التكـــــامـــــــل

❖ التكامل هو العملية العكسية للاشتقاق (التفاضل).

❖ هنالك نوعان للتكامل هما

١. غير محدود $\int$ ٢. محدود $\int_{ب}^{أ}$

❖ و للتعرف على مفهوم التكامل :

نبدأ بالسؤال التالي : من هو الاقتران الذي كانت مشتقته ٢ س

نلاحظ عزيزي الطالب ان هنالك عدد لانهائي من الاقترانات التي مشتقتها ٢ س وهي:

١) $ن(س) = س^{٢}$

٢) $ن(س) = س^{٢} - ٧$

٣) $ن(س) = س^{٢} + ٥$

٤) $ن(س) = س^{٢} + \frac{١}{٦}$

❖ هنالك عدد لانهائي من الاقترانات و بشكل عام نقول :

$ن(س) = س^{٢} + جـ$ ، حيث جـ ثابت (يدعى ثابت التكامل).

اي انه اذا كان $ن'(س) = ٢س$

فإن الاقتران الذي مشتقته $ن'(س) = ٢س$

هو $ن(س) = س^{٢} + جـ$ (يدعى بالتكامل غير محدود)

ويرمز له بالرمز $\int$ وبدلا من ذلك تكتب $\int ٢س\,دس = س^{٢} + جـ$

وبشكل عام $\int ن'(س)\,دس = ن(س) + جـ$

✓ تمرين : جد كل مما يلي :

١) $\int ٣س^{٢}\,دس = س^{٣} + جـ$

٢) $\int ٦\,دس = ٦س + جـ$

٣) $\int ٤س^{٣}\,دس = س^{٤} + جـ$

٤) $\int ٥س^{٤}\,دس =$ .....

٥) $\int هـ'(س)\,دس = هـ(س) + جـ$

☝ **ملاحظة :** أعتبر $\int$ من هو الاقتران الذي كانت مشتقته الشيء الموجود داخل التكامل .

مثال : اذا كان ص = ∫ (٥س + ١٠) ءس ، جد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل : أشتق الطرفين

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥س + ١٠ (ما داخل التكامل)

مشتقة التكامل الغير محدود هي دائما ما داخل التكامل

تمرين : اذا كان ن(س) = ∫ $\frac{٤}{٣س + ٤}$ ءس ، جد ن′(٣) ؟

الحل :

مثال : اذا كان ن(س) = ∫ (س ^{٣} + ٦س) ءس ، جد ن″(س) ؟

الحل : اشتق الطرفين

∴ ن′(س) = س ^{٣} + ٦س (ما داخل التكامل)

∴ ن″(س) = ٣س ^{٢} + ٦

مثال : اذا كان ∫ ن′(س) ءس = ٤س ^{٢} + ٦س + ١٥ ، جد ن′(١) ؟

حل رقم (١)

∫ ن′(س) ءس = ن(س)

ن(س) = ٤س ^{٢} + ٦س + ١٥

ن′(س) = ٨س + ٦

ن′(١) = ٨ × ١ + ٦

٨ + ٦ = ١٤

حل رقم (٢)

اشتق الطرفين

ن′(س) = ٨س + ٦

ن′(١) = ٨ × ١ + ٦

= ١٤

تذكر ان :

(١) ∫ ن′(س) ءس = ن(س) + جـ

(٢) ∫ ن″(س) ءس = ن′(س) + جـ

(٣) ∫ ت(ن) ءن = ع(ن) + جـ

(٤) ∫ ع(ن) ءن = ف(ن) + جـ

حيث : ت التسارع

ع السرعة

ف المسافة

بدلالة الزمن (ن)

تمرين : اذا كان ∫ ن′(س) ءس = ٢س ^{٤} + ٥س ^{٣} + ١٢ ، جد ن′(١) ؟

ملاحظة : الاشتقـــــاق يلغـــــي التكامـــــل.

مثال : اذا كان $\int$ن(س)دس = س^{٣} + س^{٢} + ١٠س + ١٥ ، جد ن′(٢) ؟

الحل : إجباري الاشتقاق للطرفين (لماذا؟؟؟؟)

ن(س) = ٣س^{٢} + ٢س + ١٠

ن′(س) = ٦س + ٢ نشتق مرة اخرى

ن′(٢) = ٦ × ٢ + ٢

= ١٢ + ٢

= ١٤

قواعد التكامل غير محدود

اولاً) تكامل الثابت:

اي ان $\int$أدس = أس + جـ ، يعني الثابت × س + جـ ،حيث أ ثابت

امثلة :

١. $\int$٦دس = ٦س + جـ

٢. $\int$−٤دس = −٤س + جـ

٣. $\int\frac{١}{٢}$دس = $\frac{١}{٢}$س + جـ

٤. $\int$١٧دس = ١٧س + جـ

٥. $\int$٢دص = ٢ص + جـ

٦. $\int\frac{-١}{٢}$دو = ...

٧. $\int\sqrt{٣}$دع = ...

٨. $\int\pi$دهـ = ...

٩. $\int\frac{٤دس}{٥}$ = ...

١٠. صفر دس = ...

ملاحظة : اذا اختلف الرمز عن الدالة يعتبر الرمز (ثابت).

سائد براهمه ٠٧٨٥٤٠٠٦١٨

١١. $\int ص\,ءس = ص س + جـ$

١٢. $\int ٦^{س}\,ءس = \frac{٦^{س}}{ن ٦} + جـ$

١٣. $\int ءس = س + جـ$

ثانياً) $\int س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$ ، **نضيف للاس دائما (١) ونقسم على الاس الجديد.**

امثلة:

١. $\int س^{٣}\,ءس = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{٤} س^{٤} + جـ$

٢. $\int س^{-٥}\,ءس = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

$= \frac{-١}{٤} س^{-٤} + جـ$

٣. $\int س^{٨}\,ءس = \frac{س^{٩}}{٩} + جـ$

$= \frac{١}{٩} س^{٩} + جـ$

٤. $\int س\,ءس =$ .....

٥. $\int س^{\frac{١}{٣}}\,ءس = \frac{س^{١+\frac{١}{٣}}}{١+\frac{١}{٣}} + جـ$

$= \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + جـ \quad = \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

٦. $\int س^{\frac{٢}{٥}}\,ءس = \frac{س^{\frac{٧}{٥}}}{\frac{٧}{٥}} + جـ$

$= \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

ركز ☺

←الاس الموجب نزيد واحد +

←والاس السالب نطرح واحد −

في حالة الاس الكسري الموجب

البسط + المقام

المقام نفسه

٧. $\int س^{-\frac{١}{٢}}\,ءس = \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ$

$= ٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

في حالة الاس الكسري السالب

المقام – البسط

المقام نفسه

٨. $\int س^{\sqrt{٢}}\,ءس = \frac{س^{١+\sqrt{٢}}}{١+\sqrt{٢}} + جـ$ ، تبقى كما هي.

ملاحظة: نحول الجذور الى أسس حسب القاعدة $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

مثل:

- $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$
- $\sqrt[٣]{س} = س^{\frac{١}{٣}}$
- $\sqrt{س^{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$
- $\sqrt{س^{٥}} = س^{\frac{٥}{٢}}$

٩. $\int \sqrt[٣]{س^{٢}}\,ءس = \int س^{\frac{٢}{٣}}\,ءس$

$= \frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

١٠. $\int \sqrt[٥]{س}\,ءس = \int س^{\frac{١}{٥}}\,ءس$ ، نحول اولاً

$= \frac{س^{\frac{٦}{٥}}}{\frac{٦}{٥}} + جـ$ ، تكامل ثابتاً

$= \frac{٥}{٦} س^{\frac{٦}{٥}} + جـ$

انتبااااه:

١١. $\int \left(\frac{١}{٨}\right)^{٢}\,ءس = \left(\frac{١}{٨}\right)^{٢} س + جـ$ ، ثابت

سائد براهمه ٠٧٨٥٤٠٠٦١٨

١٢. $\int \pi^{٢}\,ds = \pi s^{٢} + ج$

١٣. $\int \frac{١}{s^{٤}}\,ds = \int s^{-٤}\,ds = \frac{s^{-٣}}{-٣} + ج$

١٤. $\int \frac{١}{s^{-٧}}\,ds = \int s^{٧}\,ds = \frac{s^{٨}}{٨} + ج$

بالمقدار الكسري نرفع المقام لاعلى مع تغيير اشارة الاس ثم نكامل

ثالثاً) $\int s^{ن}\,ds = \frac{s^{ن+١}}{ن+١} + ج$ ، (**تكامل ثابت » اقتران = الثابت » تكامل الاقتران**)

امثلة :

١. $\int ٦s^{٢}\,ds = ٦\frac{s^{٣}}{٣} + ج$ ، (اختصر ان امكن)

$= ٢s^{٣} + ج$

٢. $\int ٨s\,ds = ٨\frac{s^{٢}}{٢} + ج$

$= ٤s^{٢} + ج$

٣. $\int ٧s^{٣}\,ds =$ .....

.....

٤. $\int \frac{١}{٤} \times s^{\frac{١}{٣}}\,ds = \frac{١}{٤} \times \frac{s^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} s^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{١٦} s^{\frac{٤}{٣}} + ج$

٥. $\int ٢\sqrt{s}\,ds = \int ٢s^{\frac{١}{٢}}\,ds$

$= ٢\frac{s^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = ٢ \times \frac{٢}{٣} s^{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{٤}{٣} s^{\frac{٣}{٢}} + ج$

سائد براهمه ٠٧٨٥٤٠٠٦١٨

٦. $\int س\,ds = ...$

٧. $\int ١٠\,س^{-٦}\,ds = ...$

٨. $\int \frac{٤}{س^{٣}}\,ds = ...$

٩. $\int \frac{-٢}{\sqrt{س}}\,ds = ...$

تذكررررررر:

- $\frac{س^{ا}}{س^{ب}} = س^{ا-ب}$
- $س^{ا} \times س^{ب} = س^{ا+ب}$

١٠. $\int \frac{٥س}{٢}\,ds = \frac{٥}{٢} \times \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

$= \frac{٥}{٤} س^{٢} + جـ$

قاعدة : $\int س^{ن}\,ds = \frac{س^{ن+١}}{ا \times (ن+١)} + جـ$

١١. $\int \frac{س^{٥}}{٧}\,ds = ...$

رابعاً) $\int (ب(س) \mp هـ(س))\,ds = \int ب(س)\,ds \mp \int هـ(س)\,ds$ **(التكامل يوزع في حالة الجمع والطرح فقط)**

١. $\int (٦س^{٢} - ٤س + ٨)\,ds = \int ٦س^{٢}\,ds - \int ٤س\,ds + \int ٨\,ds$

$= ٦\frac{س^{٣}}{٣} - ٤\frac{س^{٢}}{٢} + ٨س + جـ$

$= ٢س^{٣} - ٢س^{٢} + ٨س + جـ$

☝ ملاحظة :نضيف جـ واحدة لكل التكاملات لانها تعبر عن جميع الثوابت ولا يشترط ان نجزئ التكامل في كل مرة .

٢. $\int (٨س^{٣} + ٦س^{٢} + ٨س - ٩)\,ds = ٨\frac{س^{٤}}{٤} + ٦\frac{س^{٣}}{٣} + ٨\frac{س^{٢}}{٢} - ٩س + جـ$

$= ٢س^{٤} + ٢س^{٣} + ٤س^{٢} - ٩س + جـ$

٣. $\int (٤س + ٥)\,د س =$ .....

٤. $\int (س + ١)\,د س =$ .....

٥. $\int (٥س^{٤} + ٨س^{٣} + ٦س - ١٥)\,د س =$ .....

تذكررررر:لا يوجد تكامل حاصل ضرب او قسمة

٦. $\int س(٤س^{٢} - ٥س + ١)\,د س$

اذا رأيت سين خارج قوس (القوس ليس له أس)نقوم بادخال سين داخل القوس .

$= \int (٤س^{٣} - ٥س^{٢} + س)\,د س$

$= ٤\frac{س^{٤}}{٤} - ٥\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

$= س^{٤} - \frac{٥}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + جـ$

والان اليك بعض الاقترانات والتكاملات التي يراد لها تحويلات اولا ثم تكامل .

٧. $\int (س + ٣)^{٢}\,د س = \int (س^{٢} + ٦س + ٩)\,د س$ (نفك الاقواس اولا)

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٦\frac{س^{٢}}{٢} + ٩س + جـ$

تذكررررر: $(أ \mp ب)^{٢} = أ^{٢} \mp ٢أب + ب^{٢}$

٨. $\int (٢س + ٣)(٣س + ٥)\,د س$ (ضرب اقواس)

$= \int (٦س^{٢} + ١٠س + ٩س + ١٥)\,د س$

$= \int (٦س^{٢} + ١٩س + ١٥)\,د س$

$= ٦\frac{س^{٣}}{٣} + ١٩\frac{س^{٢}}{٢} + ١٥س + جـ$

$= ٢س^{٣} + \frac{١٩}{٢}س^{٢} + ١٥س + جـ$

سائد براهمه ٠٧٨٥٤٠٠٦١٨