المنير

في الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

توجيهي أدبي – فندقي وسياحي

منهاج جديد

٢٠١٨

الأستاذ منير أبو بكر - ٠٧٧٥٤٥٧٩٢٥

الفهرس

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

الفصل الأول : النهايات ٣
أولاً : مفهوم النهاية ٣
ثانياً : نظريات النهايات ١٧
ثالثاً : نهاية خارج قسمة اقترانين ٣١
رابعاً: نهاية اقتران الجذر النوني ٤٣
الفصل الثاني : الاتصال ٤٨
أولاً : الاتصال عند نقطة ٤٨
ثانياً : نظريات الاتصال ٦١
أسئلة الوحدة ٧٤

الفصل الأول النهايات

أولاً مفهوم النهاية

- يتم التعبير عن نهاية اقتران عند نقطة بالرموز التالية :

$$\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$$

وتقرأ بالشكل التالي : نهاية الاقتران ق عندما تقترب س من العدد أ تساوي ل

- أنواع الاقترانات التي ستتم دراسة نهايتها :

اقتران كثير حدود :

مثال : $ق(س) = ٣س^{٢} + ٥س + ٧$

اقتران نسبي :

مثال : $ق(س) = \frac{٢س + ١}{س^{٢} + ١}$

اقتران الجذر النوني :

مثال : $ق(س) = \sqrt[٣]{س + ٣}$

اقتران متشعب :

مثال :

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & ، س > ٠ \\ ٥ - س^{٢} & ، س \leq ٠ \end{cases}$$

طرق إيجاد نهاية الاقتران : توجد ثلاثة طرق لإيجاد نهاية الاقتران :

١- الجداول ٢- الرسم ٣- التعويض والنظريات

النهاية بالإعتماد على الجداول :

س	٣	٢,٥	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢	١,٩٩٩	١,٩	١,٥	١,١	١
ق(س)	٤	٣,٥	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩٩	٢,٩	٢,٥	٢,١	٢

اليمين اليسار

من خلال الجدول نلاحظ عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين فإن ق(س) تقترب من العدد ٣

ونعبر عن ذلك بالرموز : $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٣

وكذلك عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار فإن فإن ق(س) تقترب من العدد ٣

ونعبر عن ذلك بالرموز : : $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٣

أي أن ق(س) تقترب من العدد ٣ كلما اقتربت س من العدد ٢ من كلا الاتجاهين (اليسار ، واليمين) ونعبر عن ذلك بالرموز :

$$\lim_{س \to ٢} \text{ق(س)} = ٣$$

سؤال إضافي : بالاعتماد على الجدول أوجد $\lim_{س \to ٣}$ (س + ٥)

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠
ق(س)	٨,١	٨,٠١	٨,٠٠١		٧,٩٩	٧,٩٨	٧,٩٠

الحل :

عندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليمين فإن ق(س) تقترب من العدد ٨ ونكتب :

$$\lim_{س \to ٣^+} (س + ٥)$$

وعندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليسار فإن ق(س) تقترب من العدد ٨ ونكتب :

$$\lim_{س \to ٣^-} (س + ٥)$$

وبالتالي نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد ٣ تساوي ٨ ونكتب $\lim_{س \to ٣}$ (س + ٥) = ٨

سؤال إضافي : بالاعتماد على الجدول أوجد $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

٣

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠
ق(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١		٥,٩٩	٥,٩٨	٥,٩٠

الحل : $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٤

سؤال إضافي : بالاعتماد على الجدول أوجد $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١		١,٩٩	١,٩٨	١,٩٠
ق(س)	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١		٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠

نهـــــــــــاق(س) = ٣
س ← ٢-

نهـــــــــــاق(س) = ٥ ⟵ نهـــــــــــاق(س) ≠ نهـــــــــــاق(س)
س ← ٢+ س ← ٢- س ← ٢+

∴ نهـــــــــــاق(س) غير موجودة
س ← ٢

النهاية بالاعتماد على الرسم :

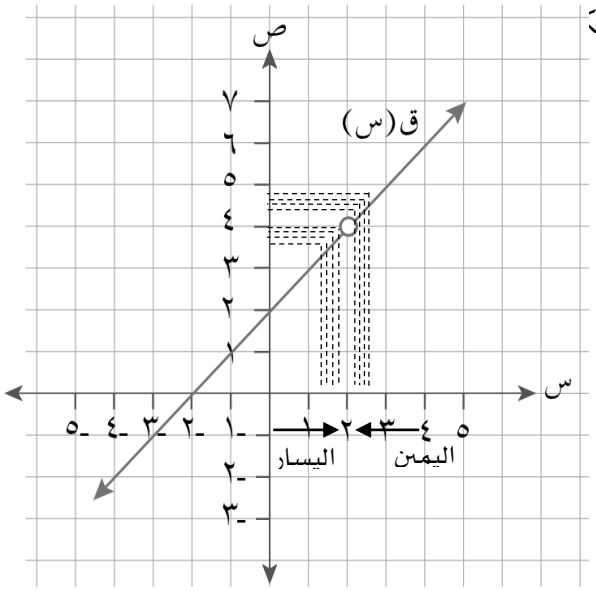
مثال توضيحي :

اعتمادا على الشكل نبحث عن نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب س من العدد ٢ أي:

نهـــــــــــا ق(س)
س ← ٢

الحل :

لإيجاد النهاية من اليمين نتخيل شخص يسيرعلى محور السينات باتجاه العدد ٢ من اليمين وعندما يصل إلى أقرب موضع من العدد ٢ نجد صورته على محور الصادات يقترب من العدد ٤ ونكتب :



نهـــــــــــا ق(س) = ٤
س ← ٢+

وبنفس الطريقة نوجد النهاية من اليسار ونتخيل شخص يسير باتجاه العدد ٢ من اليسار وعندما يصل أقرب موضع من العدد ٢ تكون صورته على محور الصادات تقترب من العدد ٤ ونكتب :

نهـــــــــــا ق(س) = ٤
س ← ٢-

بما أن : نهـــــــــــا ق(س) = نهـــــــــــا ق(س) = ٤
س ← ٢+ س ← ٢-

فإن نهـــــــــــا ق(س) = ٤
س ← ٢

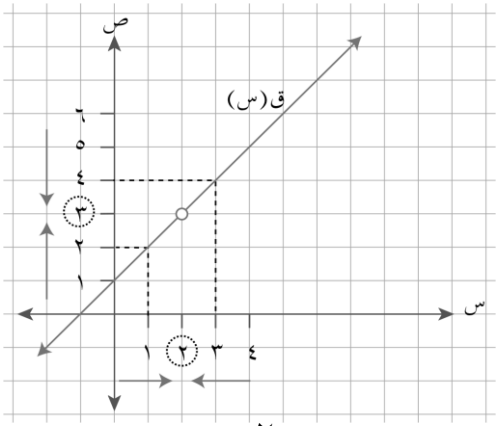
ملاحظات :

- إذا لم يحدد السؤال إيجاد النهاية من اليمين أو اليسار فإننا نوجدها من الجهتين
- تكون النهاية موجودة إذا كانت : نهـــــــــــا ق(س) = نهـــــــــــا ق(س)
  س ← أ- س ← أ+
- إذا كانت : نهـــــــــــا ق(س) ≠ نهـــــــــــا ق(س) عندها تكون النهاية غير موجودة .
  س ← أ- س ← أ+

- الدائرة الفارغة تعني أن الاقتران عندها غير معرف .
- الدائرة المغلقة تعني أن الاقتران معرف عند هذه النقطة .
- نأخذ بالاعتبار الدوائر المغلقة والمفتوحة فقط عند إيجاد الصورة .

مثال الكتاب ١ صفحة ١٤

اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران : ق(س) = $\frac{س^{٢} - س - ٢}{س - ٢}$ جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)



١) ق(٢)

٢) نهـــــــــــا ق(س)
س ← ٢+

٣) نهـــــــــــا ق(س)
س ← ٢-

٤) نهـــــــــــا ق(س)
س ← ٢

الحل :

١) بما أن مجال الاقتران هو ح - {٢} فإن ق(س) غير معرف عندما س = ٢ ، ونعبر عن ذلك برسم دائرة مفتوحة على منحنى الاقتران ق عندما س = ٢

٢) نهـــــــــــا ق(س) = ٣
س ← ٢+

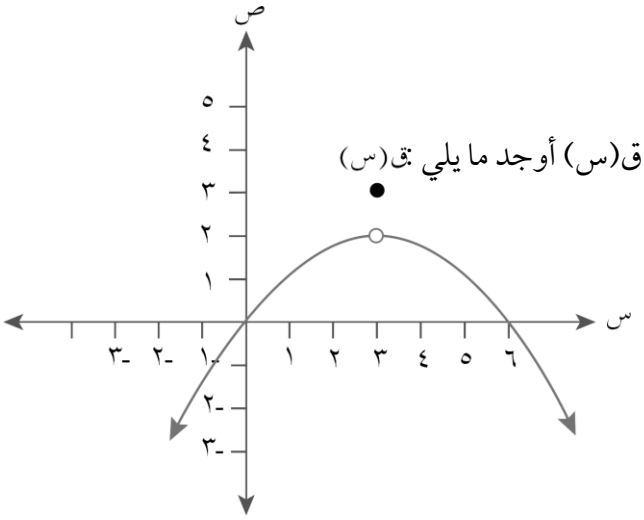
٣) نهـــــــــــا ق(س) = ٣
س ← ٢-

٤) بما أن نهـــــــــــا ق(س) = نهـــــــــــا ق(س) = ٣ فإن :
س ← ٢+ س ← ٢-

نهـــــــــــا ق(س) = ٣
س ← ٢

سؤال إضافي :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



١- ق(٣)

٢- نهـــــــــــا ق(س)
س ← ٣+

٣- نهـــــــــــا ق(س)
س ← ٣-

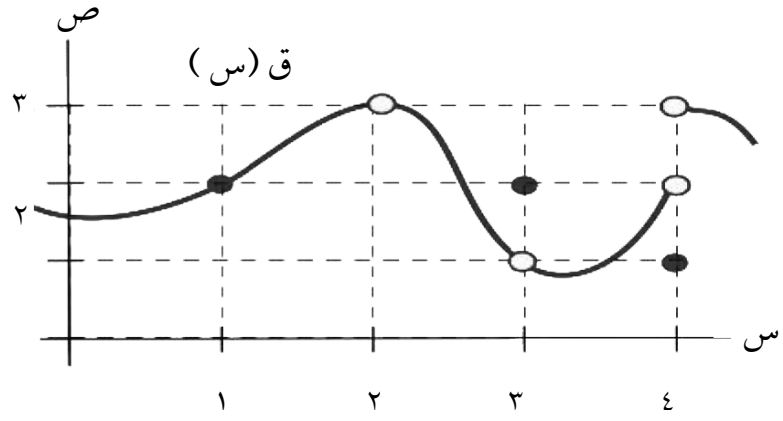
٤- نهـــــــــــا ق(س)
س ← ٣

الحـل :

ق(٣) = ٣　　النقطة س= ٣ تقابلها الدائرة المغلقة

نهـــــــا ق(س) = ٢　　نهـــــــاق(س) = ٢
س ← ٣+

∴ نهـــــــاق(س) = ٢
س ← ٣



سؤال إضافي :

بالاعتماد على الجدول أوجد :

١- نهـــــــا ق(س)
س ← ١

٢- نهـــــــا ق(س)
س ← ٢

٣- نهـــــــا ق(س)
س ← ٤

الحـــــل :

نهـــــــا ق(س) = نهـــــــا ق(س) = ٢ ← نهـــــــا ق(س) = ٢
س ← ١+　　س ← ١-　　س ← ١

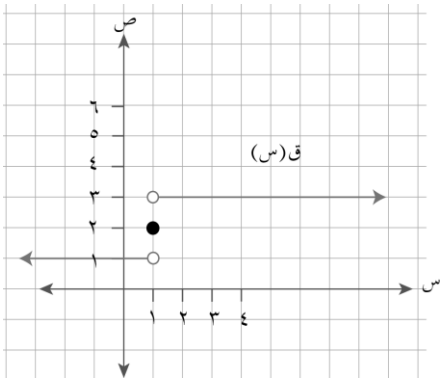
نهـــــــا ق(س) = نهـــــــا ق(س) = ٣ ← نهـــــــا ق(س) = ٣
س ← ٢+　　س ← ٢-　　س ← ٢

نهـــــــا ق(س) = ٣　　نهـــــــا ق(س) = ٢ ← نهـــــــا ق(س) غير موجودة
س ← ٤+　　س ← ٤-　　س ← ٤

مثال الكتاب ٢　صفحة ١٥

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران المتشعب :

ق(س) = { ١ ، س < ١ ; ٢ ، س = ١ ; ٣ ، س > ١ }



جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

١) ق(١)

٢) نهـــــــاق(س)
س ← ١-

٣) نهـــــــاق(س)
س ← ١+

٤) نهـــــــاق(س)
س ← ١

الحل :

نلاحظ أن ق هو اقتران متشعب عندما س = ١ ، ومن الشكل نلاحظ ان :

١) ق(١) = ٢

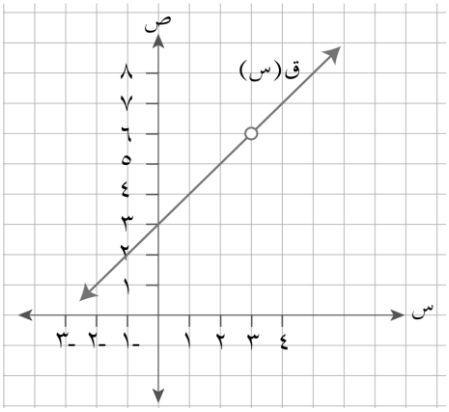
٢) $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ١

٣) $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٣

٤) بما أن $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) فإن $\lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة

تدريب الكتاب ١ صفحة ١٦

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران : ق(س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$



جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) ق(٣) ٢) $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) ٤) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

الحل : بما أن مجال الاقتران ق هو ح - {٣}

١) فإن ق(س) غير معرف عندما س = ٣ ، ونعبر عن ذلك برسم دائرة مفتوحة على منحنى الاقتران ق

عندما س = ٣

٢) $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٦

٣) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٦

٤) بما أن : $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٦

فإن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٦

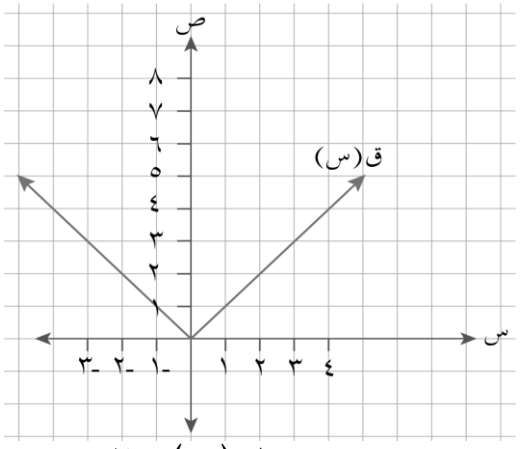
مثال الكتاب ٣ صفحة ١٧

اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران

ق(س) = { -س ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠ }

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

- ق(٠)
- نهـــــــــــاق(س)
  س ← ٢
- نهـــــــــــاق(س)
  س ← ٠



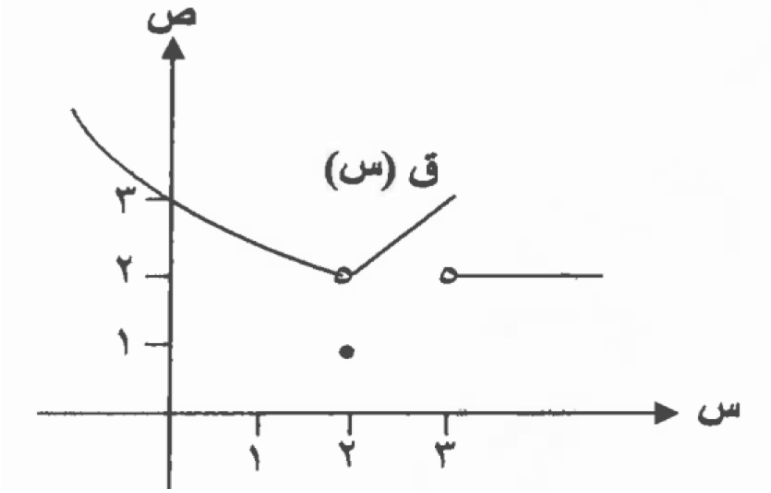
نلاحظ من الشكل أن :

ق(٠) = ٠

نهـــــــــــاق(س) = ٢ ، نهـــــــــــاق(س) = ٢ ، ∴ نهـــــــــــاق(س) = ٢
س ← ٢⁻ س ← ٢⁺ س ← ٢

نهـــــــــــاق(س) = ٠ ، نهـــــــــــاق(س) = ٠ ، ∴ نهـــــــــــاق(س) = ٠
س ← ٠⁻ س ← ٠⁺ س ← ٠

سؤال إضافي :



اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :

أ) نهـــــــــــاق(س)
س ← ٣⁺

ب) نهـــــــــــاق(س)
س ← ٠

الحـــل :

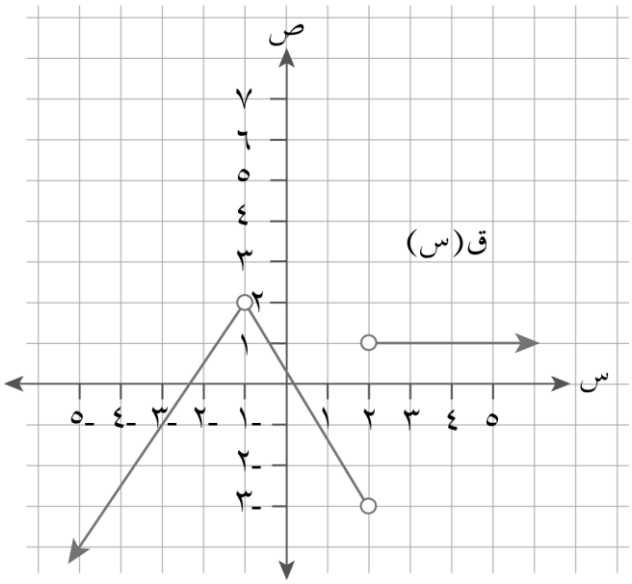
نهـــــــــــاق(س) = ٢
س ← ٣⁺

نهـــــــــــاق(س) = ٣
س ← ٠⁻

نهـــــــــــاق(س) = ٣
س ← ٠⁺

نهـــــــــــاق(س) = نهـــــــــــاق(س) ⟵ نهـــــــــــاق(س) = ٣
س ← ٠⁻ س ← ٠⁺ س ← ٠

تدريب الكتاب ٢ صفحة ١٨



اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :

- $\lim_{س \to -١} ق(س)$
- $\lim_{س \to ٢} ق(س)$
- $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

الحـــل :

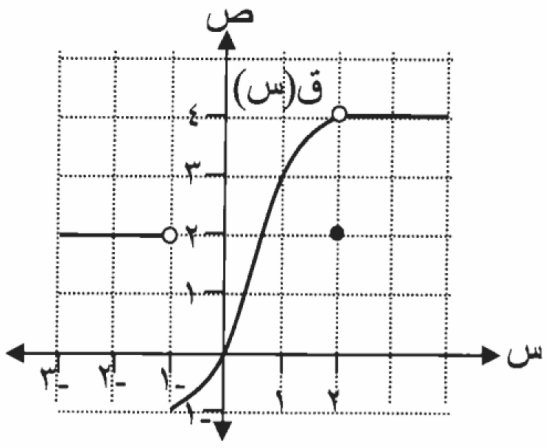
$\lim_{س \to -١^+} ق(س) = ٢$

$\lim_{س \to -١^-} ق(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to -١} ق(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = -٣$ ، $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ١$

سؤال إضافي :



اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :

- ق(٢)
- $\lim_{س \to ٢} ق(س)$
- $\lim_{س \to -١^-} ق(س)$

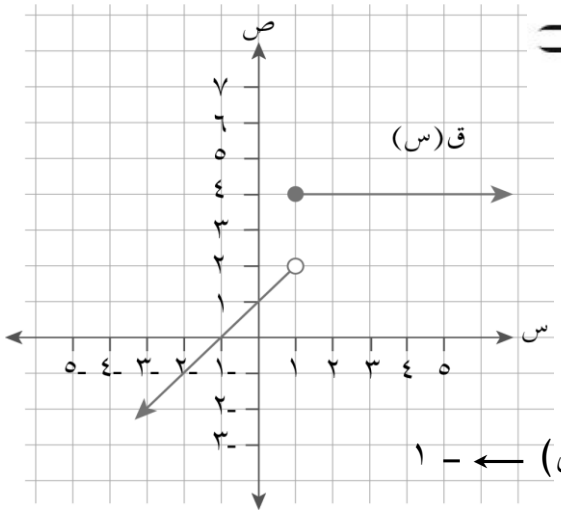
الحـــل :

ق(٢) = ٢

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

$\lim_{س \to -١^-} ق(س) = ٢$

مثال الكتاب ٤ صفحة ١٨



اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد كلا مما يأتي :

١) قيمة الثابت أ ، حيث $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = -١

٢) قيمة الثابت ب ، حيث $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = ٠

٣) قيمة الثابت جـ ، حيث $\lim_{س \to جـ}$ ق(س) غير موجودة

الحل :

١) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = -١ نلاحظ من الشكل عندما ق(س) ⟵ -١

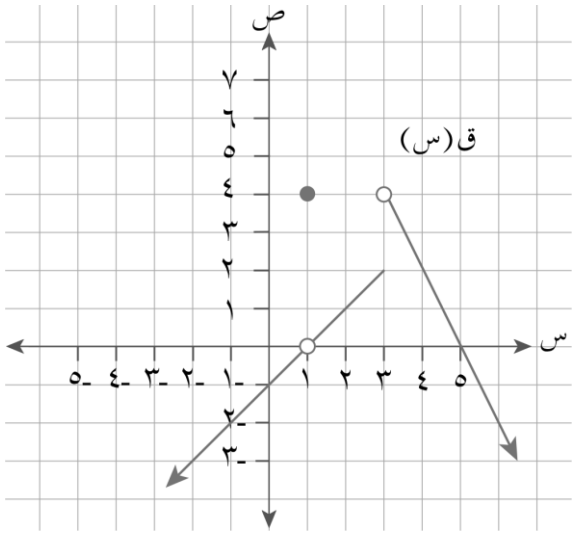
فإن قيمة س تقترب من العدد -٢ إذن أ = -٢

٢) $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = ٠ من الشكل نلاحظ عندما ق(س) ⟵ ٠ فإن س ⟵ -١ أي ب = -١

٣) $\lim_{س \to جـ}$ ق(س) غير موجودة إذن $\lim_{س \to جـ^-}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to جـ^+}$ ق(س)

وهذا يتحقق عندما س ⟵ ١ ، إذن : جـ = ١

تدريب الكتاب ٣ صفحة ١٩



اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد كلا مما يأتي :

١) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

٢) قيمة الثابت أ ، حيث $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ٠

٣) قيمة الثابت ب ، حيث $\lim_{س \to ب}$ ق(س) غير موجودة

الحل :

١) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ١

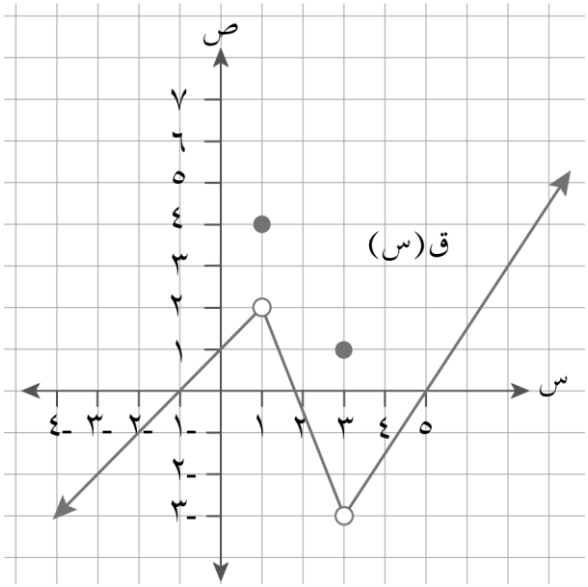
٢) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = -١

نلاحظ من الشكل عندما ق(س) ⟵ ٠ فإن س ⟵ ١ وكذلك س ⟵ ٥ أي أن أ = ١ و أ = ٥

٣) نلاحظ من الشكل أن $\lim_{س \to ب}$ ق(س) غير موجودة عندما س ⟵ ٣ أي ب= ٣

سؤال إضافي :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



- ق(٣)
- ق(١)
- $\lim_{س \to ١}$ ق(س)
- $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

الحـــل :

ق(٣) = ١
ق(١) = ٤

$\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٢

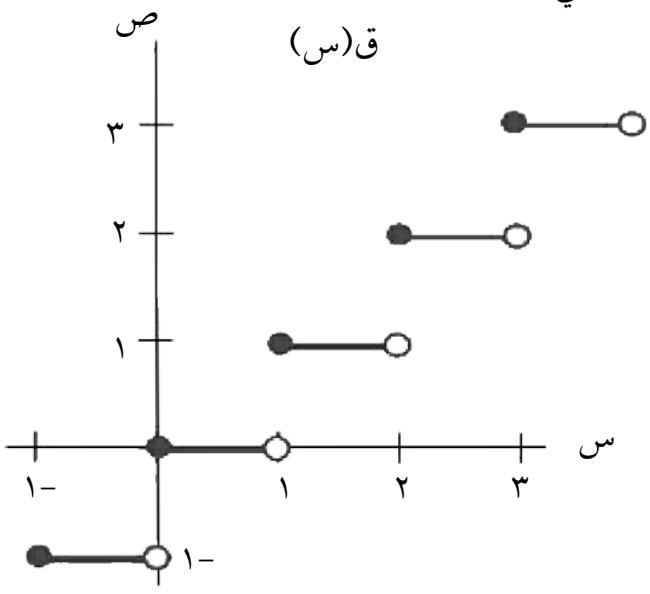
$\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ٢ ⟵

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢

$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = -٣ ، $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = -٣ ⟵ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = -٣

سؤال إضافي :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



- $\lim_{س \to -١}$ ق(س)
- $\lim_{س \to ١}$ ق(س)
- $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

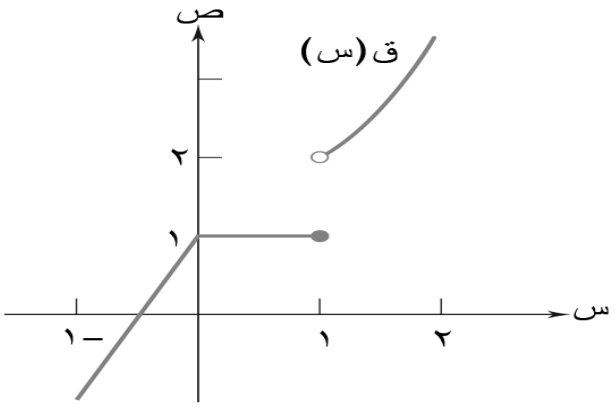
الحـــل :

$\lim_{س \to -١^-}$ ق(س) غير موجودة

$\lim_{س \to -١^-}$ ق(س) = ٠
$\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ١ ،
$\lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ١ ، $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

سؤال إضافي :



اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س)

أوجد ما يلي :

أ) $\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س)

ت) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س)

ث) ق(-٢)

الحل :

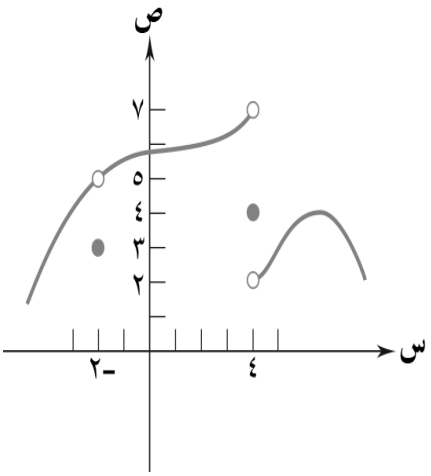
أ) $\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = ٢

ب) $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) = ٧

ت) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) غير موجودة لأن $\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س)

ث) ق(-٢) = ٣

سؤال إضافي :



اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س)

أوجد ما يلي :

أ) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

ج) ق(١)

الحل :

أ) $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ١

$\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٢

بما أن : $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) فإن $\lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة

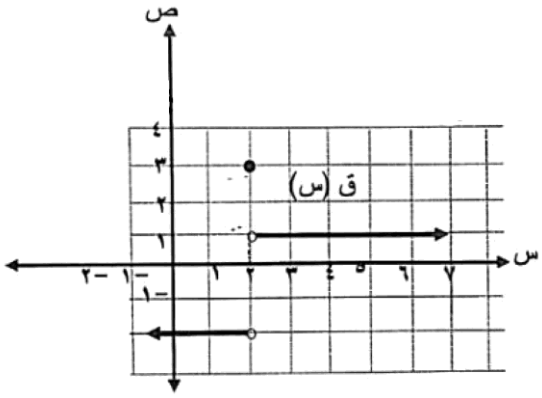
ب) $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ١ ، $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ١

بما أن $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) فإن $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ١

ج) ق(١) = ١

سؤال دورة ٢٠١٨ شتوية منهاج جديد

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،



ما $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) ؟

أ) ١ ب) -٢

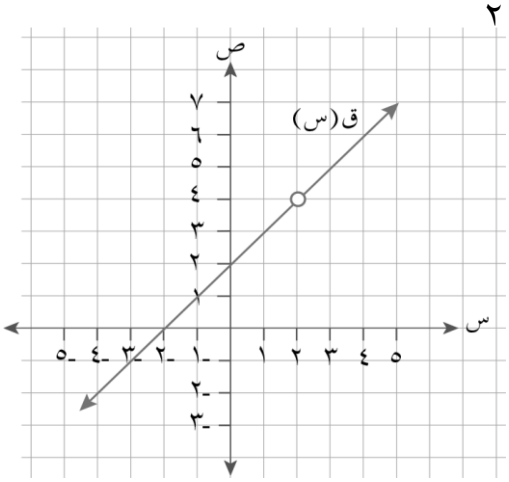
ج) ٣ د) غير موجودة

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = -٢ ، $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ١

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

حل الأسئلة

١) اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران : $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$



جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

أ) ق(٢) ب) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

جـ) ق(٣) د) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

الحل :

أ) ق(٢) غير موجودة لأن الاقتران غير معرف عندما س = ٢

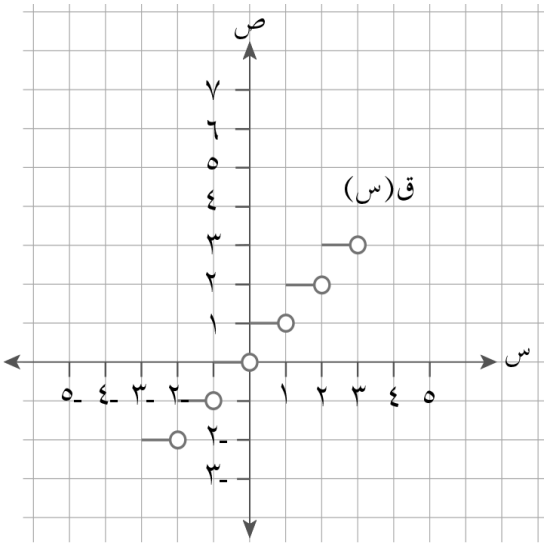
ب) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٤$ ومنه $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

جـ) ق(٣) = ٥

د) $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٥$

---

٢) اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)



أ) $\lim_{س \to ٠,٥} ق(س)$ ب) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س)$

جـ) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س)$ د) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

الحل :

أ) $\lim_{س \to ٠,٥} ق(س) = ١$

ب) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٣$

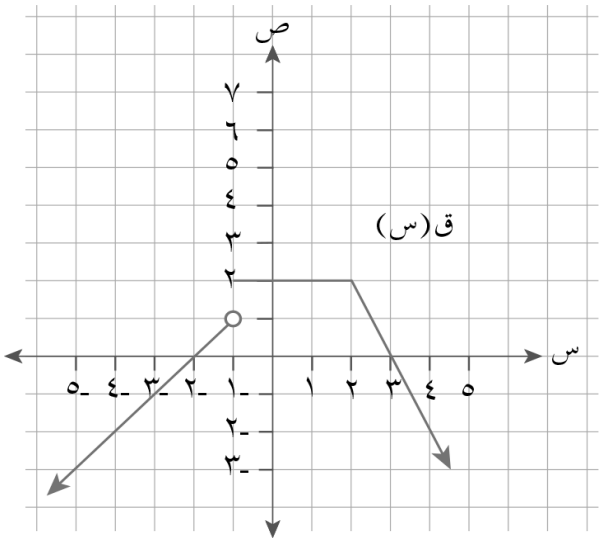
ج) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة وذلك لأن :

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) \neq \lim_{س \to ٢^+} ق(س)$

٣) اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

أ) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) ب) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)



جـ) قيمة أ ، حيث $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة

د) قيمة ب ، حيث $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = صفراً

الحل :

أ) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢

ب) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢

ج) تكون $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة إذن

$\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س)

وهذا يتحقق عندما س ⟵ ـ١ أي أ = ـ١

د) $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = صفراً نلاحظ من الشكل أن ق(س) ⟵ صفر عندما

س⟵ ٣ وكذلك س ⟵ ـ٢ أي : ب = ـ٢ ، ٣

ثانياً نظريات النهايات

١) نهاية الاقتران الثابت يساوي الثابت نفسه ونعبر عن ذلك كما يلي

$\lim_{س \to أ}$ جـ = جـ حيث أ و جـ عددين حقيقيين

مثال : $\lim_{س \to ٥}$ ٣ = ٣ ، $\lim_{س \to ٣}$ ـ٩ = ـ٩

٢) نهاية مجموع اقترانين = نهاية الاقتران الأول + نهاية الاقتران الثاني ، ونعبر عن ذلك

$\lim_{س \to أ}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) + $\lim_{س \to أ}$ هـ(س)

٣) فرق اقترانين = نهاية الاقتران الأول – نهاية الاقتران الثاني ، ونعبر عن ذلك :

$\lim_{س \to أ}$ (ق(س) – هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) – $\lim_{س \to أ}$ هـ(س)

٤) جداء اقترانين = نهاية الاقتران الأول × نهاية الاقتران الثاني ، ونعبر عن ذلك :

$\lim_{س \to أ}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) × $\lim_{س \to أ}$ هـ(س)

سؤال إضافي :

إذا كان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٦ ، $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = ـ٢

أوجد : $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) + هـ(س)) ، $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) – هـ(س))

∴ $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) × هـ(س))

الحل : $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + $\lim_{س \to ١}$ هـ(س)

= ٦ + (ـ ٢) = ٤

$\lim_{س \to ١}$ (ق(س) – هـ(س)) = $\lim_{س \to ١}$ ق(س) – $\lim_{س \to ١}$ هـ(س)

= ٦ – (ـ ٢) = ٨

$\lim_{س \to ١}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\lim_{س \to ١}$ ق(س) × $\lim_{س \to ١}$ هـ(س)

= ٦ × ـ٢ = ـ١٢

مثال الكتاب ١ صفحة ٢٣

إذا علمت ان $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٩$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = -٣$ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

١) $\lim_{س \to ١} [ق(س) + هـ(س)]$

٢) $\lim_{س \to ١} [ق(س) \times هـ(س)]$

الحل :

١) $\lim_{س \to ١} [ق(س) + هـ(س)] = \lim_{س \to ١} ق(س) + \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$= ٩ + -٣ = ٦$

٢) $\lim_{س \to ١} [ق(س) \times هـ(س)] = \lim_{س \to ١} ق(س) \times \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$= ٩ \times -٣ = -٢٧$

مثال الكتاب ٢ صفحة ٢٤

إذا علمت أن $\lim_{س \to ٢} (س - ١) = ١$ ، $\lim_{س \to ٢} (س+١) = ٣$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\lim_{س \to ٢} (س^{٢} - ١)$

٢) $\lim_{س \to ٢} ٢س$

الحل :

١) $\lim_{س \to ٢} (س^{٢} - ١) = \lim_{س \to ٢} (س - ١)(س+١)$ حيث $س^{٢} - ١ = (س-١)(س+١)$

$= \lim_{س \to ٢} (س - ١) \times \lim_{س \to ٢} (س + ١) = ١ \times ٣ = ٣$

٢) $\lim_{س \to ٢} ٢س = \lim_{س \to ٢} [(س-١)+(س+١)]$ حيث $٢س = (س-١)+(س+١)$

$= \lim_{س \to ٢} (س-١) + \lim_{س \to ٢} (س+١) = ١ + ٣ = ٤$

نتائـــج هامة :

- نهـــاية عدد ثابت × اقتران = العدد الثابت × نهـــاية الاقتران ..... ونعبر عن ذلك بالرموز

$\lim_{س \to أ} [جـ ق(س)] = جـ \times \lim_{س \to أ} ق(س) = جـ$ حيث جـ عدد حقيقي

مثال : إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ فأوجد : $\lim_{س \to ٣} ٦ق(س)$

الحـل : نهـــــــــا ٦ ق(س) = ٦ × نهـــــــــا ق(س) = ٦ × ٤ = ٢٤
س ← ٣ س ← ٣

نتيجة : نهـــــــــا (ق(س))^{ن} = (نهـــــــــا ق(س))^{ن}
س ← أ س ← أ

مثال الكتاب ٣ صفحة ٢٦

جد قيمة كل ما يأتي : ١) نهـــــــــا س^{٣} ٢) نهـــــــــا (س^{٣}+٤س^{٢}−٥س−٧)
س ← ٣ س ← ٢

١) نهـــــــــا س^{٣} = (نهـــــــــا ق(س))^{٣} = (٣)^{٣} = ٢٧
س ← ٣ س ← ٣

٢) نهـــــــــا (س^{٣}+٤س^{٢}−٥س−٧) = نهـــــــــاس^{٣} + نهـــــــــا٤س^{٢} −نهـــــــــا٥س − نهـــــــــا٧
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

٣) = (نهـــــــــاس)^{٣} + ٤(نهـــــــــاس)^{٢} − ٥نهـــــــــا س − نهـــــــــا٧
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

= ٨ + ١٦ − ١٠ − ٧ = ٧

- **إذا كان الاقتران كثير حدود تحسب نهايته بالتعويض المباشر** نهـــــــــاق(س) = ق(أ)
س ← أ

مثال الكتاب ٤ صفحة ٢٦

جد قيمة نهـــــــــا(٣س^{٣} + ٥س + ٧)
س ← ١

الحل :

بما أن ق(س) = نهـــــــــا(٣س^{٣} + ٥س + ٧) اقتران كثير حدود فإن :
س ← ١

نهـــــــــاق(س) = ق(١) = ٣(١)^{٣} + ٥(١) + ٧ = ١٥
س ← ١

تدريب الكتاب ١ صفحة ٢٧

جد نهاية ما يأتي :

نهـــــــــا(س^{٦}− ٥س^{٢} + ٤س + ٩)
س ← −١

الحـل :

نهـــــــــا(س^{٦}− ٥س^{٢} + ٤س + ٩)
س ← −١

= نهـــــــــا س^{٦}− نهـــــــــا ٥س^{٢} + نهـــــــــا ٤س + نهـــــــــا ٩
س ← −١ س ← −١ س ← −١ س ← −١

= (نهـــــــــا س)^{٦}−٥ (نهـــــــــا س)^{٢}+٤ نهـــــــــا س + نهـــــــــا ٩
س ← −١ س ← −١ س ← −١ س ← −١

$= (-١)^{٦} - ٥(-١)^{٢} + ٤(-١) + ٩ = ١ - ٥ - ٤ + ٩ = ١$

مثال الكتاب ٥ صفحة ٢٧

إذا علمت أن $\lim_{س \to ٢} [ق(س) + س + ١] = ٩$ ، فجد قيمة $\lim_{س \to ٢} [ق(س)]^{٢}$:

الحل :

$\lim_{س \to ٢} [ق(س) + س + ١] = ٩$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} س + \lim_{س \to ٢} ١ = ٩$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) + ٢ + ١ = ٩$ ومنه $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٩ - ٣ = ٦$

إذن : $\lim_{س \to ٢} [ق(س)]^{٢} = (\lim_{س \to ٢} ق(س))^{٢} = (٦)^{٢} = ٣٦$

تدريب الكتاب ٦ صفحة ٢٧

إذا كانت $\lim_{س \to -١} [ق(س) + س^{٣} - ٣] = ٥$ ، فجد قيمة $\lim_{س \to -١} ٣ [ق(س)]^{٢}$

الحل :

$\lim_{س \to -١} [ق(س) + س^{٣} - ٣] = \lim_{س \to -١} ق(س) + \lim_{س \to -١} س^{٣} - \lim_{س \to -١} ٣ = ٥$

$\lim_{س \to -١} ق(س) + (\lim_{س \to -١} س)^{٣} - \lim_{س \to -١} ٣ = ٥$

$\lim_{س \to -١} ق(س) + (-١)^{٣} - ٣ = \lim_{س \to -١} ق(س) - ١ - ٣ = \lim_{س \to -١} ق(س) - ٤ = ٥$

$\lim_{س \to -١} ق(س) = ٥ + ٤ = ٩$

$\lim_{س \to -١} ٣ [ق(س)]^{٢} = ٣ (\lim_{س \to -١} ق(س))^{٢} = ٣ (٩)^{٢} = ٣ \times ٨١ = ٢٤٣$

مثال الكتاب ٦ صفحة ٢٨

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س + ١ & ، س < ٢ \\ س^{٢} & ، س \geq ٢ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) ق(٢) ٢) نهـــــــاق(س) س ← ١

٢) نهـــــــاق(س) س ← ٣ ٣) نهـــــــاق(س) س ← ٢

الحل :

١) ق(٢) = (٢)^{٢} = ٤

٢) نهـــــــا ق(س) = نهـــــــا(٥س + ١) = ٥×١ + ١ = ٦
س ← ١ س ← ١

٣) نهـــــــا ق(س) = نهـــــــاس^{٢} = (٣)^{٢} = ٩
س ← ٣ س ← ٣

٤) نلاحظ أن س= ٢ هي القيمة التي يتشعب عندها الاقتران لذلك نحسب النهاية من اليمين واليسار

نهـــــــاق(س) = نهـــــــا(٥س + ١) = ٥×٢ + ١ = ١١
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{-}$

نهـــــــاق(س) = نهـــــــاس^{٢} = (٢)^{٢} = ٤
س ← ٢$^{+}$ س ← ٢$^{+}$

بما أن نهـــــــاق(س) ≠ نهـــــــاق(س) فإن نهـــــــاق(س) غير موجودة
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{+}$ س ← ٢

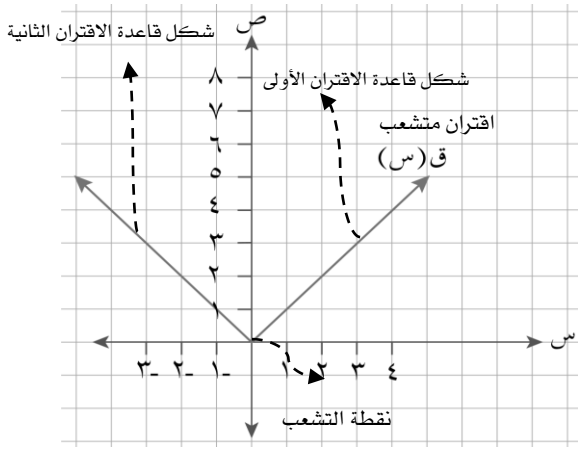
نتيجة :

- إذا كان لدينا اقتران متشعب ق(س) وكان هذا الاقتران يتشعب عند نقطة (أ) فإن

نهـــــــاق(س) تكون موجودة إذا كانت نهـــــــاق(س) = نهـــــــاق(س)
س ← أ س ← أ $^{+}$ س ← أ $^{-}$

تعريف الاقتران المتشعب : هو الاقتران المعروف بأكثر من قاعدة

يمثل الشكل المبين اقتران متشعب له قاعدتين ونقطة تشعب عند النقطة س = ٠



تدريب الكتاب ٣ صفحة ٢٩

١) إذا كان ق(س) { س^{٢} + ١ ، س ≥ ٣ ؛ ٤س − ٢ ، س < ٣

أوجد قيمة ما يلي : أ) ق(٢) ، ب) نهـــــــا ق(س) ، جـ) نهـــــــا ق(س) ، د) نهـــــــا ق(س)
س ← ١ س ← ٤ س ← ٣

الحل :

أ) ق(٢) = (٢)^{٢} + ١ = ٤ + ١ = ٥

ب) $\lim_{س \to 1}$ ق(س) = $\lim_{س \to 1}$ (س^{٢} + ١) = (١)^{٢} + ١ = ١ + ١ = ٢

جـ) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٤}$ (٤س − ٢) = ٤×٤ − ٢ = ١٦ − ١٤ = ١٤

د) نلاحظ أن س = ٣ هي القيمة التي يتشعب عندها الاقتران لذلك نحسب النهاية من اليمين واليسار :

$\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ (س^{٢} + ١) = (٣)^{٢} + ١ = ٩ + ١ = ١٠

$\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ (٤س − ٢) = ٤×٣ − ٢ = ١٢ − ٢ = ١٠

بما أن $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س) فإن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ١٠

٢) إذا كان :

ق(س) = { س + ٦ ، س ∈ ص
٤س + ١ ، س ∉ ص

حيث ص = مجموعة الأعداد الصحيحة

فجد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) (إن وجدت)

بما أن س تقترب من العدد ٣ ولاتساويه فهي تساوي العدد ٣ وأجزاء عشرية أي س ليست عددا صحيحا

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣}$ (٤س+١) = $\lim_{س \to ٣}$ (٤×٣ +١) = ١٣

مثال الكتاب ٧ صفحة ٢٩

إذا كان :

هـ(س) = { س^{٣} + ١ ، س > ٣
٢٠ ، س = ٣
أس +١ ، س < ٣

وكانت $\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل :

بما أن $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) موجودة فإن $\lim_{س \to ٣^{-}}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ هـ(س)

∴ $\lim_{س \to ٣^{-}}$ (س^{٣} + ١) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ (أس + ١)

ومنه : (٣)^{٣} + ١ = ٣أ + ١

٢٨ = ٣أ + ١

٢٧ = ٣أ ∴ أ = ٩

تدريب الكتاب ٤ صفحة ٣٠

١) إذا كان : ق(س) = { أ س^٥ ، س < ١ ؛ ب س^٢ + ٧ ، س ≤ ١

وكانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ١٦ ، $\lim_{س \to ١}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة كل الثابتين : أ ، ب ؟

الحل :

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ١٦ ومنه $\lim_{س \to ٣}$ (ب س^٢ + ٧) = ١٦

ب(٣)^٢ + ٧ = ١٦ ومنه ٩ب = ١٦ - ٧ ومنه ٩ب = ٩ ومنه ب = ١

بما أن $\lim_{س \to ١}$ ق(س) موجودة فإن $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س)

$\lim_{س \to ١^-}$ (أ س^٥ - أ) = $\lim_{س \to ١^+}$ (ب س^٢ + ٧) بالتعويض

أ × ١^٥ - أ = ب(١)^٢ + ٧ ومنه ٥ - أ = ٨ ومنه أ = ٥ - ٨ = -٣

٢) إذا كان :

ق(س) = { س^٣ ، س < أ ؛ ٤٠ ، س ≤ أ

وكانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل :

بما أن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة فإن $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س)

$\lim_{س \to أ^-}$ س^٣ = $\lim_{س \to أ^+}$ ٤٠ بالتعويض

أ^٣ = ٤٠ ومنه أ^٣ = ٨ ومنه أ = ٢

سؤال إضافي :

إذا كانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = -٨ ، $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ٤ ، فجد :

$\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) / هـ(س) - (هـ(س))^٢ + س^٥)

الحل :

$\frac{\lim_{س \to ٣} ق(س)}{\lim_{س \to ٣} هـ(س)}$ - ($\lim_{س \to ٣}$ هـ(س))^٢ + $\lim_{س \to ٣}$ س^٥

= $\frac{-٨}{٤}$ - (٤)^٢ + ٥ × ٣ = -٢ - ١٦ + ١٥ = -٣

صفحة ٣١

حل الأسئلة

١) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٨ ، $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = -٢ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

أ) $\lim_{س \to ٣}$ (٤ق(س) + ٢ هـ(س))

ب) $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) - ٢ هـ(س))

جـ) $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) × هـ(س))

د) $\lim_{س \to ٣}$ ٥ق(س)

هـ) $\lim_{س \to ٣}$ (٢ق(س) + ١)

و) $\lim_{س \to ٣}$ ((هـ(س))^{٣} +٣س -٧)

ز) $\lim_{س \to ٣}$ (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٢س + ٤)

الحل :

أ) $\lim_{س \to ٣}$ (٤ق(س) + ٢ هـ(س)) = $\lim_{س \to ٣}$ ٤ق(س) + $\lim_{س \to ٣}$ ٢هـ(س)

= ٤ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) + ٢ $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ٤× ٨ + ٢ × -٢ =٣٢ - ٤ = ٢٨

ب) $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) - ٢ هـ(س)) = $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) -٢ $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س)

= ٨ - ٢ × -٢ = ٨ + ٤ = ١٢

ج) $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) × $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س)

= ٨ × -٢ = -١٦

د) $\lim_{س \to ٣}$ ٥ق(س) = ٥ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٥ × ٨ = ٤٠

هـ) $\lim_{س \to ٣}$ (٢ق(س) + ١) = $\lim_{س \to ٣}$ ٢ق(س) + ١ = ٢$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) + ١

= ٢× ٨ + ١ = ١٧

و) $\lim_{س \to ٣}$ ((هـ(س))^{٣} +٣س -٧) = ($\lim_{س \to ٣}$ هـ(س))^{٣} + ٣ $\lim_{س \to ٣}$ س - $\lim_{س \to ٣}$ ٧

= (-٢)^{٣} + ٣×٣ - ٧ = -٨ + ٩ - ٧ = -٦

ز) $\lim_{س \to ٣}$ (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٢س + ٤) =

= ٢$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) +٣ $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) + ٢$\lim_{س \to ٣}$ س + $\lim_{س \to ٣}$ ٤

=٢× ٨ + ٣×-٢ +٢×٣ + ٤ = ١٦ -٦ + ٦ + ٤ = ٢٠

---

٢) جد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\lim_{س \to -٢}$ (٣س^{٤} - ٥س^{٣} + ٦س -٧) = ٣$\lim_{س \to -٢}$ س^{٤} - ٥$\lim_{س \to -٢}$ س^{٣} + ٦$\lim_{س \to -٢}$ س - ٧

= ٣(-٢)^{٤} -٥ (-٢)^{٣} + ٦× -٢ - ٧ = ٣×١٦ + ٤٠ - ١٢ - ٧ = ٦٩

ب) $\lim_{س\to 1}$ (س^{٢}+١) (س^{٣}+٥س−٢) = $\lim_{س\to 1}$ (س^{٢} +١) × $\lim_{س\to 1}$ (س^{٣}+٥س−٢)

= ($\lim_{س\to 1}$ س^{٢} + ١) × ($\lim_{س\to 1}$ س^{٣} + ٥ $\lim_{س\to 1}$ س − ٢)

= ((١)^{٢} + ١) × ((١)^{٣} + ٥×١ − ٢) = ٢ × ٤ = ٨

جـ) $\lim_{س\to -1}$ (س^{٣} + ٢)^{٥} = ($\lim_{س\to -1}$ (س^{٣}+٢))^{٥} = ((−١)٣ + ٢)^{٥} = (−١ + ٢)^{٥} = ١

---

٣) إذا كانت $\lim_{س\to -2}$ (٣ق(س) +٢س + ١) = ٢٧ ، فجد $\lim_{س\to -2}$ (ق(س))^{٣}

$\lim_{س\to -2}$ (٣ق(س) +٢س + ١) = ٢٧

$\lim_{س\to -2}$ ٣ق(س) + $\lim_{س\to -2}$ ٢س + ١ = ٢٧

$\lim_{س\to -2}$ ٣ق(س) + ٢×−٢ + ١ = ٢٧　ومنه $\lim_{س\to -2}$ ٣ق(س) − ٤ + ١ = ٢٧

$\lim_{س\to -2}$ ٣ق(س) = ٢٧ +٣ = ٣٠ نقسم عل ٣ فيكون $\lim_{س\to -2}$ ق(س) = ١٠

إذن $\lim_{س\to -2}$ (ق(س))^{٣} = ($\lim_{س\to -2}$ ق(س))^{٣} = (١٠)^{٣} = ١٠٠٠

---

٤) إذا كانت $\lim_{س\to 3}$ (م س^{٢} + ٥س +١) = ٢٥ فأوجد قيمة الثابت م

الحـل :

$\lim_{س\to 3}$ (م س^{٢} + ٥س +١) = $\lim_{س\to 3}$ م س^{٢} + $\lim_{س\to 3}$ ٥س + $\lim_{س\to 3}$ ١ = ٢٥

م ($\lim_{س\to 3}$ س)^{٢}+ ٥$\lim_{س\to 3}$ س + $\lim_{س\to 3}$ ١ = ٢٥

م (٣)^{٢} + ٥ × ٣ + ١ = ٢٥

٩م +١٥ + ١ = ٢٥　ومنه ٩م + ١٦ = ٢٥　ومنه ٩م = ٢٥ − ١٦ = ٩　ومنه م = ١

---

٥) إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & ، س < ٠ \\ ٥ - س^{٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$$

فجد قيمة كل مما يأتي :

الحل :

أ) $\lim_{س\to 1}$ ق(س)　　ب) $\lim_{س\to -2}$ ق(س)　　جـ) $\lim_{س\to 0}$ ق(س)

أ) $\lim_{س\to 1}$ ق(س) = $\lim_{س\to 1}$ (٥ − س^{٢}) = ٥ − (١)^{٢} = ٤

ب) $\lim_{س\to -2}$ ق(س) = $\lim_{س\to -2}$ (٤س + ١) = ٤×−٢ + ١ = −٨ + ١ = −٧

جـ) $\lim_{س\to 0^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س\to 0^{-}}$ (٤س+١) = ٤×٠ + ١) = ١

$\lim_{س\to 0^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س\to 0^{+}}$ (٥ − س^{٢}) = ٥ − (٠)^{٢} = ٥

بما أن $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) $\neq \lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) فإن $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) غير موجودة

٦) إذا كان :

هـ(س) = { س^٢ + ١ ، س $\neq$ ٣
{ ٨ ، س = ٣

فجد قيمة مما يأتي :

أ) $\lim_{س \to ٥}$ هـ(س) ب) $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) جـ) هـ(٣)

الحل :

ملاحظة هامة : عند وجود إشارة ($\neq$) فإننا نعوض بها دائما ولا نهتم بقاعدة (=) وذلك لأن النهاية هي قيمة تقترب ولا تساوي

أ) $\lim_{س \to ٥}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٥}$ (س^٢ + ١) = $\lim_{س \to ٥}$ س^٢ + $\lim_{س \to ٥}$ ١

= ($\lim_{س \to ٥}$ س)^٢ + $\lim_{س \to ٥}$ ١ = (٥)^٢ + ١ = ٢٥ + ١ = ٢٦

ب) $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٣}$ (س^٢ + ١) = $\lim_{س \to ٣}$ س^٢ + $\lim_{س \to ٣}$ ١

= ($\lim_{س \to ٣}$ س)^٢ + $\lim_{س \to ٣}$ ١ = (٣)^٢ + ١ = ٩ + ١ = ١٠

جـ) هـ (٣) = ٨

---

٧) إذا كان :

ق(س) = { أس + ٤ ، س < ٢
{ ٥س^٢ + أ ، س $\leqslant$ ٢

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل :

بما أن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة فإن : $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^-}$ (أس+٤) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (٥س^٢ + أ) ومنه أ×٢ + ٤ = ٥(٢)^٢ + أ

٢أ + ٤ = ٢٠ + أ ومنه ٢أ ـ أ = ٢٠ ـ ٤ ومنه أ = ١٦

---

٨) إذا كان :

ق(س) = { س^٢ +١ ، س < ٢
{ ٥س ، ٢ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٦
{ س^٢ ـ ٦ ، س > ٦

فجد قيمة كل من النهايات الآتية(إن وجدت) :

أ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) ب) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) د) $\lim_{س \to ٦}$ ق(س)

الحل :

أ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠}$ (س^{٢} +١) = (٠)^{٢} + ١ = ١

ب) بما أن س=٢ هي قيمة يتشعب عندها الاقتران لذلك نحسب النهاية من اليمين واليسار

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ (س^{٢} +١) = (٢)^{٢} + ١ = ٥

$\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ٥س = ٥ × ٢ = ١٠

بما أن $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) فإن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

جـ) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٤}$ ٥س = ٥ × ٤ = ٢٠

د) بما أن س= ٦ قيمة يتشعب عندها الاقتران فإن :

$\lim_{س \to ٦^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٦^{-}}$ ٥س = ٥ × ٦ = ٣٠

$\lim_{س \to ٦^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٦^{+}}$ (س^{٢} ـ ٦) = (٦)^{٢} ـ ٦ = ٣٠

بما ان $\lim_{س \to ٦^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٦^{+}}$ ق(س)=٣٠ فإن $\lim_{س \to ٦}$ ق(س) = ٣٠

---

٩) إذا كان : ق(س) = { ٣س ـ أ ، س > ٢ ؛ ١٠ ، س < ٢ }

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ ؟

بما أن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة فإن

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ (٣س ـ أ) = ١٠

٣×٢ ـ أ = ١٠

٦ ـ أ = ١٠

أ = ٦ ـ ١٠ = ـ ٤

سؤال إضافي :

إذا كانت $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = ٧ ، $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س) = ـ٣ ، فجد :

نهـــــــــا (٢ ق(س) + (هـ (س))^{٢} – س)
س← –٢

الحل :

نهـــــــــا (٢ ق(س) + (هـ (س))^{٢} – س) =
س← –٢

= نهـــــــــا ٢ق(س) + نهـــــــــا (هـ (س))^{٢} – نهـــــــــا س
س← –٢ س← –٢ س← –٢

= ٢ نهـــــــــا ق(س) + نهـــــــــاهـ(س))^{٢} – نهـــــــــا س
س← –٢ س← –٢ س← –٢

= ٢ × ٧ + (–٣)^{٢} – (–٢) = ١٤ + ٩ + ٢ = ٢٥

سؤال إضافي :

إذا كانت نهـــــــــا (ل س^{٢} + ٣) = ٧ فأوجد قيمة الثابت ل
س← –١

نهـــــــــا (ل س^{٢} + ٣) = نهـــــــــا ل س^{٢} + نهـــــــــا ٣ = ٧
س← –١ س← –١ س← –١

ل نهـــــــــا س ^{٢} + نهـــــــــا ٣ = ل (نهـــــــــا (س))^{٢} + نهـــــــــا ٣ = ٧
س← –١ س← –١ س← –١

ل (–١)^{٢} + ٣ = ٧
ل = ٧ – ٣ = ٤

سؤال إضافي :

ق(س) = { س ^{٢} + ٧ ، س ≤ ٣
٥ ، س > ٣

أوجد نهـــــــــا ق(س)
س← ٥

نهـــــــــا ق(س) = نهـــــــــا (س^{٢} + ٧) = (٥)^{٢} + ٧ = ٣٢
س← ٥ س← ٥

مثال :

ق(س) = { س ^{٢} ، س ≤ ٢
م س ، س > ٢

فما قيمة الثابت م التي تجعل نهـــــــــا ق(س) موجودة
س← ٢

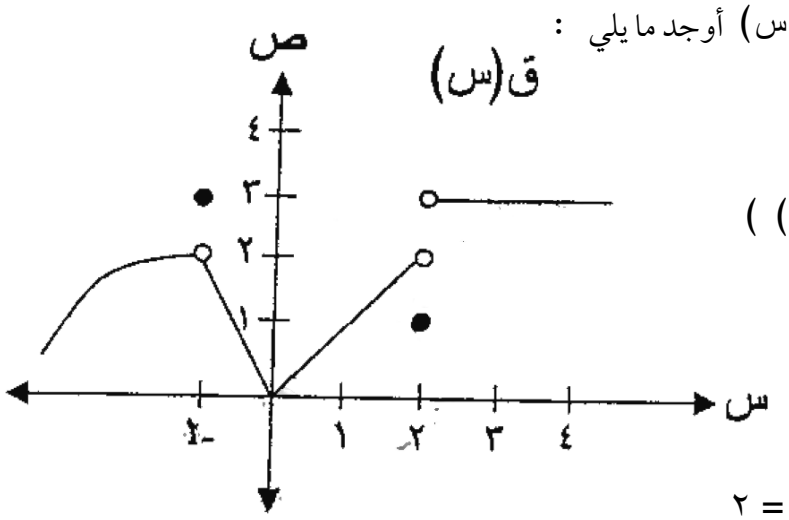
تكون النهاية موجودة عندما : نهـــــــــا ق(س) = نهـــــــــا ق(س)
س← ٢$^{+}$ س← ٢$^{-}$

نهـــــــــا م س = نهـــــــــا س^{٢}
س← ٢$^{+}$ س← ٢$^{-}$

م نهـــــــا س = (نهـــــــا س)^{٢} ⟵ م×٢ = (٢)^{٢} ⟵ ٢م = ٤ ومنه م = ٢
س← ٢$^{+}$ س← ٢$^{-}$

سؤال إضافي :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



أ) نهـــــــا ق(س)
س← ٢$^{+}$

ب) نهـــــــا ((ق(س))^{٢} - $\frac{١}{٤}$ (س - ٧))
س← ١-

الحـل :

أ) نهـــــــا ق(س) = ٣
س← ٢$^{+}$

ب) من الرسم نلاحظ :

نهـــــــا ق(س) = نهـــــــا ق(س) = ٢
س← ١-$^{+}$ س← ١-$^{-}$

نهـــــــا ((ق(س))^{٢} - $\frac{١}{٤}$ (س - ٧)) = (نهـــــــا ق(س))^{٢} - $\frac{١}{٤}$ نهـــــــا س + $\frac{٧}{٤}$
س← ١- س← ١- س← ١-

= (٢)^{٢} - $\frac{١}{٤}$ × ١- + $\frac{٧}{٤}$ = ٤ + $\frac{١}{٤}$ + ٧ = ٤ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٧}{٤}$ = ٤ + $\frac{٨}{٤}$ = ٤ + ٢ = ٦

سؤال دورة ٢٠١٨ شتوية منهاج جديد

إذا كانت نهـــــــا ق(س) = ٦ ، نهـــــــا هـ(س) = ٧-
س← ٢ س← ٢

فجد نهـــــــا (٣ق(س) - هـ(س) + س^{٢} هـ(س))
س← ٢

الحل :

٣نهـــــــا ق(س) - نهـــــــا هـ(س) + نهـــــــا س^{٢} × نهـــــــا هـ(س)
س← ٢ س← ٢ س← ٢ س← ٢

٣ × ٦ - (٧-) + (٢)^{٢} × ٧- = ١٨ + ٧ - ٢٨ = ٣-

سؤال دورة ٢٠١٨ شتوية منهاج قديم

إذا كانت نهـــــــا ق(س) = ٥ ، نهـــــــا هـ(س) = ١٠-
س← ٢ س← ٢

فجد : نهـــــــا ($\sqrt{٧}$ ق(س) هـ(س) + س هـ(س))
س← ٢

= نهـــــــا $\sqrt{٧}$ق(س) ٢هـ(س) + نهـــــــا س × نهـــــــا هـ(س)

= $\sqrt{٧}$ ٥ ٢ ١٠- + ٢ × ١٠- = $\sqrt{٧}$ ٢٥ - ٢٠ = ٥ - ٢٠ = ١٥-

اختبر نفسك

١) إذا كانت نهـــــــ$_{س\to ٥}$ق(س) = -٦ ، نهـــــــ$_{س\to ٥}$هـ(س) = ٤ فجد :
نهـــــــ$_{س\to ٥}$ (ق^{٢}(س) - ٢هـ(س) - س)

٢) إذا كانت نهـــــــ$_{س\to ٣}$ق(س) =٢ ، نهـــــــ$_{س\to ٣}$هـ(س)=١ ، فإن نهـــــــ$_{س\to ٣}$(س ق(س) + هـ^{٢}(س)) تساوي :

أ) ٧ ب) ١٠ ج) ٥ د) ٣

٣) إذا كانت نهـــــــ$_{س\to ٥}$ق(س) =٣ ، نهـــــــ$_{س\to ٥}$ل(س) = -١ ،
فإن نهـــــــ$_{س\to ٥}$(ق(س) + ل(س)) تساوي :

أ) ٢ ب) ٤ ج) -٢ د) -٤

٤) إذا كان ل عدداً ثابتاً وكانت نهـــــــ$_{س\to ٢}$(س + ل) = ٦ ، فما قيمة الثابت ل ؟

أ) ٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٣

٥) نهـــــــ$_{س\to -١}$ (س^{٣} - ٢)^{٢} تساوي :

أ) -٦ ب) -٣ ج) ١ د) ٩

٦) إذا كان ك عدداً ثابتاً وكانت نهـــــــ$_{س\to ١}$(٨س + ٢ك) = ٦ فإن قيمة ك تساوي :

أ) -١ ب) ١ ج) ٢ د) ٦

ثالثاً نهاية خارج قسمة اقترانين

تعريف الاقتران النسبي : هو اقتران على شكل كسر بسطه ومقامه كثيري حدود

مثال : $ق(س) = \frac{٢س + ٣}{س^{٢} + ١}$

نظرية : نهاية اقتران كسري تساوي نهاية البسط على نهاية المقام ونعبر عن ذلك بالرموز :

$$\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} اق(س)}{\lim_{س \to أ} اهـ(س)} \quad \text{النهاية غير موجودة إذا } \lim_{س \to أ} اهـ(س) = \text{صفر}$$

مثال الكتاب ١ صفحة ٣٣

إذا علمت أن $\lim_{س \to ١} اق(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ١} اهـ(س) = -٢$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $$\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ١} اق(س)}{\lim_{س \to ١} اهـ(س)} = \frac{٦}{-٢} = -٣$$

٢) $$\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) + ٣س}{هـ(س) + ٢} = \frac{\lim_{س \to ١} ا(ق(س) + ٣س)}{\lim_{س \to ١} ا(هـ(س) + ٢)} = \frac{\lim_{س \to ١} اق(س) + \lim_{س \to ١} ا٣س}{\lim_{س \to ١} اهـ(س) + \lim_{س \to ١} ا٢}$$

$$= \frac{٦ + ٣}{-٢ + ٢} = \frac{٩}{٠} \quad \text{النهاية غير موجودة}$$

نتائج هامة :

عند دراسة نهاية الاقتران الكسري نميز أربع نواتج :

الناتج الأول : $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ وهو ناتج مقبول

مثال :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + ١}{س + ٣} = \frac{\lim_{س \to ٢} اس^{٢} + ١}{\lim_{س \to ٢} اس + ٣} = \frac{(٢)^{٢} + ١}{٢ + ٣} = \frac{٥}{٥} = ١$$

الناتج الثاني : $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ وهو ناتج مقبول ويساوي الصفر

مثال :

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ١} = \frac{\text{نهـــــا}_{س \to ٢} \; س^{٢} - ٤}{\text{نهـــــا}_{س \to ٢} \; س + ١} = \frac{(٢)^{٢} - ٤}{٢ + ١} = \frac{صفر}{٣} = صفر$$

الناتج الثالث : $\frac{\text{عدد}}{صفر}$ وهو ناتج غير مقبول والنهاية غير موجودة $\frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{س^{٢} - ٩}$

مثال :

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٢} \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٤} = \frac{\text{نهـــــا}_{س \to ٢} \; س + ٣}{\text{نهـــــا}_{س \to ٢} \; س^{٢} - ٤} = \frac{٢ + ٣}{(٢)^{٢} - ٤} = \frac{٥}{صفر}$$ النهاية غير موجودة

الناتج الرابع : $\frac{صفر}{صفر}$ وهو ناتج غير مقبول ولذلك نلجأ إلى كتابة الاقتران بصورة مكافئة بإحدى الطرق التالية :

التحليل إلى العوامل :

مثال :

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{س^{٢} - ٩} = \text{نهـــــا}_{س \to ٣} \frac{(٣)^{٢} - ٦(٣) + ٩}{(٣)^{٢} - ٩} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{س^{٢} - ٩} = \text{نهـــــا}_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س - ٣)}{(س + ٣)(س - ٣)} = \text{نهـــــا}_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س + ٣} = \frac{٣ - ٣}{٣ + ٣} = صفر$$

التحليل إلى عوامل مشتركة :

مثال :

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س}{٥س - ١٠} = \text{نهـــــا}_{س \to ٢} \frac{(٢)^{٢} - ٢(٢)}{٥(٢) - ١٠} = \frac{صفر}{صفر}$$

الناتج غير مقبول ونحلل بإخراج العوامل المشتركة :

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س}{٥س - ١٠} = \text{نهـــــا}_{س \to ٢} \frac{س(س - ٢)}{٥(س - ٢)} = \text{نهـــــا}_{س \to ٢} \frac{س}{٥} = \frac{٢}{٥}$$

الضرب في مرافق الجذر التربيعي :

مثال الكتاب ٥ صفحة ٣٧

$$\text{نهـــــا}_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧س} - ١}{س - ١} = \text{نهـــــا}_{س \to ١} \frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$$

الناتج غير مقبول لذلك نضرب ونقسم على مرافق الجذر أي بالمقدار $\frac{\sqrt{٧س} + ١}{\sqrt{٧س} + ١}$

$$\text{نهـــــا}_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧س} - ١}{س - ١} = \text{نهـــــا}_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٧س} + ١}{\sqrt{٧س} + ١}$$

$$\text{نهـــــا}_{س \to ١} \frac{س - ١}{(س - ١)(\sqrt{٧س} + ١)} = \frac{١}{\sqrt{٧س} + ١} = \frac{١}{\sqrt{٧} + ١} = \frac{١}{٢}$$

توحيد المقامات :

تذكرة في توحيد المقامات :

$$\frac{\text{البسط الأول}}{\text{المقام الأول}} \pm \frac{\text{البسط الثاني}}{\text{المقام الثاني}} = \frac{\text{البسط الأول}\times\text{المقام الثاني} \pm \text{البسط الثاني}\times\text{المقام الأول}}{\text{جداء المقامين}}$$

لتوضيح ذلك هذا مثال : $\frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٤} = \frac{٣\times٥ + ٤\times٢}{٥\times٤} = \frac{١٥ + ٨}{٢٠} = \frac{٢٣}{٢٠}$

مثال :

$$\text{نهـــــــا}_{س \to ١} \frac{\frac{١}{٣س} - \frac{١}{س+٢}}{س - ١} = \frac{\frac{١}{١\times٣} - \frac{١}{٢+١}}{١ - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

غير مقبول ولذلك نوحد المقامات

$$\text{نهـــــــا}_{س \to ١} \frac{\frac{١}{٣س} - \frac{١}{س+٢}}{س - ١} = \text{نهـــــــا}_{س \to ١} \frac{١\times(س+٢) - ١\times(٣س)}{٣س(س+٢)} \quad س - ١$$

$$\text{نهـــــــا}_{س \to ١} \frac{س+٢-٣س}{٣س(س-١)(س+٢)} = \text{نهـــــــا}_{س \to ١} \frac{٢ - ٢س}{٣س(س-١)(س+٢)} =$$

$$\text{نهـــــــا}_{س \to ١} \frac{-٢(س-١)}{٣س(س-١)(س+٢)}$$

$$\text{نهـــــــا}_{س \to ١} \frac{-٢}{٣س(س+٢)} = \frac{-٢}{٣(١)(١+٢)} = \frac{-٢}{٩}$$

سؤال إضافي :

جد قيمة ما يلي : $\text{نهـــــــا}_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ٤س^٢}{س^٢ - ١٦}$

$$\text{نهـــــــا}_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ٤س^٢}{س^٢ - ١٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ النتيجة غير مقبولة ونحلل إلى عوامل مشتركة

$$\text{نهـــــــا}_{س \to ٤} \frac{س^٢(س-٤)}{(س-٤)(س+٤)} = \text{نهـــــــا}_{س \to ٤} \frac{س^٢}{س+٤} = \frac{(٤)^٢}{٤+٤} = \frac{١٦}{٨} = ٢$$

مثال الكتاب ٢ صفحة ٣٤

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \frac{س - ٥}{س + ١٥} = \frac{٥ - ٥}{٥ + ١٥} = \frac{صفر}{٢٠} = صفر$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{٥}{س - ١} = \frac{٥}{١ - ١} = \frac{٥}{صفر}$ النهاية غير موجودة

تدريب الكتاب ١ صفحة ٣٥

جد قيمة النهاية لكل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ - ٢٥}{س + ٥} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س + ٥} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} (س - ٥) = ١ - ٥ = -٤$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٢س - ٤}{س + ٣} = \frac{٢ \times ٢ - ٤}{٢ + ٣} = \frac{صفر}{٥} = صفر$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ١}{س + ٣} = \frac{(٣)^٢ - ١}{٣ + ٣} = \frac{٨}{٦}$

مثال الكتاب ٣ صفحة ٣٥

جد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٥س^٢ - ١٠س}{س - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ الناتج غير مقبول لذلك نحلل البسط

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٥س^٢ - ١٠س}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٥س(س - ٢)}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} ٥س = ٥ \times ٢ = ١٠$

مثال الكتاب ٤ صفحة ٣٦

جد قيمة كل مما يأتي :

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٢ - ٩} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{(س + ٣)(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٣)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{(س + ٢)}{(س - ٣)}$

$= \frac{-١}{-٦} = \frac{١}{٦}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} (س^{٢} + ٢س + ٤) = ١٢$

تدريب الكتاب ٢ صفحة ٣٦

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} + ٣س}{س + ٣} = \lim_{س \to -٣} \frac{س(س + ٣)}{س + ٣} = \lim_{س \to -٣} س = -٣$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س}{٥س - ١٠} = \lim_{س \to ٢} \frac{س(س - ٢)}{٥(س - ٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{س}{٥} = \frac{٢}{٥}$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٤} + ٢٧س}{س + ٣} = \lim \frac{س(س^{٣} + ٢٧)}{س + ٣} = \lim \frac{س(س + ٣)(س^{٢} - ٣س + ٩)}{س + ٣}$

$= \lim س(س^{٢} - ٣س + ٩) = -٣((-٣)^{٢} - ٣(-٣) + ٩) = -٨١$

تدريب الكتاب ٣ صفحة ٣٧

١) $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} = \frac{صفر}{صفر}$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$\lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} \times \frac{\sqrt{س + ٢٠} + ٥}{\sqrt{س + ٢٠} + ٥}$

$\lim_{س \to ٥} \frac{(٣س - ١٥)(\sqrt{س + ٢٠} + ٥)}{س + ٢٠ - ٢٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{٣(س - ٥)(\sqrt{س + ٢٠} + ٥)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} ٣(\sqrt{س + ٢٠} + ٥) = ٣(\sqrt{٥ + ٢٠} + ٥) = ٣ \times ١٠ = ٣٠$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٢} + ٢}{\sqrt{س + ٢} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س + ٢ - ٤}{(س - ٢)(\sqrt{س + ٢} + ٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س - ٢)(\sqrt{س + ٢} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{١}{(\sqrt{س + ٢} + ٢)} = \frac{١}{(\sqrt{٢ + ٢} + ٢)} = \frac{١}{٤}$

مثال الكتاب ٦

صفحة ٣٨

جد $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{٢س - ٤} = \frac{صفر}{صفر}$ الناتج غير مقبول لذلك نوحد المقامات

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{٢س - ٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{\frac{٢ - س}{٢س}}{٢س - ٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{٢س(٢س - ٤)}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{س}^{-١} - ٢}{٤س(س - ٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{-١}{٤س} = \frac{-١}{٨}$$

تدريب الكتاب ٤

صفحة ٣٨

جد $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٣}}{س - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ الناتج غير مقبول لذلك نوحد المقامات

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٣}}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٣ - (س+١)}{٣(س+١)(س-٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{٣ - س - ١}{٣(س+١)(س-٢)}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{س}^{-١} - ٢}{٣(س+١)(س-٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{-١}{٣(س+١)} = \frac{-١}{٣(٢+١)} = \frac{-١}{٩}$$

صفحة ٣٩

حل الأسئلة

١) إذا كانت نهـــــا ق(س)=٣ ، نهـــــاهـ(س)=٩ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{٣}{٩}$

ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س)+١}{ق(س)+س-٥} = \frac{\lim_{س \to ٢} هـ(س)+١}{\lim_{س \to ٢} ق(س)+\lim_{س \to ٢} س-٥} =$

$= \frac{٩+١}{٣+٢-٥} = \frac{١٠}{٠}$ النهاية غير موجودة

---

٢) جد قيمة النهاية في كل مما يأتي عند النقطة المبينة إزاء كل منها (إن وجدت) :

أ) $\lim_{س \to ٠} ق(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢+١}{س+٨} = \frac{(٠)^٢+١}{٠+٨} = \frac{١}{٨}$

ب) $\lim_{س \to ١} هـ(س) = \lim_{س \to ١} \frac{س^٢+٥س}{س-١} = \frac{(١)^٢+٥\times١}{١-١} = \frac{٦}{٠}$ النهاية غير موجودة

ج) $\lim_{س \to ٤} ل(س) = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢-٣س-٤}{١٢-٣س} = \frac{صفر}{صفر}$ نحلل إلى العوامل الاولية

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س+١)}{-٣(٤-س)} = \lim_{س \to ٤} \frac{-(س+١)}{٣} = \frac{-(٤+١)}{٣} = \frac{-٥}{٣}$

د) $\lim_{س \to ٣} م(س) = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣-٢٧}{٣س^٢-٩س} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س^٢+٣س+٩)}{٣س(س-٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س^٢+٣س+٩)}{٣س} = \frac{(٣)(٣)+(٣)^٢+٩}{(٣)٣} = \frac{٢٧}{٩} = ٣$

هـ) $\lim_{س \to ٧} ك(س) = \lim_{س \to ٧} \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{١}{٥}}{٢س-١٤} = \frac{صفر}{صفر}$ نوحد المقامات

$\lim_{س \to ٧} \frac{\frac{٥-(س-٢)}{٥(س-٢)}}{٢س-١٤} = \lim_{س \to ٧} \frac{-س+٢}{٢(س-٧)\times٥(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{-س+٢}{٢(س-٧)\times٥(س-٢)} = \lim_{س \to ٧} \frac{-١}{١٠(س-٧)(س-٢)} =$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} \frac{-١}{١٠(س-٢)} = \frac{-١}{١٠(٧-٢)} = \frac{-١}{٥٠}$$

و) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} د(س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{\sqrt{س + ١} - ٣}{س - ٨} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{\sqrt{س + ١} - ٣}{س - ٨} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٣}{\sqrt{س + ١} + ٣}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{س + ١ - ٩}{(س - ٨)(\sqrt{س + ١} + ٣)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{س - ٨}{(س - ٨)(\sqrt{س + ١} + ٣)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{١}{(\sqrt{س + ١} + ٣)} = \frac{١}{(\sqrt{٨ + ١} + ٣)} = \frac{١}{٦}$$

ز) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} و(س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} \frac{س - ٧}{\sqrt[٣]{س + ٢} - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نضرب بمرافق الجذر الترابيعي

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} \frac{س - ٧}{\sqrt[٣]{س + ٢} - ٣} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} \frac{س - ٧}{\sqrt[٣]{س + ٢} - ٣} \times \frac{\sqrt[٣]{(س + ٢)^٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ٢} + ٩}{\sqrt[٣]{(س + ٢)^٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ٢} + ٩}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} \frac{(س - ٧)(\sqrt[٣]{(س + ٢)^٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ٢} + ٩)}{(س + ٢) - ٩} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} \frac{(س - ٧)(\sqrt[٣]{(س + ٢)^٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ٢} + ٩)}{س - ٧}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} (\sqrt[٣]{(س + ٢)^٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ٢} + ٩) = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$$

---

٣) إذا كان ق(س) = س ، فجد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{ق^٢(س) - ق(٩)}{س + ٣}$

الحل :

بما أن ق(س) س فإن ق(٩) = ٩ ، $ق^٢(س) = س^٢$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{ق^٢(س) - ق(٩)}{س + ٣} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{س^٢ - ٩}{س + ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ نحلل

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س + ٣} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} (س - ٣) = -٣ - ٣ = -٦$$

---

٤) إذا علمت ان : نهـــا ق(س) = -٧ ، نهـــا هـ(س) = ٢ ، فبين أن :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \frac{٢ق(س) - ٣هـ(س)}{ق(س) + س + ٧} = -٤$$

$$= \frac{\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} ٢ق(س) - \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} ٣هـ(س)}{\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} ق(س) + \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} س + ٧} = \frac{٢ \times -٧ - ٣ \times ٢}{-٧ + ٥ + ٧} = \frac{-٢٠}{٥} = -٤$$

---

٥) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ ، فجد نهـــــا $\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ هـ ← ٠

ق(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ ، ق(س+هـ) = $\frac{١}{(س + هـ) - ٢}$

= نهـــــا $\frac{\frac{١}{س+هـ - ٢} - \frac{١}{س - ٢}}{هـ}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ نوحد المقامات
هـ ← ٠

= نهـــــا $\frac{\frac{(س-٢)-(س+هـ-٢)}{(س - ٢)(س+هـ-٢)}}{هـ}$
هـ ← ٠

= نهـــــا $\frac{س-٢-س-هـ+٢}{هـ(س - ٢)(س+هـ-٢)}$ = نهـــــا $\frac{-هـ}{هـ(س - ٢)(س+هـ-٢)}$
هـ ← ٠ هـ ← ٠

= نهـــــا $\frac{-١}{(س - ٢)(س+هـ-٢)}$ = $\frac{-١}{(س - ٢)(س+٠-٢)}$ = $\frac{-١}{(س - ٢)(س - ٢)}$
هـ ← ٠

= $\frac{-١}{(س - ٢)^{٢}}$ والناتج هو المشتقة الأولى لـ ق(س) كما سيمر معنا في بحث المشتقة الأولى

---

٦) جد نهـــــا $\frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ غير مقبول لذلك نحلل
س ← ١

نهـــــا $\frac{(س + ٢)(س - ١)}{(س+١)(س-١)}$ = نهـــــا $\frac{(س + ٢)}{(س+١)}$ = $\frac{(١ + ٢)}{(١+١)}$ = $\frac{٣}{٢}$
س ← ١ س ← ١

سؤال إضافي :

جد قيمة ما يلي : نهـــــا ($\frac{٢س + ١٠}{س^{٢} + ٢٥}$ + س)
س ← -٥

نهـــــا ($\frac{٢س + ١٠}{س^{٢} + ٢٥}$ + س) =($\frac{٢(-٥) + ١٠}{(-٥)^{٢} + ٢٥}$ + (-٥)) = $\frac{صفر}{٥٠}$ -٥ = صفر -٥ = -٥
س ← -٥

سؤال إضافي :

جد قيمة ما يلي :

نهـــــا $\frac{\sqrt[٣]{٣س + ٤} - ٥}{س^{٢} - ٤٩} = \frac{صفر}{صفر}$ غير مقبول لذلك نضرب بمرافق الجذر التربيعي
س ← ٧

نهـــــا $\frac{\sqrt[٣]{٣س + ٤} - ٥}{س^{٢} - ٤٩} \times \frac{\sqrt[٣]{٣س + ٤} + ٥}{\sqrt[٣]{٣س + ٤} + ٥}$ =
س ← ٧

$$\text{نهـــا}_{س \to ٧} \frac{٣س + ٤ - ٢٥}{(س^{٢} - ٤٩)(\sqrt[٣]{٣س + ٤} + ٥)} = \text{نهـــا}_{س \to ٧} \frac{٣س - ٢١}{(س^{٢} - ٤٩)(\sqrt[٣]{٣س + ٤} + ٥)}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٧} \frac{٣(س - ٧)}{(س - ٧)(س + ٧)(\sqrt[٣]{٣س + ٤} + ٥)} = \text{نهـــا}_{س \to ٧} \frac{٣}{(س + ٧)(\sqrt[٣]{٣س + ٤} + ٥)}$$

$$= \frac{٣}{(٧ + ٧)(\sqrt[٣]{٣ \times ٧ + ٤} + ٥)} = \frac{٣}{١٠ \times ٩} = \frac{٣}{٩٠} = \frac{١}{٣٠}$$

سؤال إضافي :

جد قيمة ما يلي : $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \left(\frac{\frac{١}{س - ٥} + \frac{٢}{٤س + ١٠}}{٣س} \right) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير مقبول لذلك نوحد المقامات

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \left(\frac{(٤س + ١٠) + ٢ \times (س - ٥)}{٣س(س - ٥)(٤س + ١٠)} \right) = \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٤س + ٢٠ + ٢س - ٢٠}{٣س(س - ٥)(٤س + ١٠)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٦س^{٢}}{٣س(س - ٥)(٤س + ١٠)} = \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٢}{(س - ٥)(٤س + ١٠)}$$

$$= \frac{٢}{(٠ - ٥)(٤ \times ٠ + ١٠)} = \frac{٢}{١٠ \times ٥} = \frac{٢}{٥٠} = \frac{١}{٢٥}$$

سؤال إضافي :

جد $\text{نهـــا}_{س \to -٣} \left(\frac{س + ٩}{س} + \sqrt[٣]{٦ - س} \right)$

الحل :

$$\text{نهـــا}_{س \to -٣} \left(\frac{س + ٩}{س} + \sqrt[٣]{٦ - س} \right) = \text{نهـــا}_{س \to -٣} \frac{س + ٩}{س} + \text{نهـــا}_{س \to -٣} \sqrt[٣]{٦ - س}$$

$$= \frac{-٣ + ٩}{-٣} + \sqrt[٣]{٦ - (-٣)} = -٢ + \sqrt[٣]{٩} = -٢ + ٣ = ١$$

سؤال إضافي :

جد $\text{نهـــا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{٤س - ١٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نحلل الكسر إلى العوامل

$$\text{نهـــا}_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ١)}{٤(س - ٣)} = \text{نهـــا} \frac{(س + ١)}{٤} = \frac{(٣ + ١)}{٤} = ١$$

سؤال إضافي :

جد نهـــــا $\frac{١٦ - (٣س - ٥)^{٢}}{س^{٢} - ٩}$ = $\frac{١٦ - (٣ \times ٢ - ٥)^{٢}}{(٢)^{٢} - ٩}$
س ← ٢

= $\frac{١٦ - ١}{٤ - ٩}$ = $\frac{١٥}{-٥}$ = -٣

سؤال إضافي :

جد نهـــــا $\frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{١٢ - ٣س}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ نحلل الكسر إلى العوامل
س ← ٤

نهـــــا $\frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{١٢ - ٣س}$ = نهـــــا $\frac{(س - ٤)(س + ١)}{٣(٤ - س)}$
س ← ٤ س ← ٤

= نهـــــا $\frac{-(س + ١)}{٣}$ = $\frac{-(٤ + ١)}{٣}$ = $\frac{-٥}{٣}$
س ← ٤

سؤال دورة ٢٠١٨ شتوية منهاج جديد

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي :

١) نهـــــا $\left(\frac{\sqrt[٣]{٣س + ١} + ٢س}{س - ٧} + \frac{٣}{س - ٢} \right)$
س ← ٥

= $\frac{\sqrt[٣]{٣(٥) + ١} + ٢(٥)}{٥ - ٧}$ + $\frac{٣}{٥ - ٢}$) = $\frac{\sqrt[٣]{١٦} + ١٠}{-٢}$ = $\frac{١٤}{-٢}$ = -٧

٢) نهـــــا $\frac{س - ٤}{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي
س ← ٤

= نهـــــا $\frac{س - ٤}{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٣} \times \frac{\sqrt[٣]{س + ٥} + ٣}{\sqrt[٣]{س + ٥} + ٣}$
س ← ٤

= نهـــــا $\frac{(س - ٤)(\sqrt[٣]{س + ٥} + ٣)}{س + ٥ - ٩}$ = نهـــــا $\frac{(س - ٤)(\sqrt[٣]{س + ٥} + ٣)}{س - ٤}$
س ← ٤ س ← ٤

= نهـــــا $(\sqrt[٣]{س + ٥} + ٣)$ = $\sqrt[٣]{٤ + ٥}$ + ٣ = ٦
س ← ٤

سؤال دورة ٢٠١٨ شتوية منهاج قديم

١) نهـــــا $\left(\frac{٢س + ٦}{س + ٢} + ٦س - ٢ \right)$ = $\left(\frac{٢(-٣) + ٦}{-٣ + ٢} + ٦(-٣) - ٢ \right)$
س ← -٣

= $\frac{٢(-٣) + ٦}{-٣ + ٢}$ + ٦(-٣) - ٢ = صفر - ٢٠ = -٢٠

٢) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤س + ١} - ٣}{س - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤س + ١} - ٣}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{٤س + ١} + ٣}{\sqrt{٤س + ١} + ٣}$

$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٤(س - ٢)}{(س - ٢)(\sqrt{٤س + ١} + ٣)}$

$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٤}{(\sqrt{٤س + ١} + ٣)} = \frac{٤}{(\sqrt{٤ \times ٢ + ١} + ٣)} = \frac{٤}{٦}$

اختبر نفسك

١) جد $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \left(\frac{\frac{١}{٣س} + \frac{١}{س + ٢}}{س - ١} \right)$

٢) جد $\text{نهـــا}_{س \to -٢} \left(\frac{س - ٤}{س} + \sqrt{٧ - س} \right)$

٣) جد $\text{نهـــا}_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢}$

٤) جد $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٦ - ٣س}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$

٥) جد $\text{نهـــا}_{س \to -٤} \left(١ - ٦س + \frac{٢س + ٨}{س + ٣} \right)$

٦) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٣س^{٢} - ٦س}{س - ٢}$ تساوي :

أ) -٦ ب) صفر ج) ٣ د) ٦

رابعاً

نهاية اقتران الجذر النوني

نظرية : نهاية الجذر النوني لاقتران $(\sqrt[ن]{ق(س)})$ عند عدد ما (أ) تساوي الجذر النوني لنهاية الاقتران عن هذا العدد

ونعبر عن ذلك بالرموز :

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\text{نهـــا}_{س \to أ} ق(س)}$$

ونميز حالتين لـــ (ن) :

الحالة الأولى : ن فردي : وفي هذه الحالة نعوض بالنقطة التي تقترب منها س والتعويض مقبول

مثال : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س + ٣}$ فأوجد $\text{نهـــا}_{س \to -١١} ق(س)$

الحـــل : $\text{نهـــا}_{س \to -١١} \sqrt[٣]{س + ٣} = \sqrt[٣]{-١١ + ٣} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

الحالة الثانية : ن زوجي : وهنا نميز ثلاث نواتج :

الناتج الاول : موجب وهو مقبول والنهاية موجودة وتساوي ناتج التعويض

مثال : إذا كان $ق(س) = \sqrt{س + ٤}$ فأوجد $\text{نهـــا}_{س \to ٥} ق(س)$

الحـــل : $\text{نهـــا}_{س \to ٥} \sqrt{س + ٤} = \sqrt{٥ + ٤} = \sqrt{٩} = ٣$

الناتج الثاني : سالب وهو مرفوض والنهاية غير موجودة

مثال : إذا كان $ق(س) = \sqrt{س - ٧}$ فأوجد $\text{نهـــا}_{س \to ٣} ق(س)$

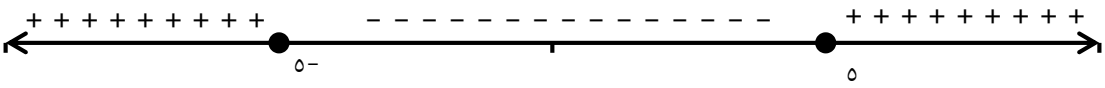
الحـــل : $\text{نهـــا}_{س \to ٣} \sqrt{س - ٧} = \sqrt{٣ - ٧} = \sqrt{-٤}$ النهاية غير موجودة لعدم وجود جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب

الناتج الثالث : صفر وهنا ندرس الإشارة فإذا كان الاقتران (ق(س) > ٠) أي موجب من اليمين واليسار عند نقطة الاقتراب كانت النهاية موجودة وتساوي الصفر وإذا كان (ق(س) < ٠) كانت النهاية غير موجودة

مثال : أوجد قيمة ما يلي $\text{نهـــا}_{س \to ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

الحل : $\text{نهـــا}_{س \to ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥} = \sqrt{(٥)^٢ - ٢٥} =$ صفر ندرس إشارة ق(س)

$س^٢ - ٢٥ = ٠ \longleftarrow س^٢ = ٢٥ \longleftarrow س = \pm ٥$



نهـــــــــا $\sqrt{س^{٢} - ٢٥}$ غير موجودة
س ← ٥⁻

بما أن نهـــــــــا $\sqrt{س^{٢} - ٢٥} \neq$ نهـــــــــا $\sqrt{س^{٢} - ٢٥}$
س ← ٥⁻　　س ← ٥⁺

نهـــــــــا $\sqrt{س^{٢} - ٢٥}$ = صفر
س ← ٥⁺

إذن : نهـــــــــا $\sqrt{س^{٢} - ٢٥}$ غير موجودة
س ← ٥

مثال الكتاب ١

صفحة ٤١

إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{س+٣}$ ، هـ(س) = $\sqrt{س + ٣}$ فما قيمة كل مما يأتي :

١) نهـــــــــا ق(س) = نهـــــــــا $\sqrt[٣]{س+٣}$ = $\sqrt[٣]{٥+٣}$ = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢
س ← ٥　　س ← ٥

٢) نهـــــــــا ق(س) = نهـــــــــا $\sqrt[٣]{س+٣}$ = $\sqrt[٣]{-١١+٣}$ = $\sqrt[٣]{-٨}$ = -٢
س ← -١١　　س ← -١١

٣) نهـــــــــا هـ(س) = نهـــــــــا $\sqrt{س + ٣}$ = $\sqrt{١ + ٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢
س ← ١　　س ← ١

٤) نهـــــــــا هـ(س) = نهـــــــــا $\sqrt{س + ٣}$ = $\sqrt{-٥}$ غير موجودة وذلك لعدم وجود جذر تربيعي
س ← -٨　　س ← -٨

حقيقي للعدد السالب

مثال الكتاب ٢

صفحة ٤٢

إذا كانت نهـــــــــا ق(س) = ٦٤ ، فجد قيمة كل مما يأتي :
س ← ٣

١) نهـــــــــا $\sqrt{}$ ق(س) = $\sqrt{}$ نهـــــــــا ق(س) = $\sqrt{٦٤}$ = ٨
س ← ٣　　س ← ٣

٢) نهـــــــــا $\sqrt[٣]{}$ ق(س) = $\sqrt[٣]{}$ نهـــــــــا ق(س) = $\sqrt[٣]{٦٤}$ = ٤
س ← ٣　　س ← ٣

تدريب الكتاب ١

صفحة ٤٢

إذا كانت نهـــــــــا ق(س) = ٢٤ ، نهـــــــــا هـ (س) = ٨ فجد قيمة ما يأتي (إن وجدت) :
س ← ٣　　س ← ٣

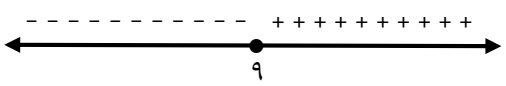
نهـــــــــا ($\sqrt{}$ ق(س) - هـ(س) + س هـ(س)) =
س ← ٣

$\sqrt{}$ نهـــــــــا ق(س) - نهـــــــــا هـ(س) + نهـــــــــا س × نهـــــــــا هـ(س)
س ← ٣　　س ← ٣　　س ← ٣　　س ← ٣

= $\sqrt{٢٤ - ٨}$ + ٣ × ٨ = ٤ + ٢٤ = ٢٨

مثال الكتاب ٣ صفحة ٤٣

جد قيمة كل نهاية من النهايات الآتية (إن وجدت)



١) $\lim_{س \to ٩^+} \sqrt{س - ٩}$

من خط الأعداد نلاحظ أنه عندما س $\to ٩^+$ فإن س $- ٩ > ٠$ ومنه $\lim_{س \to ٩^+} \sqrt{س - ٩} = ٠$

٢) $\lim_{س \to ٩^-} \sqrt{س - ٩}$

من خط الأعداد نلاحظ أنه عندما س $\to ٩^-$ فإن س $- ٩ > ٠$ ومنه $\lim_{س \to ٩^-} \sqrt{س - ٩}$ غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٩} \sqrt{س - ٩}$

بما أن $\lim_{س \to ٩^-} \sqrt{س - ٩}$ غير موجودة ، فإن $\lim_{س \to ٩} \sqrt{س - ٩}$ غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٩} \sqrt[٤]{(س - ٩)^٢}$ نلاحظ أن $(س - ٩)^٢ > ٠$ دائما مهما كانت قيمة س

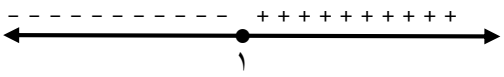
ومنه $\lim_{س \to ٩} \sqrt[٤]{(س - ٩)^٢} = ٠$

تدريب الكتاب ٢ صفحة ٤٤

جد نهاية كل اقتران من الاقترانات الآتية (إن وجدت) :

١) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{٢س + ١} = \sqrt{٢ \times ٤ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

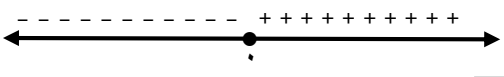
٢) $\lim_{س \to -١} \sqrt{س^٢} = \sqrt{(-١)^٢} = ١$



٣) $\lim_{س \to ١^-} \sqrt[٤]{س - ١}$ غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ١^+} \sqrt{س - ١} = ٠$

٥) $\lim_{س \to ١} \sqrt[٤]{س - ١}$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to ١^-} \sqrt[٤]{س - ١}$ غير موجودة



٦) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٢س}$

بما أن $\lim_{س \to ٠^-} \sqrt{٢س}$ غير موجودة فإن $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٢س}$ غير موجودة

سؤال إضافي

جد قيمة ما يلي : $\lim_{س \to -٣} \left(\frac{س+٩}{س} + \sqrt{٦ - س} \right)$

الحل :

$$\lim_{س \to -٣} \left(\frac{س+٩}{س} + \sqrt{٦ - س} \right) = \lim_{س \to -٣} \left(\frac{س+٩}{س} \right) + \lim_{س \to -٣} \sqrt{٦ - س}$$

$$= \frac{-٣+٩}{-٣} + \sqrt{٦ - (-٣)} = -٢ + \sqrt{٩} = -٢+٣ = ١$$

سؤال إضافي

جد قيمة ما يلي :

$$\lim_{س \to -٥} \left(\sqrt[٣]{٣ - س} + \frac{س+٥}{س^{٢} - س} \right)$$

الحل :

$$\lim_{س \to -٥} \sqrt[٣]{٣ - س} + \lim_{س \to -٥} \left(\frac{س+٥}{س^{٢} - س} \right) \lim_{س \to -٥} \left(\sqrt[٣]{٣ - س} + \frac{س+٥}{س^{٢} - س} \right)$$

$$= \sqrt[٣]{٣ - (-٥)} + \frac{-٥+٥}{(-٥)^{٢} - (-٥)} = \sqrt[٣]{٨} + \frac{\text{صفر}}{٥ + ٥٢} = ٢ + \text{صفر} = ٢$$

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) $= \sqrt{٢ - س}$ ، فإن $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) تساوي :

أ) صفر ب) ٢ ج) ٤ د) غير موجودة

الحل :

$$\lim_{س \to -٢} ق(س) = \lim_{س \to -٢} \sqrt{٢ - س} = \sqrt{٢ - -٢} = \sqrt{٤} = ٢$$

سؤال إضافي

$س \to -٢$

$\lim_{س \to -١} \sqrt[٣]{٤س - ٤}$ تساوي :

أ) -٢ ب) صفر ج) ٢ د) غير موجودة

الحل :

$$\lim \sqrt[٣]{٤س - ٤} = \sqrt[٣]{٤(-١) - ٤} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$$

صفحة ٤٥

حل الأسئلة

١) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣} ق(س) = -٦٤$ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

أ) $\lim_{س \to ٣} \sqrt[٣]{ق(س)} = \sqrt[٣]{\lim_{س \to ٣} ق(س)} = \sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$

ب) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{ق(س)} = \sqrt{\lim_{س \to ٣} ق(س)} = \sqrt{-٦٤}$ غير موجودة لأن السالب ليس له جذر

ج) $\lim_{س \to ٣} (\sqrt[٣]{ق(س)} + س^{٢} + ٥س - ٣) = \sqrt[٣]{\lim_{س \to ٣} ق(س)} + \lim_{س \to ٣} س^{٢} + ٥ \lim_{س \to ٣} س - ٣$

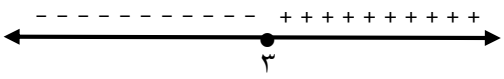
$= \sqrt[٣]{-٤٦} + (٣)^{٢} + ٥(٣) - ٣ = -٤ + ٩ + ١٥ - ٣ = ١٧$

د) $\lim_{س \to ٣} (\sqrt[٥]{\frac{ق(س)}{٢}} + س - ٥) = \sqrt[٥]{\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)}{٢}} + \lim_{س \to ٣} س - ٥$

$= \sqrt[٥]{\frac{-٦٤}{٢}} + ٣ - ٥ = \sqrt[٥]{-٣٢} - ٢ = -٢ - ٢ = -٤$

---

٢) جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :



أ) $\lim_{س \to ٣^{+}} \sqrt{س - ٣}$

من خط الأعداد نلاحظ أنه عندما س $\to ٣^{+}$ فإن س $- ٣ > ٠$ ومنه $\lim_{س \to ٣^{+}} \sqrt{س - ٣} = ٠$

ب) $\lim_{س \to -٥} (\sqrt[٣]{٣ - س} + س^{٢} - ٤) = \lim_{س \to -٥} \sqrt[٣]{٣ - س} + \lim_{س \to -٥} س^{٢} - ٤$

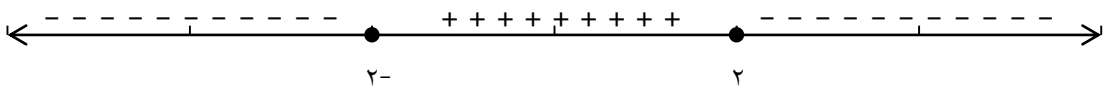
$= \sqrt[٣]{٣ - (-٥)} + (-٥)^{٢} - ٤ = \sqrt[٣]{٨} + ٢٥ - ٤ = ٢٣$

جـ) $\lim_{س \to -٢} \sqrt[٣]{٤ - س^{٢}} = \sqrt[٣]{٤ - (-٢)^{٢}} =$ صفر

د) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}}$

$\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}} =$ صفر لذلك ندرس إشارة الاقتران

$٤ - س^{٢} = ٠ \longrightarrow س^{٢} = ٤ \longrightarrow س = \pm ٢$



نلاحظ أن $\lim_{س \to ٢^{+}} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}}$ غير موجودة

$\lim_{س \to ٢^{-}} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}} =$ صفر $\longrightarrow$ $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}}$ غير موجودة

الفصل الثاني الاتصال

أولاً الاتصال عند نقطة

تعريف الاتصال :

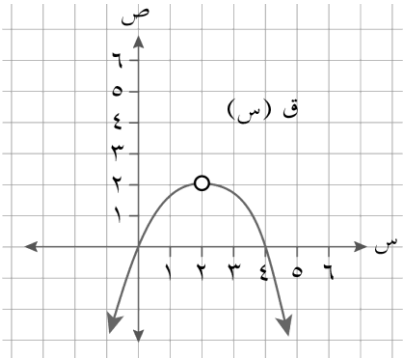
يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند نقطة س = أ إذا تحققت ثلاثة شروط :

الشرط الأول: ق(أ) = أ

الشرط الثاني : $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) وبالتالي $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

الشرط الثالث: $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

توضيح الاتصال من خلال الرسم :



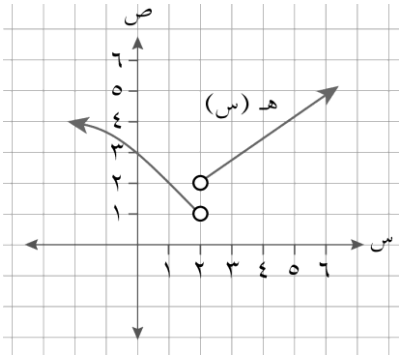
نلاحظ من خلال منحنى الاقتران ق(س) وجود ثقب

في المنحنى عند النقطة س = ٢

أي أن الاقتران غير معرف عند النقطة س= ٢

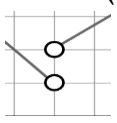
وبالتالي ق(٢) غير موجودة

والنتيجة ق(س) غير متصل لعدم تحقق أحد شروطه



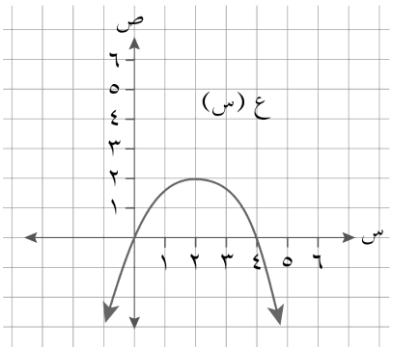
نلاحظ من منحنى الاقتران هـ(س) أن :

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س)

وذلك بسبب وجود قفزة في منحنى الاقتران : 

عند النقطة س=٢ والنتيجة هـ (س) غير متصل

نلاحظ من منحنى الاقتران ع (س) عدم وجود انقطاع



أو قفزة في المنحنى وكذلك نجد :

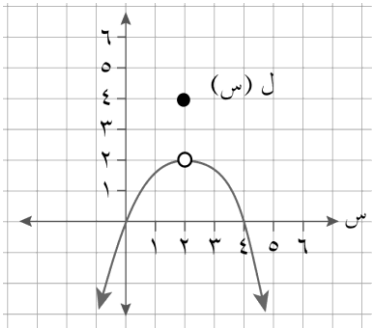
ع(٢) = ٢

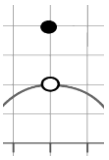
نهـــــــا ع(س) = نهـــــــا ع(س) = ٢
س ← ٢⁻ س ← ٢⁺

أي نهـــــــا ع(س) = ٢
س ← ٢

وبما أن نهـــــــا ق(س) = ع (٢) تحققت كل الشروط فالاقتران ع(س) متصل
س ← ٢

نلاحظ من منحنى الاقتران ل(س) وجود فجوة في المنحنى



عند النقطة س = ٢  وبالتالي :

نهـــــــا ل (س) ≠ ل (٢)
س ← ٢

فالاقتران ل (س) غير متصل .

نتيجة هامة : يكون منحنى الاقتران غير متصل عند وجود ثقب أو قفزة أو فجوة

ملاحظات هامة :

- الاقتران كثير الحدود يكون متصل دائما عند نقطة
- الاقتران الكسري يكون متصلا عند جميع الأعداد ما عدا الأعداد التي تجعل المقام صفرا
- في الاقتران المتشعب ندرس النهاية من اليمين واليسار عند نقاط التشعب لأنها قد تكون نقاط عدم اتصال بسبب وجود ثقب أو فجوة أو قفزة

مثال الكتاب ١ صفحة ٤٨

إذا كان ق(س) = { س² + ١ ، س > ٢ ; ٥س − ٥ ، س ⩽ ٢ }

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

الحل

ق(س) اقتران متشعب عندما س = ٢

١) ق معرف عندما س= ٢ ومنه ق(٢) = ٥×٢ −٥ = ١٠ − ٥ = ٥

٢) نهـــــــاق(س) = نهـــــــا(س^{٢} + ١) = (٢)^{٢} + ١ = ٥
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{-}$

نهـــــــاق(س) = نهـــــــا(٥س ـ ٥) = ٥×٢ ـ٥ = ١٠ ـ ٥ = ٥
س ← ٢$^{+}$ س ← ٢$^{+}$

∴ نهـــــــاق(س) = ٥
س ← ٢

٣) نهـــــــاق(س) = ق(٢) = ٥
س ← ٢

بما أن الاقتران ق حقق شروط الاتصال جميعها عندما س = ٢ ، فإن الاقتران ق متصل عندما س= ٢

تدريب الكتاب ١ صفحة ٤٩

إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س < ١ \\ ٣ س & ، ١ \leq س < ٣ \\ س^{٣} ـ ١٨ & ، س > ٣ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران عند كل مما يلي : ١) س = ٠ ، ٢) س = ١ ، ٣) س = ٣

نلاحظ أن الاقتران متشعب عند النقاط س =١ و س = ٣

١) عندما س = ٠ ⟵ ق(٠) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢

نهـــــــا ق (س) = نهـــــــا (س^{٢} + ٢) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢
س ← ٠ س ← ٠

بما أن نهـــــــا ق (س)= ق(٠) = ٢ فالإقتران متصل عند النقطة س = ٠
س ← ٠

٢) عندما س = ١ ⟵ ق(١) = ٣ × ١ = ٣

بما أن س = ١ نقطة تشعب نوجد النهاية من اليمين واليسار

نهـــــــا ق (س) = نهـــــــا س^{٢} + ٢= (١)^{٢} + ٢ = ٣
س ← ١$^{=}$ س ← ١$^{=}$

نهـــــــا ق (س) = نهـــــــا ٣س = ٣ × ١ = ٣ ⟵ نهـــــــا ق (س) = ٣
س ← ١$^{+}$ س ← ١$^{+}$ س ← ١

بما أن نهـــــــا ق (س) = ق(١)
س ← ١

∴ الاقتران ق (س) متصل عندما س = ١

٣) عندما س = ٣ ⟵ ق(٣) غير موجودة لعدم وجودها في قاعدة الاقتران

∴ الاقتران ق(س) غير متصل عندما س = ٣

مثال الكتاب ٢ صفحة ٤٩

إذا كان : هـ(س) = { س + ٣ ، س ≠ ١ ؛ ٤ ، س = -١ }

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = -١

الحل :

١) هـ معرف عندما س = -١ ، هـ(-١) = ٤

٢) نهـــــا هـ (س) = نهـــــا (س + ٣) = -١ + ٣ = ٢
س ← -١ س ← -١

٣) نهـــــا هـ(س) ≠ هـ (-١)
س ← -١

∴ الاقتران هـ غير متصل عندما س = -١

تدريب الكتاب ٢ صفحة ٤٩

إذا كان : ق(س) = { (س^٢ - ٢س) / (س - ٢) ، س ≠ ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ }

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

١) ق(٢) = ٤

٢) نهـــــا ق(س) = نهـــــا (س(س-٢)) / (س-٢) = نهـــــا س = ٢
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

٣) نهـــــا ق(س) ≠ ق(٢) إذن ق(س) غير متصل عندما س = ٢
س ← ٢

مثال الكتاب ٣ صفحة ٥٠

إذا كان : ق (س) = { أس + ٧ ، س ≥ ٣ ؛ س + ١ ، س < ٣ }

وكان ق متصلا عندما س = ٣ ، فجد قيمة الثابت أ ؟

الحل : بما أن ق متصلا عندما س = ٣ (وهي القيمة التي يتشعب عندها ق) فإن نهـــــا ق(س) موجودة
س ← ٣

نهـــــا ق(س) = نهـــــا ق(س)
س ← ٣⁻ س ← ٣⁺

نهـــــــا (أس + ٧) = نهـــــــا(س + ١)
س ← ٣⁻ س ← ٣⁺

٣أ + ٧ = ٣ + ١ ومنه ٣أ + ٧ = ٤

٣أ= ٤ ـ ٧ ومنه ٣أ = ـ٣ ومنه أ = ـ١

مثال الكتاب ٤ صفحة ٥٠

إذا كان :

ق (س) = { س³ +١٠ ، س≠ ٢ ; أ²س ، س=٢ }

وكان ق متصلا عندما س = ٢ ، فجد قيمة الثابت أ ؟

الحل : بما أن ق متصلا عندما س= ٢ (وهي القيمة التي يتشعب عندها ق) فإن نهـــــــاق(س)= ق(٢)
س ← ٢

نهـــــــا(س³ + ١٠) = ٢أ²
س ← ٢

(٢)³ + ١٠ = ٢أ² ومنه ٨ + ١٠ = ٢أ²

١٨ = ٢أ² ومنه أ² = ٩ ومنه أ = ٣ ، ـ٣

مثال الكتاب ٥ صفحة ٥١

إذا كان :

ق(س) = { ٢أس + ب ، س< ٢ ; ٨ ، س = ٢ ; أس² +٣ب س ، س>٢ }

وكان ق متصلا عندما س = ٢ ، فجد قيمة كل من الثابتين : أ ، ب

الحل : بما أن ق متصلاً عندما س = ٢ ، فإن نهـــــــاق(س) = ق(٢)
س ← ٢

نهـــــــاق(س) = ق(٢) ومنه نهـــــــا(٢أس +ب) = ٨
س ← ٢⁻

٢أ×٢ + ب = ٨ ومنه ٤أ+ ب = ٨ ..... (١)

نهـــــــاق(س) = ق(٢) ومنه نهـــــــا(أس² +٣ب س) = ٨
س ← ٢⁺ س ← ٢⁺

أ(٢)^{٢} + ٣ب×٢ = ٨ ومنه ٤أ + ٦ب = ٨ ..... (٢)

بطرح المعادلة (٢) من (١) ينتج :

ب − ٦ب = ٠ ومنه −٥ب = ٠ ومنه ب = ٠

نعوض في المعادلة (١)

٤أ + ٠ = ٨ ومنه ٤أ = ٨ نقسم على ٤ فيكون أ = ٢

تدريب الكتاب ٣ صفحة ٥٢

١) إذا كان : ق (س) = { ٢س^{٣} + ٤ ، س < −٢ ; أس + ٦ ، س ⩽ −٢ }

وكان الاقتران ق متصلا عندما س = −٢ ، فجد قيمة الثابت أ

الحل : بما أن ق متصلاً عندما س = −٢ فإن نهـــــــاق(س) = نهـــــــاق(س)
س ← −٢+ س ← −٢−

نهـــــــا (أس + ٦) = نهـــــــا (٢س^{٣} + ٤)
س ← −٢+ س ← −٢−

−٢أ + ٦ = ٢ (−٢)^{٣} + ٤ ومنه −٢أ + ٦ = −١٦ + ٤

−٢أ + ٦ = −١٢ ومنه −٢أ = −١٢ − ٦ ومنه −٢أ = −١٨ ومنه أ = ٩

٢) إذا كان :

ق(س) = { أس + ٣ ، س < ١ ; ٧ ، س = ١ ; س− ب ، س > ١ }

وكان ق متصلا عندما س = ١ ، فجد قيمة كل من الثابتين : أ ، ب

الحل : بما أن ق متصلاً عندما س = ١ ، فإن نهـــــــاق(س) = ق(١)
س ← ١

نهـــــــاق(س) = ق(١) ومنه نهـــــــا (أس + ٣) = ٧
س ← ١+ س ← ١−

أ + ٣ = ٧ ومنه أ = ٧−٣ = ٤ أي أ = ٤

نهـــــــاق(س) = ق(١) ومنه نهـــــــا (س − ب) = ٧
س ← ١+ س ← ١+

١ − ب = ٧ ومنه − ب = ٧ − ١ = ٦ أي ب = −٦

سؤال إضافي

إذا كان ق اقتراناً متصلاً عند س = ٣ وكان ق(٣) = ١١ فأوجد ما يلي :

نهـــــــــا (س^{٢} ق(س) − ٨)
س ← ٣

الحل :

نهـــــــــا (س^{٢} ق(س) − ٨) = نهـــــــــاس^{٢} × نهـــــــــاق(س) − ٨
س ← ٣ س ← ٣ س ← ٣

= ٩ نهـــــــــاق(س) − ٨ بما أن ق متصلاً فإن نهـــــــــاق(س) = ق(٣) = ١١
س ← ٣ س ← ٣

= ٩ × ١١ − ٨ = ٩٩ − ٨ = ٩١

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = { ٢أ س^{٢} + ب ، س < ١
٧ ، س = ١
س^{٢} − ٤ ب − ٦ ، س > ١

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل الاقتران ق متصلاً عند س =١

الحل :

بما أن الاقتران متصل فإن :

نهـــــــــاق(س) = نهـــــــــاق(س) = ق(١) = ٧
س ← ١$^{+}$ س ← ١$^{-}$

نهـــــــــاق(س) = نهـــــــــا(س^{٢} − ٤ ب − ٦) = ٧ ومنه
س ← ١$^{+}$ س ← ١$^{+}$

(١)^{٢} − ٤ب − ٦ = ٧ ومنه ١ − ٤ب − ٦ = ٧ ومنه −٤ب = ٧ + ٥

ومنه −٤ب = ١٢ نقسم على −٤ فيكون ب = − ٣

نهـــــــــاق(س) = نهـــــــــا(٢أ س^{٢} + ب) = ٧ ومنه :
س ← ١$^{-}$ س ← ١$^{-}$

٢أ(١)^{٢} + ب = ٧ ومنه ٢أ + ب = ٧ ومنه ٢أ − ٣ = ٧ ومنه

٢أ = ٧ + ٣ ومنه ٢أ = ١٠ نقسم على ٢ فيكون أ = ٥

سؤال إضافي

إذا كان :

ق(س) = { ٢س^{٣} + ٤ ، س < −٢
أس + ٦ ، س ⩽ −٢

وكان ق متصلاً عند س = -٢ فما قيمة الثابت أ ؟

الحل :

بما أن ق متصلاً عند س = -٢ فإن $\text{نهـ}_{س \to -٢}$ ق(س) موجودة أي :

$\text{نهـ}_{س \to -٢^+}$ ق(س) = $\text{نهـ}_{س \to -٢^-}$ ق(س)

$\text{نهـ}_{س \to -٢^+}$ (أس + ٦) = $\text{نهـ}_{س \to -٢^-}$ (٢س^٣ + ٤)

أ×-٢ + ٦ = ٢(-٢)^٣ + ٤ ومنه

-٢أ + ٦ =-١٦ + ٤ ومنه -٢أ + ٦ = -١٢ ومنه -٢أ = -١٢ - ٦

-٢أ = -١٨ نقسم على -٢ فيكون أ = ٩

سؤال إضافي

إذا كان : ق(س) = { أس + ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٧ ، س = ٢ }

فجد قيمة الثابت (أ) التي تجعل الاقتران ق متصلاً عند س = ٢

الحل :

يكون الاقتران متصلاً عندما : $\text{نهـ}_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢)

$\text{نهـ}_{س \to ٢}$ (أس + ١) = ق(٢)

أ × ٢ + ١ = ٧ ومنه ٢أ = ٧ - ١ ومنه ٢أ = ٦ نقسم على ٢ فيكون أ = ٣

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = { س^٢ - ٥ ، س ⩾ ٢ ؛ س + ١ ، س < ٢ }

ابحث في اتصال ق(س) عندما س = ٣

ق(٣) = (٣)^٢ - ٥ = ٩ - ٥ = ٤

$\text{نهـ}_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\text{نهـ}_{س \to ٢^-}$ (س^٢ -٥) = ٩ - ٥ = ٤

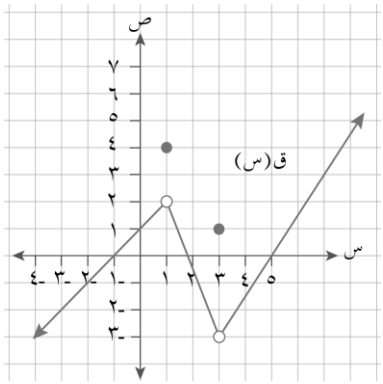
$\text{نهـ}_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\text{نهـ}_{س \to ٢^+}$ (س + ١) = ٣ + ١ = ٤

نهـــــــاق(س) = نهـــــــاق(س) منه نهـــــــاق(س) = ٤
س ← ٢⁻ س ← ٢⁺ س ← ٢

وبما أن نهـــــــاق(س) = ق(٣) = ٤ فإن ق(س) متصل عندما س = ٣
س ← ٢

حل الأسئلة

صفحة ٥٣



١) اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ، حدد قيم س التي يكون الاقتران ق عندها غير متصل :

الحل : يكون الاقتران ق غير متصل عندما :

س = ١ ، س = ٣

---

٢) إذا كان :

ق (س) = { س² − ١ ، س < ١
{ ٢س ، س ⩽ ١

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

١) ق(١) = ٢ × ١ = ٢

٢) نهـــــــاق(س) = نهـــــــا(س² − ١) = (١)² − ١ = صفر
س ← ١⁻ س ← ١⁻

٣) نهـــــــاق(س) = نهـــــــا ٢س = ٢ × ١ = ٢
س ← ١⁺ س ← ١⁺

٤) بما أن نهـــــــاق(س) ≠ نهـــــــاق(س) فإن ق(س) غير متصل عندما س = ١
س ← ١⁻ س ← ١⁺

---

٣)

إذا كان

ق(س) = { ٥ / (س + ١) ، س ≠ ١
{ ٣ ، س = ١

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ١

الحل: ق(١) = ٣

عند وجود إشارة (≠) فإننا نعوض بها دائما ولا نوجد النهاية من اليمين واليسار

نهـــــــا ق (س) = نهـــــــا ٥ / (س + ١) = ٥ / (١ + ١) = ٥/٢
س ← ١ س ← ١

∴ الاقتران غير متصل لأن نهـــــــا ق (س) ≠ ق(١)
س ← ١

٤) إذا علمت أن :

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، \ س < -١ \\ ٥ - س & ، \ -١ \leqslant س < ١ \\ س^{٣} + ٣ & ، \ س \geqslant ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما : أ) س = ١ ، ب) س = -١

الحل :

أ) عندما س = ١

١) ق(١) = (١)^{٣} + ٣ = ١ + ٣ = ٤

٢) $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٥ - س) = ٥ - ١ = ٤

٣) $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ (س^{٣} + ٣) = (١)^{٣} + ٣ = ١ + ٣ = ٤

٤) بما أن $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = (١) = ٤

فإن الاقتران متصل عندما س = ١

ب) عندما س = -١

١) ق(-١) = ٥ - - ١ = ٦

٢) $\lim_{س \to -١^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to -١^-}$ (س^{٢} + ٣) = (-١)٢ +٣ = ١ + ٣ = ٤

٣) بما أن $\lim_{س \to -١^-}$ ق(س) ≠ ق(-١) إذن ق(س) غير متصل عندما س = -١

---

٥) إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٣ - س}{س - ٣} & ، \ س \neq ٣ \\ م \ س + ٢ & ، \ س = ٣ \end{cases}$$

وكان الاقتران متصلا عندما س = ٣ ، فجد قيمة الثابت م

الحل : بما أن ق(س) متصلاً عندما س = ٣ ، فإن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ق(٣)

$$\lim_{س \to ٣} \left(\frac{٣ - س}{س - ٣} \right) = ٣م + ٢$$

$\lim_{س \to ٣}$ -١ = ٣م +٢ ومنه -١ = ٣م +٢ ومنه ٣م = -١-٢ = -٣

٣م = -٣ نقسم على ٣ فيكون م = -١

٦) إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} س + أ & ، س < ٢ \\ ٨ & ، س = ٢ \\ ب\ س + ٦ & ، س > ٢ \end{cases}$$

وكان الاقتران هـ متصلاً عندما س = ٢ ، فجد كل من الثابتين : أ ، ب

الحل : بما أن الاقتران هـ متصلاً عندما س = ٢ فإن : $\lim_{س \to ٢}$ هـ (س) = هـ(٢)

$\lim_{س \to ٢^-}$ هـ (س) = هـ(٢) ومنه $\lim_{س \to ٢^-}$ (س + أ) = ٨

٢ + أ = ٨ ومنه أ = ٨ ـ ٢ = ٦ أي **أ = ٦**

$\lim_{س \to ٢^+}$ هـ (س) = هـ(٢) ومنه $\lim_{س \to ٢^+}$ (ب س + ٦) = ٨

٢ب + ٦ = ٨ ومنه ٢ب = ٨ ـ ٦ = ٢ نقسم على ٢ فيكون **ب = ١**

---

٧) إذا كان :

$$ل(س) = \begin{cases} أس - ب & ، س < ١ \\ ٤ & ، س = ١ \\ أس^{٣} + ب + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

وكان الاقتران هـ متصلاً عندما س = ١ ، فجد كل من الثابتين : أ ، ب

الحل : بما أن الاقتران هـ متصلاً عندما س = ١ فإن : $\lim_{س \to ١}$ ل(س) = ل(١)

$\lim_{س \to ١^-}$ ل (س) = ل(١) ومنه $\lim_{س \to ١^-}$ (أس - ب) = ٤

أ - ب = ٤ ..... (١)

$\lim_{س \to ١^+}$ ل(س) = ل(٢) ومنه $\lim_{س \to ١^+}$ (أس^{٣} + ب + ٢) = ٤

أ + ب + ٢ = ٤ ومنه أ + ب = ٤ - ٢ ومنه أ + ب = ٢ .....(٢)

بجمع (١) و(٢) ينتج :

٢أ = ٦ نقسم على ٢ فيكون **أ = ٣** نعوض في (٢) فينتج :

٣ + ب = ٢ ومنه ب = ٢ ـ٣ ومنه **ب = ـ١**

٨) إذا كان ق متصلا عندما س = ٢ ، وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + س = ٦

فما قيمة ق(٢) ؟

$\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + س = ٦ ← $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + $\lim_{س \to ٢}$ س = ٦

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + ٢ = ٦

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤ ← $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢ ، وبما أن الاقتران ق متصلا عند س = ٢

ق(٢) = $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + (٢ - أ) س}{س} & ، س < ٠ \\ ٦ & ، س = ٠ \\ ٥ - س + ب & ، س > ٠ \end{cases}$

إذا كان ق متصلا عند س = صفر ، فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

الحل : ق(٠) = ٦

يكون الاقتران ق متصلا عندما :

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ق (٠) = ٦ ونكتب

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^+} \frac{س^٢ + (٢ - أ) س}{س} = \frac{صفر}{صفر}$ غير مقبول نحلل

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{س^٢ + (٢ - أ) س}{س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س(س + (٢ - أ))}{س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س + (٢ - أ)}{١}$

= (٠ + (٢ - أ) = ق(٠) = ٦ ← ٢ - أ = ٦ ← أ = -٤

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ (٥ - س + ب) = ٥ - ٠ + ب = ق(٠) = ٦

٥ + ب = ٦ ← ب = ٦ - ٥ ← ب = ١

اختبر نفسك

١) إذا كان : ق (س) = { س^{٢} ، س < ١ ؛ ٣س + ١ ، س ⩽ ١

ابحث في اتصال الاقتران ق عندما س = ١

٢) إذا كان : ق (س) = { س^{٢} + ٧ ، س ⩾ −٢ ؛ أ س + ١ ، س < −٢

وكان ق متصلاً عند س = −٢ ، فما قيمة الثابت أ ؟

٣) إذا كان : ق(س) = { س + ٥ ، س < −١ ؛ ٩ − ٢س ، −١ ⩽ س ⩽ ٣ ؛ س^{٢} − ٦ ، س > ٣

فابحث في اتصال ل عند س = −١

٤) إذا كان : ق (س) = { س^{٢} + ٥ ، س < ٣ ؛ ل ، س ⩽ ٣

فما قيمة الثابت ل التي تجعل ق متصلاً

ثانياً نظريات الاتصال

إذا كان الاقترانان ق ، هـ متصلين عندما س = أ فإن :

- ق ± هـ متصل عندما س = أ
- ق × هـ متصل عندما س = أ
- $\frac{ق}{هـ}$ متصل عندما س = أ ، إذا كان هـ ≠ أ

بمختصر العبارة مجموع أو فرق أو جداء أو قسمة اقترانين متصلين عند نقطة هو اقتران متصل عند نفس النقطة

مثال الكتاب ١ صفحة ٥٥

إذا كان : ق (س) = { ٥س ، س ⩾ ٠ ؛ س^{٢} ، س < ٠ }

وكان ل(س) = (ق × هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٠

الحل : عند ما س = ٠

١) ق اقتران كثير حدود متصل لكل قيم س ، لذا فهو متصل عندما س = ٠

٢) نبحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ٠

هـ(٠) = ٥ × ٠ = ٠

$\lim_{س \to ٠^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ (٥س) = ٥ × ٠ = ٠

$\lim_{س \to ٠^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ س^{٢} = (٠)^{٢} = ٠

بما أن $\lim_{س \to ٠^-}$ هـ (س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ هـ (س) ، فإن $\lim_{س \to ٠}$ هـ (س) = صفراً

وكذلك $\lim_{س \to ٠}$ هـ (س) = هـ(٠) = ٠

∴ هـ(س) اقتران متصل عندما س = ٠

٣) الاقتران ل متصل عندما س = ٠ ، لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين عندما س = ٠

تدريب الكتاب ١ صفحة ٥٦

إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٢ ، هـ (س) = { س − ١ ، س ≥ ٣ ؛ ٥ − س ، س < ٣ }

فابحث اتصال م (س) = (ق × هـ)(س) عندما س = ٣

الحل :

١) ق اقتران كثير حدود متصل لكل قيم س ، لذا فهو متصل عندما س = ٣

٢) نبحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ٣

هـ(٣) = س - ١ = ٣ - ١ = ٢

$\text{نهـ}_{س \to ٣^-}$ هـ(س) = $\text{نهـ}_{س \to ٣^-}$ (س - ١) = ٣ - ١ = ٢

$\text{نهـ}_{س \to ٣^+}$ هـ(س) = $\text{نهـ}_{س \to ٣^+}$ (٥ - س) = (٥ - س) = ٥ - ٣ = ٢

بما أن $\text{نهـ}_{س \to ٣^-}$ هـ (س) = $\text{نهـ}_{س \to ٣^+}$ هـ (س) ، فإن $\text{نهـ}_{س \to ٣}$ هـ (س) = صفراً

وكذلك $\text{نهـ}_{س \to ٣}$ هـ (س) = هـ(٣) = ٢

∴ هـ(س) اقتران متصل عندما س = ٣

٣) الاقتران م(س) متصل عندما س =٣ ، لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين عندما س= ٣

مثال الكتاب ٢ صفحة ٥٧

إذا كان ق (س) = س^٢ + ٢ ، هـ (س) = { س^٢ ، س ≥ ٥ ؛ ٣س ، س < ٥ }

فابحث اتصال الاقتران م (س) = (ق - هـ)(س) عندما س = ٥

الحل :

باستخدام نظريات الاتصال ، نبحث اتصال كل من الاقترانين ق ، هـ عندما س = ٥

١) ق(س) متصل عندما س = ٥ لأنه اقتران كثير حدود

٢) $\text{نهـ}_{س \to ٥^-}$ هـ(س) = $\text{نهـ}_{س \to ٥^-}$ س^٢ = ٢٥

$\text{نهـ}_{س \to ٥^+}$ هـ (س) = $\text{نهـ}_{س \to ٥^+}$ ٣س = ١٥

بما أن $\text{نهـ}_{س \to ٥^-}$ هـ(س) ≠ $\text{نهـ}_{س \to ٥^+}$ هـ(س) فإن $\text{نهـ}_{س \to ٥}$ هـ(س) غير موجودة

هذا يعني أن هـ(س) غير متصل لذلك سنقوم بإيجاد م(س) = (ق - هـ)(س)

إذا كان (ق- هـ) (س) = { (س^٢ +١٥)- س^٢ ، س ≥ ٥ ؛ (س^٢ +١٥)- ٣س ، س < ٥ }

$$م(س) = \begin{cases} ١٥ & ، \ س \geq ٥ \\ س^{٢} - ٣س + ١٥ & ، \ س < ٥ \end{cases}$$

نبحث اتصال م(س) عندما س = ٥

م(٥) = ١٥

$نهـــــام_{س \to ٥^{-}}(س) = ١٥$ ، $نهـــــام_{س \to ٥^{+}}(س) = (٥)^{٢} - ٣ \times ٥ + ١٥ = ٢٥$

∴ $نهـــــام_{س \to ٥}(س)$ غير موجودة ، لهذا فإن م غير متصل عندما س = ٥

تدريب الكتاب ٢ صفحة ٥٩

إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٥ ، هـ (س) $= \begin{cases} س^{٢} + ٦ & ، \ س \geq -١ \\ ٣٥ - س & ، \ س < -١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران م(س) = ق(س) × هـ(س) عندما س = −١

باستخدام نظريات الاتصال ، نبحث اتصال كل من الاقترانين ق ، هـ عندما س = −١

١) ق(س) متصل عندما س = −١ لأنه اقتران كثير حدود

٢) هـ(−١) = (−١)^{٢} + ٦ = = ٧

٣) $نهـــاهـ_{س \to -١^{-}}(س) = نهـــا_{س \to -١^{-}}(س^{٢} + ٦) = (-١)^{٢} + ٦ = = ٧$

$نهـــاهـ_{س \to -١^{+}}(س) = نهـــا_{س \to -١^{+}}(٣٥ - س) = ٣٥ - -١ = ٣٦$

بما أن $نهـــاهـ_{س \to -١^{-}}(س) \neq نهـــاهـ_{س \to -١^{+}}(س)$ فإن $نهـــاهـ_{س \to -١}(س)$ غير موجودة

∴ هـ (س) غير متصل عندما س= −١ لذلك نقوم بإيجاد م(س) = ق(س) × هـ(س)

$$م(س) = ق(س) \times هـ(س) = \begin{cases} (س^{٢}+٥)(س^{٢}+٦) & ، \ س \geq -١ \\ (س^{٢}+٥)(٣٥ - س) & ، \ س < -١ \end{cases}$$

نبحث اتصال م(س) عندما س = −١

١) م(−١) = ((−١)^{٢} + ٥)((−١)^{٢} + ٦) = ٤٢

٢) $نهـــام_{س \to -١^{-}}(س) = نهـــا_{س \to -١^{-}}(س^{٢}+٥)(س^{٢}+٦) = ((-١)^{٢}+٥)((-١)^{٢}+٦) = ٤٢$

$نهـــام_{س \to -١^{+}}(س) = نهـــا_{س \to -١^{+}}(س^{٢}+٥)(٣٥ - س) = ((-١)^{٢}+٥)(٣٥ - -١) = ٢١٦$

بما أن $نهـــام_{س \to -١^{-}}(س) \neq نهـــام_{س \to -١^{+}}(س)$ فإن م(س) غير متصل عندما س = −١

مثال الكتاب ٣ صفحة ٥٩

جد قيم س(إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل :

١) ق(س) = س^{٢} + ٥س + ١

ق اقتران كثير حدود متصل لقيم س جميعها ، لذا لا يوجد له نقاط عدم اتصال

٢) هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ٣}$

هـ اقتران نسبي متصل لقيم س جميعها باستثناء أصفار مقامه ، لذا نجد أصفار مقامه :

س ـ ٣ = ٠ ومنه س = ٣

∴ هـ غير متصل عندما س = ٣

٣) ل(س) = $\frac{٥س}{س^{٢} - ١}$

ل اقتران نسبي ومنه س^{٢} ـ ١ = ٠ ومنه س^{٢} =١ ومنه س = ١ ، ـ١

∴ ل غير متصل عندما س =١ ، س= ـ١

تدريب الكتاب ٣ صفحة ٦٠

جد قيم س(إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل :

١) ق(س) = س^{٢} ـ٣س + ٨ وهو اقتران كثير حدود متصل لجميع قيم س

٢) هـ (س) = $\frac{س-١}{س^{٢} + ٥س + ٦}$ اقتران نسبي متصل لجميع قيم س ما عدا أصفار المقام لذا نوجد أصفار مقامه :

س^{٢} + ٥س +٦ = صفر ⟵ (س+٣)(س+٢) = صفر ⟵ س=ـ٣ ، س =ـ٢

∴ هـ(س) غير متصل عندما س = ـ٣ أو س = ـ٢

٣) ل(س) = $\frac{٥ - س}{س^{٣} - ١}$

ل اقتران نسبي ومنه س^{٣} ـ ١ = ٠ ومنه س^{٣} =١ ومنه س = ١

∴ ل غير متصل عندما س =١

سؤال إضافي

إذا كان هـ (س) = س^{٢} + ٦ ، ل (س) =
- ٣س^{٢} − س ، س ≤ ٢
- س + ٨ ، س > ٢

وكان ق(س) = هـ(س) − ل (س) فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٢

الحل :

هـ(س) متصل عند س = ٢ لأنه اقتران كثير حدود

ل(٢) = ٣(٢)^{٢} − (٢) = ١٢ − ٢ = ١٠

نهـــــا ل(س) = نهـــــا(٣س^{٢} − س) = ٣(٢)^{٢} − (٢) = ١٢ − ٢ = ١٠
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{-}$

نهـــــا ل(س) = نهـــــا(س + ٨) = ٢ + ٨ = ١٠
س ← ٢$^{+}$ س ← ٢$^{+}$

نهـــــال(س) = نهـــــا ل(س) ومنه نهـــــا ل(س) = ١٠
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{+}$ س ← ٢

بما أن نهـــــا ل(س) = ل(٢) فإن ل(س) متصل عندما س = ٢
س ← ٢

ومنه ق(س) متصل لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين

طريقة ثانية لحل التمرين :

ق (س) = هـ(س) − ل(س) =
- (س^{٢} + ٦) − (٣س^{٢}− س) ، س ≤ ٢
- (س^{٢} + ٦) − (س + ٨) ، س > ٢

ق (س) =
- −٢س^{٢} + س + ٦ ، س ≤ ٢
- س^{٢} − س − ٢ ، س > ٢

ق(٢) = −٢(٢) ^{٢} + ٢ + ٦ = −٨ + ٨ = صفر

نهـــــا ق(س) = نهـــــا (−٢س^{٢} +س + ٦) = −٢(٢) ^{٢} + ٢ + ٦ = −٨ + ٨ = صفر
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{-}$

نهـــــا ق(س) = نهـــــا (س^{٢} − س − ٢) = (٢)^{٢} − ٢ − ٢ = صفر
س ← ٢$^{+}$ س ← ٢$^{+}$

بما أن نهـــــــــا ق(س) = نهـــــــــا ق(س) = ق (٢) = صفر
س ← ٢⁻ س ← ٢⁺

∴ الاقتران ق(س) متصل عند النقطة س = ٢

سؤال إضافي

إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين عند س = ٢ وكان ق(٢)=٦ ، نهـــــــــا (ق(س) - ٤هـ(س))=-١٤
س ← ٢

فأجب عن كل مما يأتي :

١- جد قيمة هـ(٢)

٢- جد قيمة الثابت ل التي تجعل نهـــــــــا $\frac{(ق(س))^{٢} - ل}{هـ(س)}$ = ٤
س ← ٢

الحل :

١)

بما أن ق ،هـ متصلين عند س = ٢ فإن نهـــــــــاق(س) = ق(٢)=٦وكذلك نهـــــــــاهـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢ س ← ٢

نهـــــــــا(ق(س) - ٤هـ(س))= نهـــــــــا ق(س) - ٤نهـــــــــا هـ(س) = -١٤ ← بالتعويض
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

٦ - ٤نهـــــــــا هـ(س) = -١٤ ← نهـــــــــاهـ(س) = $\frac{٦+٤١}{٤}$ = ٥ ← هـ(٢)= نهـــــــــا هـ(س) = ٥
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

٢)

نهـــــــــا $\frac{(ق(س))^{٢} - ل}{هـ(س)}$ = $\frac{(نهـــــــــاق(س))^{٢} - ل}{نهـــــــــاهـ(س)}$ = $\frac{(٦)^{٢} - ل}{٥}$
س ← ٢ س ← ٢

= ٤ ← (٦)^٢ - ل = ٢٠ ← ل = ١٦

سؤال إضافي

إذا كان :

ق(س) = س^٢ - ٩ ، هـ(س) = { س ، س > ٣ ؛ صفر ، س = ٣ ؛ - س ، س < ٣ }

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) ، فبين أن ل(س) متصل عند س = ٣

الحل :

$$\text{ل}(س) = \begin{cases} س(س^{٢} - ٩) & ، س > ٣ \\ \text{صفر} & ، س = ٣ \\ - س(س^{٢} - ٩) & ، س < ٣ \end{cases}$$

ل(٣) = صفر

$\text{نهـــــــال}_{س \leftarrow ٣^-}(س) = \text{نهـــــــا}_{س \leftarrow ٣^-}(س(س^{٢} - ٩)) = ٣(٩ - ٩) = \text{صفر}$

$\text{نهـــــــال}_{س \leftarrow ٣^+}(س) = \text{نهـــــــا}_{س \leftarrow ٣^+}(- س(س^{٢} - ٩)) = -٣(٩ - ٩) = \text{صفر}$

∴ $\text{نهـــــــال}_{س \leftarrow ٣}(س) = \text{صفر}$

وبما أن $\text{نهـــــــال}_{س \leftarrow ٣}(س) = \text{ق}(٣) = \text{صفر}$

∴ ل(س) متصل عندما س = ٣

سؤال إضافي

إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند س =٥ ، وكان هـ(٥) = ٤ ، $\text{نهـــــــا} \frac{\text{ق}(س) + س}{٣\text{هـ}(س)} = ١$

فجد ق(٥)

بما أن ق ، هـ متصلين فإن : $\text{نهـــــــاق}(س) = \text{ق}(٥)$ ، $\text{نهـــــــاهـ}(س) = \text{هـ}(٥) = ٤$

$\text{نهـــــــا} \frac{\text{ق}(س) + س}{٣\text{هـ}(س)} = ١$ ومنه

$$\frac{\text{نهـــــــا}_{س \leftarrow ٥} \text{ق}(س) + \text{نهـــــــا}_{س \leftarrow ٥} س}{٣\text{نهـــــــا}_{س \leftarrow ٥} \text{هـ}(س)} = ١$$

$\frac{\text{ق}(٥) + ٥}{٣ \times ٤} = ١$ ومنه ق(٥) +٥ = ١٢ ومنه ق(٥) = ١٢ -٥ ومنه ق(٥) = ٧

سؤال إضافي

إذا كان :

هـ(س) = ٤ - $س^{٢}$ ، $\text{ل}(س) = \begin{cases} ٤س - ٢ & ، س > ٣ \\ س^{٢} + ١ & ، س \leqslant ٣ \end{cases}$

وكان ق(س) =هـ(س) × ل(س) ، فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٣

الحل :

الاقتران هـ(س) متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود

ل(٣) = (٣)^{٢} + ١ = ٩ + ١ = ١٠

نهـــــــــال(س) = نهـــــــــا(٤س −٢) = ٤×٣ − ٢ = ١٠
س ← ٣− س ← ٣−

نهـــــــــال(س) = نهـــــــــا(س^{٢} + ١) = ٩ + ١ = ١٠
س ← ٣+ س ← ٣+

نهـــــــــال(س) = نهـــــــــال(س) ومنه نهـــــــــال(س) = ١٠
س ← ٣− س ← ٣+ س ← ٣

وبما أن نهـــــــــال(س) = ل(٣) فإن ل(س) متصل عند س =٣
س ← ٣

∴ ق(س) متصل لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = $\frac{٦ - ٣س}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$ جد قيم س التي تجعل ق(س) غير متصل

الحل :

القيم التي تجعل ق(س) غير متصل هي أصفار المقام :

س^{٢} + ٣س − ١٠ = ٠ ومنه (س + ٥)(س − ٢) = ٠

ومنه قيم س هي : س = −٥ ، س = ٢

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٤س + ٤}$ فإن قيمة س التي تجعل ق(س) غير متصل هي :

أ) −٤ ب) ٣ ج) −٢ د) ٢

الحل :

س٢ − ٤س + ٤ = ٠

(س − ٢)^{٢} = ٠ ومنه س −٢ = ٠ ومنه س = ٢

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = $\frac{س}{(س + ١)(س - ٢)}$ فإن قيم س التي تجعل ق(س) غير متصل هي :

أ) −١ ، ٢ ب) ٠ ، −١ ، ٢ ج) ١ ، −٢ د) ٠

الحل : قيم س = −١ ، ٢

سؤال دورة ٢٠١٨ شتوية منهاج جديد

١) إذا كان :

ق(س) = ٢س ، هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س > ٢ \\ ٥س - ٣ & ، س \leqslant ٢ \end{cases}$

وكان ل(س) = (ق + هـ)(س) ، فابحث في اتصال الاقتران ل عندما س = ٢

الحل :

ل(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ + ٢س & ، س > ٢ \\ ٥س - ٣ + ٢س & ، س \leqslant ٢ \end{cases}$

ل(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ + ٢س & ، س > ٢ \\ ٧س - ٣ & ، س \leqslant ٢ \end{cases}$

ل(٢) = ٧×٢ - ٣ = ١٤ - ٣ = ١١

نهـــــال(س) = نهـــــا(س^{٢} + ١ + ٢س) = (٢)^{٢} + ١ + ٢×٢= ٤ + ١ + ٤ =٩
س ← ٢-　　س ← ٢-

نهـــــال(س) = نهـــــا(٧س - ٣) = ٧×٢ - ٣ = ١١
س ← ٢+　　س ← ٢+

بما أن نهـــــال(س) ≠ نهـــــال(س) فإن نهـــــال(س) غير موجودة
س ← ٢-　　س ← ٢+　　س ← ٢

∴ ل(س) غير متصل لأن نهـــــال(س) غير موجودة
س ← ٢

٢) إذا كان ق(س) = $\frac{س(س - ٤)}{(س + ٢)(س - ١)}$ فإن مجموعة قيم س التي تجعل ق(س) غير متصل هي :

أ) {٠ ، ٤ }　　ب) {-٢ ، -١ }　　ج) {-٢، ١}　　د) {-١ ، ٢ }

الحل :

(س +٢)(س - ١) = ٠　ومنه مجموعة قيم س هي : {-٢ ، ١ }

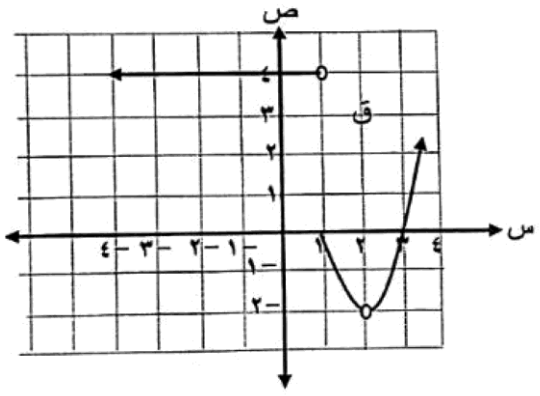
سؤال دورة ٢٠١٨ شتوية منهاج قديم

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،

ما مجموعة قيم س التي يكون عندها منحنى ق غير متصل

الحل :

مجموعة قيم س هي : { ١ ، ٢ }



اختبر نفسك

١) إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٣}$ ، فإن مجموعة نقط عدم الاتصال للاقتران ق(س) هي :

أ) {١ ، ٣} ب) {٣} ج) {-١ ، -٣} د) {-٣}

٢) إذا كان :

ل(س) = س ، ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} \leqslant ٢ \\ ٥ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

وكان هـ(س) = ق(س) + ل(س) ، فبين أن هـ(س) متصل عند س = ٢

٣) إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٥)}$ فإن جميع قيم س التي تجعل ق(س) غير متصل هي :

أ) -١ ، ٥ ب) -٥ ، ١ ج) ٠ ، -١ ، ٥ د) ٠ ، -٥ ، ١

٤) إذا كان :

ق(س) = ٣س -١ ، هـ(س) = $\begin{cases} ٤\text{س} + ١ & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٥ & ، \text{س} \leqslant ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) × هـ(س) عند س = ٢

٥) إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين وكان ق(٢) =٥ ، نهـــــا (ق(س) +٤هـ(س)) = ٤١
س ← ٢
فإن هـ (٢)

أ) ٤٠ ب) ٩ جـ) ٣٢ د) ١٨

٦) إذا كان :

ق(س) = ٥ + ٢س ، هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٥ & ، \text{س} \geqslant ٣ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال ل(س) = ق(س) + هـ(س) عند س = ٣

صفحة ٦١

حل الأسئلة

١) إذا كان ق(س) = ٥س^{٢}+٥س − ١ هـ (س) = { س + ٩ ، س ≥ ٢ ؛ ٥س + ١ ، س < ٢ }

وكان ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٢

ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س) = { ٢(٥س^{٢}+٥س − ١)+(س + ٩) ، س ≥ ٢ ؛ ٢(٥س^{٢}+٥س − ١)+(٥س + ١) ، س < ٢ }

ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س) = { ١٠س^{٢}+١٠س −٢ +س + ٩ ، س ≥ ٢ ؛ ١٠س^{٢} +١٠س−٢ +٥س + ١ ، س < ٢ }

ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س) = { ١٠س^{٢} +١١س +٧ ، س ≥ ٢ ؛ ١٠س^{٢} + ١٥س −١ ، س < ٢ }

نبحث اتصال الاقتران ل(س) عندما س = ٢

- ل(٢) = ١٠(٢)^{٢} +١١×٢ +٧ = ٤٠ + ٢٢ + ٧ = ٦٩
- نهـــــا ل(س) = نهـــــا (١٠س^{٢} +١١س +٧) = ١٠(٢)^{٢} +١١×٢ +٧
  س←٢$^{-}$ س←٢$^{-}$
  = ٤٠ + ٢٢ + ٧ = ٦٩
- نهـــــا ل(س) = نهـــــا (١٠س^{٢} + ١٥س −١) = ١٠(٢)^{٢} + ١٥×٢ −١
  س←٢$^{+}$ س←٢$^{+}$
  = ٤٠ + ٣٠ −١ =٦٩
- بما أن نهـــــا ل(س) = نهـــــا ل(س) فإن نهـــــا ل(س) = ٦٩
  س←٢$^{-}$ س←٢$^{+}$ س←٢

وبما أن نهـــــا ل(س) = ل(٢)= ٦٩ فإن ل(س) متصل عندما س = ٢
  س←٢

---

٢) إذا كان ق(س) = ٥س^{٢}+ ٤ ، هـ (س) = { س + ٤ ، س < ٠ ؛ ٤ − س^{٣} ، س ≥ ٠ }

وكان ل(س) = (ق×هـ)(س) ، فايحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٠

١) ق(س) متصل عندما س = ٠ لأن ق اقتران كثير حدود

٢) هـ(٠) = ٤ − (٠)^{٣} = ٤

نهـــــا هـ(س) = نهـــــا (س + ٤) = ٠ + ٤ = ٤
س←٠$^{-}$ س←٠$^{-}$

نهـــــا هـ(س) = نهـــــا (٤ − س^{٣}) = ٤ − (٠)^{٣} = ٤
س←٠$^{+}$ س←٠$^{+}$

بما أن نهـــــا هـ(س) = نهـــــا هـ(س) فإن نهـــــا هـ(س) = ٤
س←٠$^{-}$ س←٠$^{+}$ س←٠

وبما أن $\lim_{س \to ٠}$ هـ(س) = هـ(٠) = ٤ فإن هـ(س) متصل عندما س = ٠

∴ الاقتران ل(س) متصل لأنه حاصل جداء اقترانين متصلين ق، هـ

---

٣) إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} ٥ - س & ، س < ٥ \\ ٤ - س^{٣} & ، س \geq ٥ \end{cases} \qquad هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٢٥}$$

فابحث اتصال (ق×هـ)(س) عندما س = ٥

أن هـ(س) غير متصل عندما س = ٥ وذلك لأنها من أصفار المقام لذلك لا يمكن تطبيق نظريات الاتصال

لذلك نوجد (ق×هـ)(س) :

$$(ق \times هـ)(س) = \begin{cases} \frac{(س - ٣)}{(س+٥)(س-٥)} (٥ - س) & ، س < ٥ \\ \frac{س - ٣}{(س-٥)(س+٥)} (س - ٥) & ، س \geq ٥ \end{cases}$$

$$(ق \times هـ)(س) = \begin{cases} \frac{-(س - ٣)}{(س+٥)} & ، س < ٥ \\ \frac{(س - ٣)}{(س+٥)} & ، س \geq ٥ \end{cases}$$

نبحث اتصال (ق×هـ)(س) عندما س =٥

$$(ق \times هـ)(٥) = \frac{(٥ - ٣)}{(٥+٥)} = \frac{٢}{١٠}$$

$$\lim_{س \to ٥^{-}} (ق \times هـ)(س) = \frac{-(٥ - ٣)}{(٥+٥)} = -\frac{٢}{١٠}$$

$$\lim_{س \to ٥^{+}} (ق \times هـ)(س) = \frac{(٥ - ٣)}{(٥+٥)} = \frac{٢}{١٠}$$

$$\lim_{س \to ٥^{-}} (ق \times هـ)(س) \neq \lim_{س \to ٥^{+}} (ق \times هـ)(س)$$

∴ ق × هـ غير متصل عند س = ٥

---

٤) إذا كان (ق+هـ)(س) متصلاً عندما س = أ ، فهل نستنتج أن كلا من ق ، هـ متصل عندما س = أ ؟

الحل : إذا كان (ق+ هـ) متصلا فلا يشترط أن يكون كلا من ق ، هـ متصلا وهناك أمثلة كثيرة على ذلك

٥) جد قيم س التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي متصلا :

١) ق(س) = س^{٣} + ١ وهو اقتران كثير حدود متصل لجميع قيم س ولاتوجد قيم لا يكون الاقتران عندها غير متصل

.....

٢) هـ (س) = $\frac{س-٣}{س^{٢}-٥س+٦}$ اقتران نسبي متصل لجميع قيم س ما عدا أصفار المقام لذا نوجد أصفار مقامه :

س^{٢} - ٥س +٦ = صفر ⟵ (س-٣)(س-٢) = صفر ⟵ س=٣ ، س =٢

∴ هـ(س) غير متصل عندما س = ٣ أو س = ٢

.....

٣) ل(س) = $\frac{س+٢}{س^{٢}-١}$ + $\frac{٥}{س}$ هذا اقتران نسبي متصل لجميع قيم س ما عدا أصفار المقام نوجد أصفار مقامه :

من الكسر الأول نجد : س^{٢} -١ = صفر ⟵ س = ± ١

ومن الكسر الثاني نجد س = صفر

∴ ل(س) غير متصل عندما س = ±١ أو س = صفر

.....

٤) م (س) = $\begin{cases} س^{٣}+٣ & ، س<٢ \\ ٦-س & ، س\geqslant ٢ \end{cases}$

نهـــــام(س) = نهـــــا(س^{٣} + ٣) = (٢)^{٣} + ٣ = ٨ + ٣ = ١١
س⟵٢- س⟵٢-

نهـــــام(س) = نهـــــا(٦ - س) = ٦ - ٢ = ٤
س⟵٢+ س⟵٢+

بما ان نهـــــام(س) ≠ نهـــــام(س) فإن م(س) غير متصل عندما س = ٢
س⟵٢- س⟵٢+

---

٦) إذا كان ق(س) = س + ٣ ، هـ(س) = $\frac{س-٣}{س^{٢}-٩}$

ل(س) = ق(س) × هـ(س) ، فابحث اتصال ل عندما س = ٣

الحل : ق(س) اقتران متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود

هـ(س) غير متصل عند أصفار المقام وهي س^{٢} - ٩ = ٠ ومنه س^{٢} = ٩ ومنه س = -٣ ، ٣

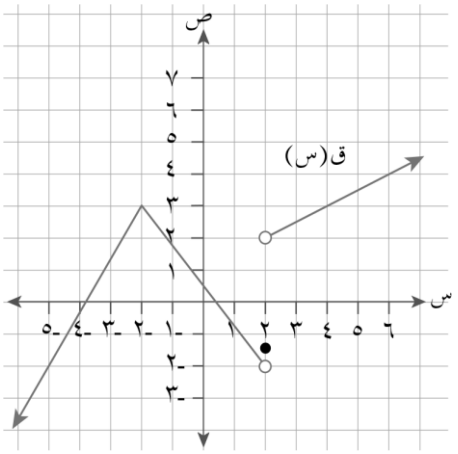
∴ هـ(س) غير متصل عندما س = ٣ وبالتالي ل(س) غير متصل عند س = ٣

صفحة ٦٣

حل الأسئلة الوحدة

١) اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي :

أ) ق(٢)



ب) $\lim_{س \to -١}$ ق(س)

ج) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

د) قيم س التي يكون عندها منحنى الاقتران ق غير متصل

هـ) $\lim_{س \to ٠}$ ((ق(س))^{٢} - س + ٢)

الحل :

أ) ق(٢) = $-\frac{٣}{٢}$ = -١,٥

ب) $\lim_{س \to -١^-}$ ق(س) = ٢ ، $\lim_{س \to -١^+}$ ق(س) = ٢ ⟵ $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ٢

ج) $\lim_{س \to -٢^-}$ ق(س) = -٢ ، $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٢ ⟵ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

د) الاقتران يكون غير متصل عند قيم س ∋ {٢} بسبب وجود قفزة

هـ) $\lim_{س \to ٠}$ ((ق(س))^{٢} - س + ٢) = ($\lim_{س \to ٠}$ ق(س))^{٢} - $\lim_{س \to ٠}$ س + ٢

لكن $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = $\frac{١}{٢}$ ⟵ نعوض

($\lim_{س \to ٠}$ ق(س))^{٢} - $\lim_{س \to ٠}$ س + ٢ = ($\frac{١}{٢}$)^{٢} - ٠ + ٢ = $\frac{١}{٤}$ + ٢ = $\frac{٩}{٤}$

---

٢) إذا كانت $\lim_{س \to ١}$ (ق(س))^{٣} + ٢ = ٢٩ ، $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = -٣ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) + ٢هـ(س) + س) ب) $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) × هـ(س))

الحل :

أ) نوجد أولاً: $\lim_{س \to ١}$ (ق(س))^{٣} + ٢ = ٢٩ ⟵ $\lim_{س \to ١}$ (ق(س))^{٣} = ٢٩ - ٢ = ٢٧ ⟵

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٣

$\lim_{س \to ١}$ (ق(س) + ٢هـ(س) + س) = $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + ٢$\lim_{س \to ١}$ هـ(س) + $\lim_{س \to ١}$ س

= ٣ + ٢×-٣ + ١ = ٣-٦+١ = -٢

ب) نهـــــا (ق(س)×هـ(س)) = نهـــــا ق(س) × نهـــــا هـ(س)
س ← ١ س ← ١ س ← ١

= ٣ × -٣ = -٩

---

٣)

إذا كان ق(س) = { ٢أ س٢ + ب ، س < ١ ؛ ٧ ، س = ١ ؛ س٢ -٤ب -٦ ، س > ١ }

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل الاقتران ق متصلا عند س = ١ ؟

الحل :

ق(١) = ٧

نهـــــا ق(س) = نهـــــا ق(س) = ق (١) = ٧
س ← ١+ س ← ١+

نهـــــا ق(س) = نهـــــا (٢أ س٢ + ب) = ٢أ (١)٢ + ب = ٧
س ← ١- س ← ١-

٢أ + ب = ٧ ..... (١)

نهـــــا ق(س) = نهـــــا (س٢ -٤ب -٦) = (١)٢ -٤ ب - ٦ = ٧
س ← ١+ س ← ١+

١ -٤ب -٦ = ٧ ⟵ -٤ب = -١٢ ⟵ ب = -٣

نعوض ب في (١) فنجد ٢أ + (-٣) = ٧ ⟵ ٢أ -٣ = ٧ ⟵ ٢أ = ١٠ ⟵ أ = ٥

---

٤) جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها :

أ) ق(س) = $\sqrt[3]{س - ٣}$ + $\frac{س+١}{س^{٢}+١}$ ، س ⟵ -١

الحل : نهـــــا ق(س) = نهـــــا $\sqrt[3]{س - ٣}$ + نهـــــا $\frac{س+١}{س^{٢}+١}$
س ← -١ س ← -١ س ← -١

= $\sqrt[3]{(-١) - ٣}$ + $\frac{-١+١}{(-١)^{٢}+١}$ = $\sqrt[4]{٠}$ + $\frac{صفر}{٢}$ = ٢

ب) هـ(س) = $\frac{س^{٢}-٥س}{٢س-١٠}$ ، س ⟵ ٥

نهـــــا هـ(س) = نهـــــا $\frac{س^{٢}-٥س}{٢س-١٠}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ غير مقبول نحلل
س ← ٥ س ← ٥

$$= \text{نهـــــا}_{س \to ٥} \frac{س(س-٥)}{٢(س-٥)} = \text{نهـــــا}_{س \to ٥} \frac{س}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

جـ) $ل(س) = \frac{س^{٢} - ٢س + ١}{٢١ - ٣س}$ ، $س \to ١$

$$\text{نهـــــا}_{س \to ١} ل(س) = \text{نهـــــا}_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ٢س + ١}{٢١ - ٣س} = \frac{(١)^{٢} - ٢(١) + ١}{٢١ - ٣(١)} = \frac{صفر}{٩} = صفر$$

د) $م(س) = \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ ، $س \to ٣$

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٣} م(س) = \frac{صفر}{صفر}$$ غير مقبول لذلك نحلل إلى العوامل الأولية

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} = \text{نهـــــا}_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س + ٩)}{س - ٣} = \text{نهـــــا}_{س \to ٣}(س^{٢} + ٣س + ٩)$$

$$= (٣)^{٢} + ٣\times٣ + ٩ = ٢٧$$

هـ) $ك(س) = \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{١}{٢}}{٢س - ٨}$ عندما $س \to ٤$

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٤} ك(س) = \frac{صفر}{صفر}$$ غير مقبول لذلك نوحد المقامات

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٤} م(س) = \text{نهـــــا}_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{١}{٢}}{٢س - ٨} = \text{نهـــــا}_{س \to ٤} \frac{٢ - (س-٢)}{٢(س-٢)(٢س-٨)}$$

$$= \text{نهـــــا}_{س \to ٤} \frac{٢ - س + ٢}{٢(س-٢)(٢س-٨)} = \text{نهـــــا}_{س \to ٤} \frac{-١}{٤(س-٢)} = \frac{-١}{٤(٤-٢)} = \frac{-١}{٨}$$

و) $د(س) = \frac{\sqrt{٣س+٤} - ٥}{س^{٢} - ٤٩}$ عندما $س \to ٧$

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٧} د(س) = \frac{\sqrt{٣(٧)+٤} - ٥}{(٧)^{٢} - ٤٩} = \frac{صفر}{صفر}$$ غير مقبول لذلك نضرب ونقسم على مرافق البسط

$$= \text{نهـــــا}_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٣س+٤}-٥}{س^{٢}-٤٩} \times \frac{\sqrt{٣س+٤}+٥}{\sqrt{٣س+٤}+٥} = \text{نهـــــا}_{س \to ٧} \frac{٣س+٤-٢٥}{(س^{٢}-٤٩)(\sqrt{٣س+٤}+٥)} =$$

$$\text{نهـــــا}_{س \to ٧} \frac{٣س-٢١}{(س-٧)(س+٧)(\sqrt{٣س+٤}+٥)} = \text{نهـــــا}_{س \to ٧} \frac{٣(س-٧)}{(س-٧)(س+٧)(\sqrt{٣س+٤}+٥)}$$

$$= \text{نهـــــا}_{س \to ٧} \frac{٣}{(س+٧)(\sqrt{٣س+٤}+٥)} = \frac{٣}{(٧+٧)(\sqrt{٣(٧)+٤}+٥)} = \frac{٣}{١٤ \times ١٠} = \frac{٣}{١٤٠}$$

---

٥) إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٥س ، هـ (س) =

$$\begin{cases} ٥س + ٤ & ، \quad س \leq ١ \\ ٨ + س^{٢} & ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

وكان ل(س) = (ق+هـ)(س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س= ١

الحل :

ق(س) متصل عندما س = ١ لأنه اقتران كثير حدود

هـ(١) = ٥×١ + ٤ = ٩

$\text{نهـــــا}_{س \to ١^{-}}$ هـ(س) = $\text{نهـــــا}_{س \to ١^{-}}$ (٥س + ٤) = ٥×١ + ٤ = ٩

$\text{نهـــــا}_{س \to ١^{+}}$ هـ(س) = $\text{نهـــــا}_{س \to ١^{+}}$ (٨ + س^{٢}) = ٨ + ١ = ٩

بما أن $\text{نهـــــا}_{س \to ١^{-}}$ هـ(س) = $\text{نهـــــا}_{س \to ١^{+}}$ هـ(س) فإن $\text{نهـــــا}_{س \to ١}$ هـ(س) = ٩

وبما أن $\text{نهـــــا}_{س \to ١}$ هـ(س) = هـ(١) فإن هـ متصل عندما س = ١

إذن ل(س) متصل عندما س= ١ لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين ق ، هـ

طريقة ثانية نقوم بإيجاد ل(س) = (ق+هـ)(س)

$$ل(س) = \begin{cases} س^{٣}+٥س + ٥س + ٤ & ، \quad س \leq ١ \\ س^{٣}+٥س+٨ + س^{٢} & ، \quad س > ١ \end{cases}$$

$$ل(س) = \begin{cases} س^{٣}+١٠س + ٤ & ، \quad س \leq ١ \\ س^{٣}+ س^{٢} +٥ س+٨ & ، \quad س > ١ \end{cases}$$

ق(١) = (١)^{٣}+١٠(١) + ٤ = ١ +١٠+٤ = ١٥

$\text{نهـــــا}_{س \to ١^{-}}$ ل(س) = $\text{نهـــــا}_{س \to ١^{-}}$ (س^{٣}+١٠س +٤) = (١)^{٣}+١٠(١) + ٤ = ١ +١٠+٤ = ١٥

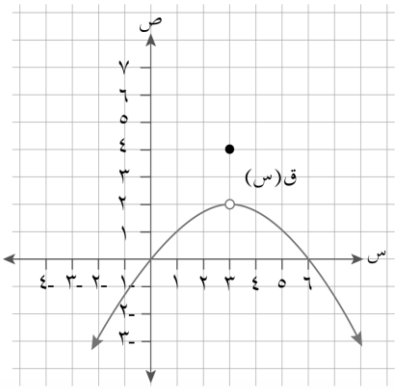
نهـــــــــا ل(س) = نهـــــــــا (س^{٣}+ س^{٢} +٥ س+٨)= (١)^{٣} +(١)^{٢}+٥(١)+٨ = ١٥
س ← ١+

بما أن نهـــــــــا ل(س) = نهـــــــــا ل(س) = ق(١) = ١٥
س ← ١- س ← ١+

∴ ل(س) متصل عندما س = ١

---

٦) اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣



الاقتران ق غير متصل عندما س = ٣ لأن ق(٣) = ٤

بينما نهـــــــــا ق(س) = نهـــــــــا ق(س) = ٢ ≠ ق (٣)
س ← ٣- س ← ٣+

---

٧) إذا كان كل من الاقترانين : ق ، هـ متصلا عندما س=٥ وكان هـ(٥) = ٤ ،

نهـــــــــا ق(س) + س = ١ ، فجد ق(٥)
س ← ٥ ٣هـ(س)

= نهـــــــــا ق(س) +نهـــــــــا س = ١
س ← ٥ س ← ٥
٣نهـــــــــاهـ(س)
س ← ٥

بما أن هـ متصل فإن نهـــــــــاهـ(س) = هـ(٥) = ٤
س ← ٥

نهـــــــــاق(س) + ٥ = ١ ← نهـــــــــاق(س) +٥ = ١٢
س ← ٥ ٣×٤ س ← ٥

نهـــــــــاق(س) = ١٢ ـ ٥ = ٧ بما أن ق متصل فإن نهـــــــــاق(س) = ق(٥) = ٧
س ← ٥ س ← ٥

---

٨) إذا كان ق(س) = ١/س + (س-٣)/(س^{٢} ـ ٣س) فما قيم س التي لايكون عندها الاقتران ق متصلا ؟

الحل:

بما أن الاقتران كسري فإن الاقتران ق يكون غير متصل عند أصفار المقام

من الكسر الأول نجد س =٠

ومن الكسر الثاني نجد س^{٢}-٣س = ٠ ← س(س-٣) = ٠ ← س=٠ أو س = ٣

ق غير متصل عند القيم س ∈ {٠، ٣ }

٩) يتكون عذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد ، لكل فقرة أربعة بدائل واحد منها فقط صحيح ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح :

(١) إذا كان م عدداً ثابتا ، وكان نهـــــا (م س^{٢} – ٤س +٥) = ٥ ، فإن قيمة م هي :
س ← ١

أ) ١ ب) –١ (جـ) ٤ د) –٤

الحل : م(١)^{٢} – ٤×١ + ٥ = ٥ ومنه م +١ = ٥ ومنه م = ٤

.....

(٢) نهـــــا (س^{٢}–٤)^{٣} تساوي :
س ← –١

أ) –١٢٥ (ب) –٢٧ جـ) ١٢٥ د) ٢٧

الحل :

نهـــــا (س^{٢}–٤)^{٣} = ((–١)^{٢}–٤)^{٣} = (١ –٤)^{٣} = (–٣)^{٣} = –٢٧
س ← ١

.....

(٣) إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$ فإن قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلا هي :

أ) {٠،٥} ب) {–٥،٠} (جـ) {٢،١} د) {–١،–٢}

الحل :

نوجد أصفار المقام س^{٢}–٣س+٢ = ٠ ومنه (س–١)(س–٢) = ٠ ومنه س= ١ ، س = ٢

.....

(٤)

إذا كان هـ(س) = { س–١ ، س ≤ ٢ ؛ ٣ ، س = ٢ ؛ س^{٢} ، س > ٢ } فإن نهـــــا هـ(س) =
س ← ٢

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ١ (د) غير موجودة

الحل :

نهـــــا هـ(س) = نهـــــا (س – ١) = ٢ – ١ = ١
س ← ٢- س ← ٢-

نهـــــا هـ(س) = نهـــــا س^{٢} = (٢)^{٢} = ٤
س ← ٢+ س ← ٢+

بما أن نهـــــا هـ(س) = نهـــــا هـ (س) فإن نهـــــا هـ (س) غير موجودة
س ← ٢- س ← ٢+ س ← ٢

.....

(٥) إذا كانت نهـــــا (٣ق(س)) = ٩ ، فإن قيمة نهـــــا (ق(س))^{٢}
س ← ٢ س ← ٢

(أ) ٩ ب) ٨١ جـ) ٢٧ د) ٢

الحل :

نهـــــا (٣ق(س)) = ٩ ومنه ٣ نهـــــا ق(س) = ٩ ومنه نهـــــا ق(س) = ٣
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

نهـــــا (ق(س))^{٢} = (نهـــــا ق(س))^{٢} = (٣)^{٢} = ٩
س ← ٢ س ← ٢