الشامل المختصر في الرياضيات

التوجيهي الأدبي الفصل الثاني

التكامل

إعداد الأستاذ : أشرف الهشلمون
ت : ٠٧٩٦١٧٠٥٧١

الدرس الأول : التكامل غير المحدود

إن عملية التكامل هي عكس التفاضل .

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 \xrightarrow{\text{تفاضل}} \text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س}$

$\xleftarrow{\text{تكامل}}$

قواعد الدرس :

1) $\int \text{أ} \cdot \text{دس} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ج}$

$\int 7 \cdot \text{دس} = 7\text{س} + \text{ج}$

و $\int \text{دس} = 1\,\text{س} + \text{ج} = \text{س} + \text{ج}$

وينطبق ذلك على كل الثوابت مثل :

$\{2 ، -4 ، 0 ، 5 ، \frac{7}{3} ، \sqrt{5} ، \pi ، \text{لو}(\text{هـ}) ، \ldots\}$

ملاحظة مهمة : عند التكامل غير المحدود لا ننسى وضع الثابت ج في الناتج .

2) $\int \text{س}^{\text{ن}} \cdot \text{دس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ج}$

$\int \text{س}^2 \cdot \text{دس} = \frac{\text{س}^{2+1}}{2+1} = \frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{ج}$

$\int \text{س}^{-4} \cdot \text{دس} = \frac{\text{س}^{-4+1}}{-4+1} + \text{ج} = \frac{\text{س}^{-3}}{-3} + \text{ج}$

3) $\int \frac{1}{\text{س}} \cdot \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ج}$

4) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \cdot \text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

5) $\int \text{جاس} \cdot \text{دس} = -\text{جتاس} + \text{ج}$

$\int \text{جتاس} \cdot \text{دس} = \text{جاس} + \text{ج}$

$\int \text{قا}^2\text{س} \cdot \text{دس} = \text{ظاس} + \text{ج}$

6) $\int \text{أ}\,\text{ق}(\text{س}) \cdot \text{دس} = \text{أ} \times \int \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{دس}$

$\int 3\,\text{ق}(\text{س}) \cdot \text{دس} = 3 \times \int \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{دس}$

7) $\int \text{ق}(\text{س}) \mp \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} =$

$\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \mp \int \text{هـ}(\text{س}) \cdot \text{دس}$.

* أساسيات مهمة جداً :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \text{ج} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب} \times \text{ج}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} + (\text{ب} \times \text{ج})}{\text{ب}}$

$\frac{5}{2} + 1 = \frac{5}{2} + \frac{2 \times 1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7}{2}$

* $\sqrt[\text{ب}]{\text{س}^{\text{أ}}} = \text{س}^{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} \quad \left(\sqrt[4]{\text{س}^3} = \text{س}^{\frac{3}{4}}\right)$

* $\frac{1}{\text{س}^{\text{أ}}} = \text{س}^{-\text{أ}} \quad \left(\frac{1}{\text{س}^2}\right) = \left(\text{س}^{-2}\right)$.

* $\frac{1}{\sqrt[3]{\text{س}}} = \frac{1}{\text{س}^{\frac{1}{3}}} = \text{س}^{-\frac{1}{3}}$

* $\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن}+\text{م}}$

$\text{س}^2 \times \text{س}^3 = \text{س}^{2+3} = \text{س}^5$.

$(\text{س}^{\text{ن}})^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن} \times \text{م}}$

$(\text{س}^2)^4 = \text{س}^{2 \times 4} = \text{س}^8$

أساسيات :

$\frac{س^ن}{س^م} = س^{ن-م} = \left(\frac{س^٥}{س^٢}\right) = س^{٥-٢} = س^٣$

* $أ \times (ب \mp جـ) = (أ \times ب) \mp (أ \times جـ)$.

$\left(س \times (س^٢ - ١) = س^٣ - س\right)$

* $ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$ ، $قا^٢ س = \frac{١}{جتا^٢ س}$

$قا س = \frac{١}{جتا س}$.

أسئلة متنوعة :

١- $\int ٨ س^٣ - ٥ قا^٢ س + ٤ \, . دس$

$= \frac{٨}{٤} س^٤ - ٥ ظا س + ٤ س + جـ$

٢- $\int ٦ س^٢ + \frac{٥}{س} - ١ \, دس$.

$= ٢ س^٣ + ٥ لو_هـ |س| - س + جـ$

٣- $\int \sqrt[٣]{س^٢} - ٤ جا س + ٢ هـ^س \, دس$

$= \int س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ جا س + ٢ هـ^س \, دس$

٤- $\int \frac{-٢}{س^٢} + \frac{١}{\sqrt[٣]{س^٤}} \, . دس$

$= \int -٢ س^{-٢} + س^{-\frac{٤}{٣}} \, . دس$

$= \frac{-٢}{-١} س^{-١} + \frac{-٣}{١} س^{-\frac{١}{٣}} + جـ$

$= \frac{٢}{س} + \frac{٣}{\sqrt[٣]{س}} + جـ$

٥- $\int \frac{٣ س^٢ - ٤}{س^٤} \, . دس$

$= \int (٣ س^٢ - ٤) \times س^{-٤} \, . دس$.

$= \int ٣ س^{-٢} - ٤ س^{-٤} \, . دس$.

$= -٣ س^{-١} + \frac{٤}{٣} س^{-٣} + جـ$

٦- $\int \sqrt[٣]{س} \left(\sqrt[٣]{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right) . دس$

$= \int س^{\frac{١}{٣}} \left(س^{\frac{١}{٣}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right) . دس$

$= \int س^{\frac{١}{٣}} \left(س^{\frac{١}{٣}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right) . دس$

$= \int س^{\frac{٢}{٣}} + س^{-\frac{١}{٦}} \, . دس$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٦}{٥} س^{\frac{٥}{٦}} + جـ$

هناك أسئلة تحتاج فيها للتبسيط والاختصار كما في الأمثلة الآتية :

١- $\int \frac{٥ س^٤ + ٨ س^٦}{س^٣} \, . دس$

$= \int \frac{\cancel{س^٣}(٥ س + ٨ س^٣)}{\cancel{س^٣}} \, . دس$.

هنا استخدام إخراج عامل مشترك لنتخلص من المقام لنتخلص من المقام $س^٣$.

$= \int ٥ س + ٨ س^٣ \, . دس$

$= \frac{٥}{٢} س^٢ + ٢ س^٤ + جـ$

٢- $\int (\text{س}-5)(\text{س}+5)\ \text{ءس}$

$= \int \text{س}^2 - 25\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^3}{3} - 25\text{س} + \text{ج}$

هنا استخدمنا الفرق بين مربعين

$(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب}) = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

٣- $\int \frac{4-\text{س}^2}{\text{س}+2}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{(2+\text{س})}(2-\text{س})}{\cancel{(\text{س}+2)}}\ \text{ءس}$

$= \int (2-\text{س})\ \text{ءس} = 2\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2} + \text{ج}$

٤- $\int (3 - 2\sqrt{\text{س}})^2\ \text{ءس}$

$= \int 9 - 12\sqrt{\text{س}} + 4\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int 9 - 12\text{س}^{\frac{1}{2}} + 4\text{س}\ \text{ءس}$

$= 9\text{س} - 8\text{س}^{\frac{3}{2}} + 2\text{س}^2 + \text{ج}$

٥- $\int (2\text{س}+3)^2\ \text{ءس} = \int 4\text{س}^2 + 12\text{س} + 9\ \text{ءس}$

$= \frac{4}{3}\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 9\text{س} + \text{ج}$

* تذكر

$(\text{أ}+\text{ب})^2 = \text{أ}^2 + 2\text{أب} + \text{ب}^2$

$(\text{أ}-\text{ب})^2 = \text{أ}^2 - 2\text{أب} + \text{ب}^2$

٦- $\int (3 - 2\text{س}^2)^2\ \text{ءس} = \int 9 - 12\text{س}^2 + 4\text{س}^4\ \text{ءس}$

$= 9\text{س} - 4\text{س}^3 + \frac{4}{5}\text{س}^5 + \text{ج}$

٧- $\int -\frac{15}{\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int -15 \times \text{قا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$= -15\,\text{ظاس} + \text{ج}$

٨- $\int 3\,\text{ظاه}\ \text{جتاه}\ \text{ءه} =$

$= \int \frac{3\,\text{جاه}}{\cancel{\text{جتاه}}} \times \cancel{\text{جتاه}}\ \text{ءه}$

$= \int 3\,\text{جاه}\ \text{ءس} = -3\,\text{جتاه} + \text{ج}$

٩- $\int \frac{4\,\text{جاه}}{2\,\text{ظاه}}\ \text{ءس} = \int 4\,\cancel{\text{جاه}} \times \frac{\text{جتاه}}{2\,\cancel{\text{جاه}}}\ \text{ءه}$

$= \int 2\,\text{جتاه}\ \text{ءه} = 2\,\text{جاه} + \text{ج}$

١٠- $\int (\text{جتا}^3\text{ه} + 4) \times 2\,\text{قا}^2\text{ه}\ \text{ءه}$

$= \int \frac{2\,\text{جتا}^3\text{ه} + 8}{\text{جتا}^2\text{ه}}\ \text{ءه}$

$= \int \frac{2\,\text{جتا}^3\text{ه}}{\text{جتا}^2\text{ه}} + \frac{8}{\text{جتا}^2\text{ه}}\ \text{ءس}$

$= \int 2\,\text{جتاه} + 8\,\text{قا}^2\text{ه}\ \text{ءس}$

$= 2\,\text{جاه} + 8\,\text{ظاه} + \text{ج}$

١١- $\int \frac{3\text{ه}^4 + 2\text{ه}^2}{\sqrt[3]{\text{ه}^2}}\ \text{ءه}$

$= \int (3\text{ه}^4 + 2\text{ه}^2) \times \text{ه}^{-\frac{2}{3}}\ \text{ءس}$

$= \int 3\text{ه}^{\frac{10}{3}} + 2\text{ه}^{\frac{4}{3}}\ \text{ءس}$

$= \frac{9}{13}\text{ه}^{\frac{13}{3}} + \frac{6}{7}\text{ه}^{\frac{7}{3}} + \text{ج}$

12- $\int \frac{س^2 - 1}{(س+2)^{-1}} \cdot دس = \int (س^2 - 1)(س+2) \cdot دس$

$= \int س^3 + 2س^2 - س - 2 \cdot دس$

$= \frac{س^4}{4} + \frac{2}{3}س^3 - \frac{س^2}{2} - 2س + جـ$

تذكر: $(أ \mp ب)(جـ \mp د) = (أ \times جـ) \mp (أ \times د) \mp (ب \times جـ) \mp (ب \times د)$.

قاعدة: مشتقة التكامل غير المحدود ينتج لدينا ما داخل التكامل أي أنه:

$\frac{d}{dس} \int ق(س) \cdot دس = ق(س)$.

لاحظ: $\frac{d}{dس}$ مع $\int$ يلغيان بعضهما البعض

مثال: إذا كان $ق(س) = \int 4س^3 - 1 \, دس$

جد $ق'(س)$ نشتق الطرفين:

$\frac{d}{dس} ق(س) = \frac{d}{dس} \int 4س^3 - 1 \cdot دس$

$\Leftarrow ق'(س) = 4س^3 - 1$

مثال: إذا كان $\int ق(س) \, دس = 4س^2 - 3$

جد $ق(س)$ ، $ق(1)$ ، $ق'(2)$:

$\frac{d}{dس} \int ق(س) \, دس = \frac{d}{dس}(4س^2 - 3)$.

$\Leftarrow ق(س) = 8س$

$ق(1) = 8 \times 1 = 8$

$ق'(س) = 8 \Leftarrow ق'(2) = 8$

مثال: إذا كان $ق(س) = \int 4س - 4س^3 \cdot دس$

جد $ق'(1)$ ؟

$\frac{d}{dس} ق(س) = \frac{d}{dس} \int 4س - 4س^3 \cdot دس$

$ق'(س) = 4س - 4س^3$.

$ق'(1) =$ صفر

مثال: جد $\int \frac{d}{dس} قاس \cdot دس$ ؟ قاس

مثال: جد $\int ق''(س) \cdot دس$؟ $ق'(س)$.

مثال: إذا كان $ق''(س) = 4س - 3س^3$.

وكان $ق'(0) = 4$ جد $ق'(س)$ ؟

$\int ق''(س) \cdot دس = \int 4س - 3س^3 \cdot دس$

$ق'(س) = 2س^2 - \frac{3}{4}س^4 + جـ$

لإيجاد جـ نعوض $ق'(0) = 4$

$ق'(0) = 2 \times 0^2 - \frac{3}{4} \times 0^4 + جـ = 4$

$\Leftarrow جـ = 4$

$\therefore ق'(س) = 2س^2 - \frac{3}{4}س^4 + 4$

لإيجاد قاعدة الإقتران من ميل المماس:

ميل المماس = $ق'(س)$ ولإيجاد قاعدة الاقتران $ق(س)$ نقوم بتكامل $ق'(س)$ أي أن:

$\int ق'(س) \cdot دس = ق(س) + جـ$ وهنا

نستفيد من النقطة (س، ص) لإيجاد قيمة جـ.

مثال: إذا كان ميل المماس للاقتران $ق(س)$ هو $3س^2 - 1$ وكانت $ق(2) = 4$

مثال:

اذا كان ميل المماس للاقتران ق(س) هو $٣س^٢ - ١$ وكان ق(٢) = ٤ جد قاعدة الاقتران؟

$ق(س) = \int ٣س^٢ - ١ \, ءس$

$= س^٣ - س + جـ$

نستخدم ق(٢) = ٤ لإيجاد قيمة جـ.

$ق(٢) = ٢^٣ - ٢ + جـ = ٤ \Leftarrow جـ = -٢$

∴ قاعدة الاقتران هي $ق(س) = س^٣ - س - ٢$

ملاحظة: في الأسئلة من هذا النوع يمكن إعطاءنا أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (أ، ب) وهنا تكون ق(أ) = ب.

مثلاً في السؤال السابق يمكن أن يعطينا ق(٢) = ٤ أو يعطينا أن النقطة التي يمر بها المنحنى هي (٢، ٤).

* لإيجاد المسافة والسرعة.

ف: المسافة ع: السرعة

ت: التسارع

$ف(ن) = \int ع(ن) \cdot ءن$

$ع(ن) = \int ت(ن) \cdot ءن$

وعند التكامل نستخدم المعطيات لإيجاد قيمة جـ

مثال: إذا كان تسارع جسيم ت بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة:

ت(ن) = ٨م/ث^٢ جد المسافة التي تقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٤م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٨م وجد المسافة التي يقطعها بعد مرور ٥ ثواني؟

لإيجاد المسافة ف(ن) نجد أولاً ع(ن).

$ع(ن) = \int ت(ن) \cdot ءن$

$= \int ٨ \, ءن = ٨ن + جـ$

لإيجاد جـ نعوض ع(٠) = ٤

$ع(٠) = ٨ \times ٠ + جـ = ٤ \Leftarrow جـ = ٤$

$\therefore ع(ن) = ٨ن + ٤$.

$ف(ن) = \int ع(ن) \, ءن = \int ٨ن + ٤ \, ءن$

$= ٤ن^٢ + ٤ن + جـ$

لإيجاد جـ نعوض ف(٠) = ٨

$ف(٠) = ٤ \times ٠^٢ + ٤ \times ٠ + جـ = ٨ \Leftarrow$

$جـ = ٨$

$\therefore ف(ن) = ٤ن^٢ + ٤ن + ٨$

ولإيجاد المسافة بعد مرور ٥ ثواني نجد

$ف(٥) = ٤ \times ٥^٢ + ٤ \times ٥ + ٨ = ١٢٨$

أسئلة متنوعة ومهمة:

سؤال: جد $\int \frac{٤ص^٣ + ٢ص\sqrt{ص}}{٢\sqrt{ص}} \, ءص$

$= \frac{٤}{٧} ص^{\frac{٧}{٢}} + \frac{ص^٢}{٢} + جـ$

الدرس الثاني :

سؤال : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تساوي $\text{ع}(\text{ن}) = ٦\,(\text{ن} + ٢)^{٢}$ م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي $\text{ف}(٠) = ٢$ م ؟

الإجابة ١١٤ م .

سؤال (٣) : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عند النقطة (س ، ص) هو $\left(٢ - \frac{١}{\text{ص}^{٢}}\right)$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٢} ، ١\right)$ جد قاعدة الاقتران ؟

الإجابة : $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{ص} + \frac{١}{\text{ص}} - ٢$

سؤال (٤) : يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت سرعته تعطى بالعلاقة : $\text{ع}(\text{ن}) = ٤\text{ن} + ٤$ م/ث جد المسافة بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن المسافة التي قطعها الجسيم بعد ٥ ثواني هي ٩٧ م ؟

الإجابة : ٤٣ م .

التكامل المحدود :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'(\text{س}) \cdot \text{د س} = \text{ق}(\text{س}) \Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$$

وهنا نطبق نفس القواعد للتكامل غير المحدود ولكن نعوض حدود التكامل لإيجاد قيمة التكامل العددية مع ملاحظة عدم وضع الثابت جـ .

مثال : $\int_{١}^{٢} \text{د س} = \text{ص} \Big]_{١}^{٢} = ١\,(٢ - ١) = ١$

مثال : $\int_{٢}^{٤} ٥\,\text{د س} = ٥\text{ص} \Big]_{٢}^{٤} = ٥\,(٤ - ٢) = ١٠$

مثال : إذا كان $\text{ق}(١) = ٢$ و $\text{ق}(٣) = ٤$ جد $\int_{١}^{٣} \text{ق}'(\text{س}) \cdot \text{د س}$ ؟

$$\int_{١}^{٣} \text{ق}'(\text{ص}) \cdot \text{د س} = \text{ق}(\text{ص}) \Big]_{١}^{٣} = \text{ق}(٣) - \text{ق}(١)$$

$= ٤ - ٢ = ٢$

مثال : $\int_{٠}^{١} \left(\sqrt{\text{ص}} + \text{ص}\right) \cdot \text{د ص} = \int_{٠}^{١} \left(\text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \text{ص}\right) \text{د ص}$

$= \left(\frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢}\right) \Big]_{٠}^{١}$

$= \frac{٢}{٣} \times ١^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} - \left(\frac{٢}{٣} \times ٠^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٠}{٢}\right) =$

$\frac{٧}{٦}$

مثال: $\int_{٠}^{٢} \frac{١}{هـ^{-س}} \cdot دس = \int_{٠}^{٢} هـ^{س} \cdot دس$

$= [هـ^{س}]_{٠}^{٢} = هـ^{٢} - هـ^{٠} = هـ^{٢} - ١$

تذكر: $هـ^{٠} = ١$ ، $هـ^{(١)} = هـ$

أي عدد أس واحد يساوي العدد نفسه أي عدد أس صفر يساوي واحد.

$\frac{صفر}{أي عدد} = صفر$ ، $لو١ = صفر$ ، $لو_{هـ} هـ = ١$

$لو٣ - لو٢ = لو\frac{٣}{٢}$ ، $لو_{هـ} هـ^{٢} = ٢$

أسئلة على المجاهيل:

مثال: $\int_{-٣}^{١} ل \cdot دس = ٢٨$ جد قيمة ل؟

$ل(١ - -٣) = ٢٨ \Leftarrow ل = \frac{٢٨}{٤} = ٧$

مثال: إذا كان $\int_{٢}^{أ} ٤ دس = ٨$ جد قيمة أ؟

$٤(أ - ٢) = ٨ \Leftarrow أ = ٢ + ٢ = ٤$

مثال: إذا كان $\int_{١}^{ب} (٢س + ٣) \cdot دس = ٦$

جد قيمة ب؟

$[س^{٢} + ٣س]_{١}^{ب} = ٦$

$ب^{٢} + ٣ب - ١ - ٣ \times ١ = ٦$

$\Leftarrow ب^{٢} + ٣ب - ١٠ = ٠ \Leftarrow (ب + ٥)(ب - ٢) = ٠$

$\Leftarrow ب = -٥$ ، $ب = ٢$

سؤال: إذا كانت $\int_{أ}^{٣} ٤أ \cdot دس = ٨$

جد قيمة أ؟

الإجابة: $أ = ٢ ، ١$

مثال: إذا كان ق(س) متصلاً وكان ق(١) $= ٤$ و ق(٢) $= ١٢$ وكان $\int_{١}^{٢} أ قَ(س) دس$

$= ١٦$ جد قيمة أ؟

$\int_{١}^{٢} أ قَ(س) دس = أ [ق(س)]_{١}^{٢} =$

$أ(ق(٢) - ق(١)) = ١٦ \Leftarrow$

$أ(١٢ - ٤) = ١٦ \Leftarrow أ = ٢$

مثال: إذا كان قَ(س) $= ٤$س هي مشتقة الاقتران ق(س) المعرف على [٢، ٣]

جد قيمة ق(٣) - ق(٢)؟

$\int_{٢}^{٣} قَ(س) دس = \int_{٢}^{٣} ٤س \cdot دس =$

$[٢س^{٢}]_{٢}^{٣}$

$= ٢ \times ٣^{٢} - ٢ \times ٢^{٢} = ١٠$

ولأن $\int_{٢}^{٣} قَ(س) = ق(٣) - ق(٢)$

$\therefore ق(٣) - ق(٢) = ١٠$

مثال: إذا كان جـ عدد ثابت وكان ق(جـ) = 12 و قَ(0) = 8 وكان:

$\int_0^{جـ} (قَ(س) - هـ^{س}) \cdot دس = 0$ جد هـ^{جـ} ؟

$ق(س) - هـ^{س}]_0^{جـ} = صفر$

$ق(جـ) - ق(0) - هـ^{جـ} + هـ^{0} = صفر$

$12 - 8 - هـ^{جـ} + 1 = صفر \Leftarrow هـ^{جـ} = 5$

مثال: إذا كان $\int ل(س)\, دس = س^2 + جـ$

جد $\int_{-2}^{3} ل(س) \cdot دس$ ؟

$\int_{-2}^{3} ل(س) \cdot دس = س^2]_{-2}^{3}$

$= 3^2 - (-2)^2 = 5$

سؤال: إذا كان $\int قَ(س) \cdot دس = 4س^2 + 8س + جـ$ جد قيمة $\int_{2}^{3} قَ(س) \cdot دس$ ؟

الإجابة: 28.

قاعدة: مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر دائماً.

مثال: إذا كان $ص = \int_{3}^{10} (\sqrt{س^3} - 4 جتاس) \cdot دس$

جد $\frac{دص}{دس}$ وجد المشتقة الأولى للعدد واحد؟

التكامل محدود ∴ $\frac{دص}{دس} = صفر$

قَ(1) = صفر.

مثال: جد $\int_1^2 \frac{8}{س^5} دس$ ؟

$= \frac{-2}{س^4}]_1^2 = \frac{30}{16}$

مثال: إذا كان $\int_1^{جـ} هـ^{س} \cdot دس = صفر$ جد قيمة جـ

$= هـ^{س}]_1^{جـ} = هـ^{جـ} - هـ^{1} = 0$

$\Leftarrow هـ^{جـ} = هـ^{1}$ ∴ جـ = 1

سؤال: جد $\int_1^8 \frac{1}{س^{\frac{4}{3}}} دس$ ؟

الإجابة: $\frac{3}{2}$

إذا كان $\int ع(س)\, دس = س^{\frac{2}{3}} + جـ$

جد $\int_{-1}^{8} ع(س) \cdot دس$ ؟

الإجابة: 3.

الدرس الثالث: خواص التكامل المحدود

$\int_م^ن جـ\, ق(س)\, دس = جـ \int_م^ن ق(س)\, دس$

جـ: عدد ثابت.

مثال: $\int_1^3 5س \cdot دس = 5 \times \int_1^3 س \cdot دس$

$= 5 \times \left(\frac{س^2}{2}]_1^3\right) = 5\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) =$

20.

مثال: $\int_{1}^{3} ٣ق(س) \cdot دس = ١٢$ جد قيمة

$\int_{1}^{3} ق(س) \cdot دس$ ؟

$٣ \times \int_{1}^{3} ق(س) \cdot دس = ١٢$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} ق(س)\, دس = \frac{١٢}{٣} = ٤$

مثال: إذا كان $\int_{0}^{1} ٤ق(س) - ٥ = ١١$

جد $\int_{0}^{1} ق(س) \cdot دس$ ؟

$٤ \times \int_{0}^{1} ق(س)\, دس - ٥(١ - ٠) = ١١$

$\int_{0}^{1} ق(س)\, دس = \frac{١٦}{٤} = ٤$

٢- $\int_{م}^{ن} (ق(س) \mp هـ(س))\, دس =$

$\int_{م}^{ن} ق(س)\, دس \mp \int_{م}^{ن} هـ(س)\, دس$.

مثال: $\int_{0}^{3} (٣ص^{٢} + ٤ص)\, دس$.

$= \int_{0}^{3} ٣ص^{٢}\, دس + \int_{0}^{3} ٤ص \cdot دس$.

$= ص^{٣} \Big]_{0}^{3} + ٢ص^{٢} \Big]_{0}^{3} = (٣^{٣} - ٠^{٣}) + (٢ \times ٣^{٢} - ٢ \times ٠) = ٤٥$.

مثال: إذا كان $\int_{1}^{3} ق(س)\, دس = ١٠$ جد

$\int_{1}^{3} (٢ص + ق(ص))\, دس$؟

$\int_{1}^{3} ٢ص\, دس + \int_{1}^{3} ق(س) \cdot دس = ص^{٢} \Big]_{1}^{3} + ١٠$
$= ١٩$

سؤال: $\int_{م}^{٥} ٣ق(س)\, دس = ١٢$ وق(٥) $= ٧$ جد ق(م) ؟ الإجابة:

ق(م) $= ٣$.

٣- $\int_{م}^{م} ق(ص) \cdot دص = صفر$ أي أنه إذا كانت حدود التكامل متساوية فإن قيمة التكامل تساوي صفر دائماً.

مثال: $\int_{5}^{5} \sqrt{ص} - \frac{٥}{ص^{٢}} + جاص \cdot دس$ = صفر.

٤- $\int_{أ}^{ب} ق(س) \cdot دس = - \int_{ب}^{أ} ق(س) \cdot دس$

أي أنه إذا قلبنا حدود التكامل نعكس الإشارة.

مثال: $\int_{2}^{5} س^{٣} + جاص\, دس = ٢$ فإن

$\int_{5}^{2} س^{٣} + جاص\, دس = -٢$.

مثال: إذا كان $\int_{3}^{5} ٢ق(س)\, دس = ١٢$ جد

$\int_{5}^{3} ق(س)\, دس$ ؟ $\int_{3}^{5} ٢ق(س)\, دس = ١٢$

$\Leftarrow \int_{3}^{5} ق(س)\, دس = \frac{١٢}{٢} = ٦$

$\therefore \int_{5}^{3} ق(س)\, دس = -٦$

مثال: إذا كان $\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = 6$ و

$\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ع(س)\,دس = 4$ جد $\int_{-2}^{5} 3ق(س) +$

$ع(س) - س\ دس$ ؟

$\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ع(س)\,دس = 4$ جد $\int_{-2}^{5} 3ق(س) +$

$ع(س) - س\ دس$ ؟

$\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ع(س)\,دس = 4 \Leftarrow \int_{5}^{-2} ع(س)\,دس$

$= 8 \Leftarrow \int_{-2}^{5} ع(س)\,دس = -8$

$\therefore 3 \times 6 + -8 - \frac{1}{2} س^2 \Big]_{-2}^{5} = 10 - \frac{21}{2}$

$= -\frac{1}{2}$.

ملاحظة: إذا كان ناتج التكامل صفر فليس من الضرورة أنه تكون الحدود متساوية تماماً

المثال التالي:

مثال: إذا كان $\int_{2}^{P} 2س\,دس = صفر$ جد

قيم P ؟

$= س^2 \Big]_{2}^{P} = P^2 - 4 = صفر \Leftarrow$

$P = \sqrt{4} = \pm 2$

مثال: إذا كان $\int_{-3}^{3} ق(س)\,دس = 4P - 12$

جد قيمة P ؟

$\int_{3}^{3} ق(س)\,دس = 4P - 12$ جد قيمة P ؟

$\int_{3}^{3} ق(س)\,دس = صفر \therefore 4P - 12 = 0$

$\Leftarrow P = 3$

(5) $\int_{P}^{ب} ق(س)\,دس = \int_{P}^{ج} ق(س)\,دس$

$+ \int_{ج}^{ب} ق(س)\,دس$.

مثال: إذا كان $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = 2$ و

كان $\int_{3}^{6} ق(س)\,دس = 7$ جد $\int_{1}^{6} ق(س)$

دس ؟

$\int_{1}^{6} ق(س)\,دس = \int_{1}^{3} ق(س)\,دس + \int_{3}^{6}$

$\int_{1}^{6} ق(س)\,دس = 2 + 7 = 9$

مثال: إذا كان $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = 2$

وكان $\int_{1}^{6} ق(س)\,دس = 9$ جد

$\int_{6}^{3} ق(س)\,دس$ ؟

أولاً نجد $\int_{3}^{6} ق(س)\,دس$

$\int_{1}^{6} ق(س)\,دس = \int_{1}^{3} ق(س)\,دس +$

$\int_{3}^{6} ق(س)\,دس$

$9 = 2 + \int_{3}^{6} ق(س)\,دس \Leftarrow \int_{3}^{6} ق(س)\,دس$

$= 7 \Leftarrow \int_{6}^{3} ق(س)\,دس = -\int_{3}^{6} ق(س)\,دس$

$= -7$

مثال: إذا كان $\int_{٢}^{-٢} ق(س)\, دس = -٧$

وكان $\int_{٢}^{٤} ٣ق(س)\, دس = ٩$ جد $\int_{-٢}^{٤} ق(س)\, دس$

$\int_{-٢}^{٤} ق(س)\, دس = \int_{-٢}^{٢} ق(س)\, دس + \int_{٢}^{٤} ق(س)\, دس$

$\int_{-٢}^{٢} ق(س)\, دس = -\int_{٢}^{-٢} ق(س)\, دس = --٧ = ٧$

$\int_{٢}^{٤} ٣ق(س)\, دس = ٩ \Leftarrow \int_{٢}^{٤} ق(س)\, دس$

$= \frac{٩}{٣} = ٣$

$\int_{-٢}^{٤} ق(س)\, دس = ٧ + ٣ = ١٠$

مثال: إذا كان $\int_{-٢}^{٥} ق(س)\, دس = ٦$ وكان $\int_{-٢}^{١} ٤ق(س)\, دس = ٨$ جد $\int_{١}^{٥} (ق(س) + ٤س)\, دس$ ؟

$\int_{-٢}^{١} ٤ق(س)\, دس = ٨ \Leftarrow \int_{-٢}^{١} ق(س)\, دس$

$= \frac{٨}{٤} = ٢$ ونجد كذلك $\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس$

$\int_{-٢}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{-٢}^{١} ق(س)\, دس + \int_{١}^{٥} ق(س)\, دس$.

$٦ = ٢ + \int_{١}^{٥} ق(س)\, دس \Leftarrow \int_{١}^{٥} ق(س)\, دس = ٤$

$\int_{١}^{٥} (ق(س) + ٤س)\, دس = \int_{١}^{٥} ق(س)\, دس + \int_{١}^{٥} ٤س\, دس = ٤ + [٢س^{٢}]_{١}^{٥} =$

$= ٤ + ٥٠ - ٢ = ٥٢$

مثال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، -١ \le س \le ١ \\ ٣س^{٢} + ٢ & ، ١ < س \le ٤ \end{cases}$

جد $\int_{-١}^{٤} ق(س)\, دس$ ؟

حدود التكامل يتم تعويضها في اقترانين مختلفين لأن الحد -١ يقع في الاقتران ٢س+١ والحد ٤ يقع في الاقتران ٣س² + ٢ وهنا يتم تقسيم التكامل الأول والثاني

$\int_{-١}^{٤} ق(س)\, دس = \int_{-١}^{١} ق(س)\, دس + \int_{١}^{٤} ق(س)\, دس$

$= \int_{-١}^{١} ٢س + ١\, دس + \int_{١}^{٤} ٣س^{٢} + ٢\, دس = [(س^{٢} + س)]_{-١}^{١} + [س^{٣} + ٢س]_{١}^{٤} = ٧١$

في السؤال السابق جد $\int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس$ ؟

$\int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس = \int_{٠}^{١} ق(س)\, دس + \int_{١}^{٣} ٣س^{٢} + ٢\, دس$.

سؤال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س + أ & ، ٠ \le س < ٢ \\ ٣س^{٢} + ٥ & ، ٢ \le س \le ٣ \end{cases}$

وكان $\int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس = ٤$ جد قيمة أ ؟

الإجابة: أ = -١٢ .

مثال: إذا كان $\int_{-1}^{3} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = 6$ و كان $\int_{3}^{-1} \frac{\text{ع(س)}}{2}\,\text{ءس} = -5$ جد ما يلي:

1- $\int_{-1}^{3} \left(4\,\text{ق(س)} - \text{ع(س)}\right)\text{ءس}$.

$\int_{3}^{-1} \frac{\text{ع(س)}}{2}\,\text{ءس} = -5 \Leftarrow \int_{3}^{-1} \text{ع(س)}\,\text{ءس} = -5 \times 2 = -10 \;\therefore\; \int_{-1}^{3} \text{ع(س)}\,\text{ءس} = 10$

$\int_{-1}^{3} \left(4\,\text{ق(س)} - \text{ع(س)}\right)\text{ءس} = 4 \times 6 - 10$

$= 14$

2- $\int_{-1}^{3} \left(6\text{س}^2 - 3\,\text{ع(س)} + 2\right)\text{ءس}$

$= 2\text{س}^3 \Big]_{-1}^{3} - 3 \times 10 + 2\text{س} \Big]_{-1}^{3} =$

34

مثال: إذا كان $\int_{3}^{5} \left(\frac{\text{ق(س)}}{2} - 1\right)\text{ءس} = 6$

وإذا كان $\int_{8}^{5} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = 10$ جد

$\int_{3}^{8} \left(\text{ق(س)} + 2\text{س}\right)\text{ءس}$ ؟

$\int_{3}^{5} \frac{\text{ق(س)}}{2} - 1\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\int_{3}^{5} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

$-1(5-3) = 6$

$\therefore \int_{3}^{5} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = (6+2) \times 2 = 16$

$\int_{3}^{8} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \int_{3}^{5} \text{ق(س)}\,\text{ءس} + \int_{5}^{8}$

$\text{ق(س)}\,\text{ءس} = 16 + -10 = 6$

$\therefore \int_{3}^{8} \text{ق(س)} + 2\text{س}\,\text{ءس} =$

$6 + \text{س}^2 \Big]_{3}^{8} = 61$

سؤال: إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^3 - 1 & \text{، س} \le 0 \\ 4\text{س}^2 & \text{، س} < 4 \\ -3 & \text{، س} \ge 4 \end{cases}$$

جد $\int_{-3}^{3} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$ ؟

الإجابة: $\int_{-2}^{3} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = 28$

سؤال: إذا كان

$\text{ق(س)} = \int_{0}^{3} \left(3\text{س}^3 + \sqrt{\text{ص}}\right)\text{ءس} -$

$\int \left(6\text{ص}^2 + 1\right)\text{ءس} + 4\text{ص}^2$.

جد $\text{قَ}(1)$ ؟

الإجابة: $\text{قَ}(1) = 5$.

الدرس الرابع: التكامل بالتعويض:

إن تكامل حاصل ضرب أو قسمة اقترانين يكون غالباً أحدهما مشتقة الآخر وإذا لم يكن كذلك نلجأ لطرق الاختصار والتبسيط التي تعلمناها سابقاً:

عندما يكون أحد الاقترانات مشتقة الآخر فإننا نلجأ للحل كما هو موضح في الأمثلة الآتية:

مثال: جد $\int (\text{٢س}+٥)(\text{س}^{٢}+\text{٥س})^{٤}\,\text{دس}$

نفرض ص = س² + ٥س لاحظ أن مشتقته تساوي ٢س + ٥ .

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}+٥ \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}+٥}$

$\Leftarrow \int \cancel{(\text{٢س}+٥)}(\text{ص})^{٤} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(\text{٢س}+٥)}}$

$= \int \text{ص}^{٤}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ} = \frac{١}{٥}(\text{س}^{٢}+\text{٥س})^{٥} + \text{جـ}$.

مثال: $\int \frac{\text{٤س}^{٢} \cdot \text{دس}}{(\text{٢س}^{٣}+٣)^{٥}}$

نفرض ص = $\text{٢س}^{٣}+٣$. $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٦س}^{٢}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٦س}^{٢}} \Leftarrow \int \frac{\text{٤س}^{٢}}{\text{ص}^{٥}} \times \frac{\text{دص}}{\text{٦س}^{٢}}$

$= \frac{٤}{٦}\int \text{ص}^{-٥}\,\text{دص} = \frac{٤}{٦} \times \frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{٦(\text{٢س}^{٣}+٣)^{٤}} + \text{جـ}$

سؤال: جد $\int \text{٢س}^{٢}(\text{س}^{٣}+١)^{٥}$ دس .

الإجابة: $\frac{(\text{س}^{٣}+١)^{٦}}{٩} + \text{جـ}$

مثال: $\int (\text{٨س}^{٣}+٣)\left(\sqrt[٥]{\text{٢س}^{٤}+\text{٣س}}\right)\,\text{دس}$

نفرض ص = $\text{٢س}^{٤}+\text{٣س}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٨س}^{٣}+٣$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٨س}^{٣}+٣}$

$\int (\text{٨س}^{٣}+٣)\left(\sqrt[٥]{\text{ص}}\right) \cdot \frac{\text{دص}}{\text{٨س}^{٣}+٣}$

$= \int \text{ص}^{\frac{١}{٥}} \cdot \text{دص} = \frac{٥}{٦}\text{ص}^{\frac{٦}{٥}} + \text{جـ}$

$= \frac{٥(\text{٢س}^{٤}+\text{٣س})^{\frac{٦}{٥}}}{٦} + \text{جـ}$

مثال: $\int \text{٦س جا س}^{٢}\,\text{دس}$ نفرض ص = س²

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

$\int \text{٦س جا ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{٢س}} = \int \text{٣ جا ص} \cdot \text{دص}$

$= -\text{٣ جتا ص} + \text{جـ} = -\text{٣ جتا س}^{٢} + \text{جـ}$

مثال: $\int \text{٢س}^{٢}\,\text{هـ}^{(\text{س}^{٣}+٥)} \cdot \text{دس}$

نفرض ص = $\text{س}^{٣}+٥ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٢} \Leftarrow$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢}}$

$\int \text{٢س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢}} = \int \frac{٢}{٣}\text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \text{دص}$

$= \frac{٢}{٣}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{٢}{٣}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٥} + \text{جـ}$

سؤال: جد $\int \frac{جتا\sqrt{س}}{\sqrt{س}} \cdot دس$

الإجابة: $٢ جا\sqrt{س} + جـ$

مثال: $\int \frac{٢س+٣}{جتا^{٢}(س^{٢}+٣س)} \cdot دس$

$= \int (٢س+٣)(قا^{٢}(س^{٢}+٣س)) \cdot دس$

نفرض $ص = س^{٢} + ٣س$ ، $\frac{دص}{دس} = ٢س+٣$

$دس = \frac{دص}{٢س+٣}$

$\int (٢س+٣) قا^{٢}ص \cdot \frac{دص}{٢س+٣} = \int قا^{٢}ص$

$= ظا ص + جـ \cdot دص$

$= ظا(س^{٢}+٣س) + جـ$

سؤال: $\int \frac{-٤ قا^{٢}(لو_{هـ} س)}{٢س} \cdot دس$

الإجابة: $-٢ ظا لو_{هـ}|س| + جـ$

سؤال: $\int (س+٣)\sqrt[٣]{س^{٢} + ٦س - ٤} \cdot دس$

نفرض $ص = س^{٢} + ٦س - ٤$

$\frac{دص}{دس} = ٢س + ٦ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س+٦}$

$\int (س+٣)\sqrt[٣]{ص} \cdot \frac{دص}{٢(س+٣)}$

$= \int \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٣}} \cdot دص = \frac{٣}{٨}(س^{٢} + ٦س - ٤)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

مثال: جد $\int ٢س^{٢} ق'(٢س^{٣} - ٢) دس$

نفرض $ص = ٢س^{٣} - ٢$ ، $\frac{دص}{دس} = ٦س^{٢}$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{٦س^{٢}}$

$\int ٢س^{٢} ق'(ص) \cdot \frac{دص}{٦س^{٢}} = \frac{١}{٣}\int ق'(ص) دص$

$= \frac{١}{٣} ق(ص) + جـ = \frac{١}{٣} ق(٢س^{٣} - ٢) + جـ$

سؤال: جد $\int ٤س ق'(٢س^{٢} - ٥) \cdot دس$

الإجابة: $ق(٢س^{٢} - ٥) + جـ$

* في تكاملات الاقترانات الخطية $(أس + ب)$ نقوم بنفس الأسلوب مع أنه لا يوجد اقتران ومشتقته معاً.

مثال: $\int (٢س + ٣)^{٤} \cdot دس$

نفرض $ص = ٢س + ٣$ ، $\frac{دص}{دس} = ٢$

$دس = \frac{دص}{٢}$ ∴ $\int ص^{٤} \cdot \frac{دص}{٢}$

$= \frac{١}{١٠} \times (٢س+٣)^{٥} + جـ$

سؤال: جد $\int \frac{٣}{(٥-٤س)^{٧}} \cdot دس$

$= \frac{٣}{٢٤} \times (٥-٤س)^{-٦} + جـ$

مثال: $\int \sqrt[5]{(٥-٣س)^{٣}} \, . \, دس$

نفرض $ص = ٥ - ٣س$

$\frac{دص}{دس} = -٣ \Leftarrow دس = \frac{دص}{-٣}$

$\int \sqrt[5]{ص^{٣}} \, . \, \frac{دص}{-٣} = \frac{-١}{٣} \times \int ص^{\frac{٣}{٥}} . دص$

$= \frac{-١}{٣} \times \frac{٥}{٨} \times ص^{\frac{٨}{٥}} + جـ$

$= \frac{-٥}{٢٤} \times \sqrt[5]{(٥-٣س)^{٨}} + جـ$

مثال: $\int هـ^{(٣س-١)} . دس$ نفرض $ص = ٣س - ١$

$\frac{دص}{دس} = ٣ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣}$

$\int هـ^{ص} . \frac{دص}{٣} = \frac{١}{٣} \times هـ^{(٣س-١)} + جـ$

مثال: $\int \frac{-٢}{س+١} . دس$ نفرض $ص = س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ١ \Leftarrow دس = \frac{دص}{١} = دص$

$\int \frac{-٢}{ص} . دص = -٢ لو_{هـ}|ص| + جـ$

$= -٢ لو_{هـ}|س+١| + جـ$

مثال: $\int \frac{٣}{س+هـ} . دس$.

هـ: العدد النيبيري وهو ثابت.

نفرض $ص = س + هـ$ $\frac{دص}{دس} = ١$

$دس = دص$

$\int \frac{٣}{ص} . دص = ٣ لو_{هـ}|ص| + جـ$

$= ٣ لو_{هـ}|س + هـ| + جـ$

مثال: $\int \frac{٣}{س^{٢} + ٨س + ١٦} . دس$

$= \int \frac{٣}{(س+٤)(س+٤)} . دس =$

$\int \frac{٣}{(س+٤)^{٢}} . دس$ نفرض $ص = س + ٤$

$\frac{دص}{دس} = ١ \Leftarrow دس = دص$

$\int ٣ ص^{-٢} . دص = ٣ \times \frac{ص^{-١}}{-١} + جـ$

$= \frac{-٣}{(س+٤)} + جـ$.

مثال: $\int هـ^{(٢-س)} + قا^{٢}س . دس$

$= \int هـ^{(٢-س)} دس + \int قا^{٢}س . دس$

$\int هـ^{(٢-س)} . دس$ ، نفرض $ص = ٢ - س$

$\frac{دص}{دس} = -١ \Leftarrow دس = -دص$

$\int هـ^{ص} \times -١ . دص = -هـ^{ص} + جـ$

$= -هـ^{(٢-س)} + جـ \therefore \int هـ^{(٢-س)} + قا^{٢}س =$

$= -هـ^{(٢-س)} + ظاس + جـ$

قواعد مختصرة لتكامل الاقترانات الخطية

١- $\int (\text{أ}س+\text{ب})^{ن}\,دس = \dfrac{(\text{أ}س+\text{ب})^{ن+1}}{\text{أ}\times(ن+1)} + جـ$

مثال: $\int (٥س+٢)^{٥}\,دس = \dfrac{(٥س+٢)^{٦}}{٥\times٦} + جـ$

٢- $\int جا(\text{أ}س+\text{ب})\,دس = \dfrac{-1}{\text{أ}} \times جتا(\text{أ}س+\text{ب}) + جـ$

$\int جتا(\text{أ}س+\text{ب})\,دس = \dfrac{1}{\text{أ}} \times جا(\text{أ}س+\text{ب}) + جـ$

$\int قا^{2}(\text{أ}س+\text{ب})\,دس = \dfrac{1}{\text{أ}} \times ظا(\text{أ}س+\text{ب}) + جـ$

مثال: $\int جتا(٤-٢س)\,دس = \dfrac{1}{-2} \times جا(٤-٢س) + جـ$

٣- $\int \dfrac{جـ}{\text{أ}س+\text{ب}}\,دس = \dfrac{جـ}{\text{أ}} \times لو_{هـ}|\text{أ}س+\text{ب}| + جـ$

مثال: $\int \dfrac{-2}{هـ-س}\,دس = \dfrac{-2}{-1} \times لو_{هـ}|هـ-س| + جـ$

٤- $\int هـ^{(\text{أ}س+\text{ب})}\,دس = \dfrac{1}{\text{أ}} \times هـ^{(\text{أ}س+\text{ب})} + جـ$

مثال: $\int هـ^{(٥س-٢)}\,دس = \dfrac{1}{٥} \times هـ^{(٥س-٢)} + جـ$

مثال: $\int ٤هـ^{(٣س+٢)} + \dfrac{٥}{س-هـ}\,دس$

$= \dfrac{٤}{٣} هـ^{(٣س+٢)} + ٥\,لو_{هـ}|س-هـ| + جـ$

* في حالة التكامل المحدود: لابد أنه نفرض ص نعوض الحدود فيها لإيجاد قيم ص والتي ستكون حدود التكامل الجديد.

مثال: $\int_{0}^{2} (٢س+٣)(س^{2}+٣س)^{٤}\,دس$.

نفرض $ص = س^{2} + ٣س$.

$\dfrac{دص}{دس} = ٢س+٣ \Leftarrow دس = \dfrac{دص}{٢س+٣}$

الحدود في السؤال هي (٠، ٢).

عندما س = ٠ فإن $ص = ٠^{2} + ٣\times٠ = ٠$ (الحد السفلي).

وعندما س = ٢ فإن $ص = ٢^{2} + ٣\times٢ = ١٠$ (الحد العلوي).

$\int_{0}^{10} \cancel{(٢س+٣)} \times ص^{٤} \dfrac{دص}{\cancel{(٢س+٣)}} =$

$\int_{0}^{10} ص^{٤}\,دص$.

$= \dfrac{ص^{٥}}{٥}\Big]_{0}^{10} = \dfrac{10^{5}}{5} - \dfrac{0^{5}}{5} = \dfrac{10^{5}}{5}$

مثال: $\int$ س هـ$^{س^2}$ ءس . نفرض ص = س^2

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{٢س}$

عندما س = ٠ فإن ص = ٠^2 = ٠

وعندما س = ٢ فإن ص = ٢^2 = ٤

$\int_{0}^{4}$ س هـ^{ص} . $\frac{ءص}{٢س}$ = $\frac{1}{2}$ هـ$^{ص}\Big]_{0}^{4}$

= $\frac{1}{2}$ (هـ^4 − هـ^0) = $\frac{1}{2}$ (هـ^4 − ١) =

$\frac{1}{2}$ هـ^4 − $\frac{1}{2}$.

سؤال جد: $\int_{0}^{1} \frac{١ - ٢س}{\sqrt{س^2 - س + ٤}}$. ءس .

الإجابة: صفر .

مثال: إذا علمت أن: ق(٤) = ١٢ ،

ق(١) = −٨ ، جد:

$\int_{-1}^{2}$ ٢س قَ(س^2) . ءس ؟

نفرض ص = س^2 ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س

ءس = $\frac{ءص}{٢س}$ عندما س = −١ فإن

ص = ١ وعندما س = ٢ فإن ص ء ٤

$\int_{1}^{4}$ ٢س قَ(ص) . $\frac{ءص}{٢س}$ = ق(ص)$\Big]_{1}^{4}$

= ق(٤) − ق(١) = ١٢ − −٨ = ٢٠ .

مثال: إذا علمت أن: $\int_{3}^{2}$ ق(ص) . ءص

= ٤

جد $\int_{0}^{1}$ ٣س^2 ق(س^3 + ٢) . ءس ؟

نفرض ص = س^3 + ٢ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^2 ⇐

ءس = $\frac{ءص}{٣س^2}$ عندما س = ٠ فإن ص =

٢ وعندما س = ١ فإن ص = ٣ .

$\int_{2}^{3}$ ٣س^2 ق(ص) . $\frac{ءص}{٣س^2}$ = $\int_{2}^{3}$ ق(ص)

. ءص

$\int_{2}^{3}$ ق(ص) . ءص = − $\int_{3}^{2}$ ق(ص) . ءص

= −٤ .

سؤال: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي (٤س − ٢)^3 فاكتب قاعدة الاقتران المار بالنقطة (١، ٨)؟

ق(س) = $\int$ (٤س − ٢)^3 . ءس = $\frac{(٤س - ٢)^4}{٤ \times ٤}$ + جـ

ق(١) = $\frac{(٤ \times ١ - ٢)^4}{١٦}$ + جـ = ٨

$٨ = جـ + \frac{٢^٤}{١٦} \Leftarrow ٨ = جـ + \frac{١٦}{١٦}$

$\Leftarrow جـ = ٧ \quad \therefore ق(س) = \frac{(٤س - ٢)^٤}{١٦}$

$+ ٧$.

سؤال: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة: $ع(ن) = ٣(ن+١)^٢$ م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي $ف(٠) = ١$م ؟

$ف(ن) = \int ع(ن) \cdot دن$

$ف(ن) = \int ٣(ن+١)^٢ \cdot دن =$

$(ن+١)^٣ + جـ$

$ف(٠) = (٠+١)^٣ + جـ = ١ \Leftarrow$

جـ = صفر .

$\therefore ف(ن) = (ن+١)^٣$ ،

$\therefore ف(٢) = (٢+١)^٣ = ٢٧$م .

سؤال: جد $\int هـ^{(\pi س+٣)} - \frac{٣}{\pi - ٤س + هـ} \cdot دس$

الإجابة: $\frac{١}{\pi} هـ^{\pi س+٣} + \frac{٣}{٤} لو_هـ |\pi - ٤س + هـ|$

$+ جـ$

سؤال: جد $\int_{٠}^{٢} \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{٢س+٢} \cdot دس$

الإجابة: ٤

سؤال: جد $\int \frac{٣}{\sqrt[٤]{٤س-١}} \cdot دس$.

الإجابة: $\sqrt[٤]{(٤س-١)^٣} + جـ$

سؤال: جد $\int \frac{٤}{(س+٣)(س+٣)} \cdot دس$

الإجابة: $\frac{-٤}{س+٣} + جـ$

سؤال: إذا كان $\int_{٢}^{٤} ق(س) \cdot دس = ٤$

جد $\int_{١}^{٢} ق(٢س) \cdot دس$.

الإجابة: ٢ .

سؤال: جد $\int \frac{٤س - ٦}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٣س + ١}} \cdot دس$.

الإجابة: $٣ \sqrt[٣]{(س^٢ - ٣س + ١)^٢} + جـ$

سؤال: جد $\int_{٢}^{٤} \frac{ق'(\frac{١}{س})}{س^٢} \cdot دس$

إذا علمت أن $ق(\frac{١}{٢}) = ٣$ و $ق(\frac{١}{٤}) = ٢$.

الإجابة: ١

الدرس الخامس:

تطبيقات التكامل المحدود:

(إيجاد المساحة):

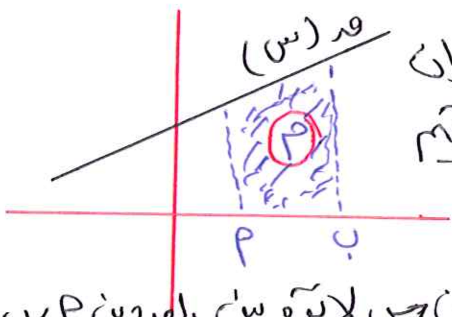
لإيجاد المساحة نقوم بالتكامل ودائماً المساحة موجبة.

المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س).دس حيث أ = ص١

ب = ص٢ .

١- الحالة الأولى: وتقسم إلى جزئين:

أ- الجزء الأول أنه الاقتران لا يقطع محور السينات بين العددين أ ، ب ويطلب السؤال إيجاد المساحة بين الاقتران ومحور السينات والمستقيمان: س = أ ، س = ب أو في الفترة [أ ، ب] كما في الشكل المقابل في هذه الحالة نقوم بالتالي:



١- نساوي الاقتران بالصفر لنجد قيم ص.

٢- نرى إن كانت ص لا تقع بين العددين أ ، ب

٣- المساحة م = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس.

مثال: جد المساحة للمنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ س − ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣ ؟

ق(س) = ٠ ⟸ ٤س − ٤ = ٠ ⟸

س = ١

(١) لا يقع في الفترة المعطاة في السؤال

[٢ ، ٣] ، م = $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) دس

= $\int_{٢}^{٣}$ ٤س − ٤ . دس .

= (٢س² − ٤س) $]_{٢}^{٣}$ = ٢×٩ − ١٢ − ٨ + ٨ = ٦ وحدة مربعة.

مثال: جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران، ق(س) = ٢س − ١ ومحور السينات والمستقيمان س = −٣ ، س = −١ ؟

ق(س) = ٠ ⟸ ٢س − ١ = ٠ ⟸

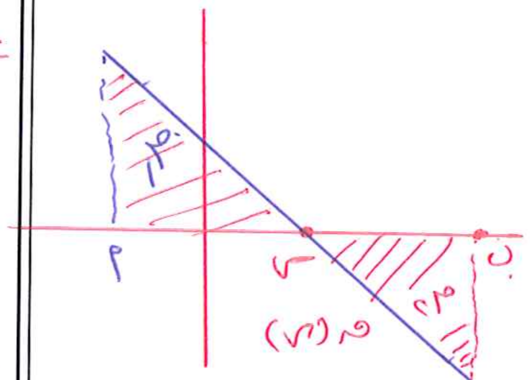
س = $\frac{1}{2}$ ⟸ $\frac{1}{2}$ ∉ [−٣ ، −١] .

∴ م = $\int_{-٣}^{-١}$ ٢س − ١ دس = (س² − س) $]_{-٣}^{-١}$

= |١ − ٤| = ٤ وحدة مربعة (المساحة موجبة).

ب- الجزء الثاني من الحالة الأولى :

الاقتران يقطع محور السينات بين العددين أ ، ب أي أن س ∈ [أ ، ب] وهنا نجزئ التكامل انظر إلى الشكل المجاور :



هنا لإيجاد المساحة م نجد م١ و م٢

$$م_١ = \left| \int_{أ}^{س} ق(س) \, دس \right| ، \quad م_٢ = \left| \int_{س}^{ب} ق(س) \, دس \right|$$

المساحة م = م١ + م٢

مثال : جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ − ٢س ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٤] ؟

ق(س) = ٠ ⟸ ٦ − ٢س = ٠ ⟸ س = ٣

٣ ∈ [٠ ، ٤] وهنا نجزئ المساحة

$$م_١ = \int_{٠}^{٣} ٦ - ٢س \, دس = (٦س - س^٢) \Big|_{٠}^{٣}$$

= ١٨ − ٩ − (٠ − ٠) = ٩ وحدة مربعة .

$$م_٢ = \int_{٣}^{٤} ٦ - ٢س \, دس = ٦س - س^٢ \Big|_{٣}^{٤}$$

= ٢٤ − ١٦ − (١٨ − ٩) = |−١| = ١ وحدة مربعة .

المساحة الكلية = م = ٩ + ١ = ١٠ وحدة مربعة

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٥س² + ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = −١ ، س = ٢ ؟

ق(س) = ٠ ⟸ ٥س² + ٢ ≠ ٠

هنا عبارة أولية لا تحلل ∴ $م = \int_{-١}^{٢} ٥س^٢ + ٢ \, دس$.

$$= \frac{٥}{٣} س^٣ + ٢س \Big|_{-١}^{٢} = ٢١ \text{ وحدة مربعة .}$$

ملاحظة : إذا طلب السؤال المساحة بين ق(س) ومستقيم واحد ومحور الصادات نعتبر محور الصادات مستقيم ويساوي صفر أي س = صفر .

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٥ − س و المستقيم س = ٣ ومحوري السينات و الصادات ؟

هنا محور الصادات تعني س = ٠ ∴ الفترة [٠، ٣] . ق(س) = ٠ ⟸ ٥ − س = ٠ ⟸ س = ٥

٥ ∉ [٠، ٣] ∴ م = $\int_{0}^{3}$ (٥ − س) ءس

= (٥س − $\frac{\text{س}^2}{2}$) $\Big]_{0}^{3}$ = $\frac{21}{2}$ وحدة مربعة.

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران ق(س) = س² والمستقيم س = ٢ و محور السينات ؟

هنا الفترة هي [٠، ٢] .

ق(س) = ٠ ⟸ س² = ٠ ⟸ س = ٠

م = $\int_{0}^{2}$ س² ءس = $\frac{1}{3}$ س³ $\Big]_{0}^{2}$ = $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ٥ ؟ ق(س) = ٦ ≠ ٠

∴ م = $\int_{-2}^{5}$ ٦ ءس = ٦س $\Big]_{-2}^{5}$ =

٦ (٥ − −٢) = م = ٤٢ وحدة مربعة.

* الحالة الثانية: إيجاد المساحة بين الاقتران ومحور السينات وهنا نجد حدود التكامل بمساواة الاقتران بالصفر.

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٢س و محور السينات ؟

ق(س) = ٠ ⟸ س² − ٢س = ٠ ⟸

س (س − ٢) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ٢

∴ [٠، ٢] الفترة.

م = $\int_{0}^{2}$ س² − ٢س ءس = $\Big|$ $\frac{\text{س}^3}{3}$ − س² $\Big|_{0}^{2}$

م = $\Big|$ $\frac{-4}{3}$ $\Big|$ = $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة.

مثال: مدخل مجمع رياضي تمثيله منحنى الاقتران ق(س) = ٤ − س² ما تكلفة إنشاء باب حديدي للمدخل إذا كان سعر الوحدة المربعة منها ٣٠ دينار؟ ق(س) = ٠

⟸ ٤ − س² = ٠ ⟸ س² = ٤ ∴ س = ±٢

م = $\int_{-2}^{2}$ ٤ − س² ءس = (٤س − $\frac{\text{س}^3}{3}$) $\Big]_{-2}^{2}$

م = $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة.

∴ التكلفة = $\frac{32}{3}$ × ٣٠ = ٣٢٠ دينار

سؤال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين كل من منحنيات الاقترانات الآتية ومحور السينات:

1- ق(س) = ٥ - ٥س^2 ($\frac{20}{3}$ وحدة مربعة).

2- هـ(س) = س^2 + ٢س - ٣ ($\frac{32}{3}$ وحدة مربعة).

3- ص = س - س^3 ($\frac{1}{2}$ وحدة مربعة).

* الحالة الثالثة: إيجاد المساحة بين اقترانين ق(س) و هـ(س) هنا نساوي الاقترانين ببعضهما لإيجاد قيم س والتي هي حدود التكامل (أ، ب) ولحساب المساحة م = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) - هـ(س) ءس.

حيث الاقتران العلوي - الاقتران السفلي وهنا ق(س) هو العلوي.

ملاحظة: لمعرفة الاقتران العلوي نعوض رقم ضمن حدود الفترة في كلا الاقترانين والقيمة الأكبر للاقتران العلوي.

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^2 ومنحنى الاقتران هـ(س) = ٢س.

ق(س) = هـ(س) ⟸ س^2 = ٢س

س^2 - ٢س = ٠ ⟸ س(س-٢) = ٠،

∴ س = ٠، س = ٢ وهما حدود التكامل

∴ م = $\int_{0}^{2}$ ق(س) - هـ(س) ءس.

م = $\int_{0}^{2}$ ٢س - س^2 ءس = $\frac{1}{6}$ وحدة مربعة.

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^2 - ٤س والمستقيم ص = ٥؟

هنا المساحة بين اقترانين لأنه ص = ٥ اقتران.

ق(س) = ص ⟸ س^2 - ٤س = ٥.

س^2 - ٤س - ٥ = ٠ ⟸ (س-٥)(س+١) = ٠

∴ س = -١، س = ٥

م = $\int_{-1}^{5}$ ٥ - (س^2 - ٤س) ءس

= $\int_{-1}^{5}$ ٥ - س^2 + ٤س ءس = ٣٦ وحدة مربعة.

* لا ننسى دائماً المساحة موجبة.

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقتران ص - س = ٦ و ص = س^2؟

الاقتران ص - س = ٦ ⟸ ص = ٦ + س

٦ + س = س^2 ⟸ س^2 - س - ٦ = ٠

(س - ٣)(س + ٢) = ٠ ∴ س = -٢

س = ٣.

م = $\int_{-2}^{3}$ ٦ + س - س^2 ءس = $\frac{125}{6}$

سؤال ٣: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانات التالية:

١- ق(س) = ٢س - ٣ و هـ(س) = س² - ٢س

الإجابة: $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة.

٢- ق(س) = ١٦ - ٤س² والمستقيم ص = ٠

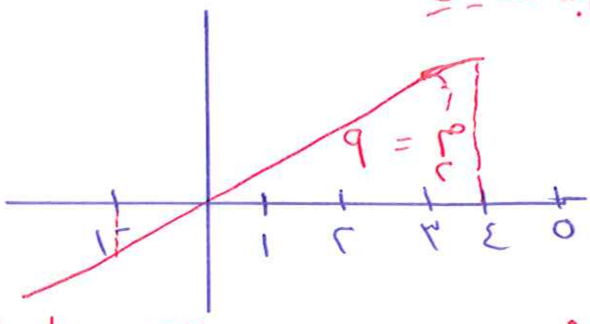
الإجابة $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة.

سؤال ٤: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = ٤ - ٢$\sqrt{س}$ ومحور السينات و الصادات؟ الإجابة: $\frac{١٦}{٣}$.

لإيجاد المساحة والتكامل من خلال الرسم:

المساحة دائماً موجبة سواء فوق أو تحت محور السينات أما التكامل فهو موجب فوق محور السينات وسالب تحت محور السينات.

مثال: من خلال الرسم التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) خلال الفترة [-١، ٤] أجب عما يلي:



١- $\int_{-١}^{٠}$ ق(س) . دس = -٣ (تحت محور السينات)

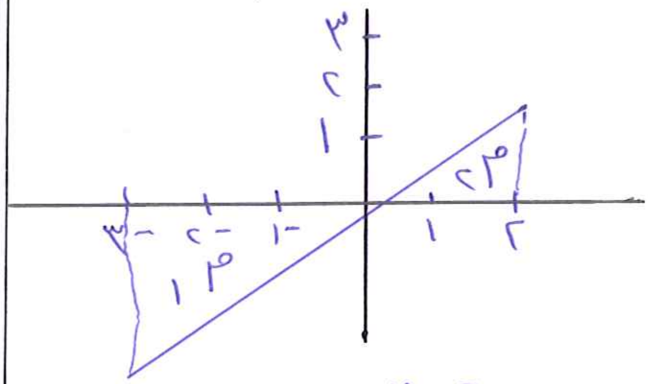
٢- $\int_{٠}^{٤}$ ق(س) . دس = ٩ فوق محور السينات.

٣- $\int_{٠}^{-١}$ ق(س) . دس = $-\int_{-١}^{٠}$ ق(س) . دس = ٣

٤- $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) . دس = -٣ + ٩ = ٦

٥- المساحة الكلية = |-٣| + ٩ = ١٢ وحدة مربعة.

سؤال ٥: يمثل الشكل التالي المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات فإذا كانت م١ = ٤ جد $\int_{-٣}^{٢}$ ق(س) . دس.



م٢ = مساحة المثلث.

= $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع.

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ = ٢ وحدة مربعة.

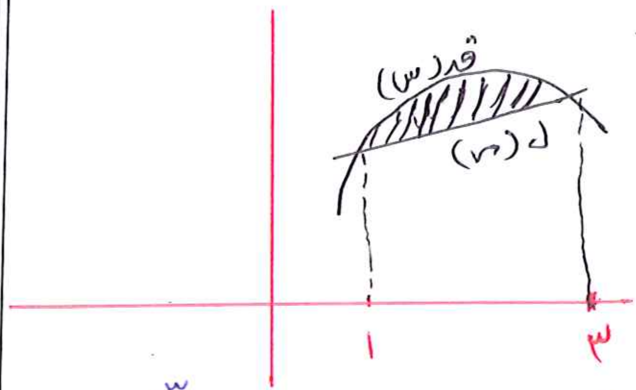
$\int_{-٣}^{٢}$ ق(س) . دس = -٤ + ٢ = -٢

ملاحظة: ممكن أن يأتي السؤال بشكل رسمة لاقترانين بينهما مساحة محصورة ويطلب السؤال إيجادها.

سؤال: على الشكل المجاور منحنى الاقترانين ق(س) و ل(س) إذا علمت أن:

$\int_1^3 2$ق(س) . دس $= 12$ و

$\int_3^1$ ل(س) . دس $= -4$ فما مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين في الفترة [1، 3]؟



$\int_1^3 2$ق(س) . دس $= 12 \Leftarrow \int_1^3$ ق(س) . دس

$= \frac{12}{2} = 6$

$\int_1^3$ ل(س) . دس $= -\int_3^1$ ل(س) . دس $= 4$

م $= \int_1^3$ ل(س) . دس ← ل(س) ≤ ق(س).

$= \int_1^3$ ق(س) . دس $- \int_1^3$ ل(س) . دس.

$= 6 - 4 = 2$ وحدة مربعة.

سؤال: جد المساحة بين ق(س) = س^2 والمستقيم ص = 4 والواقعة في الربع الأول؟

الإجابة: $\frac{16}{3}$

الدرس السادس: تطبيقات التكامل المحدود (تطبيقات اقتصادية).

1- الإيراد الكلي د(س) وهو تكامل الإيراد الحدي د(س) = $\int$ دَ(س) . دس.

وهنا ج = صفر لأنه عند بيع صفر وحدة (س = 0) يكون الإيراد = صفر

مثال: إذا كان الإيراد الحدي لبيع س من قطعة من منتج ما يعطى بالاقتران:

دَ(س) = 3س^2 − 4س + 3.

جد الإيراد الناتج عن بيع 5 قطع من هذا المنتج؟

أولاً يجب إيجاد الإيراد الكلي.

د(س) = $\int$ دَ(س) . دس.

= $\int$ 3س^2 − 4س + 3 . دس.

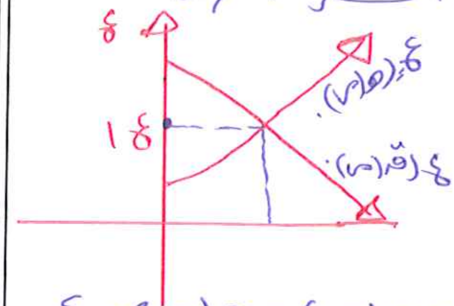
د(س) = س^3 − 2س^2 + 3س

د(5) = $5^3 - 2\times5^2 + 3\times5 = 90$ دينار.

فائض المستهلك وفائض المنتج نعلم أنه كلما زاد السعر قل الطلب ونعبر عن هذه العلاقة بالإقتران $ع = ق(س)$ ويسمى اقتران السعر – الطلب.

وكلما زاد السعر زادت الوحدات المنتجة ونعبر عن هذه العلاقة بالإقتران $ع = هـ(س)$.

ويسمى اقتران السعر – العرض



عندما تساوى $ق(س_1) = هـ(س_1) = ع_1$

يكون $س_1$ كمية التوازن بين العرض والطلب

و $ع_1$ سعر التوازن.

فائض المستهلك: $ف_ك = \int_0^{س_1} ق(س)\,دس - ع_1 س_1$

فائض المنتج $ف_ج = ع_1 س_1 - \int_0^{س_1} هـ(س)\,دس$

لإيجاد كمية التوازن $س_1$ نساوي إقتران (السعر – الطلب) باقتران (السعر – العرض) أو نساوي أحدهما بالسعر ع وتجد قيمة $س_1$.

لإيجاد سعر التوازن $ع_1$ نجد $ع_1 = ق(س_1)$ أو $ع_1 = هـ(س_1)$ أي أننا نعوض قيمة $س_1$ في أي من الاقترانين وتكون النتيجة $ع_1$

مثال: إذا كان $ع = ق(س) = 42 - 3س$ تمثل اقتران السعر – الطلب حيث ع السعر بالدينار و س عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند $ع_1 = 30$ جد قيمة فائض المستهلك؟

$ف_ك = \int_0^{س_1} ق(س)\,دس - ع_1 س_1$

نجد $س_1$: $(ق(س_1) = ع_1)$.

$42 - 3س_1 = 30 \Leftarrow س_1 = 4$

$ف_ك = \int_0^{4} (42 - 3س)\,دس - (30 \times 4)$.

$= [42س - \frac{3}{2}س^2]_0^4 - 120$

$= 144 - 120 = 24$ دينار

مثال: إذا كان اقتران السعر – العرض لمنتج معين هو $ع = هـ(س) = 11 + 2س$ حيث س عدد القطع المنتجة و ع السعر بالدينار وأن السعر ثابت عند $ع_1 = 21$ جد قيمة فائض المنتج؟

$ف_ج = ع_1 س_1 - \int_0^{س_1} هـ(س)\,دس$.

نجد $س_1$: $(هـ(س_1) = ع_1)$

$11 + 2س_1 = 21 \Leftarrow س_1 = 5$

$ف_ج = (21 \times 5) - \int_0^{5} (11 + 2س)\,دس$

$= 105 - [11س + س^2]_0^5$

$ف_ج = 105 - 80 = 25$ دينار

ملاحظة: إذا كان نتيجة س١ عدد سالب نهمل.

مثال: إذا كان اقتران السعر – العرض لمنتج معين هو ع = هـ(س) = ٥ + ٣س² حيث ع السعر بالدينار، س عدد القطع المنتجة وأن السعر ثابت عند ع١ = ٥٣ دينار، جد فائض المنتج؟

هـ(س١) = ع١ ⟸ ٥ + ٣ × س١² = ٥٣

⟸ س١² = ١٦ ⟸ س١ = ٤ ، س١ = -٤

هنا نهمل -٤ ∴ س١ = ٤ .

فا ج = ع١ س١ - $\int_{0}^{\text{س١}}$ هـ(س) ء س .

= (٥٣ × ٤) - $\int_{0}^{4}$ ٥ + ٣س² ء س

= ٢١٢ - (٥س + س³ $\Big]_{0}^{4}$)

= ٢١٢ - ٨٤ = ١٢٨

مثال: إذا كان ع = ق(س) = ١٠٠ - ٥س تمثل اقتران السعر – الطلب حيث س عدد القطع المنتجة و ع السعر بالدينار وأن السعر ثابت عند س١ = ٥ جد قيمة فائض المستهلك

فا س = $\int_{0}^{\text{س١}}$ ق(س) ء س - ع١ س١

نجد ع١ : (ع١ = ق(س١)) .

ع١ = ق(٥) = ١٠٠ - ٥ × ٥ = ٧٥

فا س = $\int_{0}^{5}$ ١٠٠ - ٥س ء س - (٥ × ٧٥)

= ١٠٠س - $\frac{5}{2}$ س² $\Big]_{0}^{5}$ - ٣٧٥

= $\frac{875}{2}$ - ٠ - ٣٧٥ = $\frac{875}{2}$ - $\frac{750}{2}$

= $\frac{125}{2}$ = ٦٢,٥ دينار .

مثال: إذا كان اقتران السعر – الطلب لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٨ - ٣س وكان اقتران السعر – العرض لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = ٢س + ١٣ جد ما يلي:

١- كمية التوازن .

ق(س١) = هـ(س١) ⟸ ٤٨ - ٣س١ = ٢س١ + ١٣ ⟸ ٣٥ - ٥س١ = ٠

⟸ س١ = ٧

٢- سعر التوازن ع١ = هـ(س١) = ق(س١) =

ق(٧) = ٤٨ - ٣ × ٧ = ٢٧

٣- فائض المستهلك عند سعر التوازن .

فا س = $\int_{0}^{\text{س١}}$ ق(س) ء س - ع١ س١

= $\int_{0}^{7}$ ٤٨ - ٣س ء س - ٢٧ × ٧

= $\frac{147}{2}$ دينار

ع- فائض المنتج عند سعر التوازن .

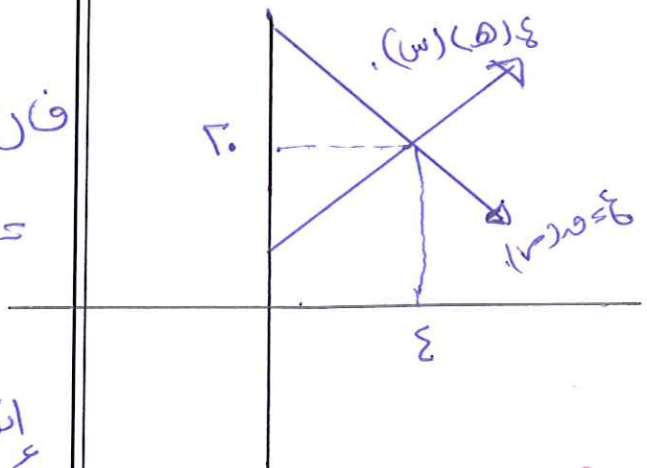
فا ج = ع١ س١ − $\int_{0}^{س_1}$ هـ(س) دس .

= ٢٧×٧ − $\int_{0}^{٧}$ ٢س+١٣ دس = ٤٩ دينار

مثال: من خلال الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقترانين السعر – الطلب والسعر – العرض جد ما يلي:

كمية التوازن: س١ = ٤

سعر التوازن: ع١ = ٣٠



إذا علمت أن ع = ق(س) = ٩٠ − ٤س جد فائض المستهلك؟

فا ك = $\int_{0}^{س_1}$ ق(س) دس − ع١ س١

= $\int_{0}^{٤}$ ٩٠ − ٤س دس − ٣٠×٤

= ٩٠س − ٢س^2 $\Big]_{0}^{٤}$ − ٨٠ =

٢٤٨ دينار .

مثال: إذا كان اقتران السعر – الطلب لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٠ − ٢س

وكان اقتران السعر – العرض هو:

ع = هـ(س) = ٦س جد فائض المستهلك عند سعر التوازن؟

ق(س) = هـ(س) ⟸ ٤٠ − ٢س١ = ٦س١ .

٤٠ − ٨س١ = ٠ ⟸ س١ = ٥

ع١ = هـ(س١) = هـ(٥) = ٦×٥ = ٣٠ ∴ ع١ = ٣٠

فا ك = $\int_{0}^{٥}$ ٤٠ − ٢س دس − ٣٠×٥

= ١٧٥ − ١٥٠ = ٢٥ دينار .

انتهت الوحدة بحمد الله.