ قيماً قريبة من العدد ٢
س←١

ويتم ايجاد النهاية عن طريق التعويض المباشر .

مثال: أوجد النهاية في كل مما يلي :-

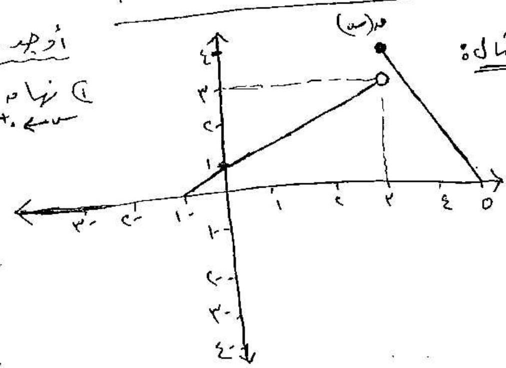
أ) نها س^{٣} + ١ = (٢)^{٣} + ١ = ٩
س←٢

ب) نها ٤ - س^{٢} = ٤ - (-٢)^{٢} = صفر
س←-٢

ج) نها س - س^{٢} + ١ = ٥ - (٥)^{٢} + ١ = -١٩
س←٥

* ايجاد النهايـة عن طريق الرسم :-

مثال:



أوجد:

١) نها ق(س) =
س←٠+

٢) نها ق(س) =
س←٠-

٣) نها ق(س) =
س←٣

٤) نها ق(س) =
س←٣-

٥) نها ق(س) =
س←٣+

٦) نها ق(س) =
س←-١

مثال: أوجد النهاية في كل مما يلي:

أ) $\lim_{س \to -1} (س^3 + 6) = (-1)^3 + 6 = 5$

ب) $\lim_{س \to 2} \sqrt{س + 2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

جـ) $\lim_{س \to 0} س^2 - 4س + 5 = (0)^2 - 4(0) + 5 = 5$

د) $\lim_{س \to 2^-} 1 - س^3 = 1 - (2)^3 = 1 - 8 = -7$

* نهاية الاقتران المتشعب:

تكون النهاية موجودة عند نقطة التشعب (أ) إذا كانت:

$\lim_{س \to أ^-} ق(س) = \lim_{س \to أ^+} ق(س)$

مثال: إذا علمت أن $ق(س) = \begin{cases} س^3 + 2 ، & س < -1 \\ س^2 + س ، & س \geq -1 \end{cases}$ جد $\lim_{س \to -1} ق(س)$

الحل: $\lim_{س \to -1^-} ق(س) = (-1)^3 + 2 = -1 + 2 = 1$

$\lim_{س \to -1^+} ق(س) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = صفر$

بما أن $\lim_{س \to -1^-} ق(س) \neq \lim_{س \to -1^+} ق(س)$ فإن $\lim_{س \to -1} ق(س)$ غير موجودة.

مثال: $ق(س) = \begin{cases} س^2 ، & س < 2 \\ 2س ، & س \geq 2 \end{cases}$ جد $\lim_{س \to 2} ق(س)$

الحل: $\lim_{س \to 2^-} ق(س) = (2)^2 = 4$

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = 2 \times 2 = 4$

$\Leftarrow$ $\therefore \lim_{س \to 2} ق(س) = 4$

مثال ٥- إذا كان $\text{ه(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢}+٥ & \text{، س} < ٣ \\ \text{أس}+٢ & \text{، س} \geq ٣ \end{cases}$ وكانت نهـا ه(س) موجودة فاحسب قيمة أ ؟

الحل: بما أن $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ه(س)}$ موجودة فإن $\underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ه(س)} = \underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ه(س)}$

$\Leftarrow (٣)^{٢}+٥ = ٣\text{أ}+٢ \Leftarrow ١٤ = ٣\text{أ}+٢$

$\Leftarrow ٣\text{أ} = ١٢$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٤}$

سؤال: $\text{م(س)} = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢}+١ & \text{، س} < -٢ \\ \text{س}+\text{أ} & \text{، س} \geq -٢ \end{cases}$ وكانت $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$ موجودة، فاحسب قيمة أ ؟

مثال ٦: $\text{م(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣}+٢ & \text{، س} < ١ \\ ٢\text{س}+١ & \text{، } ١ \leq \text{س} < ٥ \\ ٤\text{س}+٢ & \text{، س} \geq ٥ \end{cases}$ جد: ١) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$ ٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$ ٣) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$ ٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$ ٥) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$

الحل: ١) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)} = (-١)^{٣}+٢ = ١$ (عوضنا في القاعدة الأولى للاقتران المتشعب)

٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)} = ٢(٣)+١ = ٧$

٣) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)} = ٤(٨)+٢ = ٣٤$

٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$ ⇐ يجب أن نأخذ النهاية من اليمين واليسار (نقطة تشعب)

$\left[\begin{array}{l} \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)} = (١)^{٣}+٢ = ٣ \\ \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)} = ٢(١)+١ = ٣ \end{array}\right. \therefore \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)} = ٣$

٥) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$ ⇐ يجب أخذ النهاية من اليمين واليسار (نقطة تشعب)

$\left[\begin{array}{l} \underset{\text{س}\to ٥^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)} = ٢(٥)+١ = ١١ \\ \underset{\text{س}\to ٥^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)} = ٤(٥)+٢ = ٢٢ \end{array}\right. \therefore \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}}\ \text{م(س)}$ غير موجودة

سؤال: ق(س) = { 4س $+2$ ، $1 \leq$ س < 3 ؛ س$^2 + 2$ ، $3 \leq$ س ≤ 5

جد: ① نها ق(س) (س ← 1)   ② نها ق(س) (س ← 3)   ③ نها ق(س) (س ← 5)

مثال: ق(س) = { س^3 + س ، س $\neq 2$ ؛ 4 ، س $= 2$

جد: ① نها ق(س) (س ← 4)
② نها ق(س) (س ← 2)
③ نها ق(س) (س ← 1)
④ ق(2)

الحل: ① نها ق(س) (س ← 4) $= (4)^3 + 4 = 64 + 4 = 68$

② نها ق(س) (س ← 2) $= (2)^3 + 2 = 8 + 2 = 10$

③ نها ق(س) (س ← 1) $= (1)^3 + 1 = 2$

④ ق(2) $= 4$

مثال: اذا علمت أن ق(س) = { س^2 + س ، س $<$ أ ؛ 3س $+ 15$ ، س $>$ أ   فما قيمة أ إذا كانت نها ق(س) (س ← أ) موجودة

الحل: بما أن النهاية موجودة فإن: نها ق(س) (س ← أ$^-$) = نها ق(س) (س ← أ$^+$)

⇐ أ^2 + أ $= 3$(أ) $+ 15$

⇐ أ$^2 - 2$أ $- 15 =$ صفر (عبارة تربيعية)

⇐ (أ $- 5$) (أ $+ 3$) $=$ صفر

$\boxed{\text{أ} = 5}$ أو $\boxed{\text{أ} = -3}$

مثال: $ق(س) = \begin{cases} ٣س + ١ & ، س \in ص \\ س^{٢} & ، س \notin ص \end{cases}$ حيث ص الأعداد الصحيحة

جد: ١) $\underset{س \to ٣}{نها} ق(س)$ ، ٢) $ق(٣)$

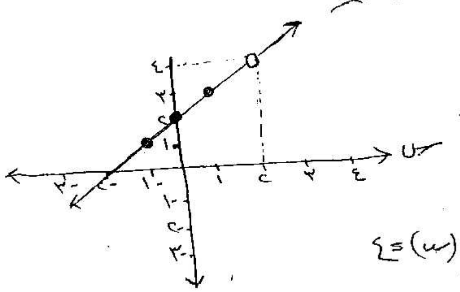
الحل: ١) $\underset{س \to ٣}{نها} ق(س) = (٣)^{٢} = ٩$

٢) $ق(٣) = ٣(٣) + ١ = ١٠$

سؤال: ارسم الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leq ١ \\ ٣ - س & ، س > ١ \end{cases}$ ثم أوجد $\underset{س \to ١}{نها} ق(س)$

مثال: ارسم الاقتران $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ثم جد $\underset{س \to ٢}{نها} ق(س)$

الحل: $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \frac{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}{\cancel{س - ٢}} = س + ٢$ ، $س \neq ٢$ (لأنها صفر المقام)



س	٠	١	-١	٢
ق(س)	٢	٣	١	٤

$\underset{س \to ٢^{-}}{نها} ق(س) = ٤$

$\underset{س \to ٢^{+}}{نها} ق(س) = ٤$

$\therefore \underset{س \to ٢}{نها} ق(س) = ٤$

سؤال: إذا كان $ق(س) = |س - ١|$ ، ارسم الاقتران ق ثم جد $\underset{س \to ١}{نها} ق(س)$

مثال: ارسم الاقتران $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}-1|}{\text{س}-1} & \text{، س} \neq 1 \\ 2 & \text{، س} = 1 \end{cases}$ ثم جد $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{ق(س)}$

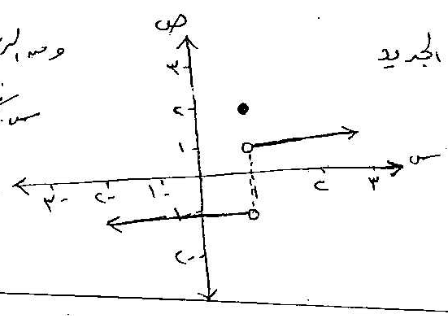
الحل: نعيد تعريف $|\text{س}-1|$

$\text{س} - 1 = 0 \Leftarrow \text{س} = 1$

$\overset{1-\text{س}}{- - - -} \underset{1}{\times} \overset{\text{س}-1}{+ + +}$

$\therefore \text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{1-\text{س}}{\text{س}-1} & \text{، س} < 1 \\ \dfrac{\text{س}-1}{\text{س}-1} & \text{، س} > 1 \\ 2 & \text{، س} = 1 \end{cases} \Leftarrow \text{ق(س)} = \begin{cases} -1 & \text{، س} < 1 \\ 1 & \text{، س} > 1 \\ 2 & \text{، س} = 1 \end{cases}$

نرسم الاقتران الجديد



من الرسم:

$\begin{cases} \lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \text{ق(س)} = -1 \\ \lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{ق(س)} = 1 \end{cases} \therefore \lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{ق(س)}$ غير موجودة

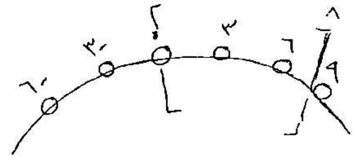
سؤال: إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} 3\text{س} & \text{، س} \leq 3 \\ \dfrac{|\text{س}-3|}{\text{س}-3} & \text{، س} > 3 \end{cases}$ ارسم ق(س) ثم جد: $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{ق(س)}$

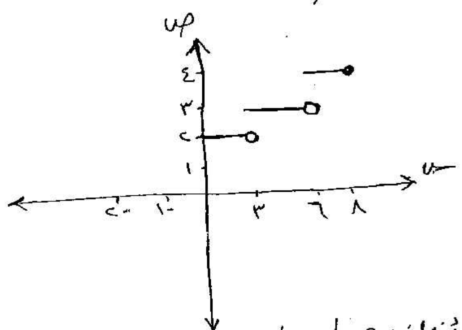
مثال: ارسم الاقتران $ق(س) = [\frac{1}{3}س + 2]$ ، $س \in [0 ، 8]$ ثم جد: ① $\underset{س \leftarrow 2}{نها} ق(س)$

② $\underset{س \leftarrow 5}{نها} ق(س)$ ③ $\underset{س \leftarrow 7.5}{نها} ق(س)$ ④ $\underset{س \leftarrow 3}{نها} ق(س)$ ⑤ $\underset{س \leftarrow 6}{نها} ق(س)$

الحل: نعيد تعريف $ق(س) = [\frac{1}{3}س + 2]$

$ل = \frac{1}{|\frac{1}{3}|} = 3$ ، 8





$$ق(س) = \begin{cases} 2 ، & 0 \le س < 3 \\ 3 ، & 3 \le س < 6 \\ 4 ، & 6 \le س \le 8 \end{cases}$$

① $\underset{س \leftarrow 2}{نها} ق(س) = 2$ ② $\underset{س \leftarrow 5}{نها} ق(س) = 3$

③ $\underset{س \leftarrow 7.5}{نها} ق(س) = 4$ ④ $\underset{س \leftarrow 3}{نها} ق(س)$ ⇐ نأخذ النهاية من اليمين واليسار

$\left[\begin{array}{l} \underset{س \leftarrow 3^-}{نها} ق(س) = 2 \\ \underset{س \leftarrow 3^+}{نها} ق(س) = 3 \end{array}\right.$ ⇐ $\underset{س \leftarrow 3}{نها} ق(س)$ غير موجودة

⑤ $\underset{س \leftarrow 6}{نها} ق(س)$ ⇐ نأخذ النهاية من اليمين واليسار

$\left[\begin{array}{l} \underset{س \leftarrow 6^-}{نها} ق(س) = 3 \\ \underset{س \leftarrow 6^+}{نها} ق(س) = 4 \end{array}\right.$ ⇐ $\underset{س \leftarrow 6}{نها} ق(س)$ غير موجودة.

سؤال: (مهم) $ق(س) = \begin{cases} [\frac{1}{4}س + 2] ، & س < 0 \\ \frac{|س|}{س} ، & س > 0 \end{cases}$

ملاحظة: اذا كان ناتج التعويض في اقتران اكبر عدد صحيح لايجاد النهاية عدداً صحيحاً فإن النهاية غير موجودة

مثال: نها (س←٣) [س + ٥] = [٣ + ٥] = [٨] غير موجودة

نها (س←٢) [٢س - ١] غير موجودة

نها (س←٦) [س/٤ + ٨] = [٩,٥] = ٩

نها (س←٣) [٣س + ٠,٤] = [٩,٤] = ٩

نها (س←٠,٥) [٢س + ٣] غير موجودة

نها (س←٣) [١ - س/٢] = [٠,٥-] = صفر

سؤال: اذا كان ق(س) = (س² + ١)^[س] جد نها (س←٠) ق(س) —— $\boxed{\text{الاجابة (١)}}$

مثال: ق(س) = |س - ١| [س + ١] جد نها (س←١) ق(س)

الحل: نعيد تعريف |س - ١| ⟸ س - ١ = ٠ ⟸ س = ١

١ - س   س - ١

- - - | + + +
 ١

|س - ١| = { ١ - س ، س < ١
 { س - ١ ، س ≥ ١

نعيد تعريف [س + ١]

ل = ١/١ = ١

[س + ١] = { ١ ، ٠ ≤ س < ١
 { ٢ ، ١ ≤ س < ٢

⟸ ق(س) = { (١ - س) × ١ ، ٠ ≤ س < ١
 { (س - ١) × ٢ ، ١ ≤ س < ٢

⟸ ق(س) = { ١ - س ، ٠ ≤ س < ١
 { ٢س - ٢ ، ١ ≤ س < ٢

⟸ نها (س←⁻١) ق(س) = ١ - ١ = صفر
 نها (س←⁺١) ق(س) = ٢(١) - ٢ = صفر
∴ نها (س←١) ق(س) = صفر

* **ملاحظة:** $\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نها}} [س] = ٤$ ، $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}} [س] = ٢$

$\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نها}} [س] = ٣$ ، $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}} [س] = ١$

إذا كانت $أ \in ص$ فإن $\underset{س \to أ^{+}}{\text{نها}} [س] = أ$ ، $\underset{س \to أ^{-}}{\text{نها}} [س] = أ - ١$ وذلك عندما يكون معامل س موجباً

مثل:

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}} [س + ٢] = ٥$	$\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نها}} [٣س + ١] = ١٣$
$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}} [س + ٢] = ٤$	$\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نها}} [٣س + ١] = ١٢$
$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} [س + ٢]$ غ م	$\underset{س \to ٤}{\text{نها}} [٣س + ١]$ غ م

* بينما اذا كان معامل س سالباً :

مثل:

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نها}} [٥ - س] = ٣$	$\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نها}} [٧ - \frac{س}{٢}] = ٤$
$\underset{س \to ١^{-}}{\text{نها}} [٥ - س] = ٤$	$\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نها}} [٧ - \frac{س}{٢}] = ٥$
$\underset{س \to ١}{\text{نها}} [٥ - س]$ غ م	$\underset{س \to ٤}{\text{نها}} [٧ - \frac{س}{٢}]$ غ م

* أما إذا كانت $أ \notin ص$ فإن $[أ]^{+} = [أ]^{-} = [أ]$

مثل:

$\underset{س \to ٢,٥^{+}}{\text{نها}} [س + ٤] = [٦,٥]^{+} = ٦$	$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}} [\frac{س}{٢} + ٤] = ٥$
$\underset{س \to ٢,٥^{-}}{\text{نها}} [س + ٤] = [٦,٥]^{-} = ٦$	$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}} [٤ + \frac{س}{٢}] = ٥$
$\underset{س \to ٢,٥}{\text{نها}} [س + ٤] = [٦,٥] = ٦$	$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} [٤ + \frac{س}{٢}] = ٥$

مثال: إذا كان $ق(س) = [س + ٣] - [س - ١]$ جد $\underset{س \to ١}{\text{نها}} ق(س)$

الحل: $ق(س) = [س] + ٣ - ([س] - ١) = \cancel{[س]} + ٣ - \cancel{[س]} + ١ = ٤$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ١}{\text{نها}} ٤ = ٤$

مثال ١: $ق(س) = \begin{cases} [س + أ] & ، س > ٢ \\ س^٣ + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$ أوجد $أ \in ص$ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

٢) $ق(س) = \begin{cases} [س + أ] & ، س < ٢ \\ س^٣ + ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$ أوجد $أ \in ص$ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

٣) $ق(س) = \begin{cases} [س + أ] & ، س > ٢ \\ س^٣ + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$ أوجد أ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

٤) $ق(س) = \begin{cases} [س + أ] & ، س < ٢ \\ س^٣ + ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$ اوجد أ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

الحل: ١) $\lim_{س \to ٢^+} [س + أ] = \lim_{س \to ٢^-} س^٣ + ٢$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢^+} [س] + أ = ١٠$

$\Leftarrow ٢ + أ = ١٠$

$\Leftarrow \boxed{أ = ٨}$

٢) $\lim_{س \to ٢^-} [س + أ] = \lim_{س \to ٢^+} س^٣ + ٢$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢^-} [س] + أ = ١٠$

$\Leftarrow ١ + أ = ١٠$

$\Leftarrow \boxed{أ = ٩}$

---

٣) $\lim_{س \to ٢^+} [س + أ] = \lim_{س \to ٢^-} س^٣ + ٢$

$\Leftarrow [٢ + أ]^+ = ١٠$

$\Leftarrow ١٠ \le أ + ٢ < ١١$

$\Leftarrow ٨ \le أ < ٩$

نختبر صحة الحل بأخذ قيم لـ أ

$أ = ٨ : [٨ + ٢]^+ = ١٠$ ✓

$أ = ٨٫٥ : [٨٫٥ + ٢]^+ = [١٠٫٥] = ١٠$ ✓

$أ = ٩ : [٩ + ٢]^+ = ١١$ ×

$\therefore أ \in [٨ ، ٩)$

٤) $\lim_{س \to ٢^-} [س + أ] = \lim_{س \to ٢^+} س^٣ + ٢$

$\Leftarrow [٢ + أ]^- = ١٠$

$\Leftarrow ١٠ \le أ + ٢ < ١١$

$\Leftarrow ٨ \le أ < ٩$

نختبر صحة الحل بأخذ قيم لـ أ

$أ = ٨ : [٨ + ٢]^- = [١٠]^- = ٩$ ×

$أ = ٨٫٥ : [٨٫٥ + ٢]^- = [١٠٫٥]^- = ١٠$ ✓

$أ = ٩ : [٩ + ٢]^- = [١١]^- = ١٠$ ✓

$\therefore أ \in (٨ ، ٩]$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}+1] & ، \text{س} < \text{أ} \\ 8 - [\text{س}] & ، \text{س} > \text{أ} \end{cases}$ جد أ اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$ موجودة

الحل: بما أن النهاية موجودة

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^+} \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^-} [\text{س}] + 1 = \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^+} 8 - [\text{س}]$

$[\text{أ}]^- + 1 = 8 - [\text{أ}]^+$

هناك حالتان:

1) إذا كانت أ عدد صحيح $\text{أ} \in \text{ص}$

فإن: $[\text{أ}]^+ = \text{أ}$

$[\text{أ}]^- = \text{أ} - 1$

$\Leftarrow \text{أ} \cancel{- 1} \cancel{+ 1} = 8 - \text{أ}$

$\therefore \text{أ} = 8 - \text{أ}$

$\Leftarrow 2\text{أ} = 8 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 4}$

2) اذا لم تكن أ عدداً صحيحاً $\text{أ} \notin \text{ص}$

فإن: $[\text{أ}]^+ = [\text{أ}]^- = [\text{أ}]$

$\Leftarrow [\text{أ}] + 1 = 8 - [\text{أ}]$

$\Leftarrow 2[\text{أ}] = 7$

$\therefore [\text{أ}] = 3.5$ ليس لها حل

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}+3] & ، \text{س} < \text{أ} \\ 11 - [\text{س}] & ، \text{س} > \text{أ} \end{cases}$ جد أ اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$ موجودة

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^+} \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^-} [\text{س}] + 3 = \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^+} 11 - [\text{س}]$

$[\text{أ}]^- + 3 = 11 - [\text{أ}]^+$

هناك حالتان:

1) إذا كانت $\text{أ} \in \text{ص}$

فإن: $[\text{أ}]^+ = \text{أ}$

$[\text{أ}]^- = \text{أ} - 1$

$\Leftarrow \text{أ} - 1 + 3 = 11 - \text{أ}$

$\Leftarrow \text{أ} + 2 = 11 - \text{أ}$

$\Leftarrow 2\text{أ} = 9$

$\Leftarrow \text{أ} = 4.5 \notin \text{ص}$

مرفوضة

2) اذا كانت $\text{أ} \notin \text{ص}$

فإن: $[\text{أ}]^+ = [\text{أ}]^- = [\text{أ}]$

$\Leftarrow [\text{أ}] + 3 = 11 - [\text{أ}]$

$\Leftarrow 2[\text{أ}] = 8$

$\Leftarrow [\text{أ}] = 4$

$\Leftarrow 4 \le \text{أ} < 5$ لكن $\text{أ} \notin \text{ص}$

$\Leftarrow 4 < \text{أ} < 5$

$\therefore \text{أ} \in (4 ، 5)$

مثال: اذا كانت $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} [\text{٣س}] = ٨$ جد أ

الحل: $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} [\text{٣س}] = ٨ \Leftarrow [\text{٣أ}] = ٨$

$\Leftarrow ٨ \leq \text{٣أ} < ٩$

$\Leftarrow \frac{٨}{٣} \leq \text{أ} < ٣$ لكن النهاية عند أ $= \frac{٨}{٣}$ غير موجودة

$\therefore \frac{٨}{٣} < \text{أ} < ٣ \Leftarrow \text{أ} \in (\frac{٨}{٣} ، ٣)$

مثال: اذا كانت $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} |\text{٢س} - ١| = ١٠$ جد قيمة أ

الحل: يوجد حلان وعند التعويض المباشر:

$\text{٢أ} - ١ = ١٠$ أو $\text{٢أ} - ١ = -١٠$

$\Leftarrow \text{٢أ} = ١١$ $\Leftarrow \text{٢أ} = -٩$

$\Leftarrow \text{أ} = \frac{١١}{٢} = ٥,٥$ $\Leftarrow \text{أ} = -\frac{٩}{٢} = -٤,٥$

سؤال: ① جد قيمة أ إذا علمت أن $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} [\text{٢س} + ٢] = ٤$

② جد قيمة أ إذا علمت أن $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} |٤ - \text{٢س}| = ٨$

مثال: اذا كانت $\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \text{س جتا أس} = \text{صفر}$ فما قيمة أ ؟

الحل: $\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \text{س جتا أس} = \frac{\pi}{٤} \text{ جتا } \frac{\text{أ}\pi}{٤} = ٠$ بالقسمة على $\frac{\pi}{٤}$

$\Leftarrow \text{جتا } \frac{\text{أ}\pi}{٤} = ٠$ (نبحث عن الزاوية التي جيب تمامها يساوي صفر)

$\Leftarrow \frac{\text{أ}\pi}{٤} = \text{ن}(\frac{\pi}{٢})$ ، حيث ن عدد فردي صحيح

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = \text{٢ن}}$

مثال: $ق(س) = \begin{cases} 1 & ، |س| \leq 1 \\ \text{صفر} & ، |س| > 1 \end{cases}$ جد $\lim\limits_{س \to 1}$ نها $ق(س)$

الحل: نعيد كتابة الاقتران ق بشكل آخر للتخلص من رمز | |

$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} 1 & ، -1 \leq س \leq 1 \\ \text{صفر} & ، س > 1 ، س < -1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \text{نها}_{س \to 1^-} ق(س) = 1 \\ \text{نها}_{س \to 1^+} ق(س) = \text{صفر} \end{array}\right] \therefore \text{نها}_{س \to 1} ق(س)$ غ م

مثال: $ق(س) = \begin{cases} [\frac{س}{3} + 2] & ، س < 0 \\ \frac{|س|}{س} & ، س > 0 \end{cases}$ جد $\text{نها}_{س \to 0} ق(س)$

الحل: نعيد تعريف الاقتران ونكتب قاعدة جديدة.

$[\frac{س}{3} + 2] \Leftarrow ل = \frac{1}{|\frac{1}{3}|} = 3$ $-3 \quad 0 \quad 3$

$|س|$ $-س \; -- \quad ++ \; س$

$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} 1 & ، -3 \leq س < 0 \\ 1 & ، س > 0 \end{cases}$

$\Leftarrow \left.\begin{array}{l} \text{نها}_{س \to 0^-} ق(س) = 1 \\ \text{نها}_{س \to 0^+} ق(س) = 1 \end{array}\right\} \therefore \text{نها}_{س \to 0} ق(س) = 1$

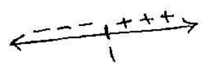
* ملاحظة: عندما يكون الاقتران ق(س) = √ل(س) يجب تحديد المجال في هذه الحالة حيث أن ل(س) ≥ ٠ ثم نجد النهاية

مثال: ق(س) = √(س − ١) ارسم ق(س) وجد نها ق(س) عندما س ← ١ ، نها ق(س) عندما س ← ٥

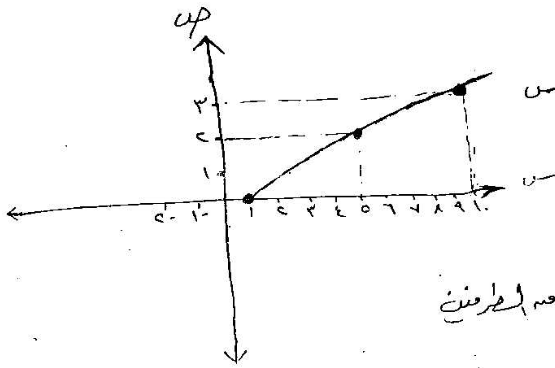
الحل: يجب تحديد المجال:

س − ١ ≥ ٠

س ≥ ١



المجال هو [١ ، ∞)



ولرسم الاقتران نأخذ قيم لـ س

س	١	٥	١٠
ق(س)	٠	٢	٣

نها ق(س) (س ← ١) ⟸ يجب أخذ النهاية من الطرفين

نها ق(س) (س ← ١⁻) = غ م

نها ق(س) (س ← ١⁺) = ٠

⟸ نها ق(س) (س ← ١) غ م

نها ق(س) (س ← ٥) = ٢

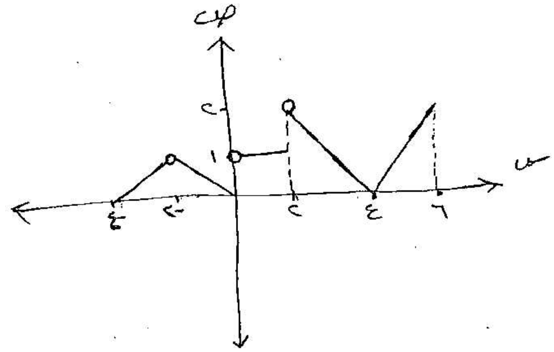
سؤال: اوجد النهاية لكل من الاقترانات التالية:

أ) ق(س) = √(س − ٢) عند س = ٢ ، س = ٣

ب) ق(س) = √(١ − س) عند س = ١ ، س = ٠

مثال: بالاعتماد على الشكل التالي الذي يمثل ق(س) المعرف على [-٤، ٦]

١) جد قيم أ حيث أن نهـا ق(س) غير موجودة (س ← أ)



٢) جد قيم أ حيث أنه:

أ) نهـا ق(س) = صفر (س ← أ)

ب) نهـا ق(س) = صفر (س ← أ⁻)

جـ) نهـا ق(س) = صفر (س ← أ⁺)

الحل: ١) قيم أ التي تكون عندها النهاية غير موجودة هي أ ∈ {-٤، ٦، ٠، ٢}

٢) أ) أ = ٤

ب) أ ∈ {٠، ٤}

جـ) أ ∈ {-٤، ٤}

* نظريات النهايات:

نظرية (١): أ) نهاية الثابت = ثابت ⟸ نهـا جـ = جـ (س ← أ)

ب) إذا كان ق(س) كثير حدود فإن نهـا ق(س) = ق(أ) (س ← أ)

مثال: جد النهايات التالية:

أ) نهـا ٣ (س ← ٥) ب) نهـا -٩ (س ← √٧) جـ) نهـا س² + ٢س - ٥ (س ← -١)

الحل: أ) نهـا ٣ = ٣ (س ← ٥)

ب) نهـا -٩ = -٩ (س ← √٧)

جـ) نهـا س² + ٢س - ٥ = (-١)² + ٢(-١) - ٥ = -٦ (س ← -١)

نظرية (٢): اذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} هـ(س) = م$ حيث: أ، ل، م $\in$ ح فإن:

١) $\lim_{س \to أ} (ق + هـ) = ل + م$

٢) $\lim_{س \to أ} (ق - هـ) = ل - م$

٣) $\lim_{س \to أ} (ق \times هـ) = ل \times م$

٤) $\lim_{س \to أ} \frac{ق}{هـ} = \frac{ل}{م}$ ، $م \neq ٠$

٥) $\lim_{س \to أ} جـ \times ق(س) = جـ \times ل$ (جـ ثابت)

٦) $\lim_{س \to أ} \left(ق(س)\right)^ن = (ل)^ن$

٧) $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$ حيث ل > ٠ اذا كانت ن عدد زوجي

مثال: اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٤$ جد:

١) $\lim_{س \to ٣} \left(س\, ق(س) + هـ^٢(س)\right) = ٣(١٠) + (-٤)^٢ = ٣٠ + ١٦ = ٤٦$

٢) $\lim_{س \to ٣} \left(ق(س) \times هـ(س)\right) = ١٠ \times -٤ = -٤٠$

٣) $\lim_{س \to ٣} \left(٤ق(س) - ٢هـ(س)\right) = ٤(١٠) - ٢(-٤) = ٤٠ + ٨ = ٤٨$

٤) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{٧س - ١}{ق(س)} + \sqrt{٢هـ(س) + ٢٤}\right) = \frac{٧(٣) - ١}{١٠} + \sqrt{٢(-٤) + ٢٤}$

$= ٢ + \sqrt{١٦} = ٢ + ٤$

$= ٨$

مثال: اذا كانت $\lim_{س \to ٥} س^٢ ق(س) = ١٥٠$ فجد $\lim_{س \to ٥} \left(٤ق(س) + [\frac{س}{٢} + ٧]\right)$

الحل: $\lim_{س \to ٥} س^٢ ق(س) = ١٥٠ \Leftarrow ٢٥ \lim_{س \to ٥} ق(س) = ١٥٠$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٥} ق(س) = \frac{١٥٠}{٢٥} = ٦$

$\therefore \lim_{س \to ٥} \left(٤ق(س) + [\frac{س}{٢} + ٧]\right) = ٤(٦) + [\frac{٥}{٢} + ٧] = ٢٤ + ٩$

$= ٣٣$

سؤال: اذا كانت $\lim_{س \to 3} \left(4س\, ق(س) + \frac{12}{س}\right) = 52$ جد: $\lim_{س \to 3} \left(ق^3(س) + \frac{24}{\sqrt{ق(س)}}\right)$

$\boxed{\text{الإجابة } 76}$

مثال: اذا كانت $\lim_{س \to 7} ق(س) = 8$ ، $ق(7) = 3$ جد:

1) $\lim_{س \to 3} \left(4ق(2س+1) + س^2 + 5\right)$　　2) $\lim_{س \to 2} ق^2(9-س)$

الحل: 1) $\lim_{س \to 3} \left(4ق(2س+1)\right) + \lim_{س \to 3} \left(س^2+5\right)$ نفرض $2س + 1 = ص$

عندما $س \to 3$ ، $ص \to 7$

$= \lim_{ص \to 7} 4ق(ص) + (9+5)$

$= 4(8) + 14 = 32 + 14 = 46$

2) $\lim_{س \to 2} ق^2(9-س)$　　نفرض $ص = 9 - س$

عندما $س \to 2$ فإن $ص \to 7$

$\Leftarrow \lim_{ص \to 7} ق^2(ص) = (8)^2 = 64$

ملاحظة: عند فرض $ص = أس + ب$ (اقتران خطي)

+ إذا فرضنا $2س - 1 = ص$ وكانت $س \to 3$ فإن $ص \to 5$

$س \to 3^+$ فإن $ص \to 5^+$

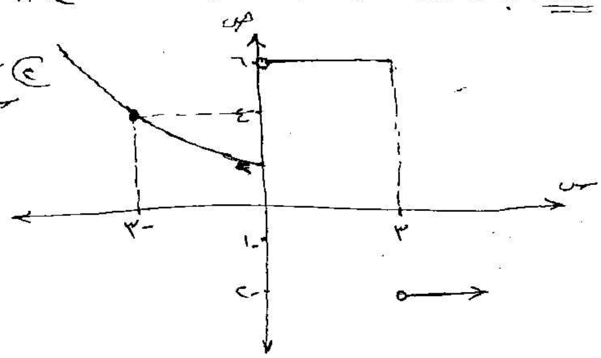
$س \to 3^-$ فإن $ص \to 5^-$

* اذا فرضنا $1 - 2س = ص$ وكانت $س \to 3$ فإن $ص \to -5$

$س \to 3^+$ فإن $ص \to -5^-$

$س \to 3^-$ فإن $ص \to -5^+$

مثال: بالاعتماد على الرسم التالي:



١) جد قيم م حيث أن $\lim_{س \to م}$ ق(س) غ م

٢) $\lim_{س \to -٣}$ (س² ق(س) + √(س²+٧))

٣) جد قيم م حيث أن $\lim_{س \to م}$ ق(س) = -٢

٤) جد $\lim_{س \to -٤}$ (٦ ق(س+٤)) + س²

٥) $\lim_{س \to ٢^+}$ ٤ ق(٥ - س)

الحل: ١) قيم م التي تجعل النهاية غير موجودة هي {٠، ٣}

٢) $\lim_{س \to -٣}$ (س² ق(س) + √(س²+٧)) = ٩(٤) + √(٩+٧) = ٣٦ + ٤ = ٤٠

٣) قيم م هي الفترة م ∈ (٣، ∞)

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

٤) نفرض س + ٤ = ص

عندما س ← -٤⁻ فإن ص ← ٠⁻

= $\lim_{ص \to ٠^-}$ ٦ ق(ص) + $\lim_{س \to -٤}$ س² ⟸ ٦ $\lim_{ص \to ٠^-}$ ق(ص) + ١٦

= ٦ ق(٠) + ١٦ = ٦(٢) + ١٦ = ٢٨

٥) نفرض ٥ - س = ص

عندما س ← ٢⁺ فإن ص ← ٣⁻

∴ $\lim_{س \to ٢^+}$ ٤ ق(٥ - س) = ٤ $\lim_{ص \to ٣^-}$ ق(ص) = ٤(٦) = ٢٤

سؤال: إذا كانت $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ م(س) = ٥ ، $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ هـ(س) = -٣ جد كلاً مما يلي:

١) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \left(٣ م(س) - ٢ هـ(س)\right)$ ــــــــ الإجابة (٢١)

٢) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \sqrt[٣]{٥ هـ(س) + ٦س}$ ــــــــ الإجابة (-٣)

٣) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ - ١}{هـ(س)} + \sqrt{٢ م(س) + س^٢ + ٢}$ ــــــــ الإجابة (٧)

٤) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \left(هـ^٣(س) - ٢ م^٢(س)\right)$ ــــــــ الإجابة (-٧٧)

مثال: إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(٣ م(س) + ٢س^٢\right) = ٢٠$ جد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(٣ م^٢(س) - ٥س\right)$

الحل: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(٣ م(س) + ٢س^٢\right) = ٣ \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} م(س) + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} ٢س^٢ = ٢٠$

$\Leftarrow ٣ \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} م(س) + ٢(٢)^٢ = ٢٠ \Leftarrow ٣ \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} م(س) + ٨ = ٢٠$

$\Leftarrow ٣ \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} م(س) = ١٢ \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} م(س) = ٤$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(٣ م^٢(س) - ٥س\right) = ٣ \left(\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} م(س)\right)^٢ - (٥)(٢)$

$= ٣(٤)^٢ - ١٠ = ٤٨ - ١٠ = ٣٨$

مثال: اذا كانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\frac{١}{٣} م(س) - ٤\right) = ١$ جد $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نها}} \left(م(\sqrt{س}) + ٢س - ١\right)$

الحل: نفرض ص = $\sqrt{س}$ عندما س ← ٩ فإن ص ← ٣

$\underset{ص \leftarrow ٣}{\text{نها}} م(ص) + \underset{س \leftarrow ٩}{\text{نها}} ٢س - ١$

$= ١٥ + ٢(٩) - ١$

$= ١٥ + ١٧ = ٣٢$

لاحظ: $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{١}{٣} م(س) - ٤ = ١$

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{١}{٣} م(س) = ٥ \Leftarrow \frac{١}{٣} \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} م(س) = ٥$

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} م(س) = ١٥$

سؤال ٢: ١) إذا علمت أن $\lim\limits_{س \to -١} \left(٤س\, م(س) + ٣ \right) = ١$ فجد $\lim\limits_{س \to -١} \left(م^{٢}(س) + \frac{٧}{م(س)} \right)$ --- $\left(\frac{٢٥}{٢}\right)$

٢) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} م(٢س - ٤) = ٥$ فجد $\lim\limits_{س \to -٢} \left(م^{٢}(س) + \frac{١٠}{م(س)} \right)$ ـــــ الإجابة (٢٧)

مثال: إذا كان $م(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٦ & ، س < ٣ \\ ٢س & ، س > ٣ \end{cases}$ جد:

١) $\lim\limits_{س \to ٣} م(س + ٢)$

٢) $\lim\limits_{س \to ٤^{+}} م(٧ - س)$

٣) $\lim\limits_{س \to -١} م(٤)$

الحل: ١) نفرض $ص = س + ٢$

عندما $س \to ٣$ فإن $ص \to ٥$

$\lim\limits_{ص \to ٥} م(ص) = ٢(٥) = ١٠$

٢) نفرض $ص = ٧ - س$

عندما $س \to ٤^{+}$ فإن $ص \to ٣^{-}$

$\lim\limits_{ص \to ٣^{-}} م(ص) = (٣)^{٢} + ٦ = ٩ + ٦ = ١٥$

٣) $م(٤) = ٢(٤) = ٨ \Leftarrow \lim\limits_{س \to -١} م(٤) = \lim\limits_{س \to -١} ٨ = ٨$

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} م(س) = ٧$ أوجد $\lim\limits_{س \to ١} م(٣س - ١) + \left[\frac{س}{٣} + ٥ \right]$

الحل: نفرض $٣س - ١ = ص$

عندما $س \to ١$ فإن $ص \to ٢$

$\Leftarrow \lim\limits_{ص \to ٢} م(ص) + \lim\limits_{س \to ١} \left[\frac{س}{٣} + ٥ \right] = ٧ + ٥ = ١٢$

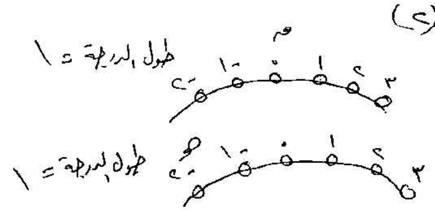
مثال: اذا كانت م(س) = [٤+س] ، ه(س) = [٥-س] جد:

١) $\lim\limits_{س\to 2}$ م(س) ٢) $\lim\limits_{س\to 2}$ ه(س) ٣) $\lim\limits_{س\to 2}$ (م(س) + ه(س))

الحل: نعيد تعريف كل من م ، ه حول العدد (٢)

م(س) = { ٥ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٦ ، ٢ < س < ٣ ؛ ٦ ، س = ٢ }

عوضنا في بداية الفترة لأن معامل س موجب



ه(س) = { ٣ ، ١ < س ≤ ٢ ؛ ٣ ، ٢ < س ≤ ٣ ؛ ٣ ، س = ٢ } ⇐ عوضنا في نهاية الفترة لأن معامل س سالب

م(س) + ه(س) = { ٨ ، ١ < س < ٢ ؛ ٨ ، ٢ < س < ٣ ؛ ٩ ، س = ٢ }

١) $\lim\limits_{س\to 2}$ م(س) = غ م بعد بحث النهاية من اليمين واليسار

٢) $\lim\limits_{س\to 2}$ ه(س) = غ م " " " " "

٣) $\lim\limits_{س\to 2}$ (م(س) + ه(س)) = ٨ بعد بحث النهاية من اليمين واليسار

مثال: م(س) = $س^2$ ، ه(س) = $\frac{2}{س^2}$ ، جد $\lim\limits_{س\to 0}$ (م × ه)

الحل: $\lim\limits_{س\to 0}$ (م × ه) = $\lim\limits_{س\to 0} \cancel{س^2} \times \frac{2}{\cancel{س^2}} = 2$

مثال: جد $\lim\limits_{س\to 1}$ م(س) فيما يلي: ١) م(س) = $\frac{\sqrt{س^2-1}}{\sqrt{س-1}}$ ٢) م(س) = $\sqrt{\frac{س^2-1}{س-1}}$

الحل: ١) نبحث اشارة س - ١ ⇐ س - ١ = ٠ ⇐ س = ١   - - - - ١ + + + +

∴ $\lim\limits_{س\to 1}$ م(س) غير موجودة

٢) م(س) = $\sqrt{\frac{س^2-1}{س-1}} = \sqrt{\frac{(س-1)(س+1)}{س-1}} = \sqrt{س+1}$ + + + ١ + + + +

∴ $\lim\limits_{س\to 1} \sqrt{س+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

مثال: $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}}{\sqrt{\text{س} - ٣}}$ جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{ه}(\text{س})$

الحل: يجب أن يكون الاقتران معرف على يمين العدد (٣)

نبحث إشارة $\text{س}^{٢} - ٩ = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pm ٣$

$$\underset{-٣}{+++ \,|}\, - - - - \,\underset{٣}{|}\, +++$$

نبحث إشارة $\text{س} - ٣ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٣$

$$- - - \,\underset{٣}{|}\, ++$$

$\sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}$ ، $\sqrt{\text{س} - ٣}$ معرفة على يمين العدد (٣)

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{ه}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}}{\sqrt{\text{س} - ٣}} = \lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \frac{\sqrt{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}}{\sqrt{\text{س} - ٣}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \frac{\cancel{\sqrt{\text{س} - ٣}}\,\sqrt{\text{س} + ٣}}{\cancel{\sqrt{\text{س} - ٣}}} = \sqrt{٣ + ٣} = \sqrt{٦}$$

مثال: $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س} - ٤} + ٣}{\text{س}^{٢} + ٢}$ جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \text{ه}(\text{س})$

الحل: نبحث اشارة $\text{س} - ٤ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٤$

$$- - - \,\underset{٤}{|}\, +++$$

$\text{ه}(\text{س})$ معرف على يمين العدد (٤) وغير معرف على يساره

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٤} \text{ه}(\text{س})$ غير موجودة

مثال: اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س}^{٢}} = ٤$ جد: $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س}}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س}}$ (نضرب البسط والمقام في س)

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}\,\text{ه}(\text{س})}{\text{س}^{٢}} = ٤ \times ٠ = \text{صفر}$$

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س}^{٢} - ٩} = ٥$ جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س} - ٣}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س} - ٣}$ (نضرب البسط والمقام في س+٣)

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س} - ٣} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ٣} = \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{(\text{س} + ٣)\,\text{ه}(\text{س})}{\text{س}^{٢} - ٩} = (٣ + ٣)(٥)$$

$$= ٦ \times ٥ = ٣٠$$

مثال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س-٢] \text{ ، } س \geq أ \\ ٦ - [س] \text{ ، } س < أ \end{cases}$ جد قيمة أ التي تجعل $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة

الحل: $\underset{س \to أ^{+}}{\text{نها}}\ ق(س) = \underset{س \to أ^{-}}{\text{نها}}\ ق(س)$

$\underset{س \to أ^{+}}{\text{نها}}\ [س-٢] = \underset{س \to أ^{-}}{\text{نها}}\ ٦ - [س] \Leftarrow [أ-٢]^{+} = ٦ - [أ]^{-}$

هناك حالتان:

① $أ \in ص$

$[أ]^{+} - ٢ = ٦ - [أ]^{-}$

$أ - ٢ = ٦ - (أ - ١)$

$\Leftarrow أ - ٢ = ٧ - أ$

$\Leftarrow ٢أ = ٩ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{٩}{٢}}$

② $أ \notin ص$

$[أ]^{+} - ٢ = ٦ - [أ]^{-}$

$[أ] - ٢ = ٦ - [أ]$

$٢[أ] = ٨ \Leftarrow [أ] = ٤$

$\Leftarrow ٤ \leq أ < ٥ \Leftarrow أ \in [٤ ، ٥)$

مثال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس + س^{٢} \text{ ، } ٠ \leq س \leq ٢ \\ [س] + ٦ \text{ ، } ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

أوجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة.

الحل: $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}\ أس + س^{٢} = \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}\ [س] + ٦$

$\Leftarrow ٢أ + ٤ = [٢^{+}] + ٦$

$\Leftarrow ٢أ + ٤ = ٢ + ٦$

$\Leftarrow ٢أ = ٤$

$\Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

* نهاية الاقترانات الكسرية :-

يكون الاقتران الكسري على الصورة $\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ وعند ايجاد النهاية نقوم بعملية التعويض المباشر وينتج لدينا أربع حالات :-

① $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ ⇐ نهاية موجودة

مثل : $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 1}{\text{س} + 4} = \frac{9 + 6 - 1}{7} = 2$

② $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ = صفر ⇐ نهاية موجودة

مثل : $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} + 3} = \frac{4 - 4}{5} = \frac{\text{صفر}}{5} = \text{صفر}$

③ $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ ⇐ نهاية غير موجودة (كمية غير معرفة)

مثل : $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^2 + 1}{2\text{س} - 6} = \frac{9 + 1}{6 - 6} = \frac{10}{0}$ ⇐ غير موجودة

④ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ⇐ نحتاج لمعالجة صفر المقام باحدى الطرق التالية :

① الاختصار ② تحليل إلى العوامل ③ توحيد مقامات ④ الضرب بالمرافق
⑤ الاستبدال ⑥ إضافة وطرح

---

① الاختصار :

مثال : $\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س} - 4}{\text{س} - 4} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to 4} \frac{\cancel{\text{س} - 4}}{\cancel{\text{س} - 4}} = \lim_{\text{س} \to 4} 1 = 1$

مثال : $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 - 4}{4 - \text{س}^2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\cancel{\text{س}^2 - 4}}{-\cancel{(\text{س}^2 - 4)}} = \lim_{\text{س} \to 2} -1 = -1$

سؤال : $\lim_{\text{س} \to 5} \frac{\text{س}^3 - 125}{125 - \text{س}^3}$

③ التحليل إلى العوامل: نتبع القاعدة التالية:

(حلل ← اختصر ← عوض)

مثال: جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}+\text{س}-٦}{٢-\text{س}} = \dfrac{٠}{٠} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-٢)}^{-١}(\text{س}+٣)}{\cancel{٢-\text{س}}} = -٥$

مثال: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س}+١)^{٢}-٢٥}{٢-\text{س}} = \dfrac{٠}{٠} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س}+١-٥)(٢\text{س}+١+٥)}{٢-\text{س}}$

فرق بين مربعين

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س}-٤)(٢\text{س}+٦)}{٢-\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢\cancel{(\text{س}-٢)}^{-١}(٢\text{س}+٦)}{\cancel{٢-\text{س}}} = -٢٠$

مثال: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}^{٣}-١} = \dfrac{٠}{٠} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)} = \dfrac{٢}{٣}$

مثال: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+١)^{٣}-٨}{\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٤} = \dfrac{٠}{٠} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+١-٢)\left((\text{س}+١)^{٢}+٢(\text{س}+١)+٤\right)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٤)}$

فرق بين مكعبين

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)}\left((\text{س}+١)^{٢}+٢(\text{س}+١)+٤\right)}{(\text{س}+٤)\cancel{(\text{س}-١)}} = \dfrac{٤+٤+٤}{٥} = \dfrac{١٢}{٥}$

سؤال: أوجد كلاً من النهايات التالية:

أ) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣}+١}{\text{س}^{٢}+\text{س}}$ ———— الإجابة (-٣)

ب) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}^{٣}-٤\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}-٨}$ ———— الإجابة $\left(\dfrac{٢}{٣}\right)$

فرق بين مربعين

ج) $\underset{\text{س}\to \frac{٩}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س}-٥)^{٢}-١٦}{٢\text{س}-٩}$ ———— الإجابة (٨)

مثال ٤: $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س}^٢-٣)^٢-١}{(\text{س}^٣-٧)^٢-١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فرق بين مربعين

$= \text{نها}_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س}^٢-٣+١)(\text{س}^٢-٣-١)}{(\text{س}^٣-٧+١)(\text{س}^٣-٧-١)} = \text{نها}_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س}^٢-٢)(\text{س}^٢-٤)}{(\text{س}^٣-٦)(\text{س}^٣-٨)}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س}^٢-٢)\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}{(\text{س}^٣-٦)\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)} = \dfrac{٢(٤)}{٢(١٢)} = \dfrac{٨}{٢٤} = \dfrac{١}{٣}$

سؤال ٤: أوجد $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(٢\text{س}+١)^٣-١٢٥}{(٢\text{س}^٢-٤)^٢-١٦}$

فرق بين مكعبين ← (البسط)

فرق بين مربعين ← (المقام)

مثال: جد النهايات:

١) $\text{نها}_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}^٢-١)^{١٠}}{(\text{س}^٢-٢\text{س}+١)^٥} = \text{نها}_{\text{س}\to ١} \dfrac{\left((\text{س}-١)(\text{س}+١)\right)^{١٠}}{\left((\text{س}-١)(\text{س}-١)\right)^٥} = \text{نها}_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}-١)^{١٠}(\text{س}+١)^{١٠}}{\left((\text{س}-١)^٢\right)^٥}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}+١)^{١٠}\cancel{(\text{س}-١)^{١٠}}}{\cancel{(\text{س}-١)^{١٠}}} = (١+١)^{١٠} = (٢)^{١٠} = ١٠٢٤$

---

٢) $\text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{(٢\text{س}^٢+\text{س})^٤}{\text{س}^٤} = \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\left(\text{س}(٢\text{س}+١)\right)^٤}{\text{س}^٤} = \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\cancel{\text{س}^٤}(٢\text{س}+١)^٤}{\cancel{\text{س}^٤}}$

$= (١+٠)^٤ = ١$

---

٣) $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \left(\dfrac{\text{س}^٢-٤}{٤\text{س}-٨}\right)^٥ = \text{نها}_{\text{س}\to ٢} \left(\dfrac{(\text{س}+٢)\cancel{(\text{س}-٢)}}{٤\cancel{(\text{س}-٢)}}\right)^٥ = \left(\dfrac{٢+٢}{٤}\right)^٥ = \left(\dfrac{٤}{٤}\right)^٥$

$= ١$

④ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{٣\text{س} - ٩}{٢\text{س}^٢ - ١٨}}$ نبحث إشارة كل من $\sqrt{٣\text{س} - ٩}$ ، $\sqrt{٢\text{س}^٢ - ١٨}$

إشارة $\sqrt{٣\text{س} - ٩} \Leftarrow \text{س} = ٣$ $- - - - - \,|_{٣}\, + + + +$

إشارة $\sqrt{٢\text{س}^٢ - ١٨} \Leftarrow \text{س} = \pm ٣$ $+ + + \,|_{-٣}\, - - - \,|_{٣}\, + + + +$

إشارة $\sqrt{\dfrac{٣\text{س} - ٩}{٢\text{س}^٢ - ١٨}}$ $- - - - \,|_{-٣}\, + + + \,|_{٣}\, + + + + +$ ما داخل الجذر معرف على يمين ويسار العدد (٣)

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{٣\text{س} - ٩}{٢\text{س}^٢ - ١٨}} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{٣(\text{س} - ٣)}{٢(\text{س}^٢ - ٩)}} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{٣\cancel{(\text{س} - ٣)}}{٢\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٣)}}$

$= \sqrt{\dfrac{٣}{٢(٦)}} = \sqrt{\dfrac{١}{٤}} = \dfrac{١}{٢}$

---

⑤ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}$ نستخدم القسمة الطويلة أو التركيبية

بالقسمة على (س - ٢) عامل من عوامل $\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦$

$\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٣$

$\text{س} - ٢ \,\big)\, \text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦$

$\mp \text{س}^٣ \pm ٢\text{س}^٢$

$٤\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦$

$-٤\text{س}^٢ \pm ٨\text{س}$

$٣\text{س} - ٦$

$-٣\text{س} \pm ٦$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٣)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} - ١)}$

$= \dfrac{(٤ + ٨ + ٣)}{٢ - ١} = ١٥$

أو باستخدام القسمة التركيبية

	س³	س²	س	ثابت
	١	٢	-٥	-٦
$\boxed{٢}$		٢	٨	٦
	١	٤	٣	٠

$\Longrightarrow \text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٣$

مثال ٤: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}+١ ، & \text{س} \geq ٣ \\ \text{س}^٢-٢ ، & \text{س} < ٣ \end{cases}$ $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦}{\text{س}^٢-٩}$

جد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right)$

الحل: $\left[\begin{array}{l} \underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ٢(٣)+١ = ٧ \\ \underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = (٣)^٢-٢ = ٧ \end{array}\right. \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ٧$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦}{\text{س}^٢-٩} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}-٢)}{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}+٣)}$

$= \frac{٣-٢}{٣+٣} = \frac{١}{٦}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}(\text{س})+\text{هـ}(\text{س})\right) = ٧ + \frac{١}{٦} = \frac{٤٣}{٦}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{٣}{(\text{س}-١)^٢}$ جد: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (\text{ق} \times \text{هـ})$

الحل: في حالة الضرب لا يمكن توزيع النهايـة

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س})$ غير موجودة لكنه $\Leftarrow \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (\text{ق} \times \text{هـ}) = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢-٢\text{س}+١)\left(\frac{٣}{(\text{س}-١)^٢}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \cancel{(\text{س}-١)^٢} \times \frac{٣}{\cancel{(\text{س}-١)^٢}} = ٣$

سؤال: جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^٣-٣\text{س}-١٠}{\text{س}^٣-٨}$ $\Leftarrow$ نقسم البسط على المقام $(\text{س}-٢)$ عامل $\leftarrow$ الإجابة $\left(\frac{٧}{٤}\right)$

مثال: جد كلاً من النهايات التالية:

① $\lim\limits_{س \to 0^-} \frac{س}{س - |س|}$ ② $\lim\limits_{س \to 1^+} \frac{س^2 - [س]}{س^2 - |س|}$ ③ $\lim\limits_{س \to 2^+} \frac{[س-2]}{|س-2|}$

④ $\lim\limits_{س \to 0^+} \frac{[س]}{س}$ ⑤ $\lim\limits_{س \to 2^+} \frac{س^2 - 3س + [س]}{س - 2}$

الحل: ① $\lim\limits_{س \to 0^-} \frac{س}{س - |س|}$ لأنه عندما س ← 0⁻ فإن $|س| = -س$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 0^-} \frac{س}{س - |س|} = \lim\limits_{س \to 0^-} \frac{س}{س - (-س)} = \lim\limits_{س \to 0^-} \frac{\cancel{س}}{2\cancel{س}} = \frac{1}{2}$

② $\lim\limits_{س \to 1^+} \frac{س^2 - [س]}{س^2 - |س|} = \lim\limits_{س \to 1^+} \frac{س^2 - 1}{س^2 - س} = \lim\limits_{س \to 1^+} \frac{\cancel{(س-1)}(س+1)}{س\cancel{(س-1)}} = 2$

③ $\lim\limits_{س \to 2^+} \frac{[س-2]}{|س-2|} = \lim\limits_{س \to 2^+} \frac{[2^+] - 2}{س - 2} = \lim\limits_{س \to 2^+} \frac{\text{صفر}}{س - 2} = \text{صفر}$

④ $\lim\limits_{س \to 0^+} \frac{[س]}{س} = \lim\limits_{س \to 0^+} \frac{0}{س} = \text{صفر}$

⑤ $\lim\limits_{س \to 2^+} \frac{س^2 - 3س + [س]}{س - 2} = \lim\limits_{س \to 2^+} \frac{س^2 - 3س + 2}{س - 2} = \lim\limits_{س \to 2^+} \frac{\cancel{(س-2)}(س-1)}{\cancel{س-2}}$

$= 1$

مثال: $\lim\limits_{س \to 0} \frac{4س + \sqrt{س^2}}{س} = \lim\limits_{س \to 0} \frac{4س + |س|}{س}$ ملاحظة: $\sqrt{س^2} = |س|$

توزيع $|س| \Leftarrow س = 0$

$\Leftarrow \begin{cases} \lim\limits_{س \to 0^-} \frac{4س - س}{س} = 3 \\ \lim\limits_{س \to 0^+} \frac{4س + س}{س} = 5 \end{cases} \Leftarrow \lim\limits_{س \to 0} \frac{4س + |س|}{س}$ غ م

مثال: جد $\lim\limits_{س\to 1} \dfrac{\sqrt{س^2 - 2س + 1}}{|2 - 2س|} = \lim\limits_{س\to 1} \dfrac{\sqrt{(س-1)(س-1)}}{|2-2س|}$

$= \lim\limits_{س\to 1} \dfrac{\sqrt{(س-1)^2}}{|2(1-س)|} = \lim\limits_{س\to 1} \dfrac{\cancel{|س-1|}}{2\cancel{|1-س|}} = \dfrac{1}{2}$ (لأن $|1| > 0$)

مثال (1): جد $\lim\limits_{س\to 2^+} \dfrac{|س-2|}{\sqrt{س-2}}$

الحل: نعيد تعريف $|س-2|$

$2-س \quad - - - \; 2 \; + + + \quad س-2$

$\sqrt{س-2}$ معرف على يمين العدد (2)

$\Leftarrow \lim\limits_{س\to 2^+} \dfrac{|س-2|}{\sqrt{س-2}} = \lim\limits_{س\to 2^+} \dfrac{س-2}{\sqrt{س-2}} = \lim\limits_{س\to 2^+} \dfrac{\cancel{\sqrt{س-2}} \times \sqrt{س-2}}{\cancel{\sqrt{س-2}}}$

$= \lim\limits_{س\to 2^+} \sqrt{2-2} =$ صفر

---

(2) $\lim\limits_{س\to 3} \dfrac{س^2 \times |س-1| - 18}{2س^2 - 3س - 9}$

الحل: نعيد تعريف $|س-1|$ $\Leftarrow$

$1-س \quad - - - \; 1 \; + + + \quad س-1$

$= \lim\limits_{س\to 3} \dfrac{س^2(س-1) - 18}{2س^2 - 3س - 9} = \lim\limits_{س\to 3} \dfrac{س^3 - س^2 - 18}{(س-3)(2س+3)}$ $\Leftarrow$ نقسم البسط على المقام (س-3) عامل من عوامل البسط

الحل $\left(\dfrac{7}{3}\right)$

سؤال: جد $\lim\limits_{س\to 1} \dfrac{س^3 - 3س^2 - 6س + 8}{س^3 - س}$ ------ $\boxed{\text{الإجابة } \left(\dfrac{-9}{2}\right)}$

عبارة تربيعية

فرق بين مكعبين

مثال: $\lim\limits_{س\to 2} \dfrac{س^6 - 9س^3 + 8}{3س^3 - 12س} = \lim\limits_{س\to 2} \dfrac{(س^3)^2 - 9(س^3) + 8}{3س(س^2 - 4)} = \lim\limits_{س\to 2} \dfrac{(س^3 - 8)(س^3 - 1)}{3س(س-2)(س+2)}$

$= \lim\limits_{س\to 2} \dfrac{\cancel{(س-2)}(س^2 + 2س + 4)(س^3 - 1)}{3س\cancel{(س-2)}(س+2)} = \dfrac{(4+4+4)(7)}{6(4)} = \dfrac{7}{2}$

(وزارة)
مثال: إذا كانت $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}+\text{أ}|-٢}{\text{س}-١} = -١$ ، جد أ

الحل: عند التعويض في البسط والمقام ينتج $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\Leftarrow |١+\text{أ}|-٢ = ٠ \Leftarrow |١+\text{أ}| = ٢$

$١+\text{أ} = ٢$ أو $١+\text{أ} = -٢$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = ١}$ $\boxed{\text{أ} = -٣}$

مرفوضة لأن قيمة النهاية (١)

عندما $\boxed{\text{أ}=١}$ فإن: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}+١|-٢}{\text{س}-١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}+١-٢}{\text{س}-١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-١}{\text{س}-١} = ١$

عندما $\boxed{\text{أ}=-٣}$ فإن: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}-٣|-٢}{\text{س}-١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\overbrace{(٣-\text{س})}^{\text{المنطقة السالبة}}-٢}{\text{س}-١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١-\text{س}}{\text{س}-١} = -١$ ✓

$\therefore \boxed{\text{أ} = -٣}$

مثال: إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}-٣}{|\text{س}-٣|} & ، \text{س} < ٣ \\ \text{أس}^٢+١١ & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$ جد أ إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

الحل: بما أن النهاية موجودة فإن $\underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$\underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-٣}{|\text{س}-٣|} = \underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{س}-٣}}{\cancel{٣-\text{س}}} = -١$

$\underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نهـا}}\ ٩\text{أ} + ١١$

$\Leftarrow ٩\text{أ} + ١١ = -١ \Leftarrow ٩\text{أ} = -١٢$

$\Leftarrow \text{أ} = \dfrac{-١٢}{٩} = \dfrac{-٤}{٣}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}+٢] & ، \text{س} \le ٠ \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ جد $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س})$

الحل: عند اعادة تعريف كل من $[\text{س}+٢]$ ، $|\text{س}|$

$\Leftarrow [\text{س}+٢] = ١$ عندما $-١ \le \text{س} < ٠$

$\dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} = \dfrac{\text{س}}{\text{س}} = ١$ عندما $\text{س} > ٠$

$\Leftarrow \begin{cases} \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \text{ق}(\text{س}) = ١ \\ \lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \text{ق}(\text{س}) = ١ \end{cases} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س}) = ١$

مثال: اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^٢-\text{أ}^٢}{\text{س}-\text{أ}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} (|\text{س}|+٨)$ جد أ

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-\text{أ})}(\text{س}+\text{أ})}{\cancel{\text{س}-\text{أ}}} = ٢ + ٨$

$\Leftarrow \text{أ}+\text{أ} = ٢+٨ \Leftarrow ٢\text{أ} = ١٠$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٥}$

مثال: اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}^٣-١)^{٢\text{ن}}}{(\text{س}^٢-٢\text{س}+١)^{\text{ن}}} = ٨١$ جد قيمة ن

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\left((\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)\right)^{٢\text{ن}}}{\left((\text{س}-١)(\text{س}-١)\right)^{\text{ن}}} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)^{٢\text{ن}}}(\text{س}^٢+\text{س}+١)^{٢\text{ن}}}{\cancel{(\text{س}-١)^{٢\text{ن}}}}$

$= (١+١+١)^{٢\text{ن}} = ٣^{٢\text{ن}}$

$\Leftarrow ٣^{٢\text{ن}} = ٨١ \Leftarrow ٣^{٢\text{ن}} = ٣^٤$

$\Leftarrow ٢\text{ن} = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٢}$

مثال: جد النهايات التالية:

① $\lim_{س \to ٠} \frac{(١٦)^{س} - ٤^{س}}{١ - ٤^{س}} = \lim_{س \to ٠} \frac{(٤^{٢س}) - ٤^{س}}{١ - ٤^{س}} = \lim_{س \to ٠} \frac{\overset{\text{عامل مشترك}}{٤^{س}} \, \overset{-١}{\cancel{(٤^{س} - ١)}}}{\cancel{١ - ٤^{س}}}$

$= -١ \times ٤^{٠} = -١ \times ١ = -١$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{س+١} - ٣}{٩^{س} - ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{\overset{\text{عامل مشترك}}{٣}(٣^{س} - ١)}{\underset{\text{فرق بين مربعين}}{٣^{٢س} - ١}} = \lim_{س \to ٠} \frac{٣\cancel{(٣^{س} - ١)}}{(٣^{س} + ١)\cancel{(٣^{س} - ١)}}$

$= \frac{٣}{٣^{٠} + ١} = \frac{٣}{٢}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{٤^{س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦}{٤^{س} - ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{\overset{\text{عبارة تربيعية}}{٢^{٢س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦}}{\underset{\text{فرق بين مربعين}}{٢^{٢س} - ١}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٢^{س} - ١٦)\cancel{(٢^{س} - ١)}}{(٢^{س} + ١)\cancel{(٢^{س} - ١)}} = \frac{٢^{٠} - ١٦}{٢^{٠} + ١} = \frac{١ - ١٦}{١ + ١} = \frac{-١٥}{٢}$

④ $\lim_{س \to ١} \frac{٩^{س} - ٤ \times ٣^{س+١} + ٢٧}{٣^{س} - ٣} = \lim_{س \to ١} \frac{\overset{\text{عبارة تربيعية}}{٣^{٢س} - ٤ \times ٣^{س+١} + ٢٧}}{٣^{س} - ٣}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(٣^{س} - ٩)\cancel{(٣^{س} - ٣)}}{\cancel{٣^{س} - ٣}} = ٣^{١} - ٩ = -٦$

* توحيد المقامات: اذا كان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ واحتوى البسط أو المقام أو كلاهما على كسر.

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{\frac{1}{س} - \frac{1}{3}}{س - 3} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{س \to 3} \dfrac{\frac{3 - س}{3س}}{س - 3} = \lim\limits_{س \to 3} \dfrac{\cancel{3 - س}}{3س} \times \dfrac{1}{\cancel{س - 3}}$

$= \lim\limits_{س \to 3} \dfrac{-1}{3س} = \dfrac{-1}{9}$

② $\lim\limits_{س \to 4} \dfrac{\frac{3}{س + 2} - \frac{2}{س}}{س - 4} = \lim\limits_{س \to 4} \dfrac{\frac{3س - 2(س + 2)}{س(س + 2)}}{س - 4} = \lim\limits_{س \to 4} \dfrac{3س - 2س - 4}{(س - 4)(س^2 + 2س)}$

$= \lim\limits_{س \to 4} \dfrac{\cancel{س - 4}}{\cancel{(س - 4)}(س^2 + 2س)} = \dfrac{1}{16 + 8} = \dfrac{1}{24}$

③ $\lim\limits_{س \to 1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2س}\right)\left(\frac{1}{س^3 - 1}\right) = \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{2س - 2}{4س} \times \dfrac{1}{(س - 1)(س^2 + س + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{2\cancel{(س - 1)}}{4س} \times \dfrac{1}{\cancel{(س - 1)}(س^2 + س + 1)} = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

④ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{1}{5 + س} - \frac{1}{5 - س}\right) = \lim\limits_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\dfrac{5 - س - (5 + س)}{(5 + س)(5 - س)}\right)$

$= \lim\limits_{س \to 0} \frac{1}{\cancel{س}}\left(\dfrac{-2\cancel{س}}{(5 + س)(5 - س)}\right) = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{-2}{(5 + س)(5 - س)} = \dfrac{-2}{25}$

⑤ $\lim\limits_{س \to 2} \left(\frac{2}{س} - 1\right)\left(\frac{3}{س^2 - 4}\right) = \lim\limits_{س \to 2} \left(\dfrac{\cancel{2 - س}}{س}\right)\left(\dfrac{3}{\cancel{(س - 2)}(س + 2)}\right)$

$= \lim\limits_{س \to 2} \dfrac{-3}{س(س + 2)} = \dfrac{-3}{2(4)} = \dfrac{-3}{8}$

سؤال: جد كلاً من النهايات التالية:

أ) $\lim\limits_{س \to ١} \left(\frac{١}{س+٣} - \frac{٢}{٣س+٥}\right)\left(\frac{١}{س^٢+س-٢}\right)$ ———— $\boxed{\text{الاجابة } \frac{١}{٩٦}}$

ب) $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٨س^٣-١}{س-\frac{١}{٢}}$ ———— $\boxed{\text{الاجابة } \frac{٢}{٣}}$

جـ) $\lim\limits_{س \to ١} \sqrt{\frac{س^٢-١}{س-١}}$ ، $س \neq ١$ ———— $\boxed{\text{الاجابة } \sqrt{٢}}$

مثال: أوجد كلاً من النهايات التالية:

١) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢-١}}{\sqrt{س-١}}$ ، $س \neq ١$

الحل: غير موجودة لأن الجذر غير معرف من اليسار

---

٢) $\lim\limits_{س \to ١^+} \frac{\sqrt{س^٢-١}}{\sqrt{س-١}}$ ، $س \neq ١$

الحل: الجذر معرف على يمين العدد (١) ⇐ النهاية موجودة

$$\Leftarrow \lim_{س \to ١^+} \sqrt{\frac{س^٢-١}{س-١}} = \lim_{س \to ١^+} \sqrt{\frac{(س-١)(س+١)}{\cancel{س-١}}} = \lim_{س \to ١^+} \sqrt{س+١} = \sqrt{٢}$$

---

٣) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س-٣}{\sqrt{٣-س}}$ ، $س \neq ٣$

الحل: غير موجودة لأن الجذر غير معرف من اليمين

---

٤) $\lim\limits_{س \to -١} \sqrt{\frac{س^٢-١}{س-١}}$ ، $س \neq ١$

اشارة $\sqrt{س^٢-١}$: + + + (-١) - - - - (١) + + +

اشارة $\sqrt{س-١}$: - - - - - - - - (١) + + +

اشارة $\sqrt{\frac{س^٢-١}{س-١}}$: - - - (-١) + + + + (١) + + +

الحل: النهاية غير موجودة لأنه الجذر غير معرف على يسار العدد (-١)

---

٥) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢^{س+٢}-١٦}{٤^س-١٦} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢^س \times ٢^٢ - ٢^٤}{٢^{٢س}-٢^٤} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢^٢\cancel{(٢^س-٢^٢)}}{\cancel{(٢^س-٢^٢)}(٢^س+٢^٢)}$

بالتعويض $= \frac{٢^٢}{٢^٢+٢^٢} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

مثال: أوجد كلاً من النهايات التالية:

① $\lim_{س\to 2^-} \dfrac{\left|\dfrac{3}{س+5}\right| - \dfrac{3}{7}}{|س-2|}$

الحل: $|س+5| = س+5$ عندما $س \to 2^-$

$|س-2| = 2-س$ عندما $س \to 2^-$

$$= \lim_{س\to 2^-} \frac{\frac{3}{س+5} - \frac{3}{7}}{2-س} = \lim_{س\to 2^-} \frac{21-3س-15}{7س+35} \times \frac{1}{2-س}$$

$$= \lim_{س\to 2^-} \frac{6-3س}{7س+35} \times \frac{1}{2-س} = \lim_{س\to 2^-} \frac{3\cancel{(2-س)}}{7س+35} \times \frac{1}{\cancel{2-س}} = \frac{3}{49}$$

② $\lim_{س\to 2} \left(\dfrac{س^2+12}{س^2-4} - \dfrac{س+2}{س-2} \right)$ توحيد المقامات

$$= \lim_{س\to 2} \frac{س^2+12}{س^2-4} - \frac{(س+2)(س+2)}{(س-2)(س+2)}$$

$$= \lim_{س\to 2} \frac{س^2+12}{(س+2)(س-2)} - \frac{(س^2+4س+4)}{(س+2)(س-2)} = \lim_{س\to 2} \frac{\cancel{س^2}+12-\cancel{س^2}-4س-4}{(س-2)(س+2)}$$

$$= \lim_{س\to 2} \frac{8-4س}{(س+2)(س-2)} = \lim_{س\to 2} \frac{4\overset{-1}{\cancel{(2-س)}}}{(س+2)\cancel{(س-2)}} = \frac{-4}{4} = -1$$

سؤال: جد $\lim_{س\to 3} \dfrac{1}{2س^2-3س-9} \times \left(\dfrac{1}{س+2} - \dfrac{4}{3س+11} \right)$ ...... $\boxed{\text{الإجابة } \frac{-1}{900}}$

* جد ما يلي:

① $\lim_{س\to 3} \sqrt{9س-س^3} = \sqrt{27-27} = \sqrt{0}$ نبحث المجال

$9س-س^3 = 0 \Leftarrow س(9-س^2) = 0 \Leftarrow س(3-س)(3+س) = 0$

$+ + \,|\, - - \,|\, + + \,|\, - - -$ عند -3 ، 0 ، 3

$\lim_{س\to 3} \sqrt{9س-س^3}$ غير موجودة لأنه الجذر غير معرف على يمين العدد (3)

② $\lim_{س\to 4} \sqrt[3]{5-2س^2} = \sqrt[3]{-27} = -3$ (لأنه دليل الجذر فردي لامانع من وجود السالب)

③ $\lim_{س\to 3} \sqrt[3]{س^2-1} = \sqrt[3]{9-1} = \sqrt[3]{8} = 2$

* **الضرب بالمرافق :**

نستخدمها عندما يكون ناتج التعويض صفر/صفر بالاضافة لوجود الجذر التربيعي ويكون المقدار المرافق هو عكس الاشارة الفاصلة بين الحدين .

مثال : جد $\text{نها}_{س \leftarrow ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$ (نستخدم الاستبدال أو طريقة الضرب بالمرافق)

---

* الاستبدال : نفرض $\sqrt{س} = ص \Leftarrow س = ص^٢$

عندما $س \leftarrow ٤$ فإن $ص \leftarrow ٢$

$$= \text{نها}_{ص \leftarrow ٢} \frac{ص^٢ - ٤}{ص - ٢} = \text{نها}_{ص \leftarrow ٢} \frac{\cancel{(ص - ٢)}(ص + ٢)}{\cancel{ص - ٢}} = ٢ + ٢ = ٤$$

---

* الضرب بالمرافق : $\text{نها}_{س \leftarrow ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢} = \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \frac{\cancel{(س - ٤)}(\sqrt{س} + ٢)}{\cancel{س - ٤}}$

$$= \sqrt{٤} + ٢ = ٤$$

سؤال : جد :

① $\text{نها}_{س \leftarrow ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ ——— $\frac{١}{٦}$

② $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{س^٣ - ١}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}}$ ——— -٦

③ $\text{نها}_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٢ - ٣س - ١٠}{\sqrt{٣س + ١} - ٤}$ ——— $\frac{٥٦}{٣}$

④ $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{س^٢ + ٣س} - ٢}{س^٣ - ١}$ ——— $\frac{٥}{١٢}$

مثال : اذا كانت $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{م س - \sqrt{س + ٣}}{س^٢ - س} = ب$ ، حيث م ، ب $\in$ ح فما قيمة م ، ب

الحل : بما أن النهاية موجودة ونهاية المقام = ٠ فإن نهاية البسط = ٠

$\text{نها}_{س \leftarrow ١} م س - \sqrt{س + ٣} = \text{صفر} \Leftarrow م - \sqrt{١ + ٣} = ٠ \Leftarrow م - ٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{م = ٢}$

$$\Leftarrow \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{٢س - \sqrt{س + ٣}}{س(س - ١)} \times \frac{٢س + \sqrt{س + ٣}}{٢س + \sqrt{س + ٣}} = \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{٤س^٢ - س - ٣}{س(س - ١)(٢س + \sqrt{س + ٣})}$$

$$= \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{(٤س + ٣)\cancel{(س - ١)}}{س\cancel{(س - ١)}(٢س + \sqrt{س + ٣})} = \frac{٤ + ٣}{٢ + ٢} = \frac{٧}{٤} \quad \therefore \boxed{ب = \frac{٧}{٤}}$$

مثال ١: جد $\displaystyle \lim_{س\to 0} \frac{\sqrt{1+س^2}-\sqrt{1-س^2}}{س^2} = \lim_{س\to 0} \frac{\sqrt{1+س^2}-\sqrt{1-س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2}}{\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2}}$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{(1+س^2)-(1-س^2)}{س^2\left(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2}\right)} = \lim_{س\to 0} \frac{2\cancel{س^2}}{\cancel{س^2}\left(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

---

٢) $\displaystyle \lim_{س\to 3} \left(س+\frac{1}{س-3}\right)\left(\sqrt{س+1}-2\right) = \lim_{س\to 3} \left(\frac{س^2-3س+1}{س-3}\right)\left(\sqrt{س+1}-2\right) \times \frac{\sqrt{س+1}+2}{\sqrt{س+1}+2}$

$$= \lim_{س\to 3} \frac{(س^2-3س+1)(س+1-4)}{(س-3)(\sqrt{س+1}+2)} = \lim_{س\to 3} \frac{(س^2-3س+1)\cancel{(س-3)}}{(\sqrt{س+1}+2)\cancel{(س-3)}} = \frac{1}{4}$$

---

٣) $\displaystyle \lim_{س\to 4} \left(\frac{1}{\sqrt{س^2-3س}}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{س^2-16}\right) = \lim_{س\to 4} \frac{2-\sqrt{س^2-3س}}{\cancel{2}\sqrt{س^2-3س}} \times \frac{\cancel{2}}{س^2-16}$

$$= \lim_{س\to 4} \frac{2-\sqrt{س^2-3س}}{\sqrt{س^2-3س}} \times \frac{1}{س^2-16} \times \frac{2+\sqrt{س^2-3س}}{2+\sqrt{س^2-3س}}$$

$$= \lim_{س\to 4} \frac{4-(س^2-3س)}{(س-4)(س+4)\left(\sqrt{س^2-3س}\right)\left(2+\sqrt{س^2-3س}\right)} = \lim_{س\to 4} \frac{-س^2+3س+4}{(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)}$$

$$= \lim_{س\to 4} \frac{-(س^2-3س-4)}{(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)} = \lim_{س\to 4} \frac{-\cancel{(س-4)}(س+1)}{\cancel{(س-4)}(س+4)\left(\sqrt{س^2-3س}\right)\left(2+\sqrt{س^2-3س}\right)}$$

$$= \frac{-(4+1)}{(8)(2)(4)} = \frac{-5}{64}$$

عبارة تربيعية

مثال ١: $\displaystyle \lim_{س\to 1} \frac{س-4\sqrt{س}+3}{س^2-1} = \lim_{س\to 1} \frac{(\sqrt{س}-3)(\sqrt{س}-1)}{(س+1)(س-1)} = \lim_{س\to 1} \frac{(\sqrt{س}-3)\cancel{(\sqrt{س}-1)}}{(س+1)(\sqrt{س}+1)\cancel{(\sqrt{س}-1)}}$

$$= \frac{-2}{(2)(2)} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

سؤال ١: $\displaystyle \lim_{س\to 4} \frac{س-\sqrt{س}-2}{س^2-16}$ ——— $\boxed{\text{الاجابة } \frac{3}{32}}$

٢) $\displaystyle \lim_{س\to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{1}{\sqrt{1+س}}-1\right)$ ——— $\boxed{\text{الاجابة } -\frac{1}{2}}$

مثال: جد ① $\underset{س \to 0^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}}{\sqrt{9+\sqrt{س}}-3} \times \dfrac{\sqrt{9+\sqrt{س}}+3}{\sqrt{9+\sqrt{س}}+3}$ ضرب بالمرافق

$= \underset{س \to 0^+}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\sqrt{س}}\left(\sqrt{9+\sqrt{س}}+3\right)}{\cancel{9}+\cancel{\sqrt{س}}-\cancel{9}} = 6$

---

② $\underset{س \to 0^-}{\text{نها}} س \times \sqrt[3]{1-\dfrac{1}{س^3}} = \underset{س \to 0^-}{\text{نها}} س \times \sqrt[3]{\dfrac{س^3-1}{س^3}} = \underset{س \to 0^-}{\text{نها}} \cancel{س} \times \dfrac{\sqrt[3]{س^3-1}}{\cancel{س}} = -1$

---

③ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} س \times \sqrt{\dfrac{1}{س^2}+1} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} س \times \sqrt{\dfrac{1+س^2}{س^2}} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{1+س^2}}{|س|}$ نبحث النهاية من اليمين واليسار

$\underset{س \to 0^+}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س}\sqrt{1+س^2}}{\cancel{س}} = \underset{س \to 0^+}{\text{نها}} \sqrt{1+س^2} = 1$

$\underset{س \to 0^-}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س}\sqrt{1+س^2}}{-\cancel{س}} = \underset{س \to 0^-}{\text{نها}} -\sqrt{1+س^2} = -1$

$\Leftarrow \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{1+س^2}}{|س|}$ غ م

مثال: ① $\underset{س \to 9}{\text{نها}} \dfrac{س^2-9س}{\sqrt[3]{7س+1}-4}$ نضرب بالمرافق التكعيبي

المرافق التكعيبي للمقدار م − ب هو م² + م ب + ب² مربع الأول، الأول × الثاني، مربع الثاني

$\Leftarrow \underset{س \to 9}{\text{نها}} \dfrac{س^2-9س}{\sqrt[3]{7س+1}-4} \times \dfrac{\left(\sqrt[3]{7س+1}\right)^2+4\sqrt[3]{7س+1}+16}{\left(\sqrt[3]{7س+1}\right)^2+4\sqrt[3]{7س+1}+16}$

$= \underset{س \to 9}{\text{نها}} \dfrac{س(س-9)(16+16+16)}{7س+1-64} = \underset{س \to 9}{\text{نها}} \dfrac{س\cancel{(س-9)}(48)}{7\cancel{(س-9)}} = \dfrac{432}{7}$

---

② $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}-1}{\sqrt[3]{س}-1} \times \dfrac{\left(\sqrt[3]{س}\right)^2+\sqrt[3]{س}+1}{\left(\sqrt[3]{س}\right)^2+\sqrt[3]{س}+1} = \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\left(\left(\sqrt[3]{س}\right)^2+\sqrt[3]{س}+1\right)\left(\sqrt{س}-1\right)}{س-1}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{(1+1+1)\cancel{\left(\sqrt{س}-1\right)}}{\left(\sqrt{س}+1\right)\cancel{\left(\sqrt{س}-1\right)}} = \dfrac{3}{2}$

مثال: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}} - 2}{\text{س} - 8} \times \dfrac{(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4}{(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4}$

$$= \lim_{\text{س}\to 8} \frac{\cancel{\text{س} - 8}}{\cancel{(\text{س} - 8)}\left((\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4\right)} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{س} - 1}$ ، $\text{س} \neq 1$

الحل: نفرض أن $\text{ص}^6 = \text{س}$

عندما $\text{س} \leftarrow 1$ فإن $\text{ص} \leftarrow 1$

$$\lim_{\text{ص}\to 1} \frac{\text{ص}^2 - \text{ص}^3}{\text{ص}^6 - 1} = \lim_{\text{ص}\to 1} \frac{\text{ص}^2(1 - \text{ص})}{(\text{ص}^3 - 1)(\text{ص}^3 + 1)} = \lim_{\text{ص}\to 1} \frac{\text{ص}^2 \overset{-1}{\cancel{(1 - \text{ص})}}}{\cancel{(\text{ص} - 1)}(\text{ص}^2 + \text{ص} + 1)(\text{ص}^3 + 1)}$$

$$= \frac{-1}{(1+1+1)(1+1)} = -\frac{1}{6}$$

مثال: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{3 - \sqrt{\text{س} + 8}}{\sqrt{\text{س}} - 1} = \dfrac{0}{0}$ نضرب بالمرافقين التربيعيين

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{3 - \sqrt{\text{س}+8}}{\sqrt{\text{س}} - 1} \times \frac{3 + \sqrt{\text{س}+8}}{3 + \sqrt{\text{س}+8}} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + 1}{\sqrt{\text{س}} + 1}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\sqrt{\text{س}} + 1)\left(9 - (\text{س} + 8)\right)}{(3 + \sqrt{\text{س}+8})(\text{س} - 1)} = \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\sqrt{\text{س}} + 1)\overset{-1}{\cancel{(1 - \text{س})}}}{(3 + \sqrt{\text{س}+8})\cancel{(\text{س} - 1)}}$$

$$= \frac{-(1+1)}{3+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

مثال: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^2 + 4\text{س} - 12}{\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} - 3} \times \dfrac{(\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19})^2 + 3\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} + 9}{(\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19})^2 + 3\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} + 9}$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{(\text{س} + 6)(\text{س} - 2)\left((\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19})^2 + 3\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} + 9\right)}{\text{س}^3 + 19 - 27}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{(\text{س} + 6)(\text{س} - 2)(9 + 9 + 9)}{\text{س}^3 - 8} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{(\text{س} + 6)\cancel{(\text{س} - 2)}(27)}{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س}^2 + 2\text{س} + 4)}$$

$$= \frac{8(27)}{4+4+4} = 18$$

سؤال: أوجد كلاً من النهايات التالية ؟

① $\lim\limits_{\text{س} \to -7} \dfrac{\sqrt[3]{2\text{س}+6}+2}{\text{س}^3+4\text{س}^2-21\text{س}}$ ______ $\boxed{\text{الاجابة } -\frac{1}{60}}$

② $\lim\limits_{\text{س} \to -8} \dfrac{2+\sqrt[3]{\text{س}}}{\text{س}^2-64}$ ______ $\boxed{\text{الاجابة } -\frac{1}{192}}$

مثال: جد:

① $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{\text{س}}}-1\right)\left(\dfrac{1}{\text{س}-1}\right)$ نوحد المقامات ثم نضرب بالمرافق التكعيبي

$= \lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{\text{س}}}{\sqrt[3]{\text{س}}(\text{س}-1)} \times \dfrac{1+\sqrt[3]{\text{س}}+(\sqrt[3]{\text{س}})^2}{1+\sqrt[3]{\text{س}}+(\sqrt[3]{\text{س}})^2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\cancel{1-\text{س}}^{\,-1}}{\sqrt[3]{\text{س}}\,\cancel{(\text{س}-1)}\left(1+\sqrt[3]{\text{س}}+(\sqrt[3]{\text{س}})^2\right)} = \dfrac{-1}{1(1+1+1)} = \dfrac{-1}{3}$

---

② $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س}^2}-1}{\sqrt[5]{\text{س}^3}-1}$ اذا كان ليس جذر تربيعي أو تكعيبي نقوم بالفرض

نفرض أن $\text{ص}^5=\text{س}$

عندما $\text{س} \to 1$ فإن $\text{ص} \to 1$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{ص} \to 1} \dfrac{\text{ص}^2-1}{\text{ص}^3-1} = \lim\limits_{\text{ص} \to 1} \dfrac{\cancel{(\text{ص}-1)}(\text{ص}+1)}{\cancel{(\text{ص}-1)}(\text{ص}^2+\text{ص}+1)} = \dfrac{1+1}{(1+1+1)} = \dfrac{2}{3}$

ملاحظة: يمكن تجزئة المقدار الى أكثر من نهاية مع ملاحظة أنه إذا كان المقدار $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ من الأصل فيجب المحافظة عند التجزئة على أن تبقى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال: جد $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{5(\text{س}-3)^4+2\text{س}^2-18}{\text{س}-3} = \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{5(\text{س}-3)^4}{\text{س}-3} + \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{2\text{س}^2-18}{\text{س}-3}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 3} 5(\text{س}-3)^3 + 2\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\left[\cancel{(\text{س}-3)}(\text{س}+3)\right]}{\cancel{\text{س}-3}} = \text{صفر} + 12 = 12$

مثال: $\lim\limits_{س \to 7} \dfrac{\sqrt[3]{س+1} - 2}{3 - \sqrt{س+2}} = \bot$ نضرب بالمرافقين تربيعي وتكعيبي

$$= \lim_{س \to 7} \frac{\sqrt[3]{س+1} - 2}{3 - \sqrt{س+2}} \times \frac{(\sqrt[3]{س+1})^2 + 2\sqrt[3]{س+1} + 4}{(\sqrt[3]{س+1})^2 + 2\sqrt[3]{س+1} + 4} \times \frac{3 + \sqrt{س+2}}{3 + \sqrt{س+2}}$$

$$= \lim_{س \to 7} \frac{\left((س+1) - 8\right)\left(3 + \sqrt{س+2}\right)}{\left(9 - (س+2)\right)\left((\sqrt[3]{س+1})^2 + 2\sqrt[3]{س+1} + 4\right)} = \lim_{س \to 7} \frac{\overset{1-}{\cancel{(س-7)}}\,(3+3)}{\cancel{(7-س)}\,(4+4+4)}$$

$$= \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$$

سؤال: جد $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{3 - \sqrt[3]{س+25}}{\sqrt{س+14} - 4}$ ———— $\boxed{\dfrac{-8}{27}\ \text{الاجابة}}$

مثال: $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{5 + \sqrt{س+8}} - 2}{س - 1} = \bot$ مرافق تكعيبي وبعد ذلك مرافق تربيعي

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{5+\sqrt{س+8}} - 2}{س - 1} \times \frac{(\sqrt[3]{5+\sqrt{س+8}})^2 + 2\sqrt[3]{5+\sqrt{س+8}} + 4}{(\sqrt[3]{5+\sqrt{س+8}})^2 + 2\sqrt[3]{5+\sqrt{س+8}} + 4}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{5 + \sqrt{س+8} - 8}{(س-1)\left((\sqrt[3]{5+\sqrt{س+8}})^2 + 2\sqrt[3]{5+\sqrt{س+8}} + 4\right)}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س+8} - 3}{(4+4+4)(س-1)} = \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س+8} - 3}{(12)(س-1)} \times \frac{\sqrt{س+8} + 3}{\sqrt{س+8} + 3}$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{س \to 1} \frac{\cancel{س+8-9}}{\cancel{(س-1)}(\sqrt{س+8} + 3)} = \frac{1}{12(6)} = \frac{1}{72}$$

مثال: $\lim\limits_{س \to 2^+} \dfrac{\sqrt{س^2-4} + \sqrt{2س} - 2}{\sqrt{س-2}}$ نوزع البسط على المقام

$$= \lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س^2-4}}{\sqrt{س-2}} + \lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{2س} - 2}{\sqrt{س-2}}$$

معرف على يمين ٢

$$= \lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{(س+2)(س-2)}}{\sqrt{س-2}} + \lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{2س} - 2}{\sqrt{س-2}} \times \frac{\sqrt{2س} + 2}{\sqrt{2س} + 2}$$

$$= \lim_{س \to 2^+} \sqrt{س+2} + \lim_{س \to 2^+} \frac{2س - 4}{\sqrt{س-2}\,(\sqrt{2س} + 2)} = \sqrt{4} + \lim_{س \to 2^+} \frac{2\cancel{(س-2)}\,\sqrt{س-2}}{\cancel{\sqrt{س-2}}\,\cancel{\sqrt{س-2}}\,(\sqrt{2س} + 2)}$$

$$= \sqrt{4} + \lim_{س \to 2^+} \frac{2\sqrt{س-2}}{(\sqrt{2س} + 2)} = 2 + \text{صفر} = 2$$

* **طريقة الاستبدال**: يكون ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ ويحتوي البسط أو المقام على جذور تربيعية أو تكعيبية أو مقادير مرفوعة لقوى، بشرط أن يكون تحت الجذور أو ما داخل الأقواس مساوياً لقوى الأخرى.

مثال: $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س}+1)^3-(\text{س}+1)^2-4}{\text{س}-1}$ نفرض $\text{ص}=\text{س}+1 \Leftarrow \text{س}=\text{ص}-1$ (عندما $\text{س}\to 1$ فإن $\text{ص}\to 2$)

$= \lim_{\text{ص}\to 2} \frac{\text{ص}^3-\text{ص}^2-4}{\text{ص}-2}$ نستخدم القسمة الطويلة أو التركيبية ـــ أكمل $\boxed{\text{ج}=8}$

مثال: $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{49^{\text{س}}-7^{\text{س}}}{1-7^{\text{س}}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{(7^{\text{س}})^2-7^{\text{س}}}{1-7^{\text{س}}}$

نفرض $\text{ص}=7^{\text{س}} \Leftarrow$ عندما $\text{س}\to 0$، فإن $\text{ص}\to 1$

$= \lim_{\text{ص}\to 1} \frac{\text{ص}^2-\text{ص}}{1-\text{ص}} = \lim_{\text{ص}\to 1} \frac{\text{ص}\cancel{(\text{ص}-1)}}{\cancel{1-\text{ص}}} = -1$

حل آخر: $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{49^{\text{س}}-7^{\text{س}}}{1-7^{\text{س}}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{7^{2\text{س}}-7^{\text{س}}}{1-7^{\text{س}}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{(7^{\text{س}})^2-7^{\text{س}}}{1-7^{\text{س}}}$ عامل مشترك

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{7^{\text{س}}\cancel{(7^{\text{س}}-1)}}{\cancel{1-7^{\text{س}}}} = -1$

مثال: $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{16^{\text{س}}-3\times 4^{\text{س}}-4}{4^{\text{س}}-4} = \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(4^{\text{س}})^2-3\times 4^{\text{س}}-4}{4^{\text{س}}-4}$

نفرض $\text{ص}=4^{\text{س}} \Leftarrow$ عندما $\text{س}\to 1$ فإن $\text{ص}\to 4$

$= \lim_{\text{ص}\to 4} \frac{\text{ص}^2-3\text{ص}-4}{\text{ص}-4} = \lim_{\text{ص}\to 4} \frac{\cancel{(\text{ص}-4)}(\text{ص}+1)}{\cancel{\text{ص}-4}} = 5$

عبارة تربيعية

حل آخر: $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{16^{\text{س}}-3\times 4^{\text{س}}-4}{4^{\text{س}}-4} = \lim_{\text{س}\to 1} \frac{4^{2\text{س}}-3\times 4^{\text{س}}-4}{4^{\text{س}}-4}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\cancel{(4^{\text{س}}-4)}(4^{\text{س}}+1)}{\cancel{4^{\text{س}}-4}} = 4+1 = 5$

* الإضافة والطرح: نستخدم الإضافة والطرح عندما يكون ناتج التعويض صفر/صفر في الحالات التالية:

1) عند وجود أكثر من جذر في البسط مختلفة في الرتبة أو لنفس الرتبة
2) عند وجود مقدار مكون من حاصل ضرب مقدارين مطروح منهم عدد

مثال: $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+3} - \sqrt{س} - 1}{س-1}$ نعوض في أحد الجذرين نضيف ونطرح الناتج فقط في البسط

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+3} - 2 + 2 - \sqrt{س} - 1}{س-1} = \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+3} - 2 - \sqrt{س} + 1}{س-1}$ نوزع المقام على البسط

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+3} - 2}{س-1} + \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{1-\sqrt{س}}{س-1}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+3} - 2}{س-1} \times \frac{\sqrt{س+3}+2}{\sqrt{س+3}+2} + \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{1-\sqrt{س}}{س-1} \times \frac{1+\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\cancel{س-1}}{\cancel{(س-1)}(\sqrt{س+3}+2)} + \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\cancel{1-س}}{\cancel{(1-س)}(1+\sqrt{س})} = \frac{1}{4} + \frac{-1}{2} = \frac{-1}{4}$

مثال: $\underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^2+9} + \sqrt[3]{2س} - 7}{س-4}$ قيمة $\sqrt{س^2+9} = 5$ قيمة $\sqrt[3]{2س} = 2$

نضيف ونطرح (2) وأيضاً (5)

$= \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^2+9} - 5 + \cancel{5} - \cancel{2} + 2 + \sqrt[3]{2س} - \cancel{7}}{س-4} = \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^2+9} - 5 + \sqrt[3]{2س} - 2}{س-4}$

$= \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^2+9} - 5}{س-4} + \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{2س} - 2}{س-4}$

$= \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^2+9} - 5}{س-4} \times \frac{\sqrt{س^2+9} + 5}{\sqrt{س^2+9} + 5} + \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{2س} - 2}{س-4} \times \frac{(\sqrt[3]{2س})^2 + 2\sqrt[3]{2س} + 4}{(\sqrt[3]{2س})^2 + 2\sqrt[3]{2س} + 4}$

$= \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{س^2 - 16}{(س-4)(\sqrt{س^2+9}+5)} + \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{2س - 8}{(س-4)(4+4+4)}$

$= \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س-4)}(س+4)}{\cancel{(س-4)}(10)} + \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\cancel{2}\cancel{(س-4)}}{6\,\cancel{(12)}\cancel{(س-4)}}$

$= \frac{1}{10} \underset{س \to 4}{\text{نها}} س+4 + \frac{1}{6} \underset{س \to 4}{\text{نها}} 1 = \frac{8}{10} + \frac{1}{6} = \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{29}{30}$

مثال: $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^2 + \sqrt[3]{س} - 2}{س - 1}$ نضيف ونطرح العدد (1) قيمة $س^2 = 1$ قيمة $\sqrt[3]{س} = 1$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{س^2 - 1 + 1 + \sqrt[3]{س} - 2}{س - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{س^2 - 1}{س - 1} + \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{س} - 1}{س - 1}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(س-1)(س+1)}{س-1} + \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{س} - 1}{س - 1} \times \frac{(\sqrt[3]{س})^2 + \sqrt[3]{س} + 1}{(\sqrt[3]{س})^2 + \sqrt[3]{س} + 1}$$

$$= 2 + \lim_{س \to 1} \frac{\cancel{س-1}}{\cancel{(س-1)}(1+1+1)} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

مثال: $\lim\limits_{س \to 1^+} \dfrac{\sqrt{س^2 - 1} + \sqrt{س} - 1}{\sqrt{س - 1}}$ معرف على $\sqrt{س^2-1}$ ، $\sqrt{س}$ ، $\sqrt{س-1}$
- عيّن العدد (1)

$$\Leftarrow \lim_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{س^2-1}}{\sqrt{س-1}} + \lim_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{س} - 1}{\sqrt{س-1}}$$

$$= \lim_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{س+1}\,\cancel{\sqrt{س-1}}}{\cancel{\sqrt{س-1}}} + \lim_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{س} - 1}{\sqrt{س-1}} \times \frac{\sqrt{س} + 1}{\sqrt{س} + 1}$$

$$= \sqrt{2} + \lim_{س \to 1^+} \frac{س - 1}{(\sqrt{س}+1)\sqrt{س-1}} = \sqrt{2} + \lim_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{س-1}\,\cancel{\sqrt{س-1}}}{(\sqrt{س}+1)\cancel{\sqrt{س-1}}}$$

$$= \sqrt{2} + صفر = \sqrt{2}$$

مثال: جد $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{س^2 - \sqrt{س+1} - 7}{س^2 - س - 6}$

في هذه الحالة نقسم كلاً من البسط والمقام على س−3 ونجد نهاية البسط ونهاية المقام ثم نقسم النهايتين

البسط: $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{س^2 - \sqrt{س+1} - 7}{س - 3}$ قيمة $س^2 = 9$ قيمة $\sqrt{س+1} = 2$ نضيف ونطرح (9) وأيضاً (2)

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9 + \cancel{9} - 2 + \cancel{2} - \sqrt{س+1} - \cancel{7}}{س - 3} = \lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3} + \lim_{س \to 3} \frac{2 - \sqrt{س+1}}{س - 3}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{(س+3)\cancel{(س-3)}}{\cancel{س-3}} + \lim_{س \to 3} \frac{2 - \sqrt{س+1}}{س - 3} \times \frac{2 + \sqrt{س+1}}{2 + \sqrt{س+1}}$$

$$= 6 + \lim_{س \to 3} \frac{4 - \overset{-1}{\cancel{(س+1)}}}{(2 + \sqrt{س+1})\cancel{(س-3)}} = 6 + \frac{-1}{(2+2)} = 6 - \frac{1}{4} = \frac{23}{4}$$

تابع للسؤال $\Leftarrow$

المقام: $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)}{\cancel{\text{س} - ٣}}$

$= ٣ + ٢ = ٥$

$\Leftarrow$ ∴ النهاية $= \frac{\frac{٢٣}{٤}}{٥} = \frac{٢٣}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{٢٣}{٢٠}$

سؤال: جد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - \sqrt{\text{س}+١} - ٧}$ «نفس طريقة المثال السابق» $\boxed{\frac{٢٠}{٢٣}}$

سؤال: جد $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٣} - \sqrt{\text{س}-١}}{\text{س} - ٥}$ «إضافة وطرح العدد (٢)» $\boxed{\frac{-١}{٦}}$

مثال: إذا كانت $\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ فهل من الضروري أن يكون:
$\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نها}} \text{ق(س)} = \text{ب}$ ، $\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نها}} \text{هـ(س)} = \text{جـ}$ وضح إجابتك بأمثلة.

الحل: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{س}^٢ - ٤ =$ صفر

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{س} - ٢ =$ صفر

لكن: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}{\cancel{\text{س}-٢}} = ٤$ ∴ ليس شرطاً

هذه الحالة (وجود عامل صفري جديد) بحاجة إلى طرح وإضافة مقدار وهذا المقدار يكون بأن نعوض قيمة س في أحد الحدين ونترك الآخر

مثال: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+١)^٢\sqrt{\text{س}} - ٤}{\text{س} - ١}$ نضيف ونطرح $٤\sqrt{\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+١)^٢\sqrt{\text{س}} - ٤\sqrt{\text{س}} + ٤\sqrt{\text{س}} - ٤}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+١)^٢\sqrt{\text{س}} - ٤\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ١} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٤\sqrt{\text{س}} - ٤}{\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}}\left((\text{س}+١)^٢ - ٤\right)}{\text{س} - ١} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٤(\sqrt{\text{س}} - ١)}{\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}}(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١ - ٤)}{\text{س} - ١} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٤\cancel{(\sqrt{\text{س}} - ١)}}{(\sqrt{\text{س}}+١)\cancel{(\sqrt{\text{س}} - ١)}}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}}(\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣)}{\text{س} - ١} + ٢ = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}}(\text{س}+٣)\cancel{(\text{س}-١)}}{\cancel{\text{س}-١}} + ٢$

$= ٤ + ٢ = ٦$

سؤال: $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{(\text{س}+2)^2\sqrt{\text{س}} - 72}{\text{س}-4}$ " نفس طريقة حل المثال السابق " — $\boxed{\text{ج} = 33}$

مثال: $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^2\sqrt{\text{س}+2} - 8}{\text{س}-2}$ مثبة $\text{س}^2\sqrt{\text{س}+2} = 4\sqrt{\text{س}+2}$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2\sqrt{\text{س}+2} - 4\sqrt{\text{س}+2} + 4\sqrt{\text{س}+2} - 8}{\text{س}-2}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2\sqrt{\text{س}+2} - 4\sqrt{\text{س}+2}}{\text{س}-2} + \lim_{\text{س}\to 2} \frac{4\sqrt{\text{س}+2} - 8}{\text{س}-2}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\sqrt{\text{س}+2}\,(\text{س}^2-4)}{\text{س}-2} + \lim_{\text{س}\to 2} \frac{4(\sqrt{\text{س}+2} - 2)}{\text{س}-2} \times \frac{\sqrt{\text{س}+2} + 2}{\sqrt{\text{س}+2} + 2}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\sqrt{\text{س}+2}\,\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+2)}{\cancel{\text{س}-2}} + \lim_{\text{س}\to 2} \frac{4\cancel{(\text{س}+2-4)}}{\cancel{(\text{س}-2)}(\sqrt{\text{س}+2} + 2)}$$

$$= 8 + \frac{4}{4} = 8 + 1 = 9$$

مثال: $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}+1)^3\sqrt{\text{س}} - 8}{\text{س}-1}$ مثبة $(\text{س}+1)^3\sqrt{\text{س}} = 8\sqrt{\text{س}}$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س}+1)^3\sqrt{\text{س}} - 8\sqrt{\text{س}} + 8\sqrt{\text{س}} - 8}{\text{س}-1} = \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س}+1)^3\sqrt{\text{س}} - 8\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-1} + \lim_{\text{س}\to 1} \frac{8\sqrt{\text{س}} - 8}{\text{س}-1}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{\text{س}}\left((\text{س}+1)^3 - 8\right)}{\text{س}-1} + \lim_{\text{س}\to 1} \frac{8(\sqrt{\text{س}} - 1)}{\text{س}-1} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + 1}{\sqrt{\text{س}} + 1}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{\text{س}}\,\cancel{\left((\text{س}+1) - 2\right)}\left((\text{س}+1)^2 + 2(\text{س}+1) + 4\right)}{\cancel{\text{س}-1}} + \lim_{\text{س}\to 1} \frac{8\cancel{(\text{س}-1)}}{\cancel{(\text{س}-1)}(\sqrt{\text{س}} + 1)}$$

$$= 1(4+4+4) + \frac{8}{2} = 12 + 4 = 16$$

سؤال: ① $\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{\text{س}}} - 3}{\text{س}-8}$ نضرب بالمرافق التربيعي ثم التكعيبي — $\boxed{\text{ج} = \frac{1}{72}}$

② $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{6+\sqrt{\text{س}}} - 2}{\text{س}-4}$ نضرب بالمرافق التكعيبي ثم نحلل المقام — $\boxed{\text{ج} = \frac{1}{48}}$

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{م}^2\text{س} - 1}{\text{م}\sqrt{\text{س}} - 1} = 6$ جد قيمة م ؟

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{م}^2\text{س} - 1}{\text{م}\sqrt{\text{س}} - 1} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\cancel{(\text{م}\sqrt{\text{س}} - 1)}(\text{م}\sqrt{\text{س}} + 1)}{\cancel{\text{م}\sqrt{\text{س}} - 1}}$

$\Leftarrow \text{م}\sqrt{1} + 1 = 6 \Leftarrow \text{م} + 1 = 6 \Leftarrow \boxed{\text{م} = 5}$

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س} - 3} + \frac{\text{ب}}{\text{س}^2 - 9} \right) = \frac{1}{6}$ جد أ ، ب

وحدنا المقامات

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{أ}}{\text{س} - 3} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)} = \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{أ}(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}$

وعند تعويض العدد (3) فإنه يعطي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والنهاية موجودة

$\Leftarrow$ البسط = صفر

$\Leftarrow \text{أ}(3 + 3) + \text{ب} = \text{صفر} \Leftarrow 6\text{أ} + \text{ب} = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = -6\text{أ}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{أ}(\text{س} + 3) - 6\text{أ}}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)} = \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{أ}\text{س} + 3\text{أ} - 6\text{أ}}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)} = \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{أ}\text{س} - 3\text{أ}}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{أ}\cancel{(\text{س} - 3)}}{(\text{س} + 3)\cancel{(\text{س} - 3)}} = \frac{\text{أ}}{6}$

$\Leftarrow \frac{\text{أ}}{6} = \frac{1}{6} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 1}$

$\Leftarrow \therefore \boxed{\text{ب} = -6}$

سؤال: (1) اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^3 + \text{أ}\text{س}^2 - 36}{\text{س} - 3}$ موجودة جد أ ——— $\boxed{\text{أ} = 1}$

(2) اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to 5} \frac{\text{س}^2 + \text{أ}\text{س} + \text{ب}}{\text{س} - 5} = 8$ جد أ ، ب ——— $\boxed{\text{أ} = -2}$ $\boxed{\text{ب} = -15}$

(3) اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \frac{\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} - 12}{\text{س}^2 - 4} = 7$ جد أ ، ب ——— $\boxed{\text{أ} = 11}$ $\boxed{\text{ب} = -16}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^3 - \text{أ}\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢} & \text{،} \ \text{س} < ٢ \\ \text{ب}\text{س}^2 - ١١ & \text{،} \ \text{س} > ٢ \end{cases}$ جد أ، ب إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س})$ موجودة

الحل: بما أن النهاية موجودة فإن $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق}(\text{س})$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \dfrac{\text{س}^3 - \text{أ}\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عند تعويض (٢) في البسط والمقام

البسط = صفر ⇐ ٨ − ٢أ + ٦ = صفر ⇐ ١٤ − ٢أ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ٧}$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \dfrac{\text{س}^3 - ٧\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$ وبإجراء القسمة الطويلة $\text{س}^2 + ٢\text{س} - ٣$

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^2 + ٢\text{س} - ٣ & \\ \hline \text{س}^3 - ٧\text{س} + ٦ & \text{س} - ٢ \\ \mp \text{س}^3 \pm ٢\text{س}^2 & \\ \hline ٢\text{س}^2 - ٧\text{س} + ٦ & \\ \mp ٢\text{س}^2 \pm ٤\text{س} & \\ \hline -٣\text{س} + ٦ & \\ \pm ٣\text{س} \mp ٦ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^2 + ٢\text{س} - ٣)}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٤ + ٤ - ٣ = ٥$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \text{ب}\text{س}^2 - ١١ = ٤\text{ب} - ١١$

∴ ٤ب − ١١ = ٥ ⇐ ٤ب = ١٦ ⇐ $\boxed{\text{ب} = ٤}$

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}^2 + \text{أ}\text{س} + \text{ب}}$ غير موجودة جد أ، ب

الحل: بما أن النهاية غير موجودة فإنها تكون $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ ويكون مقلوبها $\dfrac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ = صفر

أي أن $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^2 + \text{أ}\text{س} + \text{ب}}{\text{س} - ٣}$ = صفر وبتعويض العدد (٣) يعطينا $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

⇐ البسط = صفر ⇐ ٩ + ٣أ + ب = صفر ⇐ ب = −٣أ − ٩

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^2 + \text{أ}\text{س} - ٣\text{أ} - ٩}{\text{س} - ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^2 - ٩}{\text{س} - ٣} + \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{أ}\text{س} - ٣\text{أ}}{\text{س} - ٣}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٣}} + \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{أ}\cancel{(\text{س} - ٣)}}{\cancel{\text{س} - ٣}} = ٦ + \text{أ} = ٠$

⇐ $\boxed{\text{أ} = -٦}$

∴ ب = −٣(−٦) − ٩ ⇐ $\boxed{\text{ب} = ٩}$

(١) سؤال: إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س - ٣}{س^٢ + س - ٦}$ غير موجودة نجد أ ——— $\boxed{أ = -٢}$

(٢) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} ، & س < أ \\ ٤س - ١٢ ، & س > أ \end{cases}$ جد أ إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نها} ق(س)$ موجودة

مثال ٤ - إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٤}{نها} \frac{ق(س) - ٥}{س - ٤} = ٨$ جد $\underset{س \leftarrow ٤}{نها} (٦ق(س) + س^٢)$ حيث ق(س) كثير حدود

الحل: عند تعويض العدد (٤) في البسط والمقام ينتج $\frac{صفر}{صفر}$ والنهاية موجودة

∴ البسط = صفر ⇐ $ق(٤) - ٥ = ٠$ ⇐ $ق(٤) = ٥$

لكن: $\underset{س \leftarrow ٤}{نها} ق(س) = ق(٤) = ٥$

⇐ $\underset{س \leftarrow ٤}{نها} (٦ق(س) + س^٢) = ٦(٥) + ١٦ = ٣٠ + ١٦ = ٤٦$

مثال: إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢} = ٥$ جد $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{س^٢ ق(س) - ١٢}{س - ٢}$ حيث ق(س) كثير حدود

الحل: عند تعويض العدد (٢) في البسط والمقام ينتج $\frac{صفر}{صفر}$ والنهاية موجودة

⇐ البسط = صفر ⇐ $ق(س) - ٣ = ٠$ ⇐ $ق(٢) = ٣$

لكن: $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} ق(س) = ق(٢) = ٣$ (كثير حدود)

قيمة $س^٢ ق(س) = ٤ق(س)$ ⇐ نضيف ونطرح ٤ق(س)

⇐ $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{س^٢ ق(س) - ١٢}{س - ٢}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{س^٢ ق(س) - ٤ق(س) + ٤ق(س) - ١٢}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{س^٢ ق(س) - ٤ق(س)}{س - ٢} + \underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{٤ق(س) - ١٢}{س - ٢}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{ق(س)(س^٢ - ٤)}{س - ٢} + \underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{٤(ق(س) - ٣)}{س - ٢}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{ق(س)\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}{\cancel{س - ٢}} + ٤\overset{من المعطيات}{(٥)} = ٣(٤) + ٤(٥) = ٣٢$

مثال: إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - ٧}{\text{س} - ٥} = ٨$ جد $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{ق(س)} - ٧}$

الحل: لإيجاد $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{ق(س)} - ٧}$ نقسم البسط والمقام على (س − ٥)

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٥}}{\frac{\text{ق(س)} - ٧}{\text{س} - ٥}} = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\frac{\cancel{(\text{س} - ٥)}(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٥}}}{٨} = \frac{٥ + ٣}{٨} = ١$$

٨ من المعطيات

مثال: إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - ٩}{\text{س} - ٣} = ٤$ جد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - \text{س}^٢}{\text{س} - ٣}$

الحل: $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - \text{س}^٢}{\text{س} - ٣}$ نضيف ونطرح العدد (٩)

$$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - ٩ + ٩ - \text{س}^٢}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - ٩}{\text{س} - ٣} + \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \overset{-(٣ + \text{س})}{\cancel{\frac{٩ - \text{س}^٢}{\text{س} - ٣}}}$$

$$= ٤ + (-٦) = -٢$$

مثال: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٢}{\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - \sqrt{\text{س} + ٢}}$ في حالة وجود جذور مختلفة في المقام نقسم على البسط س − ٢

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}}{\frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - \sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢}} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{\frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - \sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢}}$$

نحل المقام لوحده بالإضافة والطرح

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - \sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - ٢ + ٢ - \sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - ٢}{\text{س} - ٢} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{٢ - \sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - ٢}{\text{س} - ٢} \times \frac{\left(\sqrt[٣]{\text{س} + ٦}\right)^٢ + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ٢} + ٤}{\left(\sqrt[٣]{\text{س} + ٦}\right)^٢ + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ٢} + ٤} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{٢ - \sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢} \times \frac{٢ + \sqrt{\text{س} + ٢}}{٢ + \sqrt{\text{س} + ٢}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س} - ٢}}{(٤ + ٤ + ٤)\cancel{(\text{س} - ٢)}} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{٤ - \overset{-١}{\cancel{(\text{س} + ٢)}}}{(٢ + ٢)\cancel{(٢ - \text{س})}} = \frac{١}{١٢} - \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٦}$$

$$\therefore \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} = \frac{١}{-\frac{١}{٦}} = -٦$$

سؤال: ① إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{أس^٢ + ٢س + ٣}{س + ١} = ٥$ جد قيمة أ ——— $\boxed{أ = ٢}$

② إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٣س^٢ + أس + ٨}{س^٢ - ١}$ موجودة جد أ ثم جد النهاية ——— $\boxed{أ = -٦}$ $\boxed{النهاية = \frac{-٩}{٢}}$

③ إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ + ب س + أ}{س - ١} = ٩$ جد أ، ب ——— $\boxed{أ = -٧}$ $\boxed{ب = ٦}$

④ إذا كان أ، ب ∈ ح وكان:

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - أس + ٣}{س - ١} & ، س > ١ \\ ب س - ٥ & ، س < ١ \end{cases}$$

جد قيمة أ، ب التي تجعل $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ موجودة ——— $\boxed{أ = ٤}$ $\boxed{ب = ٤}$

⑤ إذا كانت $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^٣ + أس^٢ + ب س + ٢}{س + ١} = ٥$ جد أ، ب ——— $\boxed{أ = -١}$ $\boxed{ب = صفر}$