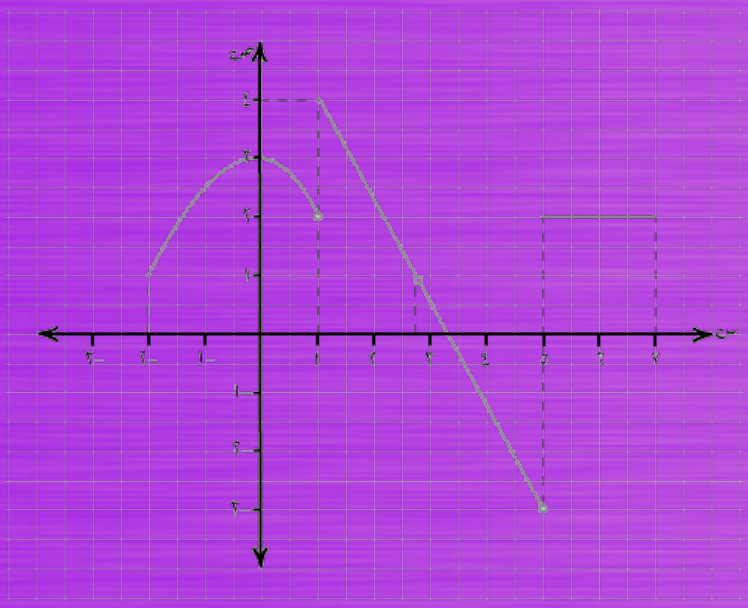
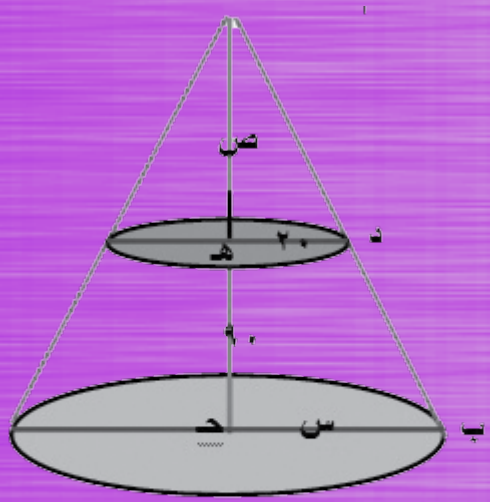
اوراق عمل في الرياضيات

المستوى الثالث - التوجيهي العلمي



$$\text{ق}'(٣) = \text{نها}_{٤ \to ٣} \frac{٤^{٥} - ٢٤٣}{٤ - ٣}$$



إعداد الإستاذ

محمود الجزار

(٠٧٨٦٩٠٩١٢١ - ٠٧٩٧٢٦٦٣٩٩)

تطلب من

مكتبة أم القرى
مرج الحمام
٠٧٨٨٩٦٢٠٣/٠٧٩٩٨٥٢١٨٨

مكتبة طارق بن زياد
حي نزال / مثلث المدارس
٠٦٤٣٩٢٦٢٢

مكتبة القصص
الأشرفية/ بجانب مدارس صلاح الدين
٠٧٩٦٤٠٢٠٤٢

مكتبة الإسراء
الأشرفية/ بجانب مدارس صلاح الدين
٠٧٩٦١٦٠٩٣٠

مكتبة حمزة
الوحدات / دخلة السهل
الاخضر
٠٦٤٧٤٨٠٧٨

مكتبة الشعاع
ظاحية الحاج حسن/ امام مدرسة
رقية للبنات
٠٧٨٥٩٨١٩٣١

مكتبة الشعاع
الزهور/ بجانب مسجد
الرواس
٠٧٨٨٣٥٧٣٠٤

مكتبة عاصم
كلية حطين
٠٧٩٩٨٨٩٨٠٤

مكتبة اوراق الخريف
المقابلين
٠٧٨٨٣٢٦٤٣٤

مركز الاسطوره الثقافي
كلية حطين
٠٦٤٧٧٧٩٩٢

مركز طوقان الثقافي
الياسمين/ دوار الخريطة

الوحدة الاولى

النهايات والإتصال

مراجعة

التحليل الى العوامل

أ الفرق بين مربعين $س^2 - ص^2$

$س^2 - ص^2 = (س - ص)(س + ص)$

أمثلة :- حلل المقادير الجبرية الآتية

[1] $س^2 - 16$

الحل:- $س^2 - 16$

$(س - 4)(س + 4)$

[2] $49م^2 - ب^2$

الحل:- $49م^2 - ب^2$

$(7م - ب)(7م + ب)$

[3] $(س + 1)^2 - 1$

الحل:- $(س + 1)^2 - 1$

$((س + 1) - 1)((س + 1) + 1)$

$س(س + 2)$

[4] $س^2 - 25$ تمرين

[5] $س^2 - \frac{1}{4}$ تمرين

ب مجموع مربعين ، $س^2 + ص^2$ لا تحلل

جـ الفرق بين مكعبين $س^3 - ص^3$

$س^3 - ص^3$

$(س - ص)(س^2 + ص س + ص^2)$

(الحد الاول - الحد الثاني)(مربع الاول + الاول × الثاني + مربع الثاني)

أمثلة :- حلل المقادير الجبرية الآتية

[1] $س^3 - 8$

الحل:- $س^3 - 8$

$(س - 2)(س^2 + 2س + 4)$

[2] $64س^3 - 125$

الحل:- $64س^3 - 125$

$(4س - 5)(16س^2 + 20س + 25)$

[3] $64 - 216ص^3$

الحل:- $64 - 216ص^3$

$(4 - 6ص)(16 + 24ص + 36ص^2)$

[4] $\frac{1}{8} - س^3$ تمرين

[5] $س^3 - 27$ تمرين

د مجموع مكعبين $س^3 + ص^3$

$س^3 + ص^3$

$(س + ص)(س^2 - ص س + ص^2)$

(الحد الاول + الحد الثاني)(مربع الاول - الاول × الثاني + مربع الثاني)

أمثلة: حلل المقادير الجبرية الآتية

[1] $27س^3 + 8ص^3$

الحل:- $27س^3 + 8ص^3$

$(3س + 2ص)(9س^2 - 6س ص + 4ص^2)$

[2] $\frac{1}{64}ص^3 + 27$

الحل:- $\frac{1}{64}ص^3 + 27$

$(\frac{1}{4}ص + 3)(\frac{1}{16}ص^2 - \frac{3}{4}ص + 9)$

هـ إخراج عامل مشترك

أمثلة :- حلل المقادير الجبرية الآتية

[1] $\frac{ع^{٤}}{٦٤} + ١٢٥ع$

الحل:- نأخذ ع عامل مشترك

$ع\left(\frac{ع}{٦٤} + ١٢٥\right)$ ← اصبحت مجموع مكعبين

$ع\left(\frac{ع}{٤} + ٥\right)\left(\frac{ع^{٢}}{١٦} - \frac{٥ع}{٤} + ٢٥\right)$

[2] $٢س^{٣} + \frac{١}{٤}$

الحل:- نخرج ٢ من الطرفين عامل مشترك

$٢س^{٣} + \frac{١}{٨}$ ← $\frac{١}{٤}$ بصورة اخرى

$٢\left(س^{٣} + \frac{١}{٨}\right)$

$٢\left(س + \frac{١}{٢}\right)\left(س^{٢} - \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}\right)$

[3] $س^{٢} - ٤س$

الحل:- نخرج س عامل مشترك

$س(س - ٤)$

[4] $٣س^{٣} - ٣س$

[5] $٣س^{٢} - \frac{٤}{٣}$

و مفكوك القوس التربيعي $(س \pm ص)^{٢}$

$(س \pm ص)^{٢} = س^{٢} \pm ٢ص س + ص^{٢}$

[1] $(\frac{١}{٣}س + ٥)^{٢} = \frac{١}{٩}س^{٢} + \frac{١٠}{٣}س + ٢٥$

[2] $(٣س - ٢)^{٢} = ٩س^{٢} - ١٢س + ٤$

ز تحليل ثلاثي الحدود .

أمثلة :- حلل المقادير الجبرية الآتية

[1] $س^{٢} - ٢س + ١$

الحل:- $س^{٢} - ٢س + ١$

$(س - ١)(س - ١)$

[2] $س^{٢} - ٣س + ٢$

الحل:- $س^{٢} - ٣س + ٢$

$(س - ٢)(س - ١)$

[3] $٢س^{٢} - ٨س + ٦$

الحل:- $٢س^{٢} - ٨س + ٦$

$(٢س - ٢)(س - ٣)$

[4] $س^{٢} - ١٠س + ٢٤$

[5] $٣س^{٢} + ٢س - ٥$

ح تحليل الإقتران التكعيبي

نجرب قواسم الحد المطلوب لمعرفة أحد أصفار الاقتران

مثال

$هـ(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} - ٤س + ٣$

قواسم الحد المطلوب $\pm ٣ ، \pm ١$

$هـ(١) = ٢ \times ١^{٣} - ١^{٢} - ٤ \times ١ + ٣ = ٠$ ← نقسم على س-١

[1]

٢	-١	-٤	٣
	٢	١	-٣
٢	١	-٣	٠

$(س-١)(٢س^{٢} + س - ٣)$

إختصر الكسور الآتية :

١ $\frac{س^2 - 9}{2س + 6}$

الحل :-

$\frac{س^2 - 9}{2س + 6} = \frac{(س - 3)(س + 3)}{2(س + 3)}$

$= \frac{1}{2}(س - 3)$

٢ $\frac{س^2 - 6س + 8}{س - 2}$

الحل :-

$\frac{س^2 - 6س + 8}{س - 2} = \frac{(س - 2)(س - 4)}{س - 2}$

$= (س - 4)$

٣ $\frac{س + 4}{س^2 + 6س + 8}$

الجواب $\frac{1}{س + 2}$

٤ $\frac{4س^2 + 8س + 4}{5س^2 + 10س + 5}$

الجواب $\frac{4}{5}$

٥ $\frac{س^2}{س - س^3} + \frac{س}{1 - س^2}$

الحل :- توحيد المقامات

$= \frac{س^2}{س - س^3} + \frac{س \times 2س}{(1 - س^2) \times س}$

$= \frac{2س^2}{(1 - س)(1 + س)} = \frac{2س}{1 - س}$

٦ $\frac{1}{(س - 2)} + \frac{1}{(س + 2)} - \frac{9}{4 - س^2}$

الحل :-

$\frac{س + 2}{4 - س^2} + \frac{س - 2}{4 - س^2} - \frac{9}{4 - س^2}$

$= \frac{2س - 9}{(س - 2)(س + 2)}$

٧ $\left(\frac{2}{س} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2 - 5س}\right)$

الحل :-

$\frac{2(5 - س)}{5س} \times \frac{1}{(5 - س)(5 + س)}$

$= \frac{-2}{5س(5 + س)}$

٨ $\frac{1}{س}\left(\frac{1}{5 + س} - \frac{1}{5 - س}\right)$

الحل :-

$\frac{1}{س} \times \frac{5 - س - (5 + س)}{(5 + س)(5 - س)}$

$\frac{1}{س} \times \frac{-2س}{(5 + س)(5 - س)}$

$= \frac{-2}{(5 + س)(5 - س)}$

٩ $\frac{1}{3(س^2 - س - 4)}\left(\frac{1}{س + 1} + \frac{1}{3س + 5}\right)$

الجواب $\frac{3}{(س - 4)(س + 1)(3س + 5)}$

الاقترانات

1 كثيرات الحدود

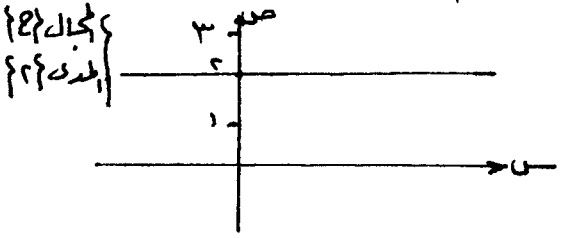
تقسم كثيرات الحدود الى :-

أ - الإقتران الثابت ق(س) = جـ

يرسم على شكل خط ثابت افقي موازي لمحور السينات

مثال :- ارسم الاقتران ق(س) = ٢

الحل :-



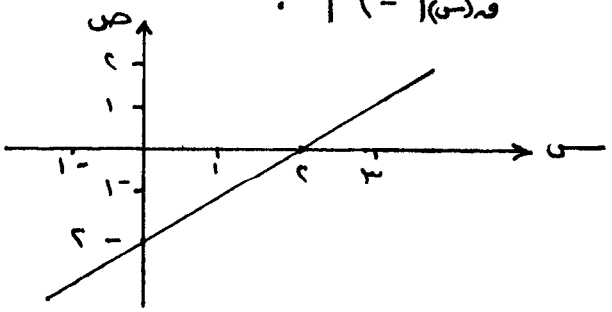
ب - الإقتران الخطي ق(س) = أس + ب

مثال :- ق(س) = س - ٢

الحل :-

س	٠	٢
ق(س)	-٢	٠

المجال {ح}
المدى {ح}



جـ - الاقتران التربيعي

ق(س) = أس٢ + ب س + جـ

- حيث يوجد حلان للمعادلة التربيعية اذا كان

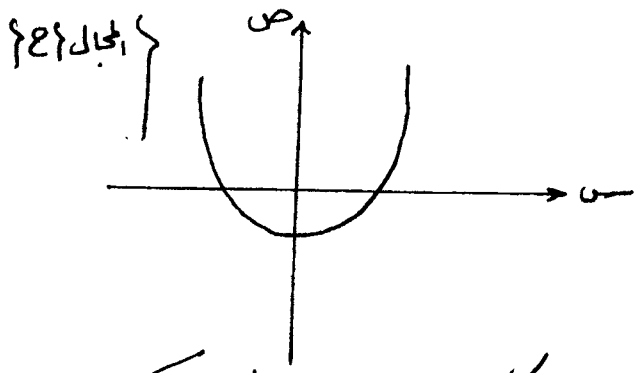
المميز > صفر

المجال {ح}
المدى {

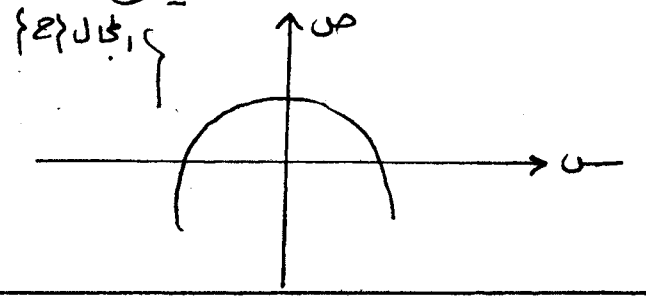
المميز ب٢ - ٤ أ جـ

- يوجد حل وحيد إذا كان المميز = صفر
- لايوجد حل إذا كان المميز < صفر

إذا كان أ > صفر يكون



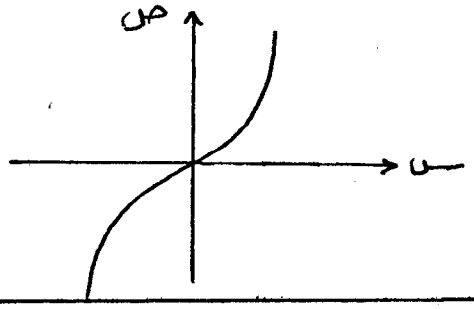
اذا كان أ < صفر يكون



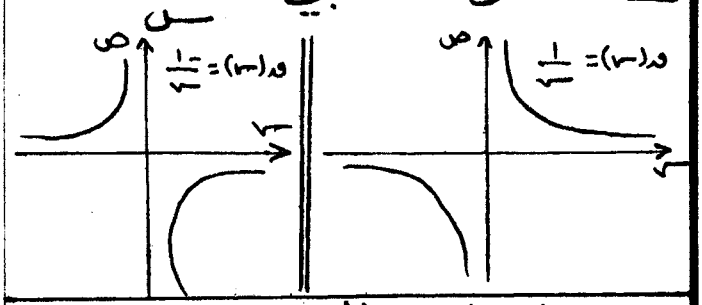
د - الاقتران التكعيبي

ق(س) = أس٣ + ب س٢ + جـ س + د

مثال :- ق(س) = س٣



2 الاقتران النسبي ١/س

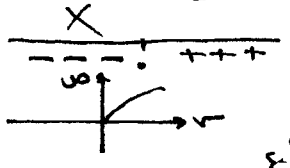


3 اقتران الجذر التربيعي

ق(س) = √س

يجب ايجاد المجال

المجال {س ≥ ٠} المدى {ح}



٤ الاقتران المتشعب ينقسم إلى

P ـ الاقتران المتشعب الصريح

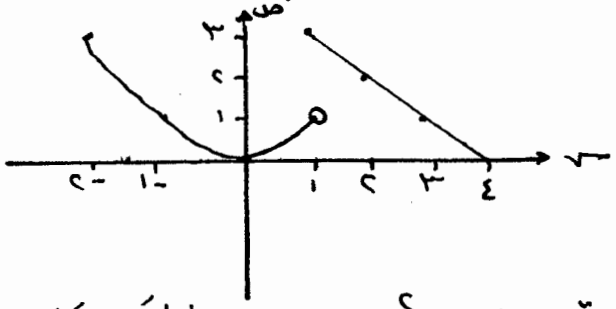
مثال:- $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، -٢ \leq س < ١ \\ ٤ - س & ، ١ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

ارسم الإقتران ثم جد ق(٠) ، ق(١)
ق(-٢) ، ق(٤)

الحل:-
نرسم كل قاعدة على حدا

س	-٢	-١	٠	١
$ق(س) = س^{٢}$	٤	١	٠	١

س	١	٢	٣	٤
$ق(س) = ٤ - س$	٣	٢	١	٠



ق(٠) = $٠^{٢}$ = ٠ في القاعدة الأولى
ق(١) = ٤ - ١ = ٣ في القاعدة الثانية "عند المساواة"
ق(-٢) = $(-٢)^{٢}$ = ٤ في القاعدة الأولى
ق(٤) = (٤ - ٤) = ٠ في القاعدة الثانية.

تمرين

$ق(س) = \begin{cases} ١ & ، ٠ \leq س < ٢ \\ ٢ - س & ، ٢ \leq س < ٣ \\ س^{٢} & ، ٣ \leq س \end{cases}$

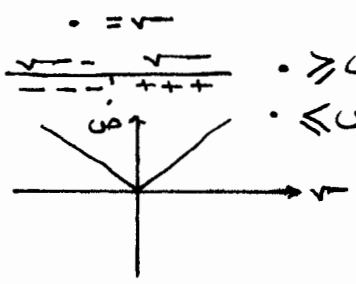
ارسم الإقتران ق(س) ثم جد ق(١) ، ق(٣)
ق(٠)

ب ـ إقتران القيمة المطلقة

كيفية اعادة التعريف
١ ـ نساوي ما داخل إقتية المطلقة بالصفر
٢ ـ نعين اصفار الاقتران على خط الاعداد

امثلة:-

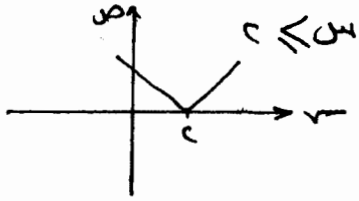
١ أعد تعريف الاقتران ق(س) = |س|
الحل:-



$ق(س) = \begin{cases} -س & ، س \leq ٠ \\ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

٢ أعد تعريف الاقتران ق(س) = |س-٢|
الحل:-
س - ٢ = ٠
س = ٢

$ق(س) = \begin{cases} ٢ - س & ، س < ٢ \\ س - ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$



٣ اعد تعريف ق(س) = |٢ - ٦| ٢ - س|

٤ اعد تعريف $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٥ & ، س = ٠ \end{cases}$

٥ اعد تعريف ق(س) = |١ - س| + |س|
الحل:-
١ - س = ٠ ← س = ١

س	٠	١
١ - س	+	-
س	-	+

س = ٠

س	٠
س	-

س	٠	١
ق(س)	١ - ٢س	١

$ق(س) = \begin{cases} ١ - ٢س & ، س \leq ٠ \\ ١ & ، ٠ < س \leq ١ \\ ٢س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$

٦ اعد تعريف ف(س) = |س² + ٦س + ٥|

٧ اعد تعريف ق(س) = ٣|س - ٢| + |س| - ٧

شكل أخر للإقتران المطلق

مهم جداً جداً

$\sqrt{س^2} = |س|$

$\sqrt{(س-1)^2} = |س|$

$\sqrt{س^2 + ٢س + ١} = \sqrt{(س+١)(س+١)}$

$= \sqrt{(س+١)^2} = |س+١|$

٨ أعد تعريف ق(س) = |٢س - ٤|
س ∈ [٠ ، ٣]

الحل :-

٢س - ٤ = ٠ ⇐ س = ٢

	٢	
٢س - ٤	-	+

ق(س) = { ٤ - ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ٢
{ ٢س - ٤ ، ٢ < س ≤ ٣

٩ اعد تعريف ق(س) = |س² - س - ٦|
س ∈ [-٤ ، ٥]

حل المعادلات الاتية

١ |س - ١| = ٥

الحل :-

|س - ١| = ٥

إما	أو
س - ١ = ٥	س - ١ = -٥
س = ٦	س = -٤

مجموعة الحل { -٤ ، ٦ }

٢ |٣س - ١| = ٨

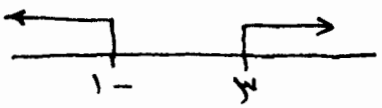
٣ |٢س - ٦| = ٦

حل المتباينات الاتية

١ |س - ١| > ٢

الحل :-

اما	أو
س - ١ > ٢	س - ١ < -٢
س > ٣	س < -١



٢ |س| ≤ -٢

جـ إقتران أكبر عدد صحيح

يرمز له بالرمز [ ] الناتج دائماً عدد صحيح

[٢,١] = ٢

[-٣,٥] = -٤

[٧/٢] = ٣

حل المعادله [س] = ن

ن ≤ س < ن + ١

حل المعادلة [س] = ٣

الحل :- ٣ ≤ س < ٤ مجموعة الحل [٣ ، ٤)

حل المعادلة [٢ + س] = ٤

الحل :-

٤ ≤ ٢ + س < ٥

٢ ≤ س < ٣

حل المعادلة [٣ - س] = ٦

الحل :-

٦ ≤ ٣ - س < ٧

٣ ≤ -س < ٤

-٣ ≥ س > -٤

إعادة تعريف إقتران أكبر عدد صحيح

١- نجد طول المدى = $\frac{١}{\text{معامل س}}$

٢- نقطع محور الصفر دائماً وجود كسر عادي يكبر عنه أو كسر عشري فإننا نبدأ من صفر الى اقترابه

٣- نضع المساواه على اليمين اذا كان معامل س (+)

٤- نضع المساواه على اليسار اذا كان معامل س (-)

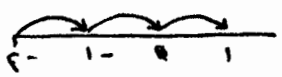
أمثلة :-

١ اعد تعريف ق(س) = [س + ١]

س ∈ [-٢ ، ١]

الحل :-

طول المدى = $\frac{١}{\text{معامل س}} = \frac{١}{١} = ١$



ق(س) = { -١ ، -٢ ≤ س < -١ ؛ ٠ ، -١ ≤ س < ٠ ؛ ١ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ }

س = ١ ← دائرة مغلقة

---

٢ اعد تعريف ق(س) = [س + ٢]

س ∈ [٠ ، ٣)

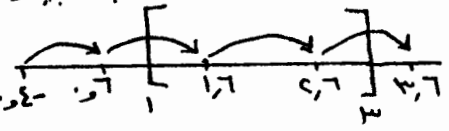
---

٣ ق(س) = س + [س + ٤,٠]

س ∈ [١ ، ٣]

نجد الأعداد التي تكون س + ٤,٠ = ٠ ⇐ س = -٤,٠ بداية اجبارية

طول المدى = ١



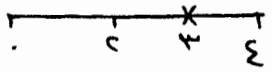
ق(س) = { س + ١ ، ١ ≤ س < ١,٦ ؛ س + ٢ ، ١,٦ ≤ س < ٢,٦ ؛ س + ٣ ، ٢,٦ ≤ س ≤ ٣ }

٤ عرف ق(س) = $[\frac{س}{٤}]$

٥ عرف ق(س) = $[\frac{س}{٤}]$ حول العدد (٣)

الحل:-

طول الدرجة = $\frac{١}{\frac{١}{٤}}$ = ٤

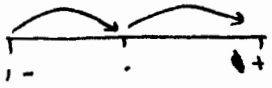


ق(س) = { ١ ، ٢ ≤ س < ٤

٦ عرف ق(س) = $س^{٢}$ [س] حول (٠)

الحل:-

طول الدرجة = ١



ق(س) = { $س^{٢}$ × -١ ، -١ ≤ س < ٠
$س^{٢}$ × ٠ ، ٠ ≤ س < ١

٧ عرف ق(س) = [س] + ٣|س - ١|

س ∈ [٠ ، ٢)

٨ عرف ق(س) = $[\frac{س}{٤}]$ حول العدد (٤)

٥ الإقترانات الدائرية

١- جاس = $\frac{١}{قاس}$

٢- جتاس = $\frac{١}{قاس}$

٣- ظاس = $\frac{١}{ظتاس}$

٤- ظتاس = $\frac{١}{ظاس}$

٥- قاس = $\frac{١}{جاس}$

٦- قتاس = $\frac{١}{جاس}$

أيضاً ظاس = $\frac{جاس}{جتاس}$

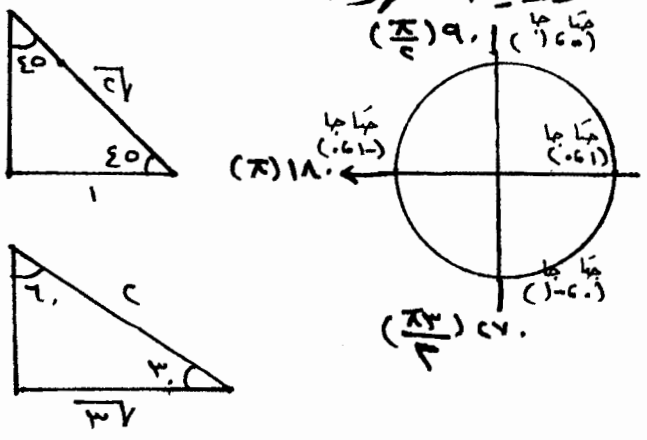
جاس = جتا($\frac{\pi}{٢}$ - س)

جتاس = جا($\frac{\pi}{٢}$ - س)

جاس = جا(π - س)

جاس = - جا(٢π - س)

الزوايا المشهورة



متطابقات هامة

١ $جتا^{٢}س + جا^{٢}س = ١$

٢ $١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س$

٣ $١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س$

٤ $جا٢س = ٢ جاس جتاس$

٥ $جتا^{٢}س - جا^{٢}س = جتا٢س$

٦ $١ - ٢جا^{٢}س = جتا٢س$

٧ $٢جتا^{٢}س - ١ = جتا٢س$

٨ $جتاس - جتاص = -٢ جا\frac{س+ص}{٢} جا\frac{س-ص}{٢}$

٩ $جاس - جاص = ٢ جتا\frac{س+ص}{٢} جا\frac{س-ص}{٢}$

١٠ $جا(أ \pm ب) = جاأ جتاب \pm جتاأ جاب$

١١ $جتا(أ \pm ب) = جتاأ جتاب \mp جاأ جاب$

١٢ $ظا(أ - ب) = \frac{ظاأ - ظاب}{١ + ظاأ ظاب}$

١٣ $ظا(أ + ب) = \frac{ظاأ + ظاب}{١ - ظاأ ظاب}$

إنتهت المراجعة بحمد الله

النهايـــة :-

يرمز للنهاية بالرمز "نها" حيث يتم حسابها بالطرق الاتية :-

أولاً :- حساب النهاية بالجدول

مثال :- الجدول الأتي يبين سلوك الإقتران ق(س) حول العدد (٣)

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	٩,٢	٩,٠٢	٩,٠٠٢		٨,٩٩٨	٨,٩٨	٨,٩

الحل :- نلاحظ من الجدول مايلي

كلما اقتربت س من العدد ٣ من جهة اليمين $س \to ٣^+$ فإنه ق(س) يقترب من العدد (٩) بالرموز

$$\text{نها}_{س \to ٣^+} ق(س) = ٩$$

كلما اقتربت س من العدد ٣ من اليسار $س \to ٣^-$ فإنه ق(س) من العدد (٩) بالرموز

$$\text{نها}_{س \to ٣^-} ق(س) = ٩$$

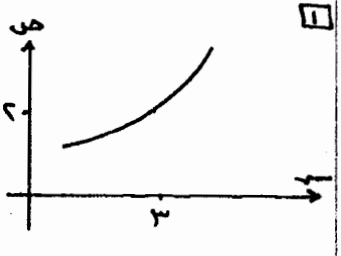
نلاحظ أنه $\text{نها}_{س \to ٣^-} ق(س) = \text{نها}_{س \to ٣^+} ق(س)$

لذلك نقول أن النهاية موجودة وتساوي (٩)

إذا كانت النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار فإنه تكون غير موجودة .

ثانياً :- حساب النهاية بالرسم

[١]



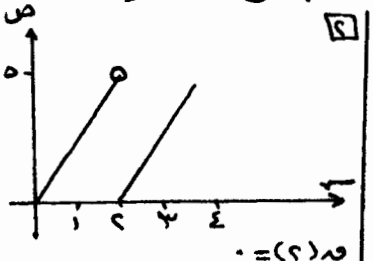
ق(٣) = ٢

$\text{نها}_{س \to ٣^+} ق(س) = ٢$

$\text{نها}_{س \to ٣^-} ق(س) = ٢$

$\text{نها}_{س \to ٣} ق(س) = ٢$

[٢]



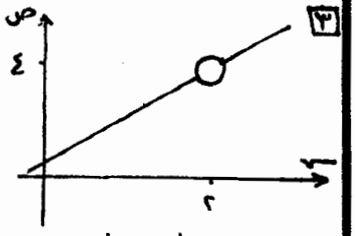
ق(٢) = ٠

$\text{نها}_{س \to ٢^-} ق(س) = ٥$

$\text{نها}_{س \to ٢^+} ق(س) = ٠$

$\text{نها}_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة

[٣]



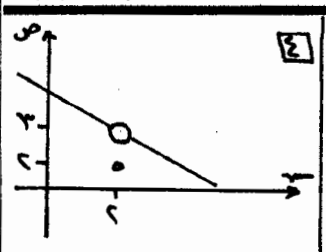
ق(٢) = غ. معرف

$\text{نها}_{س \to ٢^+} ق(س) = ٤$

$\text{نها}_{س \to ٢^-} ق(س) = ٤$

$\text{نها}_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

[٤]



ق(٢) = ٢

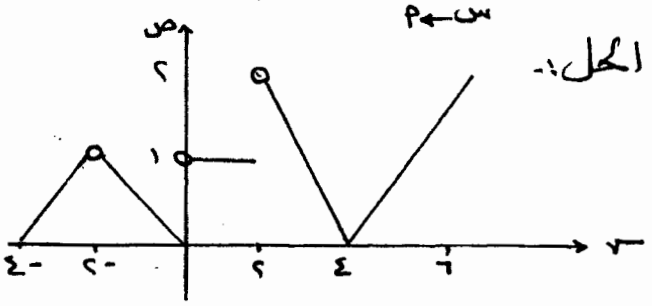
$\text{نها}_{س \to ٢^+} ق(س) = ٣$

$\text{نها}_{س \to ٢^-} ق(س) = ٣$

$\text{نها}_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة

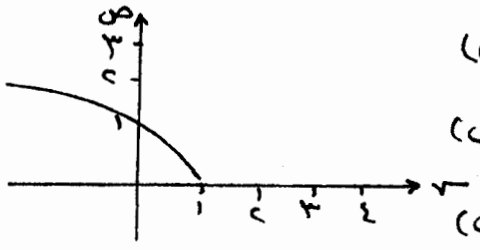
[٥] معتمداً على الرسم الذي يمثل ق(س) حيث ق(س) معرف على [-٤، ٦] جد قيم P بحيث نها ق(س) غير موجودة

الحل :-



قيم P هي {-٤، -٢، ٢، ٤، ٦}

[٦] إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = |١ - س| أوجد



أ- $\text{نها}_{س \to ١^+} ق(س)$

ب- $\text{نها}_{س \to ١^-} ق(س)$

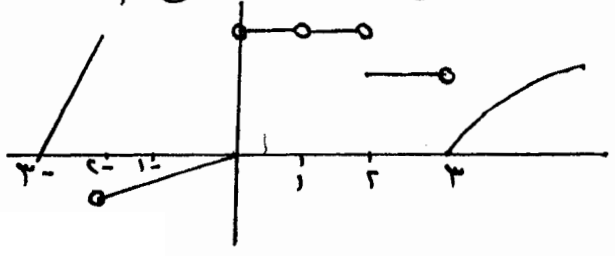
جـ- $\text{نها}_{س \to ١} ق(س)$

الحل :- $\text{نها}_{س \to ١^+} ق(س) = غ ٠$ ، $\text{نها}_{س \to ١^-} ق(س) = ٠$

$\text{نها}_{س \to ١} ق(س) = غ ٠$

[٧] تمرين مهم

جد قيم س التي عندها النهاية غ ٠



ثالثا :- حساب النهاية بالتعويض .

يتم حساب النهاية بالتعويض المباشر حيث تقبل كل الاجابات بإستثناء ($\frac{\text{عدد}}{0}$) أو ($0 \times \frac{\text{عدد}}{0}$) أو ($\frac{0}{0} \pm \frac{0}{0}$)

عند الحصول على هذه النتائج نقوم بما يلي

١- تحلل أو نضرب بمرافق أو استبدال أو قسمة طويلة أو توحيد مقامات
٢- باختصار المتشابهات بين البسط والمقام
٣- نعوض مرة اخرى بحيث نضمن عدم الحصول على النتائج السابقة بعد التعويض

أمثلة :-

[١] $\lim_{س \to ٢} ٣ = ٣$

[٢] $\lim_{س \to ٣} ٥ = ٥$

[٣] $\lim_{س \to ٢} س^٢ = ٢^٢ = ٤$

[٤] $\lim_{س \to ٥} س = ٥ \times ٥ = ٢٥$

[٥] $\lim_{س \to ١} ٢س + ٢ = ٤$

[٦] $\lim_{س \to ٠} ٣س = ٠$

[٧] $\lim_{س \to ١} \frac{٢س + ٥}{س + ١} = \frac{٧}{٢}$

[٨] $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ١}{س + ١} = ١$

[٩] $\lim_{س \to -٢} (\frac{٥}{٢})^{س} = (\frac{٥}{٢})^{-٢} = \frac{٤}{٢٥}$

ملاحظة هامة

لحساب النهاية في الجذور الزوجية وعندما يكون تحت الجذر صفر يجب الإنتباه للاتجاه والمجال.

[١٠] $\lim_{س \to ١} \sqrt{س - ١}$

الحل :-

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٠$

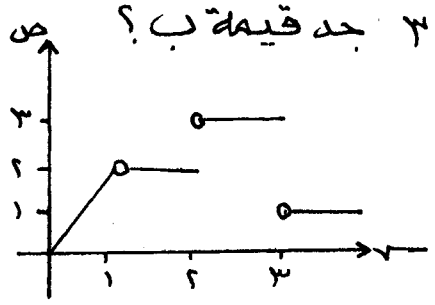
المجال		
+ + +	١	- - -

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = غ.م$

$\therefore \lim_{س \to ١} ق(س) = غ.م$

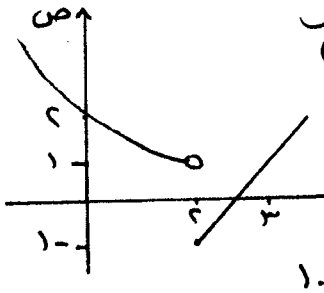
[٨] نهاية ق(س) = ٢ ، جد قيمة P ؟
$س \to P$

نهاية ق(س) = ٣ جد قيمة ب ؟
$س \to ب$



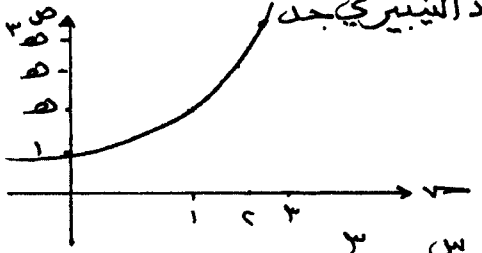
الحل :-
$P \in [١ ، ٢)$
$ب \in (٢ ، ٣)$

[٩] يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ل(س)
جد نهاية ل(س)
$س \to ٢^+$



الحل :- $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = -١$

[١٠] يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) = $هـ^{س}$ حيث هـ العدد النيبيري جد
نهاية ق(س)
$س \to ٣$



الحل :- $\lim_{س \to ٣} هـ^{س} = هـ^{٣}$

[١١]

[١١] تمرين
نهاية $\sqrt{٥ - س}$
$س \to ٥$

الاجابة غ.م

[١٢] تمرين
نهاية $\sqrt{٢س - ٤}$
$س \to ٢$

الاجابة غ.م

التحليل إلى العوامل

١٣ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

الحل:- $\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$

$= \lim_{س \to ١} س + ١ = ٢$

١٤ $\lim_{س \to ٣} \frac{٣س^٢ - ٢٧}{٢س^٢ - ٦س} = \frac{٠}{٠}$

الحل:-

$\lim_{س \to ٣} \frac{٣(س^٢ - ٩)}{٢س(س - ٣)} = \lim_{س \to ٣} \frac{٣(س - ٣)(س + ٣)}{٢س(س - ٣)}$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{٦}{٣} = ٩$

١٥ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{س + ٥}$ الجواب **-١٠**

١٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٣ - ٥س^٢ + س}{س} = \frac{٠}{٠}$

الحل:-

$\lim_{س \to ٠} \frac{س(س^٢ - ٥س + ١)}{س} = ١$

١٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{٧س} - (٤٩)^{س}}{١ - ٣^{٧س}} = \frac{٠}{٠}$ بإخراج $٣^{٧س}$

الحل:- $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{٧س}(١ - ٣^{٧س})}{(١ + ٣^{٧س})}$

١٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{٢س} - ٨}{٣^{٢س} - ١} = \frac{٠}{٠}$ بإخراج $٣^{٢س}$

الحل:- $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{٢س} - ٢^{٣س}}{٣^{٢س} - ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣^{٢س}(١ - ٢^{٣س})}{٣^{٢س} - ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣^{٢س}(١ - ٢^{٣س})(١ + ٢^{٣س})}{٣^{٢س} - ١}$

$= ٢(١ - ١) = ٠$

١٩ تمرين $\lim_{س \to ٠} \frac{٧^{٢س} - ٥٠ \times ٧^{س} + ٤٩}{٧^{س} - ١}$

الجواب **-٤٨**

٢٠ تمرين $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س^٣ - ٨}$

الجواب $\frac{٣}{٤}$

٢١ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ١)^٤ - ١٦}{س^٢ - ٣س} = \frac{٠}{٠}$ نستبدل

الحل:- $\lim_{ص \to ٠} \frac{(ص + ٢)^٤ - ١٦}{ص^٢ + ٢ص - ٣}$ بالتحليل

$ص = س - ١$
$س \to ٣$
$ص \to ٠$
$س = ص + ١$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{(ص^٢ - ٤)(ص^٢ + ٤)}{ص - ٢}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{(ص - ٢)(ص + ٤)(ص^٢ + ٤)}{(ص - ٢)}$

$= ٨ \times ٤ = ٣٢$

٢٢ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ١)^٢ - ٤}{س^٢ - ٣س}$ تمرين

الجواب **٤**

٢٣ $\lim_{س \to ٣} \frac{س}{س^٢ - ٣} - \frac{١٨}{س^٢ - ٩}$ توحيد مقامات

الحل:- $\lim_{س \to ٣} \frac{س(س + ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)} - \frac{١٨}{س^٢ - ٩}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٣س - ١٨}{(س - ٣)(س + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٦)}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

٢٤ نهـا (١/(س+١) + ١/(٢س+٥)) / (١/(س^٢ س - س - ٤)) عند س → -٢

الحل:- توحيد مقامات

= نهـا (١/((٢س-٧)(س+٢))) × ((٢س^٢+٥+س+١)/((س+١)(٢س+٥))) عند س → -٢

= نهـا (١/((٢س-٧)(س+٢))) × ((٢س+٦)/((س+١)(٢س+٥))) عند س → -٢

= نهـا (١/((٢س-٧)(س+٢))) × ((٢(س+٣))/((س+١)(٢س+٥))) عند س → -٢

= ١×٢ / ((-٦-٧)×(-١)(١)) = ٢/١٣

٢٥ نهـا ((٢/س) - (٢/٥)) / (١/(س^٢ - ٢٥)) عند س → ٥ تمرين

الجواب -١/١٢٥

٢٦ نهـا (٢٧س^٣ - ١)/(س - ١/٣) عند س → ١/٣ إخراج عامل مشترك

الحل:- نهـا ٢٧(س^٣ - ١/٢٧)/(س - ١/٣) عند س → ١/٣

= نهـا ٢٧(س - ١/٣)(س^٢ + ١/٣ س + ١/٩)/(س - ١/٣) عند س → ١/٣

= ٢٧(١/٩ + ١/٩ + ١/٩) = ٣/٩ × ٢٧ = ٩

٢٧ نهـا (٨س^٣ - ١)/(س - ١/٢) عند س → ١/٢ تمرين

الجواب ٦

٢٨ نهـا (١/س) ((١/(٥+س)) - (١/(٥-س))) عند س → ٠ تمرين

الجواب -٢/٢٥

٢٩ نهـا ((س+١)^٢ - ٨١)/(٨ - س) عند س → ٨ تمرين

الجواب -١٨

الضرب بالمرافق

المقدار	المرافق التربيعي	ناتج الضرب
س - ٢√(س)	س + ٢√(س)	س^٢ - (٢س)
٢√(س) - ٢√(س+١)	٢√(س) + ٢√(س+١)	٢س - (٢س+١)
٢√(س-٢) - ١	٢√(س-٢) + ١	(س-٢) - ١

المقدار	المرافق التكعيبي	ناتج الضرب
٣√(س) - ٣√(٢)	٣√(س^٢) + ٣√(٢س) + ٣√(٤)	س - ٢
٣√(س^٢) + ٣√(٢)	٣√(س)^٢ - ٣√(٢س) + ٣√(٤)	س + ٢

أمثلة :-

١ نهـا (٣√(٧س+٦) - ٣) / (س - ٣) عند س → ٣ ضرب بمرافق

الحل:- نهـا ((٣√(٧س+٦) - ٣)(٣√(٧س+٦)^٢ + ٣ ٣√(٧س+٦) + ٣^٢)) / ((س-٣)(٣√(٧س+٦)^٢ + ٣ ٣√(٧س+٦) + ٣^٢)) عند س → ٣

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س + ٦ - ٩}{(س - ٣)(\sqrt{س + ٦} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)}{(س - ٣)(\sqrt{س + ٦} + ٣)} = \frac{١}{٦}$

٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س^{٤}} - \sqrt{١ - س^{٤}}}{س^{٤}} = \div$

الحل:- $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س^{٤}} - \sqrt{١ - س^{٤}}}{س^{٤}} \times \frac{\sqrt{١ + س^{٤}} + \sqrt{١ - س^{٤}}}{\sqrt{١ + س^{٤}} + \sqrt{١ - س^{٤}}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(١ + س^{٤}) - (١ - س^{٤})}{س^{٤}(\sqrt{١ + س^{٤}} + \sqrt{١ - س^{٤}})}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ س^{٤}}{س^{٤}(١ + ١)} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢ س^{٤}}{٢ س^{٤}}$

$= ١$

٣ $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٢س + ٩} - ٤}{٢س - ٧}$ تمرين

الجواب $\frac{١}{٨}$

٤ $\lim_{س \to ١} \frac{٢س\sqrt{س} - ٢}{س - ١} = \div$

الحل:-

$\lim_{س \to ١} \frac{٢س\sqrt{س} - ٢}{س - ١} \times \frac{٢س\sqrt{س} + ٢}{٢س\sqrt{س} + ٢}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٤س^{٣} - ٤}{س - ١} \times \frac{١}{٤}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٤(س^{٣} - ١)}{س - ١} \times \frac{١}{٤}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{(س - ١)} = ٣$

٥ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٤س}{\sqrt{٢س + ٤} - \sqrt{٢س + ٨}}$ تمرين

الجواب ٣٢

٦ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س + ١} - ٢}{\sqrt{س} - ١}$

الحل:-

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س + ١} - ٢}{\sqrt{س} - ١} \times \frac{\sqrt{٣س + ١} + ٢}{\sqrt{٣س + ١} + ٢} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٣س + ١ - ٤}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{٣س + ١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٣(س - ١)}{(١ - س)^{-١}} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{٣س + ١} + ٢}$

$= -٣ \times \frac{٢}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

٧ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{\sqrt{٣ + س} - ٢}$ تمرين

الجواب ٦

٨ $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} + ١٩ - ٣}{س - ٨} = \div$ استبدال او مرافق تكعيبي

الحل:- $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س + ١٩} - ٣}{س - ٨} \times \frac{(\sqrt[٣]{س + ١٩})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ١٩} + ٩}{(\sqrt[٣]{س + ١٩})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ١٩} + ٩}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س + ١٩) - ٢٧}{(س - ٨)((\sqrt[٣]{س + ١٩})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ١٩} + ٩)} = \frac{١}{٢٧}$

حل آخر ، استبدال.

نفرض ص $= \sqrt[٣]{س + ١٩}$ $\Leftarrow$ ص^{٣} $= س + ١٩$

$س = ص^{٣} - ١٩$

$س \to ٨$

$ص \to ٣$

$= \lim_{ص \to ٣} \frac{ص - ٣}{ص^{٣} - ١٩ - ٨}$

$= \lim_{ص \to ٣} \frac{ص - ٣}{ص^{٣} - ٢٧}$

$= \lim_{ص \to ٣} \frac{(ص - ٣)}{(ص - ٣)(ص^{٢} + ٣ص + ٩)} = \frac{١}{٢٧}$

٩ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt{س} - ١}$ تمارين

الجواب $\frac{٢}{٣}$

١٠ $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س - ٧}$ إستبدال أو مرافق تكعيبي

الحل:- نفرض $ص = \sqrt[٣]{س+١} \Leftarrow س = ص^٣ - ١$ ، $س \to ٧ \Leftarrow ص \to ٢$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{ص^٣ - ٨} = \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{(ص-٢)(ص^٢+٢ص+٤)}$

$= \frac{١}{١٢}$

١١ $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{\sqrt{٢+س} - ٢}$ = ÷ إستبدال ثم مرافقة

الحل:- نفرض $ص = \sqrt[٣]{س} \Leftarrow س = ص^٣$ ، $س \to ٨ \Leftarrow ص \to ٢$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٣ - ٨}{\sqrt{٢+ص} - ٢} \times \frac{\sqrt{٢+ص} + ٢}{\sqrt{٢+ص} + ٢}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص-٢)(ص^٢+٢ص+٤)(\sqrt{٢+ص}+٢)}{(ص+٢-٤)}$

$= \frac{١}{٤٨}$

١٢ $\lim_{س \to ٨} \frac{س - \sqrt[٣]{س}}{س - ٨}$ تمرين

الجواب $\frac{٨}{٣}$

١٣ $\lim_{س \to ١} \frac{س - \sqrt{٣س+١}}{س - ١}$ نعيد ترتيب الحدود

الحل:-

$\lim_{س \to ١} \frac{(س+١) - \sqrt{٣س+٣}}{س - ١} \times \frac{(س+١) + \sqrt{٣س+٣}}{(س+١) + \sqrt{٣س+٣}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^٢ - (٣س+٣)}{(س-١)((س+١) + \sqrt{٣س+٣})}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س + ١ - ٣س - ٣}{(س-١)((س+١) + \sqrt{٣س+٣})}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - س - ٢}{(س-١)((س+١) + \sqrt{٣س+٣})}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س+١)(س-٢)}{(س-٢)((س+١) + \sqrt{٣س+٣})}$

$= \frac{٣}{٤}$

١٤ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - \sqrt[٣]{٧س+١}}{س - ١}$ إضافة وطرح

الحل:- نقوم بإضافة وطرح العدد ٢ للبسط

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢ + ٢ - \sqrt[٣]{٧س+١}}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س - ١}$ (مرافق تربيعي) $+ \frac{٢ - \sqrt[٣]{٧س+١}}{س - ١}$ (مرافق تكعيبي)

$= \frac{١}{٤} + \frac{-١}{١٢} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$

١٥ $\lim_{س \to ٦} \frac{\sqrt[٣]{س+٢} + \sqrt{س+٣} - ٥}{س - ٦}$

الحل:- إضافة وطرح (٢)

$= \lim_{س \to ٦} \frac{\sqrt[٣]{س+٢} - ٢ + ٢ + \sqrt{س+٣} - ٥}{س - ٦}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{\sqrt[٣]{س+٢} - ٢}{س - ٦}$ (مرافق تكعيبي) $+ \frac{\sqrt{س+٣} - ٣}{س - ٦}$ (مرافق تربيعي)

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} = \frac{١}{٤}$

١٦ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - \sqrt{س}}{س - ١}$ إضافة وطرح $\sqrt{س}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - \sqrt{س} + \sqrt{س} - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - \sqrt{س}}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}(\sqrt[٦]{س} - ١)}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

مرافق تكعيبي — مرافق تربيعي

$= \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٦}$

١٧ إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{و(س) - ٩}{س - ٣} = ٤$

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{و(س) - س^٢}{س - ٣}$

الحل:- نقارن المطلوب بالمعطيات نلاحظ يجب إضافة وطرح (٩)

$$\lim_{س \to ٣} \frac{و(س) - ٩ + ٩ - س^٢}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{و(س) - ٩}{س - ٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{٩ - س^٢}{س - ٣}$$

$$٤ + \lim_{س \to ٣} \frac{(٣ - س)(٣ + س)}{(س - ٣)}$$

$$٤ + ٦ - = ٢ -$$

١٨ إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{و(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ وكانت

$\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{و(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$ جد قيمة ب

الحل:-

نقارن المطلوب بالمعطيات نلاحظ يجب قسمة البسط والمقام على س - ١

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}}{\frac{و(س) - ٦}{س - ١}} + ب = \frac{٣}{٢}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{(س - ١)} \div \lim_{س \to ١} \frac{و(س) - ٦}{س - ١} + ب = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{٤}{٨} + ب = \frac{٣}{٢}$$

$$ب = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} = ١$$

١٩ إذا كان هـ إقتران كثير حدود وكانت

$\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$ ، وكانت

$\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥ + ٣ب) = ٢$ فجد قيمة ب

الحل:- بما أن تعويض المقام = صفر

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) + ٥ = ٠ \Leftarrow \lim_{س \to ٠} هـ(س) = -٥$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) - ٥ + ٣ب = ٢$

$-٥ - ٥ + ٣ب = ٢ \Leftarrow ب = ٤$

٢٠ إذا كانت $\lim_{س \to -٢} \frac{و(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$

فجد $\lim_{س \to -٢} (و(س) + ٢س)$

الحل:- بما أن تعويض المقام = صفر

$\lim_{س \to -٢} و(س) + ٥ = ٠ \Leftarrow \lim_{س \to -٢} و(س) = -٥$

$= \lim_{س \to -٢} و(س) + ٢س = -٥ + ٢ \times -٢ = -٩$

٢١ إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$

فجد $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥)$. تمرين

٢٢ إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أ س^٢ + ب س + ٢}{س - ١} = ١$

فجد قيمة أ ، ب .

الحل:- من تصفير البسط

$\lim_{س \to ١} أ س^٢ + ٢ ب س + ٢ = ٠$

$أ + ٢ ب = -٢$

$أ = -٢ - ٢ ب$

$\lim_{س \to ١} \frac{(-٢ - ٢ ب) س^٢ + ٢ ب س + ٢}{س - ١} = ١$

$\lim_{س \to ١} \frac{-٢ س^٢ - ٢ ب س^٢ + ٢ ب س + ٢}{س - ١} = ١$

$\lim_{س \to ١} \frac{-٢ س^٢ + ٢}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{-٢ ب س^٢ + ٢ ب س}{س - ١} = ١$

$\lim_{س \to ١} \frac{-٢(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} + \lim_{س \to ١} \frac{-٢ ب س (س - ١)}{(س - ١)} = ١$

$-٤ + -٢ ب = ١$

$-٢ ب = ٥$

$ب = -\frac{٥}{٢}$

نهاية الإقترانات المتشعبة :-

[1] $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 2س & ، -2 \leq س < 1 \\ \frac{3}{س} & ، 1 \leq س \leq 4 \\ 5 & ، 4 < س \leq 7 \end{cases}$

أوجد :-

أ) $\lim_{س \to 0} ق(س)$ ب) $\lim_{س \to 1} ق(س)$ جـ) $\lim_{س \to 2} ق(س)$

د) $\lim_{س \to 4} ق(س)$ هـ) $\lim_{س \to 7} ق(س)$

الحل :-

أ) $\lim_{س \to 0} ق(س)$ نقطة عادية

$= \lim_{س \to 0} س^2 + 2س = 0$

ب) $\lim_{س \to 1} ق(س)$ نقطة تحول

$\lim_{س \to 1^+} \frac{3}{س} = \lim_{س \to 1^-} س^2 + 2س$

$3 = 3$ $\therefore \lim_{س \to 1} ق(س) = 3$

جـ) $\lim_{س \to 2} ق(س)$ نقطة عادية

$\lim_{س \to 2} \frac{3}{س} = \frac{3}{2}$

د) $\lim_{س \to 4} ق(س)$ نقطة تحول

$\lim_{س \to 4^+} 5 = \lim_{س \to 4^-} \frac{3}{س}$

$5 = \frac{3}{4}$

هـ) $\lim_{س \to 7} ق(س)$ غير موجودة لأنها طرف

[2] $\lim_{س \to 3} |س^2 - 9|$ نعيد التعريف

الحل :-

$س^2 - 9 = 0 \Leftarrow س = \pm 3$

	-3		3	
$س^2 - 9$	+	0	−	0	+

$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 9 & ، س \leq -3 \text{ أو } س \geq 3 \\ 9 - س^2 & ، -3 < س < 3 \end{cases}$

$\lim_{س \to 3^+} س^2 - 9 = \lim_{س \to 3^-} 9 - س^2$

$0 = 0$

$\therefore \lim_{س \to 3} ق(س) = 0$

[3] $\lim_{س \to 2} \frac{|س - 3| - 1}{س - 2}$ نعيد التعريف

الحل :-

		2		3	
$س - 3$	−	−	−	0	+
$-س + 3$	+	+	+	0	−

$ق(س) = \begin{cases} \frac{-س + 3 - 1}{س - 2} & ، س < 3 \\ \frac{س - 3 - 1}{س - 2} & ، س \geq 3 \end{cases}$

$\lim_{س \to 2} \frac{(-س + 2)}{(س - 2)} = -1$

[4] $\lim_{س \to -2} \frac{|س^2 + 4س + 4|}{س + 2}$

الحل :-

$\lim_{س \to -2} \frac{|(س + 2)^2|}{س + 2} = \lim_{س \to -2} \frac{|س + 2|^2}{س + 2}$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{(س + 2)}{(س + 2)} & ، س \leq -2 \\ \frac{س + 2}{س + 2} & ، س > -2 \end{cases}$

		-2	
$س + 2$	−	0	+
$-(س + 2)$	+	0	−

$\lim_{س \to -2^+} \frac{(س + 2)}{(س + 2)} = \lim_{س \to -2^-} \frac{-(س + 2)}{(س + 2)}$

$1 = -1$ غ.م

[5] $\lim_{س \to 0} \frac{|2س^3 + س^2|}{س}$ تمرين غ.م

[6] $\lim_{س \to 0} \frac{|س - 3| - |2س - 3|}{س}$

الحل :-

$\lim_{س \to 0} \frac{-(س - 3) - (-(2س - 3))}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-س + 3 + 2س - 3}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{س} = 1$

		$\frac{3}{2}$		3	
$س - 3$	−	−	−	0	+
$2س - 3$	−	0	+	+	+

٧ $\lim_{س \to ٢} [س + ٣]$ إذا كان ناتج التعويض يعطي عدد صحيح نجد النهاية بمينا ويسارا

الحل :-

$\lim_{س \to ٢^+} [س + ٣] = [٢]^+ + ٣ = ٢ + ٣ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^-} [س + ٣] = [٢]^- + ٣ = ١ + ٣ = ٤$

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = غ.م

٨ $\lim_{س \to ٢,٥} [س + ٥] = [٢,٥] + ٣ = ٢ + ٣ = ٥$

٩ $\lim_{س \to ٠} س^٢ [س]$

الحل :-

$\lim_{س \to ٠^+} س^٢ [س] = ٠ \times [٠]^+ = ٠ \times ٠ = ٠$

$\lim_{س \to ٠^-} س^٢ [س] = ٠ \times [٠]^- = ٠ \times -١ = ٠$

$\lim_{س \to ٠} س^٢ [س] = ٠$

١٠ $\lim_{س \to -٢} \frac{[\frac{١}{٣} س^٢ + ٤] + س}{|س| - ٢}$ $\begin{array}{c|ccc} س & -٢ & & ٠ \\ \hline + & | & - & | \\ - & | & + & | \end{array}$

الحل :-

$\lim_{س \to -٢} \frac{[\frac{٨}{٣}] + س}{-س - ٢}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(٢ + س)}{(-س - ٢)} = -١$

١١ $\lim_{س \to ٧} [س + ٤] - [س + ١]$

الحل :-

$\lim_{س \to ٧^+} [س + ٤] - [س + ١] = [١١]^+ - [٨]^+ = ١١ - ٨ = ٣$

$\lim_{س \to ٧^-} [س + ٤] - [س + ١] = [١١]^- - [٨]^- = ١٠ - ٧ = ٣$

$\therefore \lim_{س \to ٧} [س + ٤] - [س + ١] = ٣$

١٢ $\lim_{س \to ٤} [س - ٢] - [٣ - س]$ تمرين

١٣ ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\lim_{س \to أ} [٢س] = ٣$

الحل :-

$\lim_{س \to أ} [٢س] = [٢أ] = ٣$

$٣ < ٢أ < ٤$

$\frac{٣}{٢} < أ < ٢$ نختبر الأطراف

$أ = \frac{٣}{٢}$ $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}} [٢س] = [٢ \times \frac{٣}{٢}] =$ غ.م لأنها تحول

$أ = ٢ \Leftarrow \lim_{س \to ٢} [٢س] =$ غ.م لأنها تحول

$أ \in (\frac{٣}{٢}, ٢)$

١٤ إذا كانت $\lim_{س \to أ^-} [٢س] = ٣$ جد قيم أ

الحل :-

$\lim_{س \to أ^-} [٢س] = [٢أ]^- = ٣$

$\frac{٣}{٢} < أ < ٢$

نختبر الاطراف $أ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \lim_{س \to \frac{٣}{٢}^-} [٢س] = ٢$ تهمل

$أ = ٢ \Leftarrow \lim_{س \to ٢^-} [٢س] = [٤]^- = ٣$

$أ \in [\frac{٣}{٢}, ٢)$

١٥ إذا كانت $\lim_{س \to ٣^+} [أس + ١] = ٤$ جد قيم أ

الحل :-

$\lim_{س \to ٣^+} [أس + ١] = ٤$

$[٣أ + ١]^+ = ٤$

$[٣أ] = ٣$

$٣ < ٣أ < ٤$

$١ < أ < \frac{٤}{٣}$

نعوض قيم أ $أ = ١$

$\lim_{س \to ٢^+} [س + ١] = [٤]^+ = ٤$ تقبل

$\lim_{س \to ٣^+} [\frac{٤}{٣} س + ١] = [٥]^+ = ٥$ تهمل

قيم $أ \in [١, \frac{٤}{٣})$

١٦ $\lim_{س \to -٣} [أس + ١] = ٤$ جد قيم أ

١٧ $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} & ، س < ك \\ ٣س & ، س > ك \end{cases}$

تمرين

فما مجموعة قيم ك التي تجعل $\lim_{س \to ك} هـ(س)$ موجوده

١٨ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - أس + ٣}{س - ١} & ، س < ١ \\ ب س - ٥ & ، س > ١ \end{cases}$ تمرين

جد قيم أ ، ب التي تجعل $\lim_{س \to ١} ق(س)$ موجودة

١٩ $ق(س) = \begin{cases} \frac{٤ - س}{|س - ٤|} & ، س < ٤ \\ أس^٢ - ٩ & ، س > ٤ \end{cases}$

اذا كانت $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ موجودة فما قيمة أ ؟

الحل:- بما أن $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ موجودة

فإن $\lim_{س \to ٤^+} \frac{(٤ - س)}{(س - ٤)}$ = $\lim_{س \to ٤^-} أس^٢ - ٩$

$-١ = ١٦أ - ٩$

$١٦أ = ٨$

$أ = \frac{١}{٢}$

٢٠ $ق(س) = \begin{cases} ٣ - [س] & ، س < أ \\ [س + ٢] & ، س > أ \end{cases}$

فما قيمة أ ∈ ص بحيث $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة

الحل:-

$\lim_{س \to أ^+} ٣ - [س]$ = $\lim_{س \to أ^-} [س + ٢]$

$٣ - [أ]^+ = [أ]^- + ٢$

$٣ - أ = أ - ١ + ٢$

$٢أ = ٢ \Leftarrow أ = ١$

٢١ $ق(س) = \begin{cases} ٨ - [س] & ، س \geq أ \\ [س - ٤] & ، س < أ \end{cases}$ تمرين

ما قيم أ ∉ ص بحيث $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة

٢٢ جد $\lim_{س \to ٣} \frac{|س - ٣|}{س - ٣}$

ع ٣٠

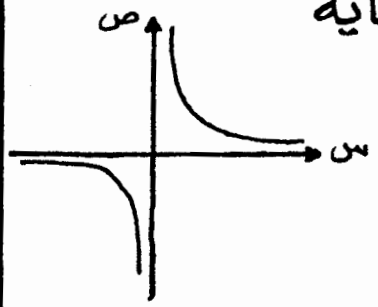
٢٣ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{م}{س} + س^٢ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٣ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

جد قيمة الثابت م اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

٢

النهاية في اللانهاية

$\lim_{س \to \pm\infty} \frac{1}{س} =$ صفر



نظريات

١) $\lim_{س \to \pm\infty} أ = أ$ حيث أ ثابت

٢) $\lim_{س \to -\infty} س^{ن}$
- $-\infty$ ، ن عدد حقيقي موجب
- صفر ، ن عدد حقيقي سالب

٣) $\lim_{س \to -\infty} س^{ن}$
- $-\infty$ ، ن عدد زوجي ن ≥ ٢
- $-\infty$ ، ن عدد فردي ≥ ١

٤) اذا كانت $\lim_{س \to \infty} ق(س) = ج$ ، $\lim_{س \to \infty} ل(س) = د$

فإن :-

- $\lim_{س \to \infty} [ق(س) \pm ل(س)] = ج \pm د$
- $\lim_{س \to \infty} [ق(س) \times ل(س)] = ج \times د$
- $\lim_{س \to \infty} \frac{ق(س)}{ل(س)} = \frac{ج}{د}$ ، $د \neq ٠$
- $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}} = \lim_{س \to \pm\infty} \frac{\text{الحد ذو اعلى قوة}}{\text{الحد ذو اعلى قوة}}$

أمثلة :-

١) $\lim_{س \to ٠} ٢ = ٢$

٢) $\lim_{س \to ٠} ٣س^{٢} = ٠$

٣) $\lim_{س \to ٠} ٢س^{٢} = ٠$

٤) $\lim_{س \to \pm\infty} -٥س^{٤} = -\infty$

٥) $\lim_{س \to -\infty} ٤س^{٥} = -\infty$

٦) $\lim_{س \to -\infty} -٢س^{٥} = \infty$

٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{٤}{س} = ٠$

٨) $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{٥}{س} = ٠$

٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢-س}{٩+س٣}$

الحل :- $\lim_{س \to ٠} \frac{٢-س}{٩+س٣} = \lim_{س \to ٠} \frac{-س}{س٣} = \frac{-١}{٣}$

١٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س+٣)^{٣} - س^{٢}}{س - س^{٢} + س^{٥}}$

الحل :- $\lim_{س \to ٠} \frac{٨س^{٣}}{س^{٥}} = \lim_{س \to ٠} \frac{٨}{س^{٢}} =$ صفر

١١) $\lim_{س \to -\infty} \frac{(١-س)^{٥} - س^{٤}}{٢ - ٦س^{٥}}$

الحل :- $\lim_{س \to -\infty} \frac{(١-س)^{٥} - س^{٤}}{٢ - ٦س^{٥}}$

$= \lim_{س \to -\infty} \frac{-س^{٥}}{-٦س^{٥}} = \frac{١}{٦}$

١٢) $\lim_{س \to -\infty} \frac{٧س^{٤} + ٢س^{٢}}{(١ + ٣س^{٣})}$

الحل :- $\lim_{س \to -\infty} \frac{٧س^{٤} + ٢س^{٢}}{١ + ٣س^{٣}} = \lim_{س \to -\infty} \frac{٧س^{٤}}{٣س^{٣}}$

$= \lim_{س \to -\infty} \frac{٧س}{٣} = -\infty$

١٣) $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٤} - (س-٥)^{٣}}{(٢-س)^{٤} - ٢س^{٤}}$

الحل :- $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٤}}{س^{٤} - ٢س^{٤}} = \lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٤}}{-س^{٤}} = -١$

١٤) $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{س^{٣}}{٢-س^{٢}} + \frac{س^{٣}}{س^{٢}+٢} \right)$ نوحد المقامات

الحل :- $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س^{٣} + ٥س^{٣} + ٢س^{٣} - ٥س^{٣}}{٤ - س^{٤}} = \lim_{س \to ٠} \frac{٤س^{٣}}{-س^{٤}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤}{-س} =$ صفر

١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{|س^{٣}| - ٣س^{٣}}{(١+٢س)^{٣}}$

الحل :- $\lim_{س \to -\infty} \frac{-س^{٣} - ٣س^{٣}}{٨س^{٣}} = \lim_{س \to -\infty} \frac{-٤س^{٣}}{٨س^{٣}}$

$= \frac{-١}{٢}$

16) $\lim_{س \to ه} \frac{|س^2 - 4س + 3|}{4س^2 - 3س - 1}$

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \frac{|س^2|}{4س^2} = \lim_{س \to ه} \frac{س^2}{4س^2} = \frac{1}{4}$

17) $\lim_{س \to ه} \left(\frac{س + 3}{1 - 3س}\right)^{-2}$

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \left(\frac{1 - 3س}{س + 3}\right)^2 = \lim_{س \to ه} \frac{9س^2}{س^2} = 9$

18) $\lim_{س \to -ه} \frac{س^9 - 6س + 7}{(6 - س)^3 + 3س^5}$

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \frac{س^5}{3س^5} = \frac{1}{3}$

19) $\lim_{س \to ه} \left(\frac{س^4}{2 - س^2} - \frac{س^5}{1 - س^3}\right)$ توحيد مقامات

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \frac{س^4 - 2س^5 + 3س^5 + س^7}{3 - 3س^3 - س^2 + س^5}$

$= \lim_{س \to ه} \frac{-3س^5}{س^5} = -3$

20) $\lim_{س \to ه} \left(\frac{س^3}{2 - س^2} + \frac{1 - س^4}{2 - س^3}\right)$

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \frac{2س^3 - س^6 + 2 - 2س^4 - س^2 + س^6}{4 - 2س^3 + س^5 - 2س^3}$

$= \lim_{س \to ه} \frac{-2س^4}{س^5} = \lim_{س \to ه} \frac{-2}{س} =$ صفر

21) $\lim_{س \to ه} \left(\frac{س^4}{2 - س^2} - \frac{س^5}{1 - س^3}\right)$ توحيد مقامات

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \frac{س^4 - س^7 - 3س^5 + س^7}{2 - س^2 - 3س^3 + س^5}$

$= \lim_{س \to ه} \frac{-3س^5}{س^5} = -3$

22) $\lim_{س \to ه} \left(\frac{س^4}{2 - س^2} - \frac{2س^5}{(-2س^3)}\right)$

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \frac{س^4 - 4س^7 - 6س^5 + 4س^7}{2 - س^2 - 6س^3 + 2س^5}$

$= \lim_{س \to ه} \frac{-6س^5}{2س^5} = -3$

23) $\lim_{س \to ه} \left(\frac{س^3}{2 - س^2} + \frac{1 - س^4}{2 - س^3}\right)$

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \frac{2س^3 - س^6 + 2 - 3س^4 - س^2 + س^6}{6 - 2س^2 - 3س^3 + س^5}$

$= \lim_{س \to ه} \frac{-3س^4}{س^5} = \lim_{س \to ه} \frac{-3}{س} = 0$

24) $\lim_{س \to ه} \left(\frac{س^3}{(1 - س^2)^2} - \frac{(1 + س^2)^2}{4 - س^3}\right)$

الحل:

$= \lim_{س \to ه} \frac{4س^3 - س^6 - (1 + س^2)^2 (1 - س^2)^2}{(1 - 2س^2 + س^4)(4 - س^3)}$

$= \lim_{س \to ه} \frac{-س^8}{-س^7} = \lim_{س \to ه} س = 0$

25) $\lim_{س \to ه} \left(\left(\frac{1 + 2س}{س + 3}\right)^3 - \frac{9 + س^2}{س^2 - س^3}\right)$

الحل: $\lim_{س \to ه} \left(\left(\frac{س + 3}{1 + 2س}\right)^3 - \frac{9 + س^2}{س^2 - س^3}\right)$

$= \lim_{س \to ه} \frac{س^3}{8س^3} - \frac{9 + س^2}{س^2 - س^3}$

$= \lim_{س \to ه} \frac{س^5 - س^6 - 27س^3 - 8س^5}{8س^5 - 8س^6}$

$= \lim_{س \to ه} \frac{-س^6}{-8س^6} = \frac{1}{8}$

أسئلة الثوابت

١ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٣} - ٢س^{ن} + ١١}{١٥ - ٣س - ٢س^{٦}} = ٢$ جد قيمة ن، أ

الحل :-

لان النهاية موجودة يجب أن يكون أكبر أس في المقام = أكبر اس في البسط

ن = ٦

$\lim_{س \to ٠} \frac{-أ س^{٦}}{-٢ س^{٦}} = ٢$ ⟸ أ = ٤

٢ إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{(١+٢س^{٢})^{٢}}{أ س^{٤} (١+س^{ن})} = -٢$ فما قيمة ن، أ

الحل :-

$\lim_{س \to ٠} \frac{٤ س^{٤}}{أ س^{٢+ن}} = -٢$

٢ + ن = ٤ ⟸ ن = ٢

$\lim_{س \to ٠} \frac{٤ س^{٤}}{أ س^{٤}} = -٢$ ⟸ $\frac{٤}{أ} = -٢$ ⟸ أ = -٢

٣ $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{س^{٢} - ب س}{س + ١} - أ س \right) = -٣$

الحل :-

$\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - ب س - أ س^{٢} - أ س}{س + ١} = -٣$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - أ س^{٢} - ب س - أ س}{س + ١} = -٣$

$\lim_{س \to ٠} \frac{(١ - أ) س^{٢} - س (ب + أ)}{س + ١} = -٣$

١ - أ = ٠ ⟸ **أ = ١**

$\frac{-(أ + ب)}{١} = -٣$ ⟸ أ + ب = ٣

١ + ب = ٣

ب = ٢

٤ إذا كان $ق(س) = \frac{ب س}{|أ + ١| س}$

وكانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٠} ق(س) = ٣$

جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

الحل :- نعيد التعريف اس١ :- $\frac{س}{|س|}$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{ب س}{أ - س} & ، س \geq \text{صفر} \\ \frac{ب س}{أ + س} & ، س \leq \text{صفر} \end{cases}$

$\lim_{س \to -١} ق(س) = \lim_{س \to -١} \frac{ب س}{أ + س}$

$\lim_{س \to ١} \frac{ب س}{أ - س} = ١$

$\frac{ب}{١ + أ} = ١$ ⟸ أ + ١ = -ب

أ = -ب - ١ ⟸ ①

$\lim_{س \to ٠} ق(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{ب س}{أ + س}$

ب = ٣

أ = -ب - ١ ⟸ أ = -٣ - ١

أ = -٤

نهاية الإقترانات الدائرية

نظرية

$\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} = 1$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} = 1$

$\lim_{س \to 0} \frac{جا ن س}{ن س} = \frac{ن}{ن}$

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا ن س}{ن س} = \frac{ن}{ن}$

أمثلة

[1] $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٢س}{٣س} = \frac{٢}{٣}$

[2] $\lim_{س \to 0} \frac{س}{جتاس} = \frac{٠}{١} = ٠$

[3] $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جاس}{س} = \frac{١}{\frac{\pi}{2}} = \frac{٢}{\pi}$

[4] $\lim_{س \to \pi} \frac{س}{جاس} = \frac{\pi}{-١} = -\pi$ غ.م

[5] $\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٣س}{جا ٢س} = \frac{٠}{٠}$

الحل :- بقسمة البسط والمقام على س

$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا ٣س}{س}}{\frac{جا ٢س}{س}} = \frac{٣}{٢}$

[6] $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٥س + ظا ٢س}{٣س}$

الحل :- إما بتوزيع البسط على المقام
أو بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا ٥س}{٣س} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا ٢س}{٣س}$

$= \frac{٥}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٧}{٣}$

[7] $\lim_{س \to 0} \frac{٥س + ظا ٧س + جا ٢س}{٢س}$

الحل :- توزع البسط على المقام

$\lim_{س \to 0} \frac{٥س}{٢س} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا ٧س}{٢س} + \lim_{س \to 0} \frac{جا ٢س}{٢س}$

$= \frac{٥}{٢} + \frac{٧}{٢} + \frac{٢}{٢} = \frac{١٤}{٢} = ٧$

[8] $\lim_{س \to 0} \frac{س جاس - ظا ٢س}{٤س - جا ٣س} = \frac{٠}{٠}$

الحل :-
بقسمة البسط والمقام على (س)

$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{س جاس}{س} - \frac{ظا ٢س}{س}}{\frac{٤س}{س} - \frac{جا ٣س}{س}} = \frac{٠ - ٢}{٤ - ٣}$

$= -٢$

تمرين

جد $\lim_{س \to 0} \frac{س جاس - ظا ٣س}{جا ٤س - ٢س}$

$= \frac{-٣}{٢}$

[9] $\lim_{س \to 0} س(قتاس - ٢ظتا ٣س) = \frac{٠}{٠}$

الحل : نتخلص من قتاس $= \frac{١}{جاس}$

$ظتا س = \frac{١}{ظاس}$

$= \lim_{س \to 0} س \left(\frac{١}{جاس} - \frac{٢}{ظا ٣س} \right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{جاس} - \frac{٢س}{ظا ٣س}$

$= ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

١٠ $\lim_{س \to 0} \frac{٦س جاس + ظا^٢ س}{س^٢ + جا^٢ س} = \frac{٠}{٠}$

الحل:- بقسمة البسط والمقام على $س^٢$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{٦س جاس}{س \times س} + \frac{ظا^٢ س}{س \times س}}{\frac{س^٢}{س^٢} + \frac{جا^٢ س}{س \times س}}$$

$$= \frac{٦ + ١ \times ١}{١ + ٤} = \frac{٣١}{٥}$$

تمرين

$$\lim_{س \to 0} \frac{٦س^٢ جاس - جا^٣ س}{ظا^٣ س + س^٣}$$

١١ $\lim_{س \to 0} س^٢ قتا^٢ س ظتا ٤س = \frac{٠}{٠}$

الحل:- $\lim_{س \to 0} س^٢ \times \frac{١}{جاس} \times \frac{١}{ظا ٤س}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{جاس} \times \frac{س}{ظا ٤س}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$$

ملاحظة:- عند ظهور $١ \pm جتاس$

نضرب بالمرافقه

$١ + جتاس$ ← المرافقه ← $١ - جتاس$

$٢ جتاس + ١$ ← المرافقه ← $٢ جتاس - ١$

١٢ $\lim_{س \to 0^+} س قتا^٢ \sqrt{س}$ نستبدل $\sqrt{س} = ص$

الحل:- $\lim_{ص \to 0^+} ص^٢ قتا^٢ ص = \lim_{ص \to 0} \frac{ص^٢}{جا^٢ ص} = ١$

١٣ $\lim_{س \to ٨} \frac{جا(س^٢ - ٦٤)}{س - ٨}$

الحل:- نستبدل $ص = س^٢ - ٦٤$

$س = \sqrt{ص + ٦٤}$

$\lim_{ص \to 0} \frac{جاص}{\sqrt{ص + ٦٤} - ٨}$ بالضرب بالمرافق

$\lim_{ص \to 0} \frac{جاص}{\sqrt{ص + ٦٤} - ٨} \times \frac{\sqrt{ص + ٦٤} + ٨}{\sqrt{ص + ٦٤} + ٨}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{جاص}{ص + ٦٤ - ٦٤} \times \sqrt{ص + ٦٤} + ٨$

$= ١٦$

١٤ $\lim_{س \to 0} \frac{قا^٢ س - ١}{س^٢}$

الحل:- $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{١}{جتا^٢ س} - ١}{س^٢}$ توحيد مقامات

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^٢ س}{(جتا^٢ س) س^٢}$ الضرب بالمرافق

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^٢ س}{(جتا^٢ س) س^٢} \times \frac{١ + جتا^٢ س}{١ + جتا^٢ س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^٢ س}{(جتا^٢ س) س^٢ \times (١ + جتا^٢ س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^٢ س}{س^٢ \times جتا^٢ س \times (١ + جتا^٢ س)}$

$= \frac{٤}{١ \times ٢} = ٢$

حل آخر بالضرب بالمرافقه

$\lim_{س \to 0} \frac{قا^٢ س - ١}{س^٢} \times \frac{قا^٢ س + ١}{قا^٢ س + ١}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^٢ س - ١}{س^٢ (قا^٢ س + ١)} = \lim_{س \to 0} \frac{ظا^٢ س}{س^٢ \times ٢}$

$= \frac{٤}{٢} = ٢$

١٥ $\lim_{س \to 0} \frac{١ + ظا س جا س - جتا ٢س}{س^٢}$

الحل:- نعيد الترتيب ونوزع البسط على المقام

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا ٢س}{س^٢} + \frac{ظا س جا س}{س^٢}$

ضرب بمرافقه

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا ٢س}{س^٢} \times \frac{١ + جتا ٢س}{١ + جتا ٢س} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا س جا س}{س \times س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^٢ ٢س}{س^٤ (١ + جتا ٢س)} + ١$

$= \frac{٤}{٢} + ١ = ٣$

١٦ $\lim_{س \to 0} \frac{}{}$ تمرين

-٤

١٦ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا س - جتا س}{س - \frac{\pi}{٤}}$ نضرب بمرافق

الحل:-

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا س - جتا س}{س - \frac{\pi}{٤}} \times \frac{جا س + جتا س}{جا س + جتا س}$ ← مطابقة

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا^٢ س - جتا^٢ س}{(س - \frac{\pi}{٤}) (جا س + جتا س)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{-جتا ٢س}{(س - \frac{\pi}{٤}) \sqrt{٢}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{-جا(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{(س - \frac{\pi}{٤}) \sqrt{٢}}$ | $جتا س = جا(\frac{\pi}{٢} - س)$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{-جا ص}{-ص \sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$ | نفرض $ص = \frac{\pi}{٤} - س$

١٧ $\lim_{س \to 0} \frac{جتا س - جتا ٣س}{س^٢}$ متطابقة

الحل:- $\lim_{س \to 0} \frac{-٢جا(\frac{س + ٣س}{٢}) \times جا(\frac{س - ٣س}{٢})}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢جا ٢س \times جا - س}{س \times س}$

$= -٢ \times ٢ \times -١ = ٤$

١٨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جا س - ١}{٤جتا^٢ س - ٣}$

الحل:- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جا س - ١}{٤(١ - جا^٢ س) - ٣}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جا س - ١}{١ - ٤جا^٢ س}$ ← تحليل المقام

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{(٢جا س - ١)}{(١ - ٢جا س)(١ + ٢جا س)}$ (-١)

$= \frac{-١}{٢}$

١٩ $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا ٦س}{جتا ٨س - ١}$ نضرب بمرافقين

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^٢ ٦س}{جتا^٢ ٨س - ١} \times \frac{١ + جتا ٨س}{١ + جتا ٦س} \times \frac{جتا ٨س + ١}{جتا ٨س + ١}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^٢ ٦س}{جتا^٢ ٨س - ١} \times \frac{٢}{٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^٢ ٦س}{-جا^٢ ٨س} = \frac{-٣٦}{٦٤} = \frac{-٩}{١٦}$

تمرين

$\lim_{س \to 0} \frac{جتا ٣س - جتا ٥س}{س^٢}$

تمرين

$\lim_{س \to 0} ظا س + ظا ٤س$

[1]

---

[٢٠] $\lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{جا \pi س}$

الحل:

$\lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{-جا(٢\pi - \pi س)}$ | $جا \pi س = -جا ٢\pi - \pi س$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{-جا \pi (٢ - س)}$ نفرض ص = ٢ - س

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ص}{-جا \pi ص} = \frac{-١}{\pi}$

تمرين

$\lim_{س \to 0} \frac{١ + جا ٤س - جتا^٢ س}{س}$

[٤]

تمرين

$\lim_{س \to م} \frac{جا س - جا م}{س - م}$

$جتا م$

---

[٢١] $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س - جا س}{س^٣}$

الحل:

$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{جتا س} - جا س}{س^٣}$ توحيد المقامات

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س - جا س جتا س}{(جتا س) س^٣}$ اخراج عامل مشترك ثم مرافق

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س (١ - جتا س)}{جتا س \, س^٣} \times \frac{١ + جتا س}{١ + جتا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س \times جا^٢ س}{جتا س \, س^٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

تمرين

$\lim_{س \to 0} (٧ س^٣ ظتا^٢ (٢ س) قتا (٥ س))$

$\frac{٧}{٢٠}$

---

[٢٢] $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا س}{س}$ ضرب بمرافق

الحل:

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا س}{س} \times \frac{١ + جتا س}{١ + جتا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^٢ س}{س (١ + جتا س)} = \lim_{س \to 0} \frac{جا^٢ س}{س^٢ (١ + جتا س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{|جا س|}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتا س}$ نعيد التعريف $جا^٢ = جا \times جا$

$\lim_{س \to 0^+} \frac{جا س}{س} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-جا س}{س}$

$١ \neq -١$

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا س}{س} = ٠$ ع.م

تمرين

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - ظا^٢ س}{١ - ظا^٢ س جتا^٢ س}$

[١٣]

تمرين

$\lim_{س \to ٢} \frac{جا (س - ٢)}{س^٢ - س - ٢}$

$\frac{١}{٣}$

٢٣ $\lim_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س-٢)}{س^٢ - س - ٢}$

الحل: $\lim_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س-٢)}{(س-٢)(س+١)}$ | نفرض ص = س - ٢

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{\text{جا ص}}{(ص)(ص-١)} = -١$

٢٤ إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٦س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٥س}{ب س - س} = ٢$

الحل:-

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٦س} = \frac{٣}{٦} = ٢ \Leftarrow ٣ = ٢ \Leftarrow ٣ = ٢$

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٥س}{(ب-١)س} = \frac{٥}{ب-١} = ٢$

$ب - ١ = \frac{٥}{٢} \Leftarrow ب = \frac{٧}{٢}$

٢٥ $\lim_{س \to ١} (س-١)\ \text{ظا}\frac{\pi}{٢}س$

الحل:-

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)\ \text{جا}\frac{\pi}{٢}س}{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}س}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س-١}{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}س} \times \lim_{س \to ١} \text{جا}\frac{\pi}{٢}س$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س-١}{\text{جا}\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{٢}س} \times ١$ | نفرض ص = ١ - س

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{-ص}{\text{جا}\frac{\pi}{٢}ص} = \frac{-١}{\frac{\pi}{٢}} = -\frac{٢}{\pi}$

تمرين

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٢س}{٤س}$

٢٦ إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{(٩ - \text{جتا}٢ب س)}{س^٢} = ١٨$

جد قيم ٩ ، ب حيث ب > ٠.

الحل:- من تصفير البسط ٩ = ١

$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢ب س}{س^٢} \times \frac{١ + \text{جتا}٢ب س}{١ + \text{جتا}٢ب س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢ب س}{س^٢(٢)} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٢ب س}{٢ س^٢}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٢ب س}{٢ س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٢ب س}{٢ س} \times \frac{٤ ب^٢}{٢} = ١٨$

$ب^٢ = ٩ \Leftarrow ب = \pm ٣$ ← مرفوض لأنه ب أكبر من صفر

تمرين

جد $\lim_{س \to ٠} س^٢ \text{ظتا}(٣س)\ \text{قتا}\ س$

٢٧ $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}^٢س}{\text{قا}س - ١}$ ضرب بمرافق

الحل:-

$\lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}^٢س}{\text{قا}س - ١} \times \frac{\text{قا}س + ١}{\text{قا}س + ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}^٢س \times ٢}{\text{قا}^٢س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}^٢س \times ٢}{\text{ظا}^٢س}$ بقسمة البسط والمقام على $س^٢$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}^٢س \times ٢}{\frac{س^٢}{س^٢}} = ٢$

٢٨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + \text{جتا}٢س}{١ - \text{جا}س}$ ← مناظرة

الحل:- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + ٢\text{جتا}^٢س - ١}{١ - \text{جا}س}$ تحليل البسط

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢(١ - \text{جا}^٢س)}{١ - \text{جا}س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢(١ - \text{جا}س)(١ + \text{جا}س)}{(١ - \text{جا}س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} ٢(١ + \text{جا}س) = ٢(١+١)$

$= ٤$

تمرين

جد $\lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س - 2 جا س}{س^3}$

[-١]

تمرين

$\lim_{س \to 0} \frac{1 + جتا 4س - 2 جتا^2 س}{س^2}$

[-٦]

[٢٩] $\lim_{س \to 0} \frac{س جتا 2س - س جتا 4س}{س^3}$

الحل: إخراج س عامل مشترك

$= \lim_{س \to 0} \frac{س (جتا 2س - جتا 4س)}{س \times س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا 2س - جتا 4س}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-2 جا(3س + 4س) جا(3س - 4س)}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-2 جا 3س جا - س}{س \times س} = -2 \times 3 \times -1 = 6$

تمرين

$\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا 2س}{2 س^2}$

[1]

تمرين

$\lim_{س \to 0} \frac{جا 2س}{2س + ظا 3س}$

[٢/٥]

[٣٠] $\lim_{س \to 1} \frac{س جا \frac{\pi}{2س}}{س - 1}$

الحل: $\lim_{س \to 1} \frac{س جا \frac{\pi}{2س}}{س - 1}$

$جا \frac{\pi}{س} = جا(\pi - \frac{\pi}{س})$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س جا \pi(1 - \frac{1}{2س})}{س - 1}$ ← توحيد المقامات

$= \lim_{س \to 1} \frac{س جا \pi (\frac{س - 1}{س})}{س - 1}$

نفرض $ص = \frac{س - 1}{س}$

$ص س = س - 1$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{س جا \pi ص}{ص \times س}$

$= \pi$

تمرين

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جا س}{(\pi - 2س)^2}$

[١/٨]

[٣١] $\lim_{س \to 0} \frac{2س (س + جا 8س - جا 4س)}{س^2 جتا س}$

الحل $= \lim_{س \to 0} \frac{2س (س + جا 8س - جا 4س)}{س^2 جتا س}$

$= 2 \lim_{س \to 0} (\frac{س}{س جتا س} + \frac{جا 8س}{س جتا س} - \frac{جا 4س}{س جتا س})$

$= 2(1 + 8 - 4) = 10$

الإتصال

أ - الإتصال عند نقطة

تعريف :- يكون الإقتران متصلاً عند س = أ

إذا كان

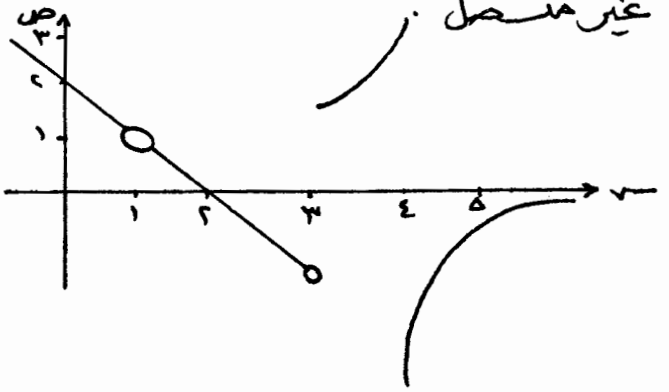
أ - الإقتران ق معرف عند س = أ

ب - نهـا ق(س) موجودة
س ← أ

جـ - نهـا ق(س) = ق(أ)
س ← أ

أمثلة

[1] جد قيم س التي يكون عندها ق(س) غير متصل



الحل :- قيم س هي { ١ ، ٣ ، ٤ }

[2] إذا كان ق(س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

إبحث إتصال ق(س) عند س = ٢

الحل :- ق(س) غير معرف عند س = ٢ لأنه صفر مقام

∴ ق(س) غير متصل عند س = ١

[3] إذا كان ق(س) = ٢س^٣ - $\frac{١}{٥}$ س - ٩ إبحث في إتصال ق(س) عند س = ٥

الحل :- ق(س) متصل عند س = ٥

لأنه كثير حدود

[4] إذا كان ق(س) = { ٢ - ٣س ، س < ٢
٣ ، س = ٢
س^٢ - ٨ ، س > ٢ }

إبحث إتصال ق(س) عند س = ٢

الحل :-

نهـا س^٢ - ٨ = ؟ نهـا ٢ - ٣س = ؟ ق(٢)
س ← ٢+ ، س ← ٢-

-٤ = -٤ ≠ ٣ ∴ غ. متصل عند س = ٢

[5] إذا كان ق(س) = { $\frac{|٦ - ٢س|}{٣ - س}$ ، س ≠ ٣
٢ ، س = ٣ }

إبحث في إتصال ق(س) عند س = ٣

الحل :- نعيد التعريف $\frac{-٦ + ٢س}{٣ - س}$ $\frac{٦ - ٢س}{٣ - س}$
٣

ق(س) = { $\frac{٦ - ٢س}{٣ - س}$ ، س > ٣
$\frac{-٦ + ٢س}{٣ - س}$ ، س < ٣
٢ ، س = ٣ }

نهـا $\frac{٢(-٣ + س)}{(٣ - س)}$ = نهـا $\frac{-٢(٣ - س)}{(٣ - س)}$ = ق(٣)
س ← ٣+ ، س ← ٣-

-٢ ≠ ٢ = ٢

ق(س) غ متصل عند س = ٣

[6] إبحث إتصال الإقتران ق(س) = س [س] عند س = ١

الحل :- نعيد التعريف طول الدرجة = ١

ق(س) = { س × ١ ، ٠ ≤ س < ١
س × ٢ ، ١ ≤ س < ٢ }

نهـا ٢س = نهـا س = ق(١)
س ← ١+ ، س ← ١-

٢ ≠ ١ ≠ ٢

ق(س) غ متصل عند س = ١

٧ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا}٣س}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٣ & ، س = ٠ \end{cases}$

إبحث في إتصال ق (س) عند س = ٠ .

الحل :-

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{س}$ = ق (٠)

٣ = ٣ ق(س) متصل عند س = ٠

٨ إبحث إتصال ق(س) = $\sqrt{س - ٣}$ عند س = ٣ ؟

الحل :- نجد المجال

---- ٣ ++++

$\lim_{س \to ٣^-} \sqrt{س - ٣}$ = $\lim_{س \to ٣^+} \sqrt{س - ٣}$ = ق (٣)

غ٠٣ = ٠ = ٠

ق (س) غ متصل عند س = ٣

تمرين

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ١ - ٤س & ، س \leq -٢ \\ ٣س^٢ - ٥ & ، س > -٢ \end{cases}$

إبحث إتصال ق(س) عند س = -٢ ، س = ٠ .

تمرين

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا}\sqrt{س^٢}}{س} & ، س \neq ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$

تمرين

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س - ٢} & ، س > ٢ \\ |س - س^٢| & ، س \leq ٢ \end{cases}$

إبحث الاتصال عند س = ٢

٩ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} [٣س] + ١ & ، -١ \leq س < ٠ \\ ٣س^٢ + ١ & ، ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

إبحث الاتصال عند س = $\frac{١}{٣}$

الحل :- نعيد التعريف طول الدرجة = $\frac{١}{٣}$

ق(س) = $\begin{cases} -٢ & ، -١ \leq س < -\frac{٢}{٣} \\ -١ & ، -\frac{٢}{٣} \leq س < -\frac{١}{٣} \\ ٠ & ، -\frac{١}{٣} \leq س < ٠ \\ ٣س^٢ + ١ & ، ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

$\lim_{س \to -\frac{١}{٣}^+}$ ٠ = $\lim_{س \to -\frac{١}{٣}^-}$ -١ = ق($-\frac{١}{٣}$)

٠ ≠ -١ ≠ ٠

ق(س) غ متصل عند س = $-\frac{١}{٣}$

ب- الإتصال على فترة

يكون الإقتران متصل على $[P ، ب]$ إذا كان

١- ق متصل عند كل من س $\in (P ، ب)$

٢- ق متصل عند س $= P$ من اليمين

٣- ق متصل عند س $= ب$ من اليسار

أمثلة

١ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} & ، س > ٢ \\ ٣س + ٦ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

إبحث إتصال الإقتران على ح

الحل:-

القواعد

$\frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ متصل على $س > ٢$ لانه معرف

$٣س + ٦$ متصل على $س \leq ٢$ لانه كثير حدود

الأطراف لايوجد أطراف

التحول عند $س = ٢$

نهـا $_{س \to ٢^+} ٣س + ٦ = ؟$ نهـا $_{س \to ٢^-} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{س - ٢} = ؟ ق(٢)$

$١٢ = ١٢ = ١٢$

ق(س) متصل على ح

٢ إذا كان $ق(س) = |٢س - ٥|$ فإبحث في إتصال الإقتران ع(س) على الفترة $[٠ ، ٣]$

الحل:- نجد التعريف

س	$\frac{٥}{٢}$	
$٢س - ٥$	$-$	$+$

$ق(س) = \begin{cases} -٢س + ٥ & ، ٠ \leq س < \frac{٥}{٢} \\ ٢س - ٥ & ، \frac{٥}{٢} \leq س \leq ٣ \end{cases}$

- القواعد

$-٢س + ٥$ متصل على مجاله لانه كثير حدود

$٢س - ٥$ " " " " " "

- التحول $س = \frac{٥}{٢}$

نهـا $_{س \to \frac{٥}{٢}^+} ٢س - ٥ =$ نهـا $_{س \to \frac{٥}{٢}^-} -٢س + ٥ = ق(\frac{٥}{٢})$

$٠ = ٠ = ٠$

$\therefore$ ق(س) متصل عند $س = \frac{٥}{٢}$

- الاطراف $س = ٠$

نهـا $_{س \to ٠^+} -٢س + ٥ \stackrel{؟}{=} ق(٠)$

$٥ = ٥$ متصل عند $س = ٠$

$س = ٣$

نهـا $_{س \to ٣^-} ٢س - ٥ \stackrel{؟}{=} ق(٣)$

$١ = ١$ متصل عند $س = ٣$

$\therefore$ ق(س) متصل على $[٠ ، ٣]$

٣ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، |س| \leq ٢ \\ س^٢ & ، |س| > ٢ \end{cases}$

إبحث اتصال ق(س) على مجاله

الحل نجد التعريف

$|س| \leq ٢ \quad -٢ \leq س \leq ٢$

$|س| > ٢ \quad س > ٢ ، س < -٢$

$ق(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، -٢ \leq س \leq ٢ \\ س^٢ & ، س > ٢ ، س < -٢ \end{cases}$

- القواعد

$س + ٢ ، س^٢$ متصل على مجاله لانه كثير حدود

- التحول $س = ٢$ نهـا $_{س \to ٢^+} س^٢ =$ نهـا $_{س \to ٢^-} س + ٢ = ق(٢)$

$٤ = ٤ = ٤$

$س = -٢$ نهـا $_{س \to -٢^-} س^٢ =$ نهـا $_{س \to -٢^+} س + ٢ = ق(-٢)$

$٤ \neq ٠ =$

ق(س) متصل على مجاله $- \{-٢\}$

تمرين

$$ق(س) = \begin{cases} |س|+2 & ، |س| > 2 \\ 2س & ، |س| \leq 2 \end{cases}$$

إبحث اتصال ق(س) على مجاله

ق(س) متصل على ح - {-2، 2}

تمرين

$$\text{إذا كان } ق(س) = \begin{cases} \sqrt{9-س^2} & ، -3 \leq س \leq 3 \\ س^2 - 3س & ، 3 < س ، س > 3 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

---

٤ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^3+2س}{س} & ، -2 \leq س < 0 \\ 2 & ، س = 0 \\ [2+س] & ، 0 < س \leq 1 \end{cases}$

إدرس الإتصال على [-2، 1]

نعيد التعريف

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^3+2س}{س} & ، 2 \leq س < 0 \\ 2 & ، س = 0 \\ 2 & ، 0 < س < 1 \\ 3 & ، س = 1 \end{cases}$$

نبحث في القواعد

$\frac{س^3+2س}{س}$ متصلة على مجالها لانها معرفه

2، 2، 3 جميعها متصلة على مجالها لانها ثوابت

- التحول $س = 0$ $\quad نها_{س \to 0^+} ق(س) = نها_{س \to 0^+} \frac{س^3+2س}{س} = 2$

$$نها_{س \to 0^-} \frac{س(س+2)}{س} = 2$$

$2 = 2$

- الأطراف

$س = 2$ $\quad نها_{س \to 2^+} \frac{س^3+2س}{س} = ق(2)$

$4 = 4$ متصل عند $س = 2$

---

٥ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + |-س| & ، -1 \leq س < 0 \\ [س] + 5س - 2 & ، 0 \leq س \leq 1 \end{cases}$

إبحث في إتصال الاقتران ق(س) على [-1، 1]

الحل:-

نعيد التعريف $[س]$ طول إدحة = 1

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + |-س| & ، -1 \leq س < 0 \\ 0 + 5س - 2 & ، 0 \leq س < 1 \\ 1 + 5س - 2 & ، س = 1 \end{cases}$$

- القواعد $س^2 + |-س|$ متصل على مجاله لانه معرف

$5س - 2$ ، $5س - 1$ متصل لانهم كثيرات حدود

- التحول $س = 0$ $\quad نها_{س \to 0^+} (5س - 2) = نها_{س \to 0^-} (س^2 + |-س|) = ق(0)$

ق(س) غ متصل عند $س = 0$ $\quad -2 \neq 0 \neq -2$

- الاطراف

$س = -1$ $\quad نها_{س \to -1^+} (س^2 + |-س|) = ق(-1)$

$1 + 1 = 2$ متصل عند $س = -1$

$س = 1$ $\quad نها_{س \to 1^-} (5س - 2) = ق(1)$

$3 = 3$ متصل عند $س = 1$

ق(س) متصل على صفحة ٣٢

تمرين

إذا كان ق(س) = { [س] + س ، -١ ≤ س < ٠
{ √(١ + ٣/٥ س²) ، ٠ ≤ س ≤ ٢

إبحث إتصال ق(س) على [-١ ، ٢]

تمرين

إذا كان ق(س) = { √(س + |س|) ، -٢ ≤ س < ٠
{ ٤/(س+١) ، ٠ ≤ س < ٣
{ ٦ ، س = ٣

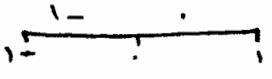
إبحث في إتصال الاقتران ق على [-٢ ، ٣]

١ إبحث إتصال ق(س) = { (س² - ١)/(س + ١) ، -٢ ≤ س < -١
{ [س] + ١ ، -١ ≤ س < ٠
{ -س + ١ ، ٠ ≤ س < ١

على الفترة [-٢ ، ١]

الحل :-

نعيد تعريف [س]



ق(س) = { (س² - ١)/(س + ١) ، -٢ ≤ س < -١
{ -س + ١ ، -١ ≤ س < ٠
{ ١ ، ٠ ≤ س < ١

• القواعد

ق متصل على (-٢ ، -١) لانه معرف على مجاله

-س + ١ متصل لانه كثير حدود

١ متصل على مجاله لانه ثابت

• التحول س = -١

نها ق(س) = نها (س-١)(س+١)/(س+١) = ق(-١)
س → -١⁺ س → -١⁻

= -٢ = +٢

ق(س) غ متصل عند س = -١

س = ٠ نها ق(س) = نها -س + ١ = ق(٠)
س → ٠⁺ س → ٠⁻

١ = ١ ∴ ق متصل عند س = ٠

• الاطراف س = -٢

نها ق(س) = نها (س² - ١)/(س + ٢) = ق(-٢)
س → -٢⁺ س → -٢⁻

-٣ = -٣

ق(س) متصل عند س = -٢

∴ ق(س) متصل على [-٢ ، ١] - {-١}

نظريات في الاتصال

١- اذا كان (ق) اقترانا متصل ، (د) اقترانا متصلا فإن

أ- $(ق \pm د)(س)$ متصل عند $س = أ$

ب- $(ق \times د)(س)$ متصل عند $س = أ$

جـ- $(\frac{ق}{د})(س)$ متصل عند $س = أ$ بشرط $د(أ) \neq 0$

أمثلة

١ اذا كان $ق(س) = (س - ٢)^{٣}$

$هـ(س) = [س + ١]$

فابحث في إتصال $(ق \times هـ)(س)$ عند $س = ٢$

الحل:- نعيد التعريف [س + ١] طول المجال = ١

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

ق(س) متصل لانه كثير حدود

هـ(س) ع متصل نفشل النظرية

نفذ العملية الحسابية

$$(ق \times هـ)(س) = \begin{cases} (س-٢)^{٣} \times ٢ & ، ١ \leq س < ٢ \\ (س-٢)^{٣} \times ٣ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

نهأ $(ق \times هـ)(س) = نهأ (ق \times هـ)(س) = (ق \times هـ)(٢)$
$س \to ٢^{+}$ $س \to ٢^{-}$

$٠ = ٠ = ٠$

$(ق \times هـ)(س)$ متصل عند $س = ٢$

٢ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \neq ٢ \\ ٢س & ، س > ٢ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} س & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س > ٢ \end{cases}$

ابحث اتصال $(ق + هـ)(س)$ عند $س = ٢$

الحل: نبحث اتصال ق عند $س = ٢$

نهأ $س^{٢} + ١ =$ نهأ $٢س = ق(٢)$
$س \to ٢^{+}$ $س \to ٢^{-}$

٥ ≠ ٤ ≠ ٥ غير متصل تفشل النظرية

$$(ق + هـ)(س) = \begin{cases} س^{٢} + س + ١ & ، س \neq ٢ \\ ٢س + ٣ & ، س > ٢ \end{cases}$$

نهأ $س^{٢} + س + ١ =$ نهأ $٢س + ٣ = ق(٢)$
$س \to ٢^{+}$ $س \to ٢^{-}$

$٧ = ٧ = ٧$

$(ق + هـ)(س)$ متصل عند $س = ٢$

تمرين

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨}س^{٣} + ١ & ، س > -٢ \\ \frac{٣}{٢} & ، س \leq -٢ \end{cases}$

$هـ(س) = \frac{حتا \frac{\pi}{٢} س}{س}$

ابحث اتصال $(ق + هـ)(س)$ عند $س = -٢$

أسئلة الثوابت

[1] إذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - س - ب}{أ س - ٦} & ، س > ٦ \\ ١ & ، س = ٦ \\ ب س & ، س < ٦ \end{cases}$

إقتراناً متصلاً على ح نجد قيمة كل من أ ، ب

الحل:- من الاتصال

نهـ ق(س) = ق(٦)
س→٦

نهـ ب س = ١ ⇐ ٦ب = ١ ⇐ ب = $\frac{١}{٦}$
س→٦-

نهـ $\frac{س^2 - س - ب}{أ س - ٦}$ = ق(٦)
س→٦+

نهـ $\frac{(س-٦)(س+٥)}{أ(س-٦)}$ = ١
س→٦+

$\frac{١١}{أ}$ = ١ ⇐ أ = ١١

[2] إذا علمت أن

ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - (٣-٢جـ)س - ٦جـ}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٤س - ١ & ، س = ٣ \end{cases}$

إقتران متصل على ح جد قيمة جـ

الحل:-

نهـ $\frac{س^2 - (٣-٢جـ)س - ٦جـ}{س - ٣}$ = ق(٣)
س→٣

نهـ $\frac{س^2 - ٣س + ٢جـ س - ٦جـ}{س - ٣}$ = ١١
س→٣

نهـ $\frac{س(س-٣) + ٢جـ(س-٣)}{س - ٣}$ = ١١
س→٣

نهـ $\frac{(س-٣)(س+٢جـ)}{(س-٣)}$ = ١١
س→٣

٣ + ٢جـ = ١١ ⇐ جـ = ٤

[3] إذا كان ق(س) = $\frac{س^2 - ٣س - ٥}{س^2 - أ س + ٥}$

متصلاً على ح جد قيمة أ

الحل:-

حتى يكون ق(س) متصلاً على ح يجب ان يكون المقام ≠ ٠ بلا جذور

المميز < ٠

ب^٢ - ٤أجـ < ٠

(-أ)^٢ - ٤ × ١ × ٥ < ٠

أ^٢ - ٢٠ < ٠ ⇐ أ^٢ < ٢٠

أ < √٢٠ ، أ > -√٢٠

[4] إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{أ}{س} + س^2 & ، ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٣ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \end{cases}$

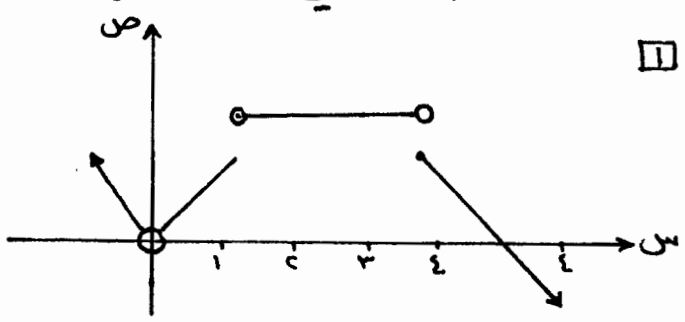
وكان ق متصلاً عند س = ٢

١- جد قيمة أ

٢- إبحث في إتصال الاقتران ق على الفترة (٠ ، ٣]

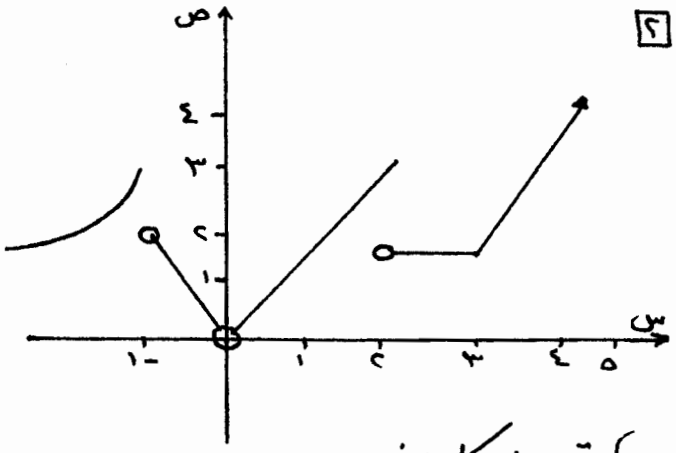
أسئلة إضافية في النهايات والاتصال

[1]



ما مجموعة قيم P حيث $\lim_{س \to P} ق(س) = غ.م$

[2]



ما قيمة كل من

١- $\lim_{س \to .} ق(س)$

٢- $\lim_{س \to 2^+} ق(س)$

٣- $\lim_{س \to ه} ق(س)$

٤- $\lim_{س \to ه} ق(س)$

٥- ما مجموعة قيم P حيث $\lim_{س \to P} ق(س) = ٣$

٦- ما مجموعة قيم ب حيث ق (س) غير متصل عند س = ب

[3] جد $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س}{٩ - س^٢} + \frac{٣س}{س^٣ - ٩س} \right)$

[4] إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -١$ ، $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ٩$

أوجد $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س - ١}{ع(س) - ٣} - \sqrt[٣]{ق(س) - ٧} \right)$

[5] جد $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س + ٧} - \sqrt{س + ٣}}{س - ١}$

[6] $\lim_{س \to ٤} \frac{٨ - ٢س^٢}{س^٣ - ٦٤}$

[7] $\lim_{س \to ١} \frac{س^٦ - ١}{١ - \frac{١}{(٣س - ٢)^٢}}$

[8] $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{\sqrt{١ + ٤س + ٤س^٢}}{٢س + ١}$

ع.م

[9] $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ \sqrt{س} - ١}{س - ١}$

[10] $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} \sqrt{س} - ١}{س - ١}$

[11] $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{٥ + ٣س + ٨} - ٢}{س - ١}$

[12] $\lim_{س \to ١} \frac{(س^٢ + ٢س - ٣)^{ن}}{(س^٢ - ٢س + ١)^{ن}} = ١٦$

جد قيمة ن ؟

[13] $\lim_{س \to .} \frac{١ - ٣س جاس - جتا٢س}{س ظا ٢س}$

[14] $\lim_{س \to .} \frac{س - ١}{جا(س^٣ - ١)}$

[15] $\lim_{س \to ه} \frac{٩ - ٢س^٣ - (٣ + س)^٣}{س^٢ + س^٣ - ١}$

١٦ $\lim_{س \to ٥} \frac{م س^٤ - ٢ س^٣ - ٥ س + ٤}{س^٣ + ٥ س^٢ - ٣}$ جد قيمة م حيث النهاية موجودة

١٧ $\lim_{س \to ٥} \frac{م س^٢ + ٤ س + ١}{ب س + ٣} + ٢ = ٥$

م = ٠
ب = $\frac{٤}{٣}$

١٨ $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{س^٢ + ٢}{٢ س + ١} + م س - ب \right) = ٤$

م = $\frac{١}{٢}$
ب = $\frac{-١٧}{٢}$

١٩ $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{-س^٢}{س + ٢} + \frac{٤ س^٢}{٢ س + ١} \right)$ [-٥٥]

٢٠ $\lim_{س \to ٥} \left(\left(\frac{س + ٣}{٢ س + ١} \right)^٣ - \frac{٩ - س^٢}{٣ س^٢ - ٣} \right)$ [$\frac{١}{٨}$]

٢١ $\lim_{س \to ١} \frac{س جا \frac{\pi}{٢} س}{س - ١}$ [٨]

٢٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{٧ ظا س - ١}{س}$ = $\frac{-١}{٢}$

٢٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - ٧ س^٢ + ٤}{جتا ٢ س - جتا س}$ [$\frac{٣}{١٦}$]

٢٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٥ س}{ق ٣ س - ١}$ [$\frac{٥}{٩}$]

٢٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + جا س} - جتا س}{س}$ [$\frac{١}{٢}$]

٢٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٨ س + ٢ جا^٢ ٣ س - ١}{س^٢}$ [-١٤]

٢٨ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٧ ٢}{ظا (٣ س - ٩)}$ [٩]

٢٩ $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا ٢ س}{(٢ س + \pi)^٢}$ [$\frac{١}{٤}$]

٣٠ $\lim_{س \to \pi} \frac{ظا^٢ س}{ق س + ١}$ [-٢]

٣١ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٣ س - جتا س}{س^٢}$ [-٤]

٣٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + جتا ٤ س - ٢ جتا^٢ س}{س^٢}$ [-٦]

٣٣ اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{م س^٢ + ٢ ب س + ٢}{س - ١} = ١$

م = ٣
ب = $\frac{-٥}{٢}$

٣٤ ليكن ق(س) = { $س^٣$ ، $س < ١$; $٢ س - ٣ س$ ، $س \geq ١$ }

إبحث اتصال الإقتران ق لجميع قيم س الحقيقية

٣٥ ق(س) = { $|٢ س - ١|$ ، $-١ \leq س \leq ١$; $[\frac{١}{٢} س + ٢]$ ، $١ < س \leq ٣$ }

إبحث في اتصال ق(س) على $[-١، ٣]$

٣٦ ق(س) = { $س^٢$ ، $س \leq ١$; $٣ + ٢ س$ ، $س > ١$ }

هـ(س) = { $٢ س$ ، $س \leq ١$; -٢ ، $س > ١$ }

إبحث في اتصال (ق + هـ)(س) عند س = ١

٣٧ ق(س) = { أ س² + ب س ، س < ٢ ؛ ٣ ب ، س = ٢ ؛ أ س + ب + ١٢ ، س > ٢

فما قيمة أ ، ب التي تجعل ق(س) متصل

أ = ٢

ب = ٨

٣٨ ق(س) = { ٩ - س² ، -٣ ≤ س ≤ ٣ ؛ س² - ٣ س ، ٣ ≤ س ، س ≤ -٣

ابحث اتصال ق(س) على مجاله

٣٩ ق(س) = [س] - [١ - ½ س]

س ∈ [٢ ، ٤] إبحث الاتصال على الفترة [٢ ، ٤]

٤٠ ق(س) = { س² ، س < ٠ ؛ [س + ٢] ، ٠ ≤ س < ٢ ؛ √(س + ٧) ، س ≥ ٢

ابحث اتصال ق(س) لجميع قيم س الحقيقية

٤١ ق(س) = { ٢ س - ١ ، س < ٢ ؛ [½ س + ٢] ، ٢ ≤ س < ٤ ؛ ٥ س / (س² - ٣٦) ، س ≥ ٤

ابحث في إتصال ق(س) على ح

٤٢ ق(س) = { ١ / (س - ٢) ، ٠ < س < ٣ ؛ ٣ / (س - ١) ، ٣ ≤ س < ٥ ؛ س² ، س = ٥

ابحث اتصال ق(س) على (٠ ، ٥]

٤٣ ق(س) = { (|س - ٤| / (س - ٢)) + س² ، س ≠ ٢ ؛ ٦ س ، س = ٢

ابحث في إتصال ق(س) على مجاله

مع تمنياتي لكم بالنجاح

الأستاذ: محمود عبد العزيز الجزار

الوحدة الثانية

التفاضل

متوسط التغير

إذا تغيرت قيمة س من $س_1$ الى $س_2$ فإن مقدار التغير في س هو $(س_2 - س_1)$ حيث يرمز لمقدار التغير بالرمز $\Delta س$

- $\Delta س = س_2 - س_1$

أما مقدار التغير في الإقتران ق(س) يرمز له بالرمز $\Delta ص$ حيث

- $\Delta ص = ص_2 - ص_1$
  $\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1)$
- متوسط التغير " ميل القاطع "

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$$

- السرعة المتوسطة ع

$$ع = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$$

ظا هـ = ميل القاطع

أمثلة:

[1] إذا كان $ق(س) = س - س^3$، وتغيرت س من $س_1 = 2$ الى $س_2 = 3$. احسب متوسط التغير

الحل:-

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{ق(3) - ق(2)}{3 - 2}$$

$$= \frac{(3 - 3^3) - (2 - 2^3)}{1}$$

$$= \frac{-24 - -6}{1} = -18$$

[2] إذا كان $ق(س) = \sqrt{س}$ ، حيث س تتغير س من $س_1 = 1$ الى $س_2 = 9$ جد ميل القاطع ؟

[3] $ص = ق(س) = س^2 - س$ جد مقدار في قيمة الاقتران إذا تغيرت س من

أ- $س_1 = 3$ ، $س_2 = 4$

الحل:-

$\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1)$

$= ق(4) - ق(3)$

$= (4^2 - 4) - (9 - 3) = 6$

ب- $س_1 = P$ ، $س_2 = P - 2$

الحل:-

$\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1)$

$= ق(P - 2) - ق(P)$

$= (P^2 - 4P + 4 - P) - (P^2 - P)$

$= -6 - P4$

[4] اذا كان $ق(س) = \sqrt{3س - 1}$ ، $س_1 = 8$ ، $\Delta س = 19$ جد مقدار التغير في الاقتران ق(س) .

الحل:-

$\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1)$

$\Delta ص = ق(27) - ق(8)$

$= 3 - 2 = 1$

$\Delta س = س_2 - س_1$

$19 = س_2 - 8$

$س_2 = 27$

[5] احسب متوسط التغير في الاقتران $ق(س) = جا س$ في الفترة $[\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}]$

$\frac{3}{\pi 2}$

[6] اذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة $[-4، 1]$ يساوي (3) وكان $ق(-3) = -3$ (قيمة ق(1) .

الحل:-

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$$

$$3 = \frac{ق(1) - -3}{1 - -4}$$

$$3 = \frac{ق(1) + 3}{5} \leftarrow \Delta ص = ق(1) + 3$$

$ق(1) = 2$

[7] إذا كان $ق(س) = 2س^2 - 1$ جد ميل القاطع المار بالنقطتين $(2، ق(2))$ ، $(-1، ق(-1))$

[2]

٨ إذا كان متوسط التغير للاقتران
ق(س) = ٤س² - ٩ في الفترة [ب، ٢] يساوي (٤) جد قيمة ب ؟

ب = -٣

٩ ق(س) = { [س+٣، ٠] ، س < ٠
| س - ٢ | ، س ≥ ٠

جد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ؛ س ∈ [-٢، ٥] .

الحل:- لا نجد التعريف ← نعوض مباشرة

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٥) - ق(-٢)}{٥ - (-٢)}$$

$$= \frac{٥ - ٤}{٧} = \frac{١}{٧}$$

١٠ إذا كان ق(س) = س² + هـ(س) حيث

هـ(س) = { س³ + ١ ، ١ ≤ س < ٥
٠ ، ٥ ≤ س ≤ ٧

جد مقدار التغير في ق(س) في الفترة [١، ٥]

الحل:-

$$\Delta ص = ق(٥) - ق(١)$$
$$= [٥^٢ + هـ(٥)] - [١^٢ + هـ(١)]$$
$$= (٢٥ + ٠) - (١ + ٢)$$
$$= ٢٥ - ٣ = ٢٢ .$$

١١ ق(س) = { س² ، ٠ ≤ س < ٢
٤س ، ٢ ≤ س ≤ ٤

نجد متوسط التغير اذا تغيرت س من ٠,١ الى ٢,٢ .

٦,٥٥ / ٦٠

١٢ يتغير طول ضلع مكعب من ٥ سم الى ٣ سم إحسب مقدار التغير في حجم المكعب .

الحل :- نحتاج الى اقتران حجم المكعب = س³

ق(س) = س³

$$\Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١)$$

$$\Delta ص = ق(٣) - ق(٥)$$
$$\Delta ص = ٢٧ - ١٢٥ = -٩٨$$

١٣ يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن² + ١ احسب السرعة المتوسطة للجسيم [١، ٢]

الحل:-

$$ع = \frac{ف(٢) - ف(١)}{٢ - ١}$$

$$= \frac{٥ - ٢}{١ - ٢} = ٣ م/ث$$

١٤ صفيحة معدنية الشكل تتمدد محافظة على شكلها اذا زاد طول ضلعها من ٥ سم الى ٥,٢ سم نجد مقدار التغير في مساحتها

٢,٠٤ سم²

١٥ إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق على الفترة [-١، ٣] يساوي (-٤)، نجد متوسط التغير في الاقتران هـ حيث هـ(س) = ٢ق(س) - ٣س² على الفترة نفسها

الحل:-

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - (-١)}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٢ق(٣) - ٢٧ - (٢ق(-١) - ٣)}{٣ - (-١)}$$

$$= \frac{٢ق(٣) - ٢ق(-١)}{٣ - (-١)} + \frac{-٢٧ + ٣}{٣ - (-١)}$$

$$= ٢ \times ٤ - \frac{٢٤}{٤}$$

$$= ٨ - ٦ = -١٤$$

١٦ يتحرك جسيم حسب العلاقة
ف(ن) = ٢ن² - ٢ن + ٢٠ ، ن ∈ [٢، ٦]
جد السرعة المتوسطة

١٤

١٧ مربع طول ضلعه ٩٠,٠ سم يتمدد فأصبح طول ضلعه ١,٢ سم جد التغير في المساحة .

٢,١

المشتقة الأولى

هي نهاية متوسط التغير عندما $\Delta س \to$ صفر

يرمز لها $ق'(س) = ص' = \frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س}$

قوانين المشتقة الأولى

$$ق'_{س} = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(س) - ق(س)}{ع - س}$$

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

خطوات الحل

١- نكتب القانون
٢- نعوض في ق(س)
٣- نحلل
٤- نختصر
٥- نعوض

ملاحظة إذا كان المطلوب $ق'(P)$ نعوض بدلاً من $س \to P$

$$ق'(P) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

أمثلة :-

١ ليكن $ق(س) = س^2$ ، فجد $ق'(س)$ بإستخدام تعريف المشتقة الاولى .

الحل :-

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع^2 - س^2}{ع - س}$$ نحلل

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{(ع - س)}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع + س}{1} = \boxed{٢ س}$$

٢ إذا كان $ق(س) = س^2 + ٣$ فجد $ق'(س)$ بإستخدام التعريف

$\boxed{٢ س}$

٣ $ق(س) = س^3 + ٢ س^2 - ٣ س - ٥$: $س \in ح$ جد $ق'(س)$ بإستخدام التعريف .

الحل :-

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع^3 + ٢ع^2 - ٣ع - ٥ - س^3 - ٢ س^2 + ٣ س + ٥}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع^3 - س^3}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٢ع^2 - ٢ س^2}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{-٣ع + ٣ س}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} ع^2 + ع س + س^2 + ٢(ع + س) - ٣$$

$$= ٣ س^2 + ٤ س - ٣$$

٤ $ق(س) = س^2 + س$ جد $ق'(س)$ بإستخدام التعريف

$\boxed{٢ س + ١}$

٥ $ق(س) = \frac{٢}{س + ٢}$ ، $س \neq -٢$ جد $ق'(س)$ بإستخدام التعريف

الحل :-

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\frac{٢}{ع + ٢} - \frac{٢}{س + ٢}}{ع - س} = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٢ س + ٤ - ٢ ع - ٤}{(ع - س)(ع + ٢)(س + ٢)}$$

$$= ٢ \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{س - ع}{(ع - س)(ع + ٢)(س + ٢)} = \frac{-٢}{(س + ٢)^2}$$

٦ باستخدام تعريف المشتقة ، جد $ق'(٢)$ حيث $ق(س) = \frac{س}{س - ٤}$ عند $س = ٢$

الحل :- $ق'(٢) = \text{نهـا}_{ع \to ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$

$$ق'(٢) = \text{نهـا}_{ع \to ٢} \frac{\frac{ع}{ع - ٤} + ١}{ع - ٢}$$

$$ق'(٢) = \text{نهـا}_{ع \to ٢} \frac{\frac{ع + ع - ٤}{ع - ٤}}{ع - ٢}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to ٢} \frac{٢ع - ٤}{ع - ٢} \times \frac{}{ع - ٤}$$

$$= \frac{٢}{-٢} = -١$$

٧ ق(س) = س + √س جد ق'(٤) باستخدام التعريف

ق'(٤) = ٥/٤

٨ ق(س) = ١/√س + ٢، جد ق'(س) باستخدام التعريف

الحل: ق'(س) = نهـ_{ع→س} (١/√ع + ٢ − ١/√س − ٢) / (ع − س)

ق'(س) = نهـ_{ع→س} (√س − √ع)/(√س √ع) × (√س + √ع)/(√س + √ع) / (ع − س)

ق'(س) = نهـ_{ع→س} (س − ع) / (ع − س)(√ع √س)(√س + √ع)

= −١ / ٢س √س

٩ ص = س/(س+٢) فجد دص/دس عند س = −١ باستخدام التعريف

١٠ ق(س) = √(س٢ + ٣) باستخدام التعريف جد ق'(س)

٢س / ٢√(س٢+٣)

١١

١٢

١٣

١٤ باستخدام تعريف المشتقة الاولى جد ق' للاقتران ق(س) = ظاس

الحل: ق'(س) = نهـ_{ع→س} (ق(ع) − ق(س)) / (ع − س)

ق'(س) = نهـ_{ع→س} (ظاع − ظاس)/(ع − س) ← متطابقة

ق'(س) = نهـ_{ع→س} ظا(ع−س)(١ + ظاع ظاس) / (ع − س)

= نهـ_{ع→س} ظا(ع−س)/(ع−س) × نهـ_{ع→س} (١ + ظاع ظاس)

نفرض ص = ع − س

= نهـ_{ص→٠} ظا(ص)/ص × (١ + ظاس)

= (١ + ظاس) = قا٢س

١٥ ق(س) = √(س+٢) ، س > −٢ جد ق'(س)

١ / ٢√(س+٢)

١٦ ق(س) = س٢ − ٢ حيث س ∈ [١، ٦] جد ق'(س) ≠ ق'(٦)

الحل: ق'(١) = غير موجودة ← اطراف فترة

ق'(٦) = غير موجودة ← اطراف فترة

ق(س) = قا٢س اوجد ق'(س)

١٧ $ق(س) = \frac{١}{س^{٣}}$ اوجد $ق'(س)$ بإستخدام التعريف

$\frac{-٣}{س^{٤}}$

١٨ $ق(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & ، س \leq ١ \\ س^{٢} & ، س > ١ \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق عند $س = ١$ بإستخدام التعريف

الحل:-

خطوات الحل:- ١- نجد $ق'_{+}$ من اليمين

٢- نجد $ق'_{-}$ من اليسار

٣- تكون المشتقة موجودة بشرط $ق'(+) = ق'(-)$

$ق'(١)^{+} = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{ع^{٢} - ١}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{(ع+١)(ع-١)}{ع-١} = ٢$

$ق'(١)^{-} = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٢ع - ١ - ١}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٢(ع-١)}{ع-١} = ٢$

المشتقة موجودة $ق'(١) = ق'(١) = ٢$

١٩ $ق(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & ، س < ١ \\ ٤ - ٣س & ، س \geq ١ \end{cases}$ أوجد $ق'(س)$ إبحث قابلية الإشتقاق بإستخدام التعريف

٢٠ $ق(س) = ٢ + |١ - س|$ ابحث قابلية الاشتقاق عند $س = ١$ بإستخدام التعريف

الحل:- نعيد التعريف

$س$	١	١
$١ - س$	$+$ ٠ $-$	

$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س & ، س \leq ١ \\ س + ١ & ، س > ١ \end{cases}$ متصل عند $س = ١$

$ق'(١)^{+} = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{ع + ١ - ٢}{ع - ١} = ١$

$ق'(١)^{-} = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٣ - ع - ٢}{ع - ١} = -١$

المشتقة غير موجودة

٢١ $ق(س) = |س^{٢} - س|$ جد $ق'(١)$ بإستخدام التعريف

٢٢ $ق(س) = س[س]$ جد $ق'(٠)$ بإستخدام التعريف

الحل:- نعيد التعريف

$ق(س) = \begin{cases} س(-١) & ، -١ \leq س < ٠ \\ س(٠) & ، ٠ \leq س < ١ \end{cases}$ متصل عند $س = ٠$

$ق'(٠)^{+} = \lim_{ع \to ٠^{+}} \frac{ق(ع) - ق(٠)}{ع} = \lim_{ع \to ٠^{+}} \frac{-ع}{ع} = -١$

$ق'(٠)^{-} = \lim_{ع \to ٠^{-}} \frac{ق(ع) - ق(٠)}{ع} = \lim_{ع \to ٠^{-}} \frac{٠}{ع} = ٠$ $ق'(٠)$ ع. موجودة

٢٣ $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٤س & ، ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

جد $ق'(٢)$ ، $ق'(٠)$ ، $ق'(٥)$

٢٤ $ق(س) = س^{٢}|س^{٣} - ١|$ ، جد $ق'(٢)$ بإستخدام التعريف

الحل:- $س^{٣} - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

$س$	١	
	$-$ ٠ $+$	

$ق(س) = \begin{cases} س^{٢}(س^{٣} - ١) & ، س \geq ١ \\ س^{٢}(١ - س^{٣}) & ، س < ١ \end{cases}$

متصل عند $س = ٢$ نقطة عادية

$ق'(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$

$= \lim_{ع \to ٢} \frac{ع^{٥} - ع^{٢} - ٢٨}{ع - ٢}$

$= \lim_{ع \to ٢} \frac{(ع+٢)(ع^{٣} + ٤ع^{٢} + ٧ع + ١٤)(ع-٢)}{ع - ٢} = ٧٦$

٢٥ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$

جد $ق'(٣)$ عند $س = ٣$ بإستخدام التعريف

٢٦ $ق(س) = \begin{cases} [س] & ، ١ \leq س < ٢ \\ |س - ٢| & ، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ ابحث قابلية الاشتقاق على $[٤،١]$

الحل:-

نعيد التعريف

$ق(س) = \begin{cases} ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ س - ٢ & ، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

القواعد ١) $ق(س) = ١$

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{١ - ١}{ع - س} = ٠$

٢) $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - ٢ - س + ٢}{ع - س} = ١$

التحول عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٢^{+}} س - ٢ = ٠$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ١ = ١$ غير متصل

$\lim_{س \to ٢^{-}} ق(٢) = ٠$ $ق'(٢)$ غ. موجودة

الاطراف

$ق'(١)$ غير موجودة

$ق'(٤)$ غير موجودة

٢٧ إذا كان ق(س) = ق(س+هـ) − ٢س٢هـ
وكان هـ هي هـ س جد ق′(س) .

الحل:: ق′(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س)+٢س٢هـ-ق(س)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{٢س٢هـ}{هـ}$ = [٢س٢]

٢٨ إذا كانت ق′(٣) = ٥ ، فجد $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣+٤هـ)-ق(٣)}{٥هـ}$

الحل:: يجب جعل المطلوب قريب من شكل ق′

$\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣+٤هـ)-ق(٣)}{٥هـ}$ نفرض م = ٤هـ ، هـ = $\frac{م}{٤}$

$\lim_{م \to 0} \frac{ق(٣+م)-ق(٣)}{\frac{٥}{٤}م}$ = $\frac{٤}{٥}$ $\lim_{م \to 0} \frac{ق(٣+م)-ق(٣)}{م}$

= $\frac{٤}{٥}$ ق′(٣) = $\frac{٤}{٥}$ × ٥ = [٤]

٢٩ إذا كان ق′(٠) = ٦ ، فجد $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٠)-ق(٥هـ)}{٢هـ}$

الحل:: بإخراج (−١) عامل مشترك .

= − $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٥هـ)-ق(٠)}{٢هـ}$ نفرض م = ٥هـ ، هـ = $\frac{م}{٥}$

= − $\lim_{م \to 0} \frac{ق(م)-ق(٠)}{\frac{٢}{٥}م}$

= − $\frac{٥}{٢}$ × ق′(٠) = − $\frac{٥}{٢}$ × ٦ = [−١٥]

٣٠ اثبت ان $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ)-ق(س-هـ)}{هـ}$ = ٢ق′(س)

الحل: بإضافة وطرح ق(س)

$\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$ + $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س)-ق(س-هـ)}{هـ}$

= ق′(س) + − $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س-هـ)-ق(س)}{هـ}$

ق′(س) − − ق′(س) = ٢ق′(س) .

٣١ اثبت ان $\lim_{ع \to س} \frac{ع ق(س)-س ق(ع)}{ع-س}$ = ق(س)−س ق′(س)

الحل:: بإضافة وطرح س ق(س)

$\lim_{ع \to س} \frac{ع ق(س)-س ق(س)}{ع-س}$ + $\lim_{ع \to س} \frac{س ق(س)-س ق(ع)}{ع-س}$

= $\lim_{ع \to س} \frac{ق(س)(ع-س)}{ع-س}$ + $\lim_{ع \to س} \frac{-س(ق(ع)-ق(س))}{ع-س}$

= ق(س) − س ق′(س)

٣٢ اثبت ان $\lim_{ع \to س} \frac{٣ع ق(ع)-٣س ق(س)}{ع-س}$

= ٣ق(س) + ٣س ق′(س) .

الحل:: بإضافة وطرح ٣س ق′(ع) .

= $\lim_{ع \to س} \frac{٣ع ق(ع)-٣س ق(ع)}{ع-س}$ + $\lim_{ع \to س} \frac{٣س ق(ع)-٣س ق(س)}{ع-س}$

= $\lim_{ع \to س} \frac{٣ق(ع)(ع-س)}{ع-س}$ + $\lim_{ع \to س} \frac{٣س(ق(ع)-ق(س))}{ع-س}$

= ٣ق(س) + ٣س ق′(س)

٣٣ إذا كان مقدار التغير في الاقتران
ق(س) يساوي (س٢ع − ع٢س)
جد ق′(س) يساوي

الحل:: ق′(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$ = $\lim_{ع \to س} \frac{س٢ع-ع٢س}{ع-س}$

= $\lim_{ع \to س} \frac{س ع(س-ع)}{ع-س}$ = − س٢

٣٤ إذا كان د(س) = س٢ × ق(س) فجد ق′(س)
باستخدام التعريف

الحل:: د′(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{د(ع)-د(س)}{ع-س}$

= $\lim_{ع \to س} \frac{ع٢ق(ع)-س٢ق(س)}{ع-س}$ اضافة وطرح

= $\lim_{ع \to س} \frac{ع٢ق(ع)-ع٢ق(س)}{ع-س}$ + $\lim_{ع \to س} \frac{ع٢ق(س)-س٢ق(س)}{ع-س}$

= $\lim_{ع \to س} \frac{ع٢(ق(ع)-ق(س))}{ع-س}$ + $\lim_{ع \to س} \frac{ق(س)(ع-س)(ع+س)}{ع-س}$

= س٢ ق′(س) + ٢ق(س) س

٣٥ صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام
جد معدل التغير في مساحة الصفيحة بالنسبة الى
طولها عندما يكون طولها يساوي ٢٠ سم .

الحل:: م = س٢ المطلوب $\frac{دم}{دس}$ عندما س = ٢٠

$\frac{دم}{دس}$ = $\lim_{هـ \to 0} \frac{م(٢٠+هـ)-م(٢٠)}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to 0} \frac{(٢٠+هـ)٢-٤٠٠}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{٤٠٠+٤٠هـ+هـ٢-٤٠٠}{هـ}$ = ٤٠ سم٢

قواعد الإشتقاق

القاعدة الاولى :-
مشتقة الثابت = صفر
ق(س) = جـ ⇐ ق'(س) = صفر
أمثلة :-
1) ق(س) = ٢ ⇐ ق'(س) = صفر .
2) ق(س) = $\frac{٣\sqrt{٤}}{٢}$ ⇐ ق'(س) = صفر .
3) ق(س) = جا ٣٠ ⇐ ق'(س) = صفر .

القاعدة الثانية :-
مشتقة ثابت × اقتران = الثابت × م. الاقتران
ق(س) = ٩ س ⇐ ق'(س) = ٩
أمثلة :-
1) ق(س) = ٢ س ⇐ ق'(س) = ٢ .
2) ق(س) = $\frac{٥}{٦}$ س ⇐ ق'(س) = $\frac{٥}{٦}$
3) ق(س) = $-\frac{٣\sqrt{٢}}{٤}$ س ⇐ ق'(س) = $-\frac{٣\sqrt{٢}}{٤}$

القاعدة الثالثة :-
مشتقة ق(س) = س^{ن} ⇐ ق'(س) = ن س$^{ن-١}$
امثلة :-
1) ق(س) = ٩ س^{٣} ⇐ ق'(س) = ٣ × ٩ س^{٢}
2) ق(س) = س^{٥} ⇐ ق'(س) = ٥ س^{٤}
3) ق(س) = س$^{-٣}$ ⇐ ق'(س) = -٣ س$^{-٤}$

القاعدة الرابعة :-
مشتقة ق(س) = ٩ س^{ن} ⇐ ق'(س) = ٩ × ن س$^{ن-١}$
امثلة :-
1) ق(س) = ٢ س^{٥} ⇐ ق'(س) = ١٠ س^{٤}
2) ق(س) = ٣ س$^{\frac{٦}{٥}}$ ⇐ ق'(س) = $\frac{٦}{٥}$ س$^{-\frac{٣}{٥}}$
3) ق(س) = ٢ س$^{\frac{٣}{٤}}$ ⇐ ق'(س) = $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٤}}$

القاعدة الخامسة :-
مشتقة الجمع والطرح نشتق كل اقتران على حدا
أمثلة :-
1) ق(س) = س^{٣} − ٥ س + ١ ⇐ ق'(س) = ٣ س^{٢} − ٥
2) ق(س) = س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٢ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٤ س$^{\frac{٣}{٥}}$ ⇐ ق'(س) = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٤}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ + $\frac{١٢}{٥}$ س$^{-\frac{٢}{٥}}$
3) ق(س) = ٣ س$^{\frac{١}{٤}}$ − ٢ س$^{\frac{٥}{٤}}$ + س^{٣}
ق'(س) = $\frac{١}{٤}$ س$^{-\frac{٥}{٤}}$ − $\frac{٥}{٤}$ س$^{\frac{١}{٤}}$ + ٣ س^{٢}

القاعدة السادسة :
مشتقة الضرب ق(س) = ف(س) × هـ(س)
ق'(س) = ف'(س) × هـ(س) + ف(س) × هـ'(س)
أمثلة :-
1) ق(س) = (٣ − ٢ س)(س^{٢} + ١) جد ق'(٢)
الحل :- ق'(س) = (−٢)(س^{٢} + ١) + (٣ − ٢ س)(٢ س)
ق'(٢) = (−٢)(٥) + (−١)(٤) = −١٤

2) ق(س) = ٢ هـ(س) × س^{٢} جد ق'(٢)
حيث هـ(٢) = ٥ ، ق(٢) = ٤
الحل :- ق'(س) = ٢ هـ'(س) × س^{٢} + ٤ س هـ(س)
ق'(٢) = ٢ × ٥ × ٤ + ٤ × ٢ × $\frac{١}{٢}$
= ٤٠ + ٤ = ٤٤
(ق(٢) = ٨ هـ(٢) ، ٤ = ٨ هـ'(٢) ، هـ'(٢) = $\frac{١}{٢}$)

القاعدة السابعة : م. القسمة .
1) اقتران ⇐ $\frac{\text{م.البسط} \times \text{المقام} - \text{م.المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^{٢}}$
2) $\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$ ⇐ $\frac{-\text{ثابت} \times \text{م.المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$
3) $\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$ ⇐ $\frac{\text{م.الاقتران}}{\text{الثابت}}$
أمثلة :-
1) ق(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ١٧}{\text{س} - ١}$
الحل :- ق'(س) = $\frac{٣\text{س}^{٢}(\text{س}-١) - (١)(\text{س}^{٣}+١٧)}{(\text{س}-١)^{٢}}$
2) ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{٥ - ٤\text{س}}$ جد ق'(٣)
الحل :- ق'(س) = $\frac{(٣\text{س}^{٢}+٣)(٥-٤\text{س}) - (-٤)(\text{س}^{٣}+٣\text{س})}{(٥-٤\text{س})^{٢}}$
ق'(٢) = $\frac{٥(٢٧ - ٣ + ٥٦)}{٩}$ = $\frac{١١}{٩}$
3) ق(س) = $\frac{-٢}{٢ - \text{س}}$ جد ق'(س)
الحل :- ق'(س) = $\frac{-٢ \times -١}{(٢ - \text{س})^{٢}}$ = $\frac{٢}{(٢-\text{س})^{٢}}$

٤ ق(س) = $\frac{(س-١)(س+٢)}{س^{٢}+٥}$ جد ق'(س)

٥ ق(س) = $\frac{س^{٤}-٢س^{٢}+١}{٧}$ ق'(س)

الحل:- ق'(س) = $\frac{٤س^{٣}-٤س}{٧}$

٦ ق(س) = $(\frac{س^{٢}-س}{٢})(\frac{س+١}{س-١})$ جد ق'(س)

٧ ق(س) = $\frac{س^{٢}-٣}{٣س+١} - \frac{٤}{س-١} + \frac{٢س^{٢}+٥}{٧}$

القاعدة الثامنة

مشتقة الاقترانات الاسية

أمثلة :-

١ ق(س) = $(س^{٢}+١)^{٣}$

الحل:- ق'(س) = $٣(س^{٢}+١)^{٢}(٢س)$

٢ ق(س) = $(س^{٢}-٣س+١)^{٤}$

ق'(س) = $٤(س^{٢}-٣س+١)^{٣}(٢س-٣)$

٣ ق(س) = $(س^{٣}-٤)^{\frac{٣}{٢}}$

الحل:- ق'(س) = $\frac{٣}{٢}(س^{٣}-٤)^{\frac{١}{٢}}(٣س^{٢})$

٤ ق(س) = $(\frac{س}{س+٣} - س)^{٦}$

الحل:- ق'(س) = $٦(\frac{س}{س+٣}-س)^{٥}(\frac{(س+٣)-س}{(س+٣)^{٢}}-١)$

٥ ق(س) = $(س^{٣}-١)(س^{٢}+س)^{٤}$

الحل:-

ق'(س) = $(س^{٣}-١)\times٤(س^{٢}+س)^{٣}(٢س+١)+(س^{٢}+١)٣س^{٢}$

٦ ق(س) = $(٣س^{٢}+٢)^{٥}$

الحل:-

ق'(س) = $٥(٣س^{٢}+٢)^{٤}(٦س)$

القاعدة التاسعة

مشتقة الجذور نجعلها ثم نشتق

أمثلة :

١ ق(س) = $\sqrt[٤]{(س^{٢}+١)^{٣}} = (س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٤}}$

ق'(س) = $\frac{٣}{٤}(س^{٢}+١)^{-\frac{١}{٤}}(٢س)$

٢ ق(س) = $س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٣}-١}$

الحل:- ق(س) = $س^{٢}\times(س^{٣}-١)^{\frac{١}{٣}}$

ق'(س) = $س^{٢}\times\frac{١}{٣}(س^{٣}-١)^{-\frac{٢}{٣}}(٣س^{٢})+٢س\times(س^{٣}-١)^{\frac{١}{٣}}$

٣ ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}-١}\times\sqrt[٥]{(٢س+١)^{٢}}$

ق(س) = $(س^{٢}-١)^{\frac{١}{٣}}\times(٢س+١)^{\frac{٢}{٥}}$

ق'(س) = $\frac{١}{٣}(س^{٢}-١)^{-\frac{٢}{٣}}(٢س)(٢س+١)^{\frac{٢}{٥}}+\frac{٢}{٥}(٢س+١)^{-\frac{٣}{٥}}(٢)\times(س^{٢}-١)^{\frac{١}{٣}}$

٤ ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٣}-٤س+١}$ جد ق'(٢)

الحل:- ق(س) = $(س^{٣}-٤س+١)^{\frac{١}{٣}}$

ق'(س) = $\frac{١}{٣}(س^{٣}-٤س+١)^{-\frac{٢}{٣}}(٣س^{٢}-٤)$

ق'(س) = $\frac{٣س^{٢}-٤}{٣\sqrt[٣]{(س^{٣}-٤س+١)^{٢}}}$

ق'(٢) = $\frac{١٢-٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$

* حالة خاصة بالجذر التربيعي فقط

ق(س) = $\sqrt{ل(س)}$ ⇐ ق'(س) = $\frac{ل'(س)}{٢\sqrt{ل(س)}}$

أمثلة

١ ق(س) = $\sqrt{٣س^{٢}+١}$ جد ق'(س)

الحل:-

ق'(س) = $\frac{٦س}{٢\sqrt{٣س^{٢}+١}}$

٢ ق(س) = $\sqrt{\frac{س}{س-١}}$ جد ق'(س)

الحل:- ق'(س) = $\frac{١+\frac{-٢\times٣س^{٢}}{(س^{٣}-١)^{٢}}}{٢\sqrt{\frac{س}{س^{٣}-١}}}$

٣ ق(س) = $\frac{٥}{٤}س^{٢} - \frac{١}{٧س}$ جد ق'(س)

الحل:- ق'(س) = $\frac{٥}{٢}س + \frac{\frac{١}{٧س^{٢}}}{(\frac{١}{٧س})^{٢}}$

٤ ق(س) = $\sqrt{\frac{س^{٢}-٢}{٥}}$ جد ق'(س)

الحل:-

ق'(س) = $\frac{٢س^{٢}}{٥}$ / $٢\sqrt{\frac{س^{٣}-٢}{٥}}$

القاعدة العاشرة
مشتقة الاقترانات الدائرية

[1] ق(س) = جا هـ(س) ⇐ قَ(س) = جتا هـ(س) × هَ(س)
[2] ق(س) = جتا هـ(س) ⇐ قَ(س) = − جا هـ(س) × هَ(س)
[3] ق(س) = ظا هـ(س) ⇐ قَ(س) = قا² هـ(س) × هَ(س)
[4] ق(س) = ظتا هـ(س) ⇐ قَ(س) = − قتا² هـ(س) × هَ(س)
[5] ق(س) = قا هـ(س) ⇐ قَ(س) = قا هـ(س) ظا هـ(س) × هَ(س)
[6] ق(س) = قتا هـ(س) ⇐ قَ(س) = − قتا هـ(س) ظتا هـ(س) × هَ(س)

أمثلة

[1] ص = ٢س − جاس فجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل: $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ − جتاس

[2] إذا كان ل(س) = ٦جاس − ٢س فجد لَ(π)

الحل: لَ(س) = ٦جتاس − ٢

لَ(π) = ٦جتا π − ٢ = −٦ − ٢ = −٨

[3] ق(س) = س جتاس فجد قَ(س)

الحل: قَ(س) = س جاس + جتاس

[4] إذا كان ق(س) = P جاس + ب جتاس، P، ب ∈ ح
أثبت أن قَ(س) + ق(س) = صفر .

الحل: قَ(س) = P جتاس − ب جاس
قَ(س) = − P جاس − ب جاس
نعوض قَ، قَ في المعادله
− P جاس − ب جاس − P جاس − ب جاس = صفر
صفر = صفر

[5] ق(س) = ٢جتا²س + ٣جاس فجد قَ(س)

الحل: قَ(س) = − ٤جتاس جاس + ٣جتاس

[6] ق(س) = ظتا ٤س فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = − قتا² ٤س × ٤

[7] ق(س) = قا $\frac{٤}{س}$ فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = قا($\frac{٤}{س}$) ظا($\frac{٤}{س}$) × ($\frac{-٤}{س^٢}$)

[8] ق(س) = (جا ٤س)(ظتا $\frac{س}{٣}$) فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = (جا ٤س)(−قتا² $\frac{س}{٣}$)($\frac{١}{٣}$) + (ظتا $\frac{س}{٣}$)(جتا ٤س)(٤)

[9] ق(س) = $\frac{قتاس}{٢ − ٣جاس}$ فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = $\frac{-قتاس ظتاس + ٣جتاس قتاس}{(٢ − ٣جاس)^٢}$

[10] ق(س) = $\sqrt[٣]{جتاس − ظا٣س}$ فجد قَ(س)

الحل: ق(س) = (جتاس − ظا٣س)$^{\frac{١}{٣}}$

قَ(س) = $\frac{١}{٣}$(جتاس − ظا٣س)$^{-\frac{٢}{٣}}$ (−جاس − ٣قا²٣س)

قَ(س) = $\frac{(-جاس − ٣قا^٢٣س)}{٣\sqrt[٣]{(جتاس − ظا٣س)^٢}}$

[11] ق(س) = جا π فجد قَ(س)

الحل: قَ(س) = صفر

[12] ق(س) = $\frac{١}{٣س^٢ − ٥جا٢س}$ فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = $\frac{-(٦س − ١٠جتا٢س)}{(٣س^٢ − ٥جا٢س)^٢}$

[13] ق(س) = قا(س)ظا(س) فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = قاس ظا²س + قاس قا²س

[14] ق(س) = س − ٤ قتاس + ٢ ظتاس فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = ١ + ٤ قتاس ظتاس − ٢قتا²س
= ١ + ٤ قتاس ظتاس − ٢قتا²س

[15] ق(س) = قتا $\sqrt{س}$ فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = − قتا $\sqrt{س}$ ظتا $\sqrt{س}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

[16] ق(س) = جا(ظاس) فجد قَ(س)

الحل:
قَ(س) = جتا(ظاس) × قا²س

ورقة عمل على المواضيع السابقة

[1] ق(س) = س³ - ٢س² + ١ جد ق'(٢)

٤

[2] ل(س) = (س⁵ - ٤س² + ١)³ جد ق'(١)

-٣٦

[3] ع(س) = ٣س² + ٥س جد ع'(٣)

٢٣

[4] إذا كان ق'(٢) = ٣ ، ق(٢) = ٤ ، هـ(٢) = ١
هـ'(٢) = -٢ جد ما يلي
أ- (٢ق - ٣هـ + ٧)'(٢)

+٣

ب- (ق . هـ)'(٢)

-٢

جـ- (ق(٢) . هـ(٢))'

∴

د- (ق/هـ)'(٢)

ه

هـ- (ق(٢)/هـ(٢))'

∴

و- (ق(٢)/هـ)'(٢)

-١

[5] ق(س) × هـ(س) = ٢ ، ق(١) = ٢ ، هـ(١) = ٤
جد ق'(١)

-٨

[6] جد د/دس (٣س + ٢س² - ٥) | عند س = ١

٢

[7] ق(س) = ٢س³ / هـ(س) ، ق(١) = ٢ ، هـ(١) = ٢
جد ق'(١)

٢

[8] إذا كان هـ(س) = √(س³ - ٤س + ١) ، ق(٢) = ٢
ق'(١) = -١ ، وكان ل(س) = هـ(س) × ق(س)
جد ل'(س)

١١

[9] ق(س) = ٩س² + ٦س جد قيمة الثابت
٩ حيث العدد (-١) جذراً للمشتقة الاولى

٩=-٢

[10] ق(س) = ((س² - س)/٢)((س + ١)/(س - ١)) جد ق'(٢)

[11] ق(س) = (س - ١)(س + ٢) / (س² + ٥) جد ق'(س)

[12] ق(س) = م(س) × هـ(س) × د(س) جد ق'(س)

[13] ق(س) = √(س² + ٢س + ١) ، هـ(٣) = -٢
هـ'(٢) = ١ وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س)
جد ل'(س)

١

[14] ق(س) = س³ جا س جتا س ، جد ق'(س)

[15] ق(س) = جا²س + جتا²س جد ق'(س)

[16] إذا كان هـ(س) = ⁵√(س³ - ٤س + ١) ، ق(٢) = ٣
ق'(٢) = -١ وكان ل(س) = هـ(س) × ق(س)
جد ل'(س)

١٩/٥

[17] ق(س) = -٢ / ⁵√(٤ - س) جد ق'(٣)

-٤/٥

[18] بإستخدام تعريف المشتقة جد ق'(س)
إذا كان ق(س) = √(٢س + ٣) حيث س > -١/٢

[19] ص = جا(س² - س) جد دص/دس

[20] إذا كان ق(س) = س - √س جد ق'(٤)
بإستخدام التعريف

[21] إذا كان ق(س) = ³√(س⁴ - ٨س - ١) ، هـ'(-١) = ٣
هـ(-١) = ٢ وكان د(س) = هـ(س)/ق(س)
جد د'(-١).

مشتقة الإقترانات المتشعبة

بإستخدام قواعد الإشتقاق

خطوات الحل:-

أ- نعيد تعريف الاقتران المطلق وأكبر عدد صحيح

ب- نبحث في الإتصال

جـ- نشتق كل قاعده على حدا .

د- نستبعد المساواه بعد الإشتقاق

هـ- عند التحول نبحث الإشتقاق حيث

$ق'^+ = ق'^-$

ملاحظة: المشتقة عند الاطراف غير موجودة

أمثلة

١ $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 5 ، & 1 \leq س < 3 \\ 6س - 4 ، & 3 \leq س \leq 6 \end{cases}$

جد $ق'(س)$

الحل:-

$ق'(س) = \begin{cases} 2س ، & 1 < س < 3 \\ 6 ، & 3 < س < 6 \\ 6 ، & س = 3 \\ غ.م ، & س = 1 ، س = 6 \end{cases}$

بحث الاتصال

نهاق = قا(3)

$س \to 3^+ ، س \to 3^-$

$14 = 14$

متصل عند $س = 3$

$ق'^+(3) = 6$

$ق'^-(3) = 6$

٢ $ق(س) = |س - 3|$ جد $ق'(0)$ ، $ق'(3)$ ، $ق'(5)$

الحل:- نعيد

$س$	3	$3-س$
	$-$ 0 $+$	
$3-س$	$+$ 0 $-$	
$|س-3|$	$-$ 0 $+$	

$ق(س) = \begin{cases} 3 - س ، & س \leq 3 \\ س - 3 ، & س > 3 \end{cases}$

الاتصال: متصل

$ق'(س) = \begin{cases} -1 ، & س < 3 \\ 1 ، & س > 3 \\ غ.م ، & س = 3 \end{cases}$

$ق'(2)^+ = 1$

$ق'(3)^- = -1$

$ق'(3)^+ \neq ق'(2)^-$

$ق'(0) = -1$ نقطة عادية

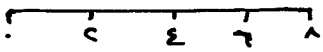
$ق'(5) = 1$ " "

٣ $ق(س) = |س^2 - 4| + س$ جد $ق'(س)$

٤ $ق(س) = س^2 + |3س - 12|$ جد $ق'(5)$ ، $ق'(4)$

٥ ليكن $ق(س) = [\frac{1}{2}س - 1]$ ابحث قابلية للاشتقاق عند $س = 1$ ، $س = 4$

الحل:- نعيد التعريف



$ق(س) = \begin{cases} -1 ، & 0 \leq س < 2 \\ 0 ، & 2 \leq س < 4 \\ 1 ، & 4 \leq س < 6 \end{cases}$ غ متصل عند $س = 4$

$ق'(س) = \begin{cases} 0 ، & 0 < س < 2 \\ 0 ، & 2 < س < 4 \\ 0 ، & 4 < س < 6 \\ غ.م ، & س = 0 ، 2 ، 4 ، 6 \end{cases}$

$ق'(1) = 0$ نقطة عادية

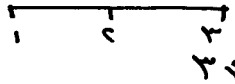
$ق'(4) = غ.م$

٦ $ق(س) = \begin{cases} |س - 3| ، & س < 3 \\ [س] ، & 1 < س < 3 \\ س^2 ، & س \leq 1 \end{cases}$ جد $ق'(س)$

الحل:- $|س - 3|$

$[س]$

$س$	3	$3-س$
	$-$ 0 $+$	
$3-س$	$+$ 0 $-$	
$|س-3|$	$-$ 0 $+$	



$ق(س) = \begin{cases} س - 3 ، & س < 3 \\ 1 ، & 1 < س < 2 \\ 2 ، & 2 \leq س < 3 \\ س^2 ، & س \leq 1 \end{cases}$

الإتصال متصل عند $س = 1$

غ متصل عند $س = 2$ ، $س = 3$

$ق'(س) = \begin{cases} 1 ، & س < 3 \\ 0 ، & 1 < س < 2 \\ 0 ، & 2 < س < 3 \\ 2س ، & س \leq 1 \\ غ.م ، & س = 1 ، 2 ، 3 \end{cases}$

$ق'(1)^+ = 0$

$ق'(1)^- = 2$ غير قابل للإشتقاق

٧ $ق(س) = س[س + 1]$ جد $ق'(0)$

٨ $ق(س) = س^2 |س - 1|$ جد $ق'(2)$

٩ ق(س) = ٢س^{٣} - [٢س] جد ق$'$(٠٫٦)

الحل :- نفرض [١٫٢] = ١

ق(س) = ٢س^{٣} - ١

ق$'$(س) = ٦س^{٢} ⇐ ق$'$(٠٫٦) = ٦ × ٠٫٣٦ = ٢٫١٦

١٠ ق(س) = س^{٢} + [س + ١] ، جد ق$'$(٣)

الحل :- نفرض [٤] صحيح

ق$'$(٣)$^{+}$ = ٢س + ٤ = ١٠

ق$'$(٣)$^{-}$ = ٢س + ٣ = ٩ ق$'$(٣) غ م

١١ ق(س) = |٤ - س^{٢}| ، جد ق$'$(١)

الحل القاعدة الموجبة

ق(س) = ٤ - س^{٢}

ق$'$(س) = -٢س ⇐ ق$'$(١) = -٢ × ١ = -٢

١٢ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} - ب س & ، س \geq ٢ \\ ٤ - ب س^{٣} + أس & ، س < ٢ \end{cases}$

جد قيمة أ ، ب اللذان يجعلان ق(٢) موجودة

الحل :- يلزم معادلتين لايجاد المجهولين

المعادلة الاولى من الإتصال

نها$_{س \to ٢^{+}}$ ٤ - ب س^{٣} + أس = نها$_{س \to ٢^{-}}$ أس^{٢} - ب س = ق(٢)

٤ - ٨ب + ٢أ = ٤أ - ٢ب

أ + ٣ب = ٢ ← ①

المعادلة الثانية من الاشتقاق

ق$'$(٢)$^{+}$ = ق$'$(٢)$^{-}$

-١٢ب + أ = ٤أ - ب

٣أ + ١١ب = ٠ ← ②

بحل المعادلة أ = ١١ ، ب = -٣

١٣ ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ٤ & ، س < ٢ \\ ب س + ٥ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ جد قيمة أ ، ب

علماً بأن ق$'$(٢) موجودة

أ = $\frac{١}{٤}$

ب = -١

١٤ ق(س) = $\begin{cases} أس^{٣} + ب & ، س < ١ \\ جس^{٢} + ٤ & ، س > ١ \\ ٦س & ، س = ١ \end{cases}$

جد قيم أ ، ب ، جـ التي تجعل ق$'$(١) موجودة

الحل :-

من الاتصال نها$_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = نها$_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ق(١)

أ + ب = جـ + ٤ = ٦

أ + ب = ٦ ← ① جـ = ٢

من الاشتقاق

ق$'$(١)$^{+}$ = ق$'$(١)$^{-}$

٣أ = ٢جـ

أ = $\frac{٤}{٣}$

$\frac{٤}{٣}$ + ب = ٦ ⇐ أ + ب = ٦

ب = ٦ - $\frac{٤}{٣}$

ب = $\frac{١٤}{٣}$

١٥ إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = جـ اثبت ان ق(س) متصل عند س = جـ .

البرهان

ق$'$(جـ) = موجودة ⇐ ق(جـ) موجودة

ق(س) - ق(جـ) = ق(س) - ق(جـ) × $\frac{س - جـ}{س - جـ}$

ق(س) - ق(جـ) = $\frac{ق(س) - ق(جـ)}{س - جـ}$ × (س - جـ)

ندخل النهاية

نها$_{س \to جـ}$ ق(س) - ق(جـ) = نها$_{س \to جـ}$ $\frac{ق(س) - ق(جـ)}{س - جـ}$ × (س - جـ)

= نها$_{س \to جـ}$ $\frac{ق(س) - ق(جـ)}{س - جـ}$ × نها$_{س \to جـ}$ (س - جـ)

نها$_{س \to جـ}$ ق(س) - ق(جـ) = ق$'$(جـ) صفر

نها$_{س \to جـ}$ ق(س) - ق(جـ) = صفر

نها$_{س \to جـ}$ ق(س) = ق(جـ)

قاعدة السلسلة :

نستخدم هذه القاعدة اذا كان لدينا معادلتين والمطلوب مشتقة تربط بينهما

ص بدلالة ع ، ع بدلالة س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

خطوات الحل
١- نشتق ص بالنسبة لـ ع
٢- ~ ع بالنسبة لـ س
٣- نطبق في القانون
٤- نعوض بدلاً من ع بدلالة س

أمثلة :-

[١] ص = ٥ع^{٢} ، ع = س^{٢} - ١ جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :- ص ← ع ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = ١٠ع \times ٢س = ١٠(س^{٢}-١) \times ٢س$$

[٢] ص = ع^{٧} ، ع = (س^{٢} + ١) جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :- ص ← ع ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٧ع^{٦} \times ٢س$$

$$= ٧(س^{٢}+١)^{٦} \times ٢س = ١٤س(س^{٢}+١)^{٦}$$

[٣] ص = $\frac{٢}{ل - ١}$ ، ل = س^{٢} + س - ١ جد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٢}$

الحل :-

ص ← ل ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$$

$$= \frac{٢}{(ل-١)^{٢}} \times ٢س + ١$$

$$= \frac{٢}{(س^{٢}+س-٢)^{٢}} \times ٢س + ١$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{(٦-٢)^{٢}} \times (٢ \times ٢ + ١) = \frac{٢}{١٦} \times ٥ = \frac{٥}{٨}$$

[٤] ص = ع^{٣} ، $\frac{د س}{د ع}$ = ٥ جد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{ع=٢}$

الحل :- ص ← ع ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$= ٧ع^{٢} \times \frac{١}{٥}$$

$$= \frac{١٢}{٥}$$

[٥] $\frac{د ص}{د ع}$ = ٥ ، $\frac{د ل}{د ع}$ = ٤ ، $\frac{د س}{د ل}$ = ١ ، جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :- ص ← ع ← ل ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٥ \times ٤ \times ١ = ٢٠$$

[٦] ص = ٢ن^{٤} + ٤ن ، س = ن^{٣} - ٤ن^{٢} + ١

جد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{ن=١}$ ؟

الحل :- ص ← ن ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = (٨ن^{٣}+٤) \times \frac{١}{٣ن^{٢}-٨ن}$$

$$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{ن=١} = ١٢ \times \frac{١}{-٥} = \frac{-١٢}{٥}$$

[٧] ص = ظا ع ، ع = ٣س^{٢} + ١ جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :- ص ← ع ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \text{قا}^{٢}ع \times ٦س$$

$$= \text{قا}^{٢}(٣س^{٢}+١) \times ٦س$$

[٨] ص = جتا ن ، س = جا ن ، جد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{١}{٤}}$

الحل :- ص ← ن ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = -جا ن \times \frac{١}{جتا ن}$$

$$= \frac{-\frac{١}{٤}}{\frac{\sqrt{١٥}}{٤}} = \frac{-١}{\sqrt{١٥}}$$

جا ن = $\frac{١}{٤}$
جتا^{٢} ن + جا^{٢} ن = ١
جتا^{٢} ن + $\frac{١}{١٦}$ = ١
جتا ن = $\frac{\sqrt{١٥}}{٤}$

[٩] ص = جا ن ، جتا ن = س جد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{ن=\frac{\pi}{٣}}$

الحل :- ص ← ن ← س

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = جتا ن \times \frac{-١}{جا ن}$$

$$= \frac{-\frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$$

قاعدة المركب والتركيب

$(ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س))$

إذا كان $ق(س) = 2س^2$ ، $هـ(س) = \sqrt{س}$

جد $(ق \circ هـ)(س)$ ، $(هـ \circ ق)(س)$.

الحل:

$(ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س)) = ق(\sqrt{س})$

$= 2(\sqrt{س})^2$

$= 2س$

$(هـ \circ ق)(س) = هـ(ق(س)) = هـ(2س^2)$

$= \sqrt{2س^2}$

الإشتقاق

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) هـ'(س)$

$(هـ \circ ق)'(س) = هـ'(ق(س)) ق'(س)$

أمثلة

[1] $ق(س) = 2س^2 - 3$ ، $هـ(س) = \frac{2س}{س - 2}$

جد $(ق \circ هـ)'(س)$ ، $(هـ \circ ق)'(س)$

الحل:-

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= ق'(-2) \times -4$

$= -8 \times -4 = 32$

$هـ(1) = -2$

$هـ'(س) = \frac{2(س-2) - 2س}{(س-2)^2} = \frac{-4}{(س-2)^2}$

$هـ'(1) = -4$

$ق'(س) = 4س$

$ق'(1) = -1$

$(هـ \circ ق)'(س) = هـ'(ق(س)) \times ق'(س)$

$= هـ'(-1) \times 4$

$= \frac{-4}{9} \times 4 = \frac{-16}{9}$

[2] $ق(س) = 2س^2$ ، $هـ(س) = س^3$ جد $(ق \circ هـ)'(1)$

الحل:-

$(ق \circ هـ)'(1) = ق'(هـ(1)) \times هـ'(1)$

$= ق'(1) \times 3$

$= 4 \times 3 = 12$

$هـ(1) = 1$

$هـ'(س) = 3س^2$

$هـ'(1) = 3$

$ق'(س) = 4س$

[3] $ق(س) = \frac{2}{س}$ ، $هـ(س) = س^2$ جد $(ق \circ هـ)'(1)$

[-4]

[4] $ق(س) = ظا س$ ، $هـ(س) = \frac{1}{2س + 1}$

جد $(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{4})$.

الحل:-

$(هـ \circ ق)'(س) = هـ'(ق(س)) \times ق'(س)$

$= هـ'(1) \times 2$

$= \frac{-2}{9} \times 2 = \frac{-4}{9}$

$ق(\frac{\pi}{4}) = 1$

$ق'(س) = قا^2 س$

$ق'(س) = 2$

$هـ'(س) = \frac{-2}{(2س+1)^2}$

[5] $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $هـ(س) = س^2$ $(ق \circ هـ)'(1)$

[1]

[6] إذا كان $ق(س) = 2ظا س$ ، $هـ(س) = \frac{P}{2س + 1}$

وكان $(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{4}) = \frac{8}{25}$ جد قيمة P .

الحل:-

$هـ'(ق(\frac{\pi}{4})) \times ق'(\frac{\pi}{4}) = \frac{8}{25}$

$هـ'(2) \times 4 = \frac{8}{25}$

$\frac{-2P \times 4}{25} = \frac{8}{25}$

$ق(\frac{\pi}{4}) = 2$

$ق'(س) = 2 قا^2 س$

$ق'(\frac{\pi}{4}) = 4$

$هـ'(س) = \frac{-2P}{(2س+1)^2}$

$-P = 1 \Leftarrow P = -1$

[7] $ق(س) = \frac{8س}{س^2 + 1}$ ، $هـ(س) = قا س$ جد $(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{3})$

$\frac{-48}{25}$

[8] إذا كان $ق(س) = س^2 + 5$ ، $هـ(س) = \frac{1}{س}$

جد $(ق \circ هـ)(1)$

[-2]

[9] إذا كان $ق(10) = -2$ ، $ق'(10) = 2$ ، $هـ(-2) = \frac{1}{2}$

$(هـ \circ ق)'(10)$.

[1]

المركب

[1] $\frac{د}{دس}(ق(س^2)) = ق'(س^2) \times 2س$

[2] $\frac{د}{دس}(ق(س^3 - 2س + 1))$
$= ق'(س^3 - 2س + 1) \times (3س^2 - 2)$

[3] $\frac{د}{دس}(ق(جتا 2س^2))$
$= ق'(جتا 2س^2) \times -جا 2س^2 \times 4س$

[4] اذا كان $ق(3س) = 3س^2 - 4س$ جد $ق'(6)$
الحل:-

$ق'(3س) \times 3 = 6س - 4$	$3س = 6$
$ق'(6) \times 3 = 6 \times 2 - 4$	$س = 2$
$ق'(6) = \frac{8}{3}$	

[5] $ق(س^2) = (3س - 1)^2$ جد $ق'(4)$ حيث $س > 0$.
الحل:-

$ق'(س^2) \times 2س = 2(3س - 1)(3)$	$س^2 = 4$
$ق'(4) \times -4 = 2 \times 7 - 2 \times 3$	$س = \pm 2$
$ق'(4) = \frac{+12}{2}$	

[6] $ص = ق(ق(2س + 1))$ جد $\frac{دص}{دس}|_{س=1}$
حيث $ق(3) = 5$ ، $ق'(3) = -2$ ، $ق'(5) = -1$
الحل:-
$\frac{دص}{دس} = ق'(ق(2س + 1)) \times ق'(2س + 1) \times 2$
$|_{س=1} = ق'(ق(3)) \times ق'(3) \times 2$
$= ق'(5) \times -2 \times 2 = -(-1) \times 2 \times 2 = 4$

[7] اذا كان $ص = ق(س^3 + س)$ وكانت $ق'(-10) = 7$
فجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -2$
[91]

[8] إذا كان $ق(س^3) = \frac{1}{س}$ جد $ق'(8)$
$\frac{-1}{48}$

[9] اذا كان $ص = ق(س^2 + 2س)$ ، $ق'(3) = 5$
فجد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = 1$
[20]

الإشتقاق الضمني

نميز الصريح من الضمني بحيث الصريح تكون ص لوحدها اما في الضمني يكون هناك تداخل بين قيم ص ، س .

خطوات الحل

نشتق ← نحوض ← نجعل $\frac{دص}{دس}$ لوحدها

أمثلة

[1] $ص^2 + 3س^2 = 2س + 1$ جد $\frac{دص}{دس}(1,2)$
$2ص \frac{دص}{دس} + 6س = 2$
$\frac{2ص}{2ص} \frac{دص}{دس} = \frac{2 - 6س}{2ص}$
$\frac{دص}{دس} = \frac{2 - 6 \times 2}{2 \times 1} = \frac{-16}{2} = -8$

[2] $سص + ص = 4$ جد $\frac{دص}{دس}$
الحل:-
$س \times \frac{دص}{دس} + ص \times 1 + \frac{دص}{دس} = 0$
$س \times \frac{دص}{دس} + \frac{دص}{دس} = -ص$
$\frac{دص}{دس}(س + 1) = -ص$
$\frac{دص}{دس} = \frac{-ص}{(س+1)}$

[3] $س^2 + سص = ص^2 + 1$ جد $\frac{دص}{دس}(2,2)$
الحل:-
$2س + س \frac{دص}{دس} + ص = 2ص \frac{دص}{دس}$
$4 + 2 \frac{دص}{دس} + 2 = 4 \frac{دص}{دس}$
$6 = 2 \frac{دص}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 3$

[4] $ص^2 + 3ص - 4س^3 = 5س + 1$ جد $\frac{دص}{دس}|_{(1,7)}$
[1]

[5] $\sqrt{ص} + \sqrt{س} = 5$ جد $\frac{دص}{دس}$
الحل: $\frac{دص}{دس} \frac{1}{2\sqrt{ص}} + \frac{1}{2\sqrt{س}} = 0$
$\frac{دص}{دس} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

١٧ إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{و(س) - ٩}{س - ٣} = ٤$

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{و(س) - س^٢}{س - ٣}$

الحل:- نقارن المطلوب بالمعطيات نلاحظ يجب إضافة وطرح (٩)

$$\lim_{س \to ٣} \frac{و(س) - ٩ + ٩ - س^٢}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{و(س) - ٩}{س - ٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{٩ - س^٢}{س - ٣}$$

$$٤ + \lim_{س \to ٣} \frac{(٣ - س)(٣ + س)}{(س - ٣)}$$

$$٤ + ٦ - = ٢ -$$

١٨ إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{و(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ وكانت

$\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{و(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$ جد قيمة ب

الحل:-

نقارن المطلوب بالمعطيات نلاحظ يجب قسمة البسط والمقام على س - ١

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{و(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{و(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{و(س) - ٦}$$

$$\frac{٤}{٨} + ب = \frac{٣}{٢}$$

$$ب = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} = ١$$

١٩ إذا كان هـ إقتران كثير حدود وكانت

$\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$ ، وكانت

$\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥ + ٣ب) = ٢$ فجد قيمة ب

الحل:- بما أن تعويض المقام = صفر

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) + ٥ = ٠ \Leftarrow \lim_{س \to ٠} هـ(س) = -٥$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) - ٥ + ٣ب = ٢$

$-٥ - ٥ + ٣ب = ٢ \Leftarrow ب = ٤$

٢٠ إذا كانت $\lim_{س \to -٢} \frac{و(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$

فجد $\lim_{س \to -٢} (و(س) + ٢س)$

الحل:- بما أن تعويض المقام = صفر

$\therefore \lim_{س \to -٢} و(س) + ٥ = ٠ \Leftarrow \lim_{س \to -٢} و(س) = -٥$

$= \lim_{س \to -٢} و(س) + ٢س = -٥ + ٢ \times -٢ = -٩$

٢١ اذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$

فجد $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥)$.

تدريب

٢٢ إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أ س^٢ + ب س + ٢}{س - ١} = ١$

فجد قيمة أ ، ب .

الحل:- من تصفير البسط

$\lim_{س \to ١} أ س^٢ + ٢ب س + ٢ = ٠$

$أ + ٢ب = -٢$

$أ = -٢ - ٢ب$

$\lim_{س \to ١} \frac{(-٢ - ٢ب) س^٢ + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$

$\lim_{س \to ١} \frac{-٢ س^٢ - ٢ب س^٢ + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$

$\lim_{س \to ١} \frac{-٢ س^٢ + ٢}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{-٢ب س^٢ + ٢ب س}{س - ١} = ١$

$\lim_{س \to ١} \frac{-٢(س - ١)(س + ١)}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{-٢ب س(س - ١)}{س - ١} = ١$

$-٤ + -٢ب = ١$

$٢ب = -٤ - ١$

$ب = -\frac{٥}{٢}$

٥ إذا كان ص = ن^{٤} ، س = ٣ن فجد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$

الحل:- ص ← ن ← س

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = ٤ن^{٣} \times \frac{١}{٣}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٤ن^{٢} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٤ن^{٢} \times \frac{١}{٣}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{٤}{٣} \times (\frac{س}{٣})^{٢} = \frac{٤}{٢٧} س^{٢}$

$\frac{دص}{دن} = ٤ن^{٣}$

$\frac{دس}{دن} = ٣$

$\frac{دن}{دس} = \frac{١}{٣}$

٦ إذا كان س = جا٢ن ، ص = جتا٢ن فجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ إن ن = $\frac{\pi}{٤}$

الحل:- ص ← ن ← س

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= -٢جا٢ن \times \frac{١}{٢جتا٢ن}$

$\frac{دص}{دس} = -ظا٢ن$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -٢قا^{٢}٢ن \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -٢قا^{٢}٢ن \times \frac{١}{٢جتا٢ن}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{-١}{جتا^{٣}٢ن}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}|_{ن=\frac{\pi}{٤}} = \frac{-١}{جتا^{٣}٢ \times \frac{\pi}{٤}} = \frac{-١}{-١} = ١$

$\frac{دص}{دن} = -٢جا٢ن$

$\frac{دس}{دن} = ٢جتا٢ن$

$\frac{دن}{دس} = \frac{١}{٢جتا٢ن}$

٧ ص = ن^{٢} - $\frac{١}{٣}$ن ، س = $\frac{١}{٢}$ن^{٢} - ٢ن فجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}|_{ن=٤}$

الحل:-

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= (٢ن - \frac{١}{٣}) \times \frac{١}{ن - ٢}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{(٢ \times \frac{دن}{دس})(ن-٢) - (\frac{دن}{دس})(٢ن - \frac{١}{٣})}{(ن-٢)^{٢}}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{(٢ \times \frac{١}{٤})(٤) - \frac{١}{٤}(٢ \times ٤ - \frac{١}{٣})}{٤^{٢}}$

$= \frac{٢ - \frac{٣٥}{١٢}}{١٦} = \frac{\frac{-١١}{١٢}}{١٦} = \frac{-٤٤}{٣}$

$\frac{دص}{دن} = ٢ن - \frac{١}{٣}$

$\frac{دس}{دن} = ن - ٢$

$\frac{دن}{دس} = \frac{١}{ن-٢}$

٨ ص = ن^{٣} + ٢ن ، $\frac{دس}{دن}$ = ٤ن فجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ إن = ١

$\frac{١}{١٦}$

٩ ق(س) = س^{٢} ، هـ(٣) = ٣ ، هَ(٣) = -٢

هَ(٢) = ٥ فاحسب قيمة (قهـ)َ(٢)

الحل:- قَ(س) = ٢س ، قَ(س) = ٢

(قهـ)َ(٢) = (قَ(هـ(س)) × هَ(س))َ

= قَ(هـ(٢))(هَ(٣))^{٢} + هَ(٢) × قَ(هـ(٢))

= قَ(٣) × (-٢)^{٢} + ٥ × قَ(٣)

= ٢ × ٤ + ٥ × ٦ = ٣٨

١٠ ق(س) = س^{٣} ، هـ(س) = س^{٢} فجد

(قهـ)َ(١)

الحل:-

(قهـ)َ(١) = قَ(هـ(١)) × هَ(١)

= قَ(١) × ٢

= ٦ × ٢ = ١٢

قَ(س) = ٣س^{٢}

قَ(س) = ٦س

هَ(س) = ٢س

١١ ق(س) = جا٣س^{٢} فجد قَ(س)

الحل:-

قَ(س) = جتا٣س^{٢} × ٦س ضرب

قَ(س) = جتا٣س^{٢} × ٦س + ٦س × -جا٣س^{٢} × ٦س

١٢ ص = ظا س فجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}|_{س=\frac{\pi}{٤}}$

١٦

١٣ ق(س^{٣}) = ٢س^{٥} فجد قَ(٨)

الحل:-

قَ(س^{٣}) × ٣س^{٢} = ١٠ س^{٤}

قَ(س^{٣}) = $\frac{١٠ س^{٢}}{٣}$

قَ(س^{٣}) × ٣س^{٢} = $\frac{٢٠ س^{٢}}{٣}$

قَ(٨) × ٣ × ٤ = $\frac{٢٠ \times ٢}{٣}$

قَ(٨) = $\frac{١٠}{٩}$

س^{٣} = ٨

س = ٢

١٤ ص = جتا (س-م) فجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ حيث م عدد ثابت

الحل:-

$\frac{دص}{دس}$ = -جا(س-م)

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = -جتا(س-م)

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = -ص

١٥ جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ للعلاقة $س^3 + ص^3 - 4 س ص = 64$ عند النقطة $(4، 0)$

١٠

١٦ $ق(س) = (س^2 + س)|س|$ جد $ق''(س)$

الحل:- نعيد التعريف

$ق(س) =$	$س^3 + س^2$ ، $س \geq 0$	الاتصال عند $س = 0$ متصل
	$-س^3 - س^2$ ، $س < 0$	

$ق'(س) =$	$3س^2 + 2س$ ، $س > 0$	$ق'(0)^+ = ق'(0)^-$
	$-3س^2 - 2س$ ، $س < 0$	$0 = 0$
	صفر ، $س = 0$	

$ق''(س) =$	$6س + 2$ ، $س > 0$	$ق''(0)^+ = 2$
	$-6س - 2$ ، $س < 0$	$ق''(0)^- = -2$
	غ م ، $س = 0$	$ق''(0) =$ غ م

١٧ $ص = ق^2 س$ جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$

١٨ $ق(س) = جا س^3$ جد $ق''(س)$

١٩ $ق(س) = س^3 - 2س$ ، $هـ(س) = س^2$ جد

١ $(ق \circ هـ)'(1)$

٢ $(هـ \circ ق)'(1)$

٣ $(ق \circ هـ)''(1)$

٤ $(هـ \circ ق)''(1)$

الإثباتات

خطوات الحل

١ نرتب ، نحول القسمة الى ضرب

٢ نجد المشتقات الموجودة في السؤال

٣ نفكر في الاختصار او اخراج عامل مشترك او متطابقة

أمثلة

١ إذا كان $ص = ظا س + \frac{1}{3} ظا^3 س$ اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = ق^4 س$

الحل:- $\frac{د ص}{د س} = ق^2 س + ظا^2 س ق^2 س$ ← اخراج مشترك

$\frac{د ص}{د س} = ق^2 س (1 + ظا^2 س)$ ← متطابقة

$\frac{د ص}{د س} = ق^2 س \times ق^2 س$

$\frac{د ص}{د س} = ق^4 س$

٢ اذا كان $س = ظا ص$ اثبت ان $ص'' (1 + س^2) = -جا 2ص$

الحل:- نشتق

$1 = ق^2 ص \frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{ق^2 ص} = جتا^2 ص$

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = -2 جتا ص جا ص \times \frac{د ص}{د س}$

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = -2 جا ص \times جتا^2 ص$

$\frac{ص''}{جتا^2 ص} = -2 جا ص$

$ص'' ق^2 ص = -2 جا ص$

$ص'' (1 + س^2) = -2 جا ص$

على الاصل دور

$س = ظا ص$

$س^2 = ظا^2 ص$

$س^2 + 1 = ظا^2 ص + 1$

$س^2 + 1 = ق^2 ص$

٣ إذا كان ص س = جا س فأثبت أن
س ص‴ + ٢ ص″ + س ص = صفر

الحل:- ص × ١ + س $\frac{د ص}{د س}$ = جتا س

ص + س ص′ = جتا س
ص′ + س ص″ + ص′ × ١ = − جا س
س ص″ + ٢ ص′ = − جا س ← من الأصل
س ص″ + ٢ ص′ = − ص س
س ص″ + ٢ ص′ + س ص = صفر

٤ إذا كان س = جا ص فأثبت أن ص″ = ظا ص قا ص

الحل:-
١ = جتا ص ص′ بالقسمة على جتا ص
$\frac{١}{جتا ص}$ = ص′

ص′ = قا ص
ص″ = قا ص ظا ص ص′
ص″ = قا ص ظا ص قا ص
ص″ = قا² ص ظا ص

٥ إذا علمت أن ص = س ظا س اثبت أن
ص″ = ٢ ص قا س + ٢ قا² س

الحل:- ص′ = س قا² س + ظا س
ص″ = ٢ س قا² س ظا س + قا² س + قا² س
ص″ = ٢ س ظا س قا² س + ٢ قا² س
ص″ = ٢ ص قا² س + ٢ قا² س

٦ ص = $\sqrt{أ س + ص}$ اثبت أن ص″ (٢ ص − ١)³ = − ٢

الحل:- بتربيع الطرفين

ص² = س + ص
٢ ص ص′ = ١ + ص′
٢ ص ص′ − ص′ = ١
ص′ (٢ ص − ١) = ١

ص′ = $\frac{١}{٢ ص − ١}$

ص″ = $\frac{− ٢ ص′}{(٢ ص − ١)^{٢}}$ ← ص″ = $\frac{− ٢ \times \frac{١}{٢ ص − ١}}{(٢ ص − ١)^{٢}}$

ص″ = $\frac{− ٢}{(٢ ص − ١)^{٣}}$

ص″ (٢ ص − ١)³ = − ٢

٧ إذا كان ص − س ص = جا س اثبت أن
ص″ + ص = $\frac{٢ ص′}{١ − س}$

٨ إذا كان ص − س = جتا ص اثبت أن
(ص′)² = − ص″ (قا ص + ظا ص)

الحل:- ص′ − ١ = − جا ص ص′
ص′ + جا ص × ص′ = ١
ص′ (١ + جا ص) = ١
ص″ (١ + جا ص) + ص′ (جتا ص × ص′) = ٠
ص″ + ص″ جا ص + ص′² جتا ص = ٠ بالقسمة على جتا ص
$\frac{ص″}{جتا ص}$ + $\frac{ص″ جا ص}{جتا ص}$ + (ص′)² $\frac{جتا ص}{جتا ص}$ = ٠
ص″ قا ص + ص″ ظا ص + (ص′)² = ٠
ص″ (قا ص + ظا ص) + (ص′)² = ٠
(ص′)² = − ص″ (قا ص + ظا ص)

٩ إذا كان ص = $\frac{جا س}{س}$ اثبت أن

س ص″ + ٢ ص′ = − جا س

الحل:- بالضرب التبادلي
س ص = جا س
ص′ س + ص = جتا س
ص″ س + ص′ + ص′ = − جا س
ص″ س + ٢ ص′ = − جا س

١٠ ص = $\sqrt{٤ + ٣ جا س}$ اثبت أن ٢ ص ص″ + (ص′)² = ٤

الحل: بتربيع الطرفين

ص² = ٤ + ٣ جا س ← ٣ جا س = ص² − ٤
٢ ص ص′ = ٣ جتا س
٢ ص ص″ + ٢ ص′ ص′ = − ٣ جا س
٢ ص ص″ + ٢ (ص′)² = ٣ جا س ← من الأصل
٢ ص ص″ + ٢ (ص′)² = ٤ − ص²
٢ ص ص″ + ٢ (ص′)² + ص² = ٤

١١ إذا كان جتا ص − س ص = ٢ س اثبت أن
ص″ (س + جا ص) + ص′ (٢ + ص′ جتا ص) = صفر

١٢ إذا كانت س ص − ٣ ص = ٧ س + ٥ فأثبت أن
(س − ٣) ص″ + ٢ ص′ = صفر

١٣ إذا كان س = ظتا ٢ ص اثبت أن ص″ = − ص′ جا ٤ ص

إثبات القوانين

١ ق(س) = جـ ، حيث جـ ثابت أن ق(س) = ٠

البرهان

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جـ - جـ}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٠}{ع - س} = ٠$$

٢ ق(س) = جـ ل(س) : حيث جـ ثابت ق(س) = جـ ل'(س)

البرهان:

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جـ\,ل(ع) - جـ\,ل(س)}{ع - س} = جـ \lim_{ع \to س} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س}$$

$$= جـ \times ل'(س)$$

٣ ق(س) = م(س) + ل(س) فإن ق'(س) = م'(س) + ل'(س)

البرهان

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) + ل(ع) - م(س) - ل(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س}$$

$$ق'(س) = م'(س) + ل'(س)$$

٤ ق(س) = هـ(س) × ل(س) أثبت أن

ق'(س) = هـ'(س) × ل(س) + ل'(س) × هـ(س)

الحل:-

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) \times ل(ع) - هـ(س) \times ل(س)}{ع - س}$$

اضافة وطرح هـ(ع) × ل(س)

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) ل(ع) - هـ(ع) ل(س) + هـ(ع) ل(س) - هـ(س) ل(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} هـ(ع) \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} ل(س) \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$ق'(س) = هـ(س)\,ل'(ع) + ل(س)\,هـ'(س)$$

٥ ق(س) = س^{ن} اثبت ان ق'(س) = ن س$^{ن-١}$

البرهان

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{ن-١} + س ع^{ن-٢} + س^{٢} ع^{ن-٣} + \ldots + س^{ن-١})}{ع - س}$$

$$= س^{ن-١} + س^{ن-١} + س^{ن-١} + \ldots + س^{ن-١}$$

$$= ن\, س^{ن-١}$$

٦ ق(س) = جا س ، اثبت أن ق'(س) = جتا س

الحل: $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{جتاع - جتاس}{ع - س}$$ ← متطابقة

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{٢\, جا\frac{ع-س}{٢} \times جتا\frac{ع+س}{٢}}{ع - س}$$

$$\lim_{ع \to س} \frac{٢\, جا\frac{ع-س}{٢}}{ع - س} \times \lim_{ع \to س} جتا\frac{ع+س}{٢}$$

نفرض $ص = \frac{ع-س}{٢}$ ← $\lim_{ص \to ٠} \frac{٢ جاص}{٢ص} \times جتا٢ص$

$ق'(س) = ١ \times جتاس = جتاس$

٧ ق(س) = جتاس أثبت ان ق'(س) = -جاس

الحل:-

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جتاع - جتاس}{ع - س}$$ ← متطابقة

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-٢\, جا\frac{ع-س}{٢} \times جا\frac{ع+س}{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-٢ جا\frac{ع-س}{٢}}{ع - س} \times \lim_{ع \to س} جا\frac{ع+س}{٢}$$

نفرض $ص = \frac{ع-س}{٢}$

$ص \to ٠$

$$ق'(س) = \lim_{ص \to ٠} \frac{-٢ جاص}{٢ص} \times جاس$$

$ق'(س) = -جاس$

٨ إذا كان ص = س$^{\frac{م}{ن}}$ ، حيث $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي اثبت إن $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

الحل:- برفع طرفي المعادلة الى الاس ن

ص^{ن} = س^{م}

ن ص$^{ن-١} \times \frac{د ص}{د س} = م س^{م-١}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} \frac{س^{م-١}}{ص^{ن-١}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} \frac{س^{م-١}}{(س^{\frac{م}{ن}})^{ن-١}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{م-١-م+\frac{م}{ن}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

صفحة ٢٠

إختبر نفسك عزيزي الطالب

[1] صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة بإنتظام جد معدل التغير في مساحة الصفيحة بالنسبة الى طولها عندما يكون طول ضلعها ٤ سم ؟

[٨]

[2] مكعب من الثلج ينقص حجمه بإنتظام جد معدل التغير في حجم المكعب بالنسبه الى طولها عندما يكون طولها ٣ سم ؟

[٢٧]

[3] مخروط ارتفاعه ٣ أمثال نصف قطر قاعدته ، اخذ المخروط بالذوبان بحيث يحافظ على شكله ، جد معدل تغير حجم المخروط بالنسبة الى ارتفاعه عندما يكون نصف قطر قاعدته ١٠ سم ؟ [١٠٠π]

[4] اذا كان التغير في الاقتران ق(س) هو: $س^2 هـ - ٢ س هـ$ جد ميل القاطع عندما س=٢؟

[٤هـ-٤]

[5] $\frac{د ص}{د س} = ٦$ ، $س \in [٢، ٥]$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٤$ ، $س \in [٣، ٥]$

جد $\frac{د ص}{د س}$: $س \in [٣، ٥]$

$\frac{د ص}{د س} = ٧$

[6] ق(س) = $\frac{٣}{\sqrt{٢س^2 - ١}}$ جد ق'(س) بإستخدام التعريف

$\frac{-٦س}{\sqrt{(٢س^2-١)^3}}$

[7] ق(س) = $٣س^2 - \frac{٢}{\sqrt{س}}$ جد ق'(١) بإستخدام التعريف

[٧]

[8] ق(س) = $\frac{[س^2] - س}{س + ١}$ ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق عند س=٢

[9] اذا كان ق(س) = $س|س - ٣|$ فابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق(س) عندما س = ٣ باستعمال المشتقة .

[10] اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢ & ، س = ١ \end{cases}$

جد ق'(١)

[11] اذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س} + ١$ ، فجد ق'($\frac{١}{٢}$) باستخدام التعريف

[-١٢]

[12] إذا كان ق(س) = [س+٧] - [س] + |٢س| جد ق'(-٣) بحيث س ∈ (-٥، -١)

[-٢]

[13] اذا كان ق(س) = $\sqrt{س} + \frac{١}{س}$ جد ق'(٤) باستخدام التعريف

[$\frac{٣}{١٦}$]

[14] إذا كان ص = $حا^2 س$ جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ عندما س = $\frac{\pi}{١٥}$

$\frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$

[15] إذا كان ق(س) = $\sqrt{٢ + جاس + جتاس}$

هـ(٠) = -١ ، هـ'(٠) = ٢ وكان د(س) = ق(س) هـ(س) جد د'(٠)

[$\frac{-٣}{٤}$]

[16] اذا كان ص = $\frac{٢ - حتا ٢س}{جتا س}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$

[قاس ظاس]

[17] اذا كان ق(س) = $\frac{س + قاس}{جا س}$ فجد ق'($\frac{\pi}{٤}$)

$\frac{٤ - \pi}{٤\sqrt{٢}}$

[18] اذا كان $ص^2 + س = ٣س ص$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما ص = ١

[$\frac{د ص}{د س} = ٤$]

١٩ ص = جا٢ س٣ جد $\frac{د ص}{د س}$ باستخدام قاعدة السلسلة؟

٢٠ ق (س) = $\frac{|س^٢ - ١٩|}{س + ٣}$ ، س ∈ (-٤، ٥)
جد ق' (س)

٢١ إذا كان ق(س) = $\frac{ك(س)}{هـ(س)}$ اثبت ان
ق'(أ) = $\frac{ك'(أ)}{هـ'(أ)}$ وكان ك ، هـ قابلة للاشتقاق عند س = أ ، ق'(أ) = ٠

٢٢ اذا كان ق'(س) = $\frac{١}{١ + س^٢}$ ، هـ(س) = ظا س
اثبت ان (ق ∘ هـ)'(س) = ١

٢٣ اذا كان ق(س) = (س - ٥)٢ ، هـ(س) = $\sqrt{س}$
فجد (هـ ∘ ق)'(٣)
-١

٢٤ إذا كان ق(س) = ٢ ظا ٢س ، هـ(س) = $\frac{٢س}{س^٢ + ١}$
فجد (هـ ∘ ق)'($\frac{\pi}{٨}$) .
$\frac{-٢٨}{٢٥}$

٢٥ ق(س) = ٢ ظتا س ، هـ(س) = أ س(س٢ - ٣)٣
وكان (هـ ∘ ق)'($\frac{\pi}{٤}$) = - ٥٠ جد قيمة أ
أ = $\frac{١}{٤}$

٢٦ اذا كان جتا ص - س ص = ٢س أثبت ان
ص'(س + جا ص) + ص'(٢ + ص جتا ص) = صفر

٢٧ إذا كانت س ص - ٣ ص = ٧س + ١٥ أثبت
أن (س - ٣) ص' + ٢ ص = صفر

٢٨ اثبت ان مشتقة ظا س = قا٢ س

مع تمنياتي لكم بالنجاح

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

التفسير الفيزيائي

تعلمنا سابقاً ان السرعة المتوسطة ع في الفترة الزمنية من ن الى (ن + ∆ن) لجسم يتحرك وفق العلاقة ف (ن) يعطى بالعلاقة

$$ع = \frac{∆ف}{∆ن} = \frac{ف(ن+∆ن) - ف(ن)}{∆ن}$$

وعندما ∆ن ← ٠ فإن نهاية $\frac{∆ف}{∆ن}$ عندما ∆ن ← ٠

حيث تسمى هذه العلاقة بالسرعة اللحظية

ع (ن) = ف′ (ن) مشتقة المسافة

ف′ (ن) = ع (ن) = ت (ن) تسمى التسارع

ملاحظات هامة "مفاتيح الحل"

1. تنعدم السرعة "السكون اللحظي" ع = صفر
2. اقصى ارتفاع ع = صفر
3. يبدأ الجسم بالعودة ع = صفر.
4. بداية الحركة ن = صفر
5. السرعة الابتدائية - التسارع الإبتدائي. ن = صفر
6. ينعدم التسارع ت = صفر.
7. السرعة سالبة ع < صفر.
8. السرعة موجبة ع > صفر.
9. التسارع سالب ت < صفر.
10. التسارع موجب ت > صفر.
11. في المقذوفات عندما يعود الجسم ليصل للارض ف = صفر
12. لايوجد زمن سالب

امثلة :-

1. يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن³ + ٥ن² + ٩ احسب سرعة الجسم وتسارعه بعد ٣ ثواني ؟

الحل :-

ف(ن) = ن³ + ٥ن² + ٩

ع (ن) = ٣ن² + ١٠ن

ت (ن) = ٦ن + ١٠

ع (٣) = ٣×٣² + ١٠×٣ = ٣٥ م/ث

ت (٣) = ٦×٣ + ١٠ = ٢٨ م/ث²

2. يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ن³ + ٢ن + ٥ جد :

١- السرعة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٢]

٢- التسارع المتوسط في الفترة [٠ ، ٢]

٣- السرعة اللحظية عندما ن = ٢

٤- التسارع اللحظي عندما ن = ٢

الحل :-

ف(ن) = ن³ + ٢ن + ٥

ع (ن) = ٣ن² + ٢

ت (ن) = ٦ن

١- ع (ن) = $\frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠} = \frac{١٧ - ٥}{٢} = ٦$

٢- ت (ن) = $\frac{ع(٢) - ع(٠)}{٢ - ٠} = \frac{١٤ - ٢}{٢} = ٣٦$ م/ث²

٣- ع (٢) = ٣(٢)² + ٢ = ١٤ م/ث

٤- ت (٢) = ٦ × ٢ = ١٢ م/ث²

3. يتحرك جسيم قاطعا مسافة ف = ن³ + ٥ن + ١ جد ١- سرعة الجسيم عندما ن = ٤

٢- سرعة الجسيم عندما تسارعه = ١٢ م/ث²

٣- تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٣٢

٤- السرعة المتوسطة للجسيم في [٢ ، ٤]

الحل :-

ف(ن) = ن³ + ٥ن + ١

ع (ن) = ٣ن² + ٥

ت (ن) = ٦ن

١- ع (٤) = ٣×٤² + ٥ = ٥٣ م/ث

٢- نجد ن من التسارع

ت (ن) = ٦ن = ١٢ ⇐ ن = ٢ ث

ع (٢) = ٣×٢² + ٥ = ١٧ م/ث

٣- نجد ن من السرعة

ع = ٣٢

٣ن² + ٥ = ٣٢

ن² = ٩

ن = ٣ ، -٣ مرفوض

ت (٣) = ٦ × ٣ = ١٨ م/ث²

٤- ع = $\frac{ف(٤) - ف(٢)}{٤ - ٢} = \frac{٦٦}{٢} = ٣٣$

4. يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ٢ن³ - ٣ن² + ٢ احسب سرعة الجسم عندما ينعدم التسارع

الحل :-

ف(ن) = ٢ن³ - ٣ن² + ٢

ع (ن) = ٦ن² - ٦ن

ت (ن) = ١٢ن - ٦

ت = صفر

١٢ن - ٦ = ٠

ن = $\frac{١}{٢}$

ع ($\frac{١}{٢}$) = ٦($\frac{١}{٢}$)² - ٦ × $\frac{١}{٢}$

ع ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٣}{٢}$ - ٣ = $-\frac{٣}{٢}$ م/ث

5. يتحرك جسيم بسرعة ع(ن) = √(٣ن² + ٦) جد سرعته عندما تكون تسارعه ١ م/ث²

ع = ٣ م/ث

٦ إذا كان ف(ن) = ٣ جا٤ن − ٥ جتا٤ن إحسب السرعة والتسارع عندما ن = $\frac{\pi}{٨}$.

الحل:-
ف(ن) = ٣جا٤ن − ٥ جتا٤ن
ع(ن) = ١٢ جتا٤ن + ٢٠ جا٤ن
ت(ن) = −٤٨ جا٤ن + ٨٠ جتا٤ن
ع($\frac{\pi}{٨}$) = ١٢ جتا$\frac{\pi}{٢}$ + ٢٠ جا$\frac{\pi}{٢}$ = ٢٠ م/ث
ت($\frac{\pi}{٨}$) = −٤٨ جا$\frac{\pi}{٢}$ + ٨٠ جتا$\frac{\pi}{٢}$ = −٤٨ م/ث^{٢}

٧ إذا كانت ف = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٥ ن
إحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

ت = −٤
ت = ٤

٨ يتحرك جسيم بسرعة ع^{٢} = ١ − ف^{٣}
جد التسارع عندما تنعدم السرعة

الحل: الاشتقاق ضمني
٢ع ت = −٣ ف ع
٢ ت = −٣ ف
ت = $\frac{-٣ \times ١}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$ م/ث^{٢}

عندما ع^{٢} = ١ − ف^{٣}
٠ = ١ − ف^{٣}
ف = ١

٩ يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ٦ن^{٢} − ن^{٣}
جد ١- سرعة الجسيم عندما ينعدم التسارع
٢- مجموعة قيم ن التي تجعل السرعة سالبة
٣- الفترات الزمنية التي تجعل التسارع موجب

الحل:- ف(ن) = ٦ن^{٢} − ن^{٣}
ع(ن) = ١٢ن − ٣ن^{٢}
ت(ن) = ١٢ − ٦ن

١- انعدام التسارع
١٢ − ٦ن = ٠
ن = ٢
ع(٢) = ١٢ × ٢ − ٣ × ٢^{٢} = ١٢ م/ث

٢- السرعة سالبة ع < ٠
٣ن^{٢} − ١٢ن > ٠
ن = ٠ ، ن = ٤
السرعة سالبة (٤ ، ∞)

٣- ت = ٠ ⇐ ١٢ − ٦ن = ٠
ن = ٢
(٠ ، ٢)

١٠ يتحرك جسيم وكانت السرعة
ع(ن) = ن^{٢} − ٣ن + ٢ جد متى يسكن الجسيم لحظيًا وما قيمة تسارعه حينئذ

ت = −١
ت = ١

١١ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى حسب
ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن^{٢} احسب
١- أقصى إرتفاع وصل إليه الجسيم
٢- الزمن اللازم حتى يعود الجسم للأرض
٣- السرعة التي قذف بها الجسيم
٤- سرعة الجسيم وهو على ارتفاع ٨٠ م
الحل:- ف = ٩٦ن − ١٦ن^{٢}
ع = ٩٦ − ٣٢ن
ت = −٣٢

١- ع = ٠ | ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ، ن = ٣
ف(٣) = ٩٦ × ٣ − ١٦ × ٣^{٢} = ١٤٤ م

٢- زمن العودة = ٢ × زمن أقصى ارتفاع
= ٢ × ٣ = ٦ ث

٣- عندما ن = ٠
ع = ٩٦ − ٣٢ × ٠ = ٩٦ م/ث

٤- ف = ٨٠ | ٩٦ن − ١٦ن^{٢} = ٨٠ ، ن^{٢} − ٦ن + ٥ = ٠ ، (ن − ١)(ن − ٥) = ٠ ، ن = ١ ، ن = ٥
ع(١) = ٩٦ − ٣٢ × ١ = ٦٤ م/ث
ع(٥) = ٩٦ − ٣٢ × ٥ = −٦٤ م/ث (متحابط)

١٢ قذف جسم من سطح بناية رأسيًا إلى أعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} + P إذا كانت سرعته لحظة وصوله الأرض تساوي ٦٠ م/ث جد ارتفاع البناية

الحل:- ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} + P
ع(ن) = ٣٠ − ١٠ن
−٦٠ = ٣٠ − ١٠ن
−٩٠ = −١٠ن
ن = ٩ زمن الوصول للأرض

ف(٩) = ٣٠ × ٩ − ٥(٩)^{٢} + P = ٠
٢٧٠ − ٤٠٥ + P = ٠
P = ١٣٥ م

١٣ يتحرك جسم حسب ف(ن) = جاn + جتاn
ن ∈ [٠ ، ٢π] جد المسافة والتسارع في حالة السكون اللحظي

ف = ٢
ت = −٢ ، ٢

١٤ يتحرك جسيم حسب ف(ن) = ن^{٣}
إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة [٠ ، P] تساوي سرعته اللحظية عندما ن = ٢ جد قيمة P.

P = ٣√٢

١٥ قذف جسيم رأسيا لاعلى وحسب العلاقة ف(ن) = P ن − ٥ن² جد قيمة P علما بأن أقصى ارتفاع وصل اليه الجسم يساوي ٨٠ م حيث P هي السرعة الابتدائية.

الحل: ف = P ن − ٥ن²

ع = P − ١٠ ن

ت = − ١٠

ف = ٨٠ | ع = ٠

P ن − ٥ن² = ٨٠ | P − ١٠ ن = ٠

١٠ ن² − ٥ن² = ٨٠ | P = ١٠ ن

٥ن² = ٨٠

ن² = ١٦

ن = ± ٤ ← تهمل

P = ١٠ × ٤ = ٤٠ م/ث

١٦ يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٢ م/ث حسب ف(ن) = P ن² + ب ن احسب المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ث علما بأن تسارعة يساوي ٨٠ م/ث

الحل: ف = P ن² + ب ن

ع = ٢P ن + ب

ت = P ٢ ⇐ ٢P = ٨ ⇐ P = ٤

من السرعة الابتدائية ع = ٢P ن + ب = ٤

٢ × ٤ × ٠ + ب = ٢

ب = ٢

ف = ٤ ن² + ٢ ن

ف(٣) = ٤ × ٣² + ٢ × ٣ = ٤٢ م

١٧ اسقط جسم من ارتفاع (٢٤٠ م) عن سطح الارض سقوطا حرا حيث ان المسافة هي ف(ن) = ٥ن² وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الارض للاعلى حيث ان المسافة التي يقطعها هي ف(ن) = ٦٠ ن − ٥ن² جد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه من سطح الارض

الحل:

ف١ + ف٢ = ٢٤٠

٥ن² + ٦٠ن − ٥ن² = ٢٤٠

٦٠ن = ٢٤٠ ⇐ ن = ٤ ث

ع١ = ١٠ ن = ١٠ × ٤ = ٤٠ م/ث

ع٢ = ٦٠ − ١٠ن = ٦٠ − ١٠ × ٤ = ٢٠ م/ث

١٨ ع = ف² + ٣ن جد التسارع عندما ع = ٢ في بداية الحركة

الحل: ٢ع ت = ٢ف ع + ٣

٢ × ٢ ت = ٢ × ٢ + ٣

ت = ١١/٤ م/ث²

ع = ف² + ٣ن

٤ = ف² + ٠

ف = ± ٢ ← تهمل

١٩ من نقطة على عمق (٥٥ م) عن سطح الارض قذف جسم رأسيا للاعلى بحيث ان المسافة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن² جد سرعة الجسيم لحظة وصوله مستوى سطح الارض

الحل:

عندما يصل الجسم الى سطح الارض ف = ٥٥

∴ ٦٠ن − ٥ن² = ٥٥

٥ن² − ٦٠ن + ٥٥ = ٠ ÷ ٥

ن² − ١٢ن + ١١ = ٠

(ن − ١١)(ن − ١) = ٠

ن = ١ ، ن = ١١

ع(ن) = ٦٠ − ١٠ ن

ع(١) = ٦٠ − ١٠ × ١ = ٥٠ م/ث

ع(١١) = ٦٠ − ١٠ × ١١ = −٥٠ م/ث

٢٠ قذف جسيم رأسيا الى اعلى من نقطة على سطح الارض فإذا كانت ف = ٦٤ن − ١٦ن² بين ان الجسم يفقد نصف سرعته الابتدائية على ارتفاع ٤٨ م.

الحل: ف = ٦٤ن − ١٦ن²

ع = ٦٤ − ٣٢ن

نجد ع الابتدائية: ع(٠) = ٦٤ م/ث

ع(١) = ٦٤ − ٣٢ × ١ = ٣٢ م/ث صاعد

ع(٢) = ٦٤ − ٣٢ × ٢ = −٣٢ م/ث هابط

ف = ٤٨

٦٤ن − ١٦ن² = ٤٨

١٦ن² − ٦٤ن + ٤٨ = ٠

ن² − ٤ن + ٣ = ٠

(ن − ١)(ن − ٣) = ٠

ن = ١ ، ن = ٣

٢١ اسقط شخص جسما من نقطة على سطح بناية سقوطا حرا بحيث ف = ١٦ن² وفي اللحظة نفسها رمى شخص ثان جسما عموديا الى اسفل بحيث ف = ٤٠ ن + ١٦ن² ، اذا ارتطم الجسم الاول بالارض بعد ثانية واحدة من ارتطام الجسم الثاني بالارض جد

١ سرعة الجسم الثاني لحظة ارتطامه بالارض

٢ ارتفاع البناية

الحل: نفرض ان زمن الجسم الثاني ن ، زمن الاول ن + ١

ف١(ن + ١) = ف٢(ن)

٦ (ن² + ١) = ٤٠ ن + ١٦ن² ⇐ ن = ٣ ث

زمن الاول ٢ + ١ = ٣ ث

زمن الثاني ٢ ث

١ ع٢ = ٣٢ن = ٣٢ × ٣ = ٩٦

ع٢ = ٤٠ + ٣٢ن

= ٤٠ + ٣٢ × ٢ = ١٠٤

٢ ف١(٣) = ١٦ × ٩ = ١٤٤ م

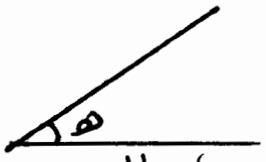
ف٢(٢) = ٤٠ × ٢ + ١٦ × ٤

= ١٤٤ م

٢٢ قذفت كرة رأسياً الى اعلى من قمة برج ارتفاعة ٢٢٥ م إذا كان ارتفاع الكرة من نقطة القذف يتعين بالمعادلة ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن٢
جد ١ اقصى ارتفاع وصلت اليه الكرة
٢ سرعة الكرة عندما تصل الى سطح الارض

٢٣ من نقطة على ارتفاع ٨٠ م عن سطح الارض قذف جسيم رأسياً الى اعلى وفق العلاقة ف(ن) = ٦٤ن - ١٦ن٢ جد
١ أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم .
٢ الزمن الذي بعده يعود الى نقطة القذف.
٣ الزمن الذي بعده يعود الى سطح الارض .
٤ متى تصبح سرعة الجسم ٣٤ م/ث .
٥ مجموعة قيم ن ≥ ٠ التي يكون عندها ع > ٠ .

التفسير الهندسي



الميل = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

الميل = ظا هـ

← مع محور السينات الموجب

ميل المماس = المشتقة عند التماس

معادلة المماس :

ص - ص١ = م (س - س١)

معادلة العمودي :

ص - ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س - س١)

امثلة :-

١ جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س٢ + ١ ، عند س = ٢

الحل :-

م = ق`(س) = ٣س٢

ق`(٢) = ٤ × ٣ = ١٢

المماس

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ٩ = ١٢ (س - ٢) ⇐ ص = ١٢س - ١٥

نجد ص

ص = ق(٢) = ٢٢ + ١

ق(٢) = ٩

معادلة العمودي

ص - ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س - س١) ⇐ ص - ٩ = $\frac{-١}{١٢}$ (س - ٢)

٢ جد ميل المماس لمنحنى ق(س) = س٢ - ٤س + ٣ عند النقطة (١ ، ٠)

الحل : النقطة (١ ، ٠) هي نقطة التماس لأنها تحقق المنحنى

م = ق`(١) ⇐ ق`(س) = ٢س - ٤

ق`(١) = ٢ - ٤ = -٢ ⇐ م = -٢

٣ عين قيمة الثابت جـ في الاقتران ق(س) = جـ س٢ إذا كان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق عند س = ١ هو ٤٥°.

الحل : م = ظا هـ ⇐ م = ظا ٤٥ = ١

ق`(س) = ٢ جـ س ⇐ ق`(١) = ٢ جـ = ١

جـ = $\frac{١}{٢}$

٤ جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{1}{س}$ ، عند س = ٢

٥ ما معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الإقتران $س^{٣}$ ص = ٣ عند النقطة (١ ، ٣)
الحل: النقطة (١ ، ٣) هي نقطة التماس

$م = \frac{د ص}{د س}$ (١ ، ٣)	$٣ س^{٢} ص + \frac{د ص}{د س} س^{٣} = ٠$
$م = -٩$	$٣ \times ١ \times ٣ + \frac{د ص}{د س} \times ١ = ٠$
معادلة المماس	$\frac{د ص}{د س} = -٩$
$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$	
$ص - ٣ = -٩ (س - ١)$	
$ص = -٩ س + ١٢$	

معادلة العمودي $ص - ص_{١} = \frac{-١}{م} (س - س_{١})$
$ص - ٣ = \frac{١}{٩} (س - ١)$

٦ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = $س^{٢} - ٦ س + ٧$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص − ٣ س + ١ = ٠
الحل: ق′(س) = ٢ س − ٦ نجد نقطة التقاطع

س = ١ ، ص = ٢	س = ٨ ، ص = ٢٣	ص = ٣ س − ١
م = −٤	م = ١٠	$س^{٢} - ٦ س + ٧ = ٣ س - ١$
$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$	$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$	$س^{٢} - ٩ س + ٨ = ٠$
$ص - ٢ = -٤ (س - ١)$	$ص - ٢٣ = ١٠ (س - ٨)$	$(س - ١)(س - ٨) = ٠$
$ص = -٤ س + ٦$	$ص = ١٠ س - ٥٧$	س = ١ ، س = ٨

٧ جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الإقتران ق(س) = $س^{٢} + ٤ س - ٤$ عند س = ٣.
الحل: نجد التعريف ا س − ٤ ا

ق(س) = $س^{٢} - س + ٤$	
ق′(س) = ٢ س − ١	
س = ٣ ، ص = ١٠	
م = ٥	
معادلة المماس	معادلة العمودي
$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$	$ص - ص_{١} = \frac{-١}{م} (س - س_{١})$
$ص - ١٠ = ٥ (س - ٣)$	$ص - ١٠ = \frac{-١}{٥} (س - ٣)$
$ص = ٥ س - ٥$	$ص = \frac{-١}{٥} س + \frac{٥٣}{٥}$

٨ إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = $س^{٢} + ٣ س$ أوجد النقطة التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها ٤٥° مع محور السينات الموجب
الحل: م = ظا هـ = ظا ٤٥ = ١
ق′(س) = ٢ س + ٣ = ١ ⇐ س = −١
(−١ ، −٢)

٩ إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = $س^{٢} + ٥ س$ عند س = $س_{١}$ يصنع زاوية ٤٥° مع محور السينات الموجب فجد معادلة العمودي والمماس

١٠ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = $س^{٣} + س$ عند النقطة يكون ميل المماس عندها ٤
الحل:
ميل المماس = المشتقة عند التماس

$٤ = ٣ س^{٢} + ١ \Leftarrow س^{٢} = ١$ ، س = ± ١	
س = ١ ، ص = ٢	س = −١ ، ص = −٢
م = ٤	م = ٤
$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$	$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$
$ص - ٢ = ٤ (س - ١)$	$ص + ٢ = ٤ (س + ١)$
$ص = ٤ س - ٢$	$ص = ٤ س + ٢$

١١ جد نقاط تقاطع منحنى الإقترانين
ق(س) = $س^{٢}$ ، هـ(س) = $س^{٢} + ٢ س + ١$
الحل: لإيجاد نقاط التقاطع ق(س) × هـ(س) = −١
ق(س) = $٢ س^{٢}$ ، هـ(س) = $٢ س + ٢$
$(٢ س^{٢}) \times (٢ س + ١) = -١$
$٤ س^{٣} + ٢ س + ١ = ٠$
$(٢ س + ١)(٢ س^{٢} + ١) = ٠$
س = $-\frac{١}{٢}$ ، ص = $(-\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$
$(-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤})$

١٢ بين أن المماسين لمنحنى ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ(س) = س متعامدان عند نقط تقاطعهم

١٣ بين نقطة على منحنى الإقتران ص = ظا س حيث س ∈ $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ بحيث المماس عندها يوازي المستقيم ص = ٢ س
الحل: من التوازي $م_{١} = م_{٢}$
$م_{٢} = ٢$
ميل المماس = ٢
$\frac{د ص}{د س} = ق' س = ٢ \Leftarrow ق س = ٢$ ، -٢ (مرفوض)
$س = \frac{\pi}{٤}$
نقطة التماس $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$

١٤ جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة $٩س^٢ + ١٦ص^٢ = ٥٢$ ، موازيًا للمستقيم $٩س - ٨ص = ١$

الحل:- نفرض نقطة $(س_١ ، ص_١)$ من المستقيم

$م = \frac{د ص}{د س}_{(س_١، ص_١)} = \frac{-٩}{-٨} = \frac{٩}{٨}$

$١٨س + ٣٢ص \frac{د ص}{د س} = ٠ \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-١٨س}{٣٢ص}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٩س}{١٦ص} = \frac{٩}{٨} \Leftarrow س = -٢ص$ ①

نعوض ① في المنحنى ⇐ $٣٦ص^٢ + ١٦ص^٢ = ٥٢$

$٥٢ص^٢ = ٥٢ \Leftarrow$

$ص = \pm ١$

$ص = ١$ ، $س = -٢$	$ص = -١$ ، $س = ٢$
$م = \frac{٩}{٨}$	$م = \frac{٩}{٨}$
$ص - ص_١ = م(س - س_١)$	$ص - ص_١ = م(س - س_١)$
$ص - ١ = \frac{٩}{٨}(س + ٢)$	$ص + ١ = \frac{٩}{٨}(س - ٢)$
$ص = \frac{٩}{٨}س + \frac{١٣}{٤}$	$ص = \frac{٩}{٨}س - \frac{١٣}{٤}$

١٥ جد معادلة المماس المرسوم من النقطة $(٦ ، ٠)$ لمنحنى العلاقة $س^٢ + ص^٢ = ١٨$

الحل:- النقطة خبيثة يا معلم دير بالك

الميل $= \frac{د ص}{د س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص - ٠}{س - ٦}$ $(س، ص)$ $(٦، ٠)$

نشتق $٢س + ٢ص \frac{د ص}{د س} = ٠ \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-س}{ص}$

$\frac{ص}{س - ٦}$

$ص^٢ = -س^٢ + ٦س$

$١٨ - س^٢ = -س^٢ + ٦س \Leftarrow س = ٣ ، ص = \pm ٣$

$س = ٣ ، ص = ٣$	$س = ٣ ، ص = -٣$
$م = -١$	$م = ١$
$ص - ص_١ = م(س - س_١)$	$ص - ص_١ = م(س - س_١)$
$ص - ٣ = -١(س - ٣)$	$ص + ٣ = ١(س - ٣)$
$ص = -س + ٦$	$ص = س - ٦$

١٦ بين ان لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ + ٨$ مماسين مرسومين من النقطة $(١، ٥)$ والتي لا تقع عليه

الحل:- النقطة خبيثة $ق(س) = ٢س$

$م = \frac{ص - ٥}{س - ١} = ٢س \Leftarrow ٢س^٢ - ٢س = ص - ٥$

$٢س^٢ - ٢س = س^٢ + ٨ - ٥$

$س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣ \quad س = -١$ ← مماسين $(٣، ١٧)$ ، $(-١، ٩)$

١٧ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٣ + ٣$ اذا كان العمودي على هذا المماس يمر بالنقطة $(٠ ، \frac{٩}{٤})$

الحل:- ميل العمودي $= \frac{ص - \frac{٩}{٤}}{س - ٠}$ ، ميل المماس $= م_س$

ميل العمودي $= \frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

$\frac{ص - \frac{٩}{٤}}{س} = \frac{-١}{٢س}$

$\frac{س^٣ + ٣ - \frac{٩}{٤}}{س} = \frac{-١}{٢س} \Leftarrow ٢س^٣ - ٢س = ٠$

$٢س(س^٢ - ١) = ٠$

$س = ٠$	$س = ١$	$س = -١$
$ص = ٣$	$ص = ٤$	$ص = ٤$
$م = ٠$	$م = ٢ + ٢$	$م = -٢$
$ص - ص_١ = م(س - س_١)$	$ص - ص_١ = م(س - س_١)$	$ص - ص_١ = م(س - س_١)$
$ص - ٣ = ٠$	$ص - ٤ = ٢(س - ١)$	$ص - ٤ = -٢(س + ١)$
$ص = ٣$	$ص = ٢س + ٢$	$ص = -٢س + ٢$

١٨ اذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(٠، -٢)$ ، $(٦، ٢)$ يمس منحنى $ق(س) = ب س^٢ + ٢س - ١$ فجد قيمة ب

الحل: ميل المماس $= ق'(س) = ٢ب س + ٢$

ميل المستقيم $= \frac{٦ - -٢}{٦ - ٠} = \frac{٨}{٢} = ٤$

ميل المماس = ميل المستقيم

$٢ب س + ٢ = ٤ \Leftarrow ب = \frac{١}{س}$

معادلة المستقيم

$ص + ٢ = ٤(س - ٠)$

$ص = ق(س) \Leftarrow ب س^٢ + ٢س - ١ = ٤س - ٢$

$\frac{١}{س} س^٢ + ٢س - ١ = ٤س - ٢$

$س = ١ \Leftarrow ب = \frac{١}{١} = ١$

١٩ اذا كانت $ص = ٣س - ٥$ هي معادلة العمودي على المماس لمنحنى $ق(س)$ عند النقطة $(٢، ١)$ فما قيمة $ق'(٢)$.

٢٠ جد نقطة تقاطع $ق(س) = \sqrt{٢ - س}$ ، $هـ(س) = س^٢$ ثم جد معادلة المماس لمنحنى ق عند تلك النقطة .

الحل:- من التعامد $ق'(س) \times هـ'(س) = -١$

$ق'(س) = \frac{+١}{٢\sqrt{٢ - س}}$

$هـ'(س) = ٢س$

$\frac{١}{٢\sqrt{٢ - س}} \times ٢س = -١$

$س = -\sqrt{٢ - س}$

$س^٢ = ٢ - س$

$س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$س = -٢ \quad س = ١$

$س = -٢ ، م = ٢$	$س = ١ ، م = -١$
$ص = ٢ ، (س، ص)$	$ص = ١ ، (س، ص)$
$ص - ص_١ = م(س - س_١)$	$ص - ص_١ = م(س - س_١)$
$ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س + ٢)$	$ص - ١ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

٢١ اذا كان ق(س) = ٢س - جتا٢س حيث س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$] فجد جميع قيم س التي يكون عندها العمودي على المماس لمنحنى ق موازيًا لمحور الصادات ثم جد معادلة أحد هذه المماسات فقط. السبب: العمودي يوازي الصادات ⇐ المماس يوازي السينات

ق(س) = ٢ - ٤جتا٢س = ٠

جتا٤س = $\frac{١}{٢}$

٤س = $\frac{\pi}{٣}$ ، ٤س = $\frac{٥\pi}{٣}$

س = $\frac{\pi}{١٢}$ ، س = $\frac{٥\pi}{١٢}$

س = $\frac{\pi}{١٢}$ ، ص = $\frac{\pi}{٦} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - $\frac{\pi}{٦} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠

ص = $\frac{\pi}{٦} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢٢ جد جميع قيم س التي يكون عندها العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س - جا٢س موازيًا لمحور الصادات.

٢٣ جد معادلة المماس لمنحنى س٢ + ص٢ = ٢٥ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم س + ص = ١

الحل:- من المستقيم ص + س = ١ نحوض في المنحنى

س٢ + (١ - س)٢ = ٢٥ ⇐ س٢ - س - ١٢ = ٠

(س - ٤)(س + ٣) = ٠

س = ٤ ، ص = -٣

م = $\frac{٤}{٣}$

ص - ص١ = م (س - س١)

ص + ٣ = $\frac{٤}{٣}$ (س - ٤)

ص = $\frac{٤}{٣}$ س - $\frac{٢٥}{٣}$

نشتق ٢س + ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$

س = ٤ س = -٣

س = -٣ ، ص = ٤

م = $\frac{٣}{٤}$

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ٤ = $\frac{٣}{٤}$ (س + ٣)

ص = $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{٢٥}{٤}$

٢٤ اذا كان المستقيم ٣س + ٣ص = ١ يمس منحنى الإقتران ق(س) = ٤س٢ + ٢س + ب عند النقطة (١، ق(١)) فجد قيمة كل من الثابتين ٢، ب.

الحل: ٣ص = ١ - ٣س

ص = $\frac{١}{٣} - \frac{٣}{٣}$ س

الميل = $\frac{-٣}{٣}$

ق(س) = ٨س + ٢

ق(١) = ٨ + ٢ = $\frac{-٣}{٣}$

٢ = -٦

ص = $\frac{١}{٣} - \frac{٦}{٣} \times ١$

ص = $\frac{٧}{٣}$

ق(١) = ٤ + ٢ + ب = $\frac{٧}{٣}$

٤ - ٦ + ب = $\frac{٧}{٣}$

ب = $\frac{٧}{٣} + ٢$

ب = $\frac{١٣}{٣}$

٢٥ اذا كان منحنيا الإقترانين ق(س) = س٢ + ٢س + ب ، هـ(س) = س٣ - س٢ - س + جـ متماسين عند النقطة (-١، ٠) فجد ١- ٢، ب، جـ

٢- معادلة المماس المشترك للإقترانين ق، هـ عند (-١، ٠)

الحل: ١ بما أن ق(س) يمر بالنقطة (-١، ٠)

ق(-١) = ٠ ⇐ ١ - ٢ + ب = ٠ ⇐ ٢ - ب = -١

هـ(-١) = ٠ ⇐ -١ - (١ + ٢ + جـ) = ٠ ⇐ جـ = ١

بما أن ق(س) و هـ(س) متماسين عند (-١، ٠)

فإن ق(-١) = هـ(-١)

ق(س) = ٢س + ٢ ، هـ(س) = ٣س٢ - ٢س - ١

ق(-١) = -٢ + ٢ هـ(-١) = ٣ + ٢ - ١

-٢ + ٢ = ٤ ⇐ ٢ = ٦

-٢ + ب = -١ ⇐ ب = -١ + ٦

ب = ٥

٢ معادلة المماس المشترك عند (-١، ٠)

ق(س) = ٢س + ٦

م = ق(-١) = -٢ + ٦ = ٤

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ٠ = ٤ (س + ١) ⇐ ص = ٤س + ٤

٢٦ أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين ٤س٢ + ٩ص٢ = ٤٥ ، س٢ - ٤ص٢ = ٥ عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الأول متعامدان.

الحل: نجد نقط التقاطع

٤س٢ + ٩ص٢ = ٤٥

-٤س٢ + ١٦ص٢ = -٢٠

٢٥ص٢ = ٢٥

ص = ± ١ ⇐ تهمل

س = ± ٣ ⇐ تهمل

* ٣ ⇐ ٨س + ١٨ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٤}{٣}$

* ٣ ⇐ ٢س - ٨ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٤}$

شرط التعامد ٣، × ٣٢ = -١

$\frac{-٤}{٣} \times \frac{٣}{٤} = -١$ متعامدان

٢٧ اذا كان المستقيم ٣س - ص - جـ = ٠ يمس منحنى ق(س) = $\frac{-٣}{س + ١}$ عند النقطة (س١، ص١) الواقعة على منحناه فجد

أ- احداثي النقطة (س١، ص١) ب- قيمة الثابت جـ

٢٨ جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س) = (س - ٣)٢ إذا كان هذا المماس مرسومًا من النقطة (٠، ٠)

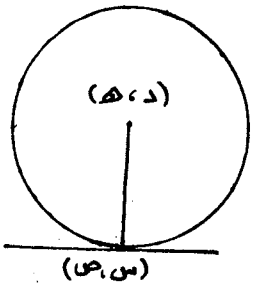
٢٩ أثبت ان نصف قطر الدائرة يكون عمودياً على مماس الدائرة عند نقطة التماس بإستخدام التفاضل.

الحل

معادلة الدائرة $(س-د)^2+(ص-هـ)^2 = نق^2$ نشتق

$2(س-د)+2(ص-هـ)\frac{دص}{دس}=0$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{(س-د)}{(ص-هـ)}$



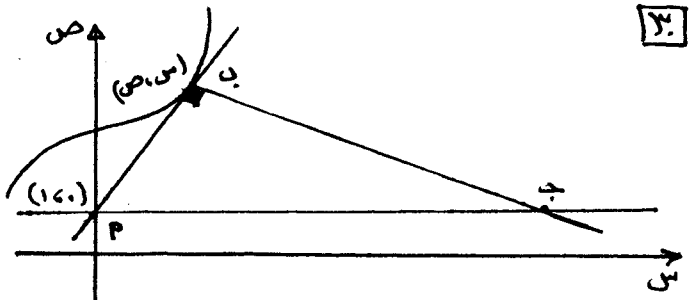
ميل نصف القطر $= \frac{ص-هـ}{س-د}$

ميل المماس × ميل نق $= -1$

$-\frac{(س-د)}{(ص-هـ)} \times \frac{(ص-هـ)}{(س-د)} = -1$

$-1 = -1$ متعامدان

٣٠



جد مساحة المثلث المرسوم من النقطة (١، ٠) لمنحنى $ق(س) = س^3+3$ والعمودي على نقطة التماس والمستقيم $ص = 1$

الحل:

$ميل = \frac{ص-1}{س-0} = \frac{س^3+3-1}{س} = \frac{س^3+2}{س}$

$ق(س) = 3س^2$

$3س^2 = \frac{س^3+2}{س}$

$3س^2 = س^3+2$

$س^3 = 1 \Leftarrow س = 1 \Leftarrow ق(1) = 4$ ، ب (١، ٤)

ارتفاع المثلث $= 4-1 = 3$

نجد جـ (س، ١)

$ق(1) = 3 \times 1^2 = 3$

ميل العمودي $= \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{4-1}{1-س} \Leftarrow س = 10$

طول قاعدة المثلث $= م جـ = 10$

المساحة $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 3 = 15$

خصائص المنحنيات

١ مجالات التناقص

$ق'(س) < 0$ لجميع قيم $س \in (م، ب)$

فإن $ق(س)$ يكون متناقصاً في الفترة $[م، ب]$

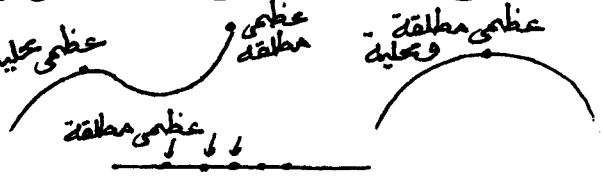
٢ مجالات التزايد

$ق'(س) > 0$ لجميع قيم $س \in (م، ب)$

فإن $ق(س)$ يكون متزايداً في الفترة $[م، ب]$

٣ القيم القصوى تنقسم الى

١- عظمى: تنقسم الى نوعان مطلقة ومحلية



٢- صغرى: مطلقة ومحلية

كل مطلقة محلية ولاكن ليس كل محلية مطلقة

٤ مجالات التقعر وتنقسم الى

١- تقعر لاعلى: إذا كانت $ق'(س)$ موجودة لكل $س \in (م، ب)$ وإذا كانت $ق'(س) > 0$ لكل $س \in (م، ب)$ فإن منحنى الإقتران ويكون مقعراً لاعلى في $[م، ب]$.

٢- تقعر لاسفل اذا كانت $ق'(س)$ موجودة لكل $س \in (م، ب)$ واذا كانت $ق'(س) < 0$ لكل $س \in (م، ب)$ فإن منحنى الإقتران ق يكون مقعراً للاسفل في $[م، ب]$

٥ نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يبدل الاقتران من تقعره ويكون متصلاً عندها

نقطة التقعر

٦ زاوية الإنعطاف هي الزاوية التي يكونها المماس لمنحنى الإقتران عند نقطة الانعطاف مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أصفار المشتقة الأولى

تحدد مجالات التزايد والتناقص والقيم العظمى والصغرى

أصفار المشتقة الثانية

تحدد مجالات التقعر لاعلى ولاسفل و نقطة الإنعطاف

النقط الحرجة

هي النقط التي تكون عندها المشتقة تساوي صفراً وغير موجودة ، جذور المقام والبسط

خطوات الحل:

١- نجد ق'(س)

٢- نقوم بعمل مخطط م- اطراف الفترة
ب- التحول
جـ الجذور ق'(س)=٠
د- كسر البسط=٠
المقام=٠

٣- النقاط الحرجة هي الاعداد الموجودة في المخطط

٤- نضع هذه النقاط على خط الاعداد بالترتيب ونحدد الإشارة بينهما بالتعويض في ق'(س)

٥- الإشارات (+) ⇐ ق متزايد
(-) ⇐ ق متناقص
صفر ⇐ ق ثابت

٦- القيم القصوى نجدها بالاسهم .

امثلة

جد م- النقاط الحرجة
ب- مجالات التزايد والتناقص
جـ - القيم العظمى والصغرى

[١] ق(س) = $س^{٣}$ - ٥س + ٥ ،

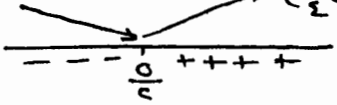
الحل :- ق'(س) = ٣$س^{٢}$ - ٥ = ٠

٣$س^{٢}$ = ٥ ⇐ س = $\pm\sqrt{\frac{٥}{٣}}$

الحرجة ← اطراف لايوجد
← جذور س = $\pm\sqrt{\frac{٥}{٣}}$

م- النقاط الحرجة ($-\sqrt{\frac{٥}{٣}}$ ، ٠) ، ($\sqrt{\frac{٥}{٣}}$ ، ٠)

ب- التزايد $]-\infty, -\sqrt{\frac{٥}{٣}}]$ ، $[\sqrt{\frac{٥}{٣}}, \infty[$
التناقص $[-\sqrt{\frac{٥}{٣}}, \sqrt{\frac{٥}{٣}}]$



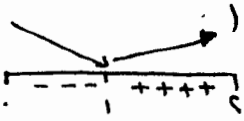
جـ - عظمى عند س = $-\sqrt{\frac{٥}{٣}}$ ، وقيمتها ق($-\sqrt{\frac{٥}{٣}}$) = $\frac{١٠}{٩}\sqrt{\frac{٥}{٣}}$ + ٥
صغرى عند س = $\sqrt{\frac{٥}{٣}}$ ، وقيمتها ق($\sqrt{\frac{٥}{٣}}$) = $-\frac{١٠}{٩}\sqrt{\frac{٥}{٣}}$ + ٥

[٢] ق(س) = $س^{٣}$ - ٣س + ١ ، س ∈ [٠ ، ٢]

الحل :- ق'(س) = ٣$س^{٢}$ - ٣ = ٠ ⇐ س = ١

م- الحرجة ← اطراف {٠ ، ٢}
← جذور {١}

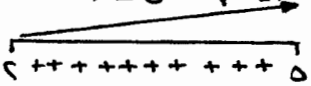
ب- تناقص [٠ ، ١]
تزايد [١ ، ٢]



جـ - عظمى عند س = ٠ ، وقيمتها ق(٠) = ١ (مطلقة)
عظمى عند س = ٢ ، وقيمتها ق(٢) = ٣ (مطلقة)
صغرى عند س = ١ ، وقيمتها ق(١) = ٢ مطلقة

[٣] ق(س) = $س^{٣}$ - ٣س + ١ ، س ∈ [٢ ، ٥]

الحل :- ق'(س) = ٣$س^{٢}$ - ٣ = ٠ ⇐ س = ١



م- الحرجة ← اطراف {٢ ، ٥}
← جذور {١} ∉ (٢ ، ٥)

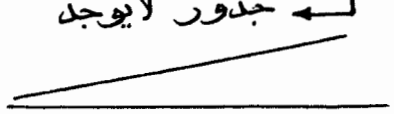
ب- متزايد [٢ ، ٥]

جـ - عظمى عند س = ٥ ، وقيمتها ق(٥) = ٥٣
صغرى عند س = ٢ ، " ق(٢) = ١

[٤] ق(س) = $س^{٣}$ + ٣س + ١٢

الحل :- ق'(س) = ٣$س^{٢}$ + ٣ = ٠ ⇐ $س^{٢}$ = -١ (الاتحلل)

الحرجة ← اطراف لايوجد
← جذور لايوجد

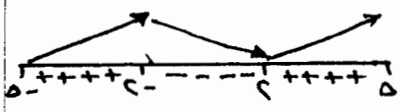


ق متزايد على ح لايوجد قيم قصوى

[٥] ق(س) = $س^{٣}$ - ١٢س ، س ∈ [-٥ ، ٥]

الحل :- ق'(س) = ٣$س^{٢}$ - ١٢ = ٠ ⇐ س = ±٢

م- الحرجة ← اطراف {-٥ ، ٥}
← جذور {-٢ ، ٢}



ب- التزايد [-٥ ، -٢] ، [٢ ، ٥]
التناقص [-٢ ، ٢]

جـ - عظمى عند س = -٢ ، وقيمتها ق(-٢) = ١٦
عظمى عند س = ٥ ، " ق(٥) = ٦٥
صغرى " س = -٥ ، " ق(-٥) = -٦٥
صغرى " س = ٢ ، " ق(٢) = -١٦

[٦] ق(س) = س^3 − ١٢س + ٥

الحل: ق′(س) = ٣س^2 − ١٢ = ٠

س = ± ٢

أ- الحرجة ← أطراف لا يوجد

← جذور ± ٢

ب- ق متزايد في (−∞، −٢] ، [٢، ∞)

ق متناقص في [−٢، ٢]

عند س = −٢ يوجد قيمة عظمى محلية هي ق(−٢) = ٢١

عند س = ٢ يوجد قيمة صغرى محلية هي ق(٢) = −١١

[٧] إذا كان ق(س) = −٢س^3 − ٣س^2 + ٣٦س + ١٠

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق وبين نوعها

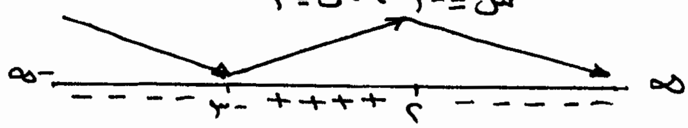
الحل:

ق′(س) = −٦س^2 − ٦س + ٣٦ = ٠

س^2 + س − ٦ = ٠

(س + ٣)(س − ٢) = ٠

س = −٣ ، س = ٢



عظمى عند س = ٢ وقيمتها ق(٢) = ٥٤ محلية

صغرى عند س = −٣ وقيمتها ق(−٣) = −٧١ محلية

[٨] ليكن ق(س) = ٤ − س + جاس ، س ∈ [−π، π]

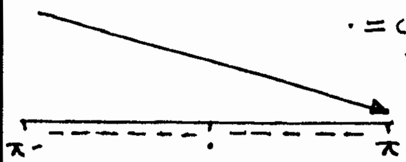
جد الفترة أو الفترات التي يكون فيها ق متناقصاً

الحل:

ق′(س) = −١ + جتاس = ٠

جتاس = ١

س = ٠



ق متناقص [−π، π]

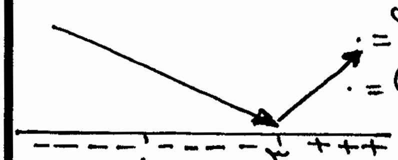
[٩] ق(س) = س^4 − ٤س^3

الحل:

ق′(س) = ٤س^3 − ١٢س^2 = ٠

٤س^2(س − ٣) = ٠

س = ٠ ، س = ٣



أ- الحرجة {٠، ٣}

ب- متناقص (−∞، ٣]

متزايد [٣، ∞)

ج- عظمى لا يوجد

صغرى عند س = ٣ ، وقيمتها ق(٣) = −٢٧ مطلقة

[١٠] ق(س) = س^4 − ٨س^2 جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى.

[١١] ق(س) = ٦س^2 − ٢س^3 ، س ∈ [٠، ٤] فجد

١- الفترة، الفترات، التي يكون فيها الاقتران ق متناقص

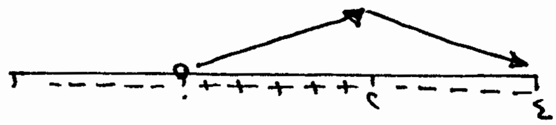
٢- القيم القصوى للاقتران ق وبين نوعها

الحل:

ق′(س) = ١٢س − ٦س^2 = ٠

٦س(٢ − س) = ٠

س = ٠ ، س = ٢



١- متناقص على الفترة [٢، ٤]

٢- عظمى عند س = ٢ وقيمتها ق(٢) = ٨ مطلقة

صغرى عند س = ٤ وقيمتها ق(٤) = −٣٢ مطلقة

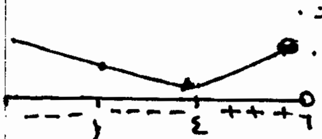
[١٢] ق(س) = س^3 − ٦س^2 ، س ∈ [١، ٦]

الحل:

ق′(س) = ٣س^2 − ١٢س = ٠

٣س(س − ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ٤



أ- الحرجة ← الأطراف {١، ٦}

← الجذور {٤}

ب- التناقص [١، ٤]

التزايد [٤، ٦)

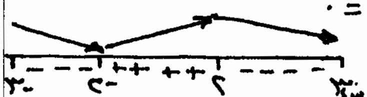
ج- عظمى عند س = ١ ، وقيمتها ق(١) = −٥ محلية

صغرى عند س = ٤ ، وقيمتها ق(٤) = −٣٢ مطلقة

[١٣] ق(س) = ٤س − $\frac{1}{3}$س^3 ، س ∈ [−٣، ٣]

الحل: ق′(س) = ٤ − س^2 = ٠

س = ± ٢



أ- الحرجة ← أطراف {−٣، ٣}

← جذور {−٢، ٢}

ب- متناقص [−٣، −٢] ، [٢، ٣]

متزايد [−٢، ٢]

ج- عظمى عند س = −٣ ، وقيمتها ق(−٣) = −٣ محلية

〃 〃 س = ٢ ، 〃 ق(٢) = $\frac{16}{3}$ مطلقة

صغرى عند س = −٢ ، وقيمتها ق(−٢) = $-\frac{16}{3}$ مطلقة

〃 〃 س = ٣ ، 〃 ق(٣) = ٣ محلية

١٤ ق(س) = $\sqrt[3]{(س^2-4س)^2}$ ، س ∈ ح جد القيم القصوى

الحل: ق(س) = $(س^2-4س)^{\frac{2}{3}}$

ق'(س) = $\frac{2}{3}(س^2-4س)^{-\frac{1}{3}}(2س-4)$

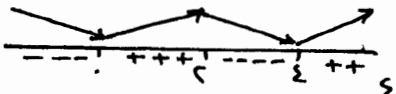
ق'(س) = $\frac{2(2س-4)}{3\sqrt[3]{(س^2-4س)}}$ = ٠

البسط 2س − 4 = ٠ ⇐ س = ٢

المقام $\sqrt[3]{(س^2-4س)}$ = ٠

س(س − 4) = ٠

س = ٠ ، س = ٤



الحرجة ← أطراف لا يوجد

جذور البسط ٢

مقام {٠ ، ٤}

ب- متناقص (−∞ ، ٠] ، [٢ ، ٤]

متزايد [٠ ، ٢] ، [٤ ، ∞)

جـ- عظمى عند س = ٢ ، قيمتها ق(٢) = $\sqrt[3]{16}$ محلية

صغرى عند س = ٠ ، قيمتها ق(٠) = ٠ محلية ومطلقة

صغرى عند س = ٤ ، قيمتها ق(٤) = ٠ محلية ومطلقة

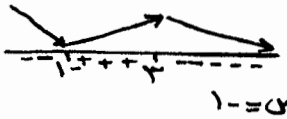
١٥ ق(س) = $\frac{س-1}{س^2+3}$

الحل: إقتران نسبي $س^2+3 \neq ٠$ ⇐ لا يوجد جذور

ق'(س) = $\frac{(س^2+3)(1)-(2س)(س-1)}{(س^2+3)^2}$

الأصفار: البسط $-س^2+2س+3=٠$ ⇐ س = ٣ ، س = −١

المقام لا يوجد



الحرجة: الأطراف لا يوجد

الجذور س = ٣ ، س = −١

متزايد في [−١ ، ٣]

متناقص في (−∞ ، −١] ، [٣ ، ∞)

صغرى عند س = −١ وقيمتها ق(−١) = $-\frac{1}{2}$ محلية

عظمى عند س = ٣ وقيمتها ق(٣) = $\frac{1}{2}$ محلية

١٦ جد قيمة كل من أ ، ب التي تجعل

ق(س) = $س^3+أ س^2+ب س$ نقطتين حرجتين

عند س = −١ ، س = ٢

الحل: ق'(س) = $3س^2+2أ س+ب$

ق'(−١) = $3-2أ+ب=٠$ ⇐ $-2أ+ب=-3$ ①

ق'(٢) = $12+4أ+ب=٠$ ⇐ $4أ+ب=-12$ ②

$-6أ=9$ ⇐ $أ=-\frac{3}{2}$

ب = −٦

١٧ ق(س) = $س+\frac{4}{س}$ ، $س \neq ٠$

الحل:

غير متصل عند س = ٠

ق'(س) = $1-\frac{4}{س^2}=٠$ ⇐ $س^2=4$ ⇐ $س=\pm 2$

الجذور ← البسط {−٢ ، +٢}

المقام س = ٠ تهمل

الحرجة: الأطراف لا يوجد

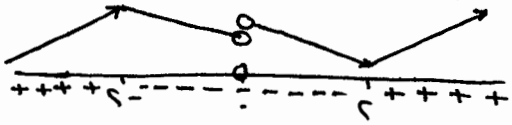
الجذور {−٢ ، +٢}

ق متزايد في $(-\infty ، -2] \cup [2 ، \infty)$

ق متناقص في $[-2 ، 0) \cup (0 ، 2]$

عظمى عند س = −٢ وقيمتها ق(−٢) = −٤ محلية

صغرى عند س = ٢ وقيمتها ق(٢) = ٤ محلية



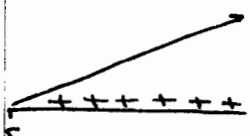
١٨ ق(س) = $\sqrt{س-2}$

الحل: في حالة الجذور الزوجية يجب أن نجد المجال إذ المجال المعطى في السؤال تهمل

ق'(س) = $\frac{1}{2\sqrt{س-2}}=٠$

الجذور: البسط $1 \neq ٠$ لا يوجد

المقام س = ٢



الحرجة: الأطراف ٢

جذور لا يوجد

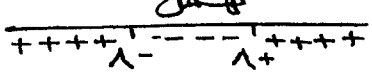
ق متزايد في [٢ ، ∞)

صغرى عند س = ٢ وقيمتها ق(٢) = صغرى مطلقة

١٩ ق(س) = $\sqrt{2س-5}$ جد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى

٢٠ ق(س) = $|س^2 - ٦٤|$

الحل: نجد المجال — تهمل



المجال س ∈ $(-\infty, -٨] \cup [٨, \infty)$

ق′(س) = $\frac{٢س}{٢|س^2 - ٦٤|}$ = ٠

الجذور: البسط ← س = ٠ تهمل

المقام ← المقام س = ± ٨

الحرجة: أطراف ← −٨، ٨

الجذور لايوجد

ق متزايد في $[٨, \infty)$

ق متناقص $(-\infty, -٨]$

صغرى عند س = ± ٨ ومقدارها ق(± ٨) = صفر مطلقة

٢١ جد القيم القصوى المحلية والمطلقة إن وجدت للاقتران ق(س) = جتاس − جاس

س ∈ $[٠, \pi]$

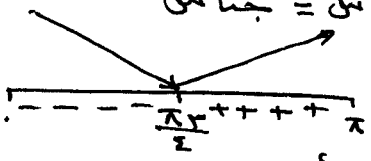
الحل:

ق′(س) = − جاس − جتاس = ٠

− جاس = جتاس

ظا س = −١

س = $\frac{٣\pi}{٤}$



الحرجة: الأطراف {٠، π}

الجذور {$\frac{٣\pi}{٤}$}

صغرى عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$ وقيمتها ق($\frac{٣\pi}{٤}$) = $-\sqrt{٢}$ مطلقة

عظمى عند س = ٠ وقيمتها ق(٠) = ١ مطلقة

عظمى عند س = π وقيمتها ق(π) = −١ محلية

٢٢ ق(س) = جتاس + جاس ، س ∈ $[٠, ٢\pi]$

جد القيم القصوى المحلية

٢٣ ق(س) = $\begin{cases} س^2 ، س \leq ٣ \\ ٩ ، س > ٣ \end{cases}$

الحل: متصل عند س = ٣

ق′(س) = $\begin{cases} ٢س ، س < ٣ \\ ٠ ، س > ٣ \\ غ.م ، س = ٣ \end{cases}$

الجذور ٢س = ٠ ، س = ٠ تهمل

٠ = ٠ لجميع قيم س ∈ ح

الحرجة: أطراف ×

تحول ٣

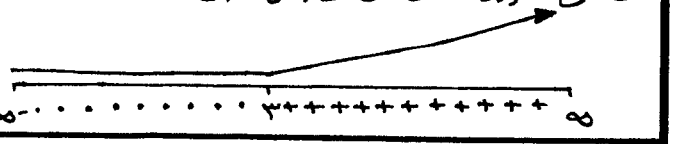
جذور (−∞، ٣)

ق متزايد $[٣, \infty)$

ق ثابت $(-\infty, ٣]$

صغرى مطلقة لكل س ∈ $(-\infty, ٣]$

عظمى محلية لكل س ∈ $(-\infty, ٣]$



٢٤ ق(س) = $\begin{cases} س^2 - ١ ، -١ \leq س \leq ٢ \\ ٣س ، ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

الحل:

ق(س) غير متصل عند س = ٢ لكنه معرف

ق′(س) = $\begin{cases} ٢س ، -١ < س < ٢ \\ ٣ ، ٢ < س < ٥ \\ غ.م ، س = -١ ، ٢ ، ٥ \end{cases}$

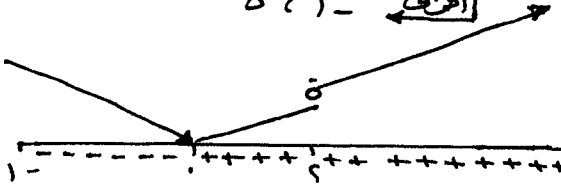
الجذور ← ٢س = ٠ ⇐ س = ٠

← ٣ ≠ ٠

الحرجة: جذور صفر

تحول ٢

أطراف −١ ، ٥



ق متناقص في $[-١, ٠]$

ق متزايد في $[٠, ٢]$ ، $(٢, ٥]$

صغرى عند س = ٠ وقيمتها ق(٠) = ٠ مطلقة

عظمى عند س = ٥ وقيمتها ق(٥) = ٥ مطلقة

عند س = ٢ لا يوجد شيء

٢٥ ق(س) = $\begin{cases} س^2 + ١ ، س \leq ٠ \\ ١ ، ٠ < س < ٢ \\ |س - ٢| ، س \geq ٢ \end{cases}$

الحل: ق(س) غير متصل عند س = ٢

ق′(س) = $\begin{cases} ٢س ، س < ٠ \\ ٠ ، ٠ < س < ٢ \\ \frac{س - ٢}{|س - ٢|} ، س > ٢ \\ غ.م ، س = ٢ \end{cases}$

الحرجة: أطراف ×

جذور $[٠, ٢)$

تحول ٢

ق متناقص $(-\infty, ٠]$

ق ثابت $[٠, ٢)$

ق متزايد $[٢, \infty)$

صغرى عند س = ٢ ، ق(٢) = ٠

عظمى على (٠، ٢) محلية

٢٦ ق(س) = { ١ - ٢س ، -٢ ≤ س < ١ ; ٢س - ٤ ، ١ ≤ س ≤ ٤ }

إشارة المشتقة الثانية

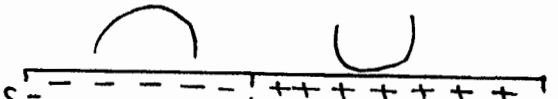
نستفيد من إشارة المشتقة الثانية في إيجاد
١- مجالات التقعر لاعلى ولاسفل
٢- الإنعطاف
٣- ق أ ، ق ب

خطوات الحل :-

١- نجد المشتقة الثانية ونجد أصفارها
٢- نعين على خط الاعداد أصفار المشتقة الثانية وقيم س التي تجعل ق''(س) غ معرفة، عكن التحول
٣- نضع إشارة ق'' على خط الاعداد.
٤- نرسم منحنيات التقعر ونحدد نقط الانعطاف

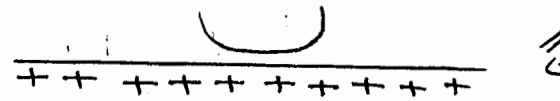
أمثلة

١ حدد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى
ق(س) = س³ - ٣س² + ٤ ، س ∈ [-٢ ، ٣]
الحل :- ق'(س) = ٣س² - ٦س
ق''(س) = ٦س - ٦ = ٠ ⇐ س = ١



ق مقعر لاسفل [-٢ ، ١]
ق مقعر لاعلى [١ ، ٣]

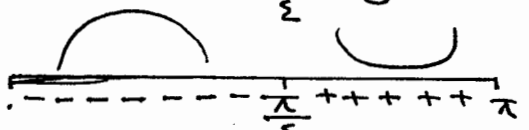
٢ ق(س) = س² + ٤س - ٢ جد مجالات التقعر ونقط الانعطاف وزوايا الانعطاف
الحل: ق'(س) = ٢س + ٤
ق''(س) = ٢ ≠ ٠



ق مقعر لاعلى على ح ∴ لا يوجد زوايا انعطاف أو نقط إنعطاف

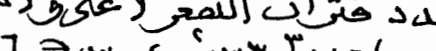
٣ ق(س) = ٦س² - ٢س³ ، س ∈ (٠ ، ٤] جد الفترة، الفترات التي يكون فيها منحنى ق مقعراً للاسفل وجد نقط الانعطاف

٤ ق(س) = جتاس - جاس ، س ∈ [٠ ، π] جد نقط الإنعطاف وزوايا الانعطاف لمنحنى ق وبجالات التقعر لاعلى ولاسفل.
الحل :-
ق'(س) = - جاس - جتاس
ق''(س) = - جتاس + جاس = ٠
جاس = جتاس
ظاس = ١
س = π/٤



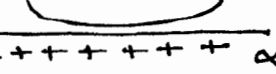
مقعر لاعلى [π/٤ ، π] ، مقعر لاسفل [٠ ، π/٤]
ظا هـ = ق''(π/٤) = ١/√٢ - ١/√٢ = -√٢
هـ = ظا⁻¹(-√٢)

٥ ق(س) = (س + ٤)^(٢/٣) + ٢
الحل :- نتخلص من القوة الكسرية
ق(س) = [(س+٤)³]^(١/٣) + ٢ نجد المجال



المجال س ∈ [-٤ ، ∞)
ق'(س) = ٣/٣ (س+٤)^(-١/٣)
ق''(س) = ٣/٣ (س+٤)^(-٤/٣) = ٣ / ٣(س+٤)^٤ = ٠

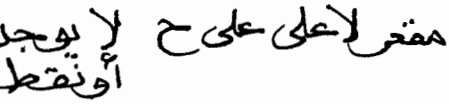
أصفار البسط ٣ ≠ ٠ لا يوجد
أصفار المقام س = -٤



ق مقعر لاعلى في [-٤ ، ∞)

٦ ق(س) = س² + ١/س ، س ≠ ٠
الحل :- يجب الانتباه أن ق غير معرف عند س = ٠
لذلك نضع حلقة على الخط
ق'(س) = ٢س - ١/س²
ق''(س) = ٢ + ٢/س³ = ٠ ⇐ ٢س³ + ٢ / س³ = ٠

أصفار البسط س = -١
أصفار المقام س = ٠ تهمل



ق مقعر لاعلى (-∞ ، -١] ، [٠ ، ∞)
ق مقعر لاسفل [-١ ، ٠)
نقطة الانعطاف (-١ ، ٠)
زاوية الانعطاف ظا هـ = ق'(-١) = -٣
هـ = ظا⁻¹ -٣

٧ جد فترات التقعر الى اعلى والاسفل

ق(س) = { س² − ٨ ، س ≤ ٢ ; ٤س² − ١٢ ، س > ٢ } متصل

الحل: ق′(س) = { ٢س ، س > ٢ ; ٤س ، س < ٢ ; غ.م ، س = ٢ }

ق″(س) = { ٢ ، س > ٢ ; ٤ ، س < ٢ ; غ.م ، س = ٢ }

ق″(س) = ٠ لا يوجد ، ق(س) غ.م عند س = ٢

ق″ ∪ ∪

ق مقعر لاعلى على ح

٨ ق(س) = |س² − ٩|

الحل: نعيد التعريف س² − ٩ = ٠ ⇐ س = ±٣

+ + + + ٣− − − − ٣+ + + + +

ق(س) = { س² − ٩ ، س < −٣ أو س > ٣ ; −س² + ٩ ، −٣ ≤ س ≤ ٣ }

ق′(س) = { ٢س ، س < −٣ أو س > ٣ ; −٢س ، −٣ < س < ٣ }

ق″(س) = { ٢ ، س < −٣ أو س > ٣ ; −٢ ، −٣ < س < ٣ ; غ.م ، س = ±٣ }

∪ ∩ ∪

+ + + + + + ٣− − − − − ٣ + + + + +

اطراف لا يوجد

جذور لا يوجد

تحول −٣ ، ٣

ق مقعر لاعلى (−∞ ، −٣] ، [٣ ، ∞)

ق مقعر لاسفل [−٣ ، ٣]

نقط الانطاق (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠)

لا يوجد نوايا انعطاف لان ق′(٣) غ.م

٩ ق(س) = |س² + ١| جد فترات التقعر ونقط الانعطاف إن وجدت

١٠ ق(س) = س³ + ٥س + ٨ ، اكتب معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف

الحل: نجد نقطة الانعطاف

ق′(س) = ٣س² + ٥

ق″(س) = ٦س = ٠ ⇐ س = ٠

∪ ∩

− − − ! + + +

نقطة الانعطاف (٠ ، ٨)

م = ق′(٠) = ٠ + ٥ = ٥

ص − ص١ = م(س − س١)

ص − ٨ = ٥س

ص = ٥س + ٨

١١ إذا كان ق′(س) = س / (س² + ١) اوجد فترات التقعر ونقط الانعطاف

الحل: ق″(س) = (١ − س²) / (س² + ١)² = ٠

∩ ∪ ∩

− − − ! + + + ! − − −

البسط س = ± ١

المقام لا يوجد

مقعر لاعلى [−١ ، ١]

مقعر لاسفل (−∞ ، −١] ، [١ ، ∞)

نقط الانعطاف (−١ ، ق(−١)) ، (١ ، ق(١))

١٢ ق(س) = س + ٤/س جد فترات التقعر ونقط الانعطاف

١٣ ق(س) = |س² − ٤| جد فترات التقعر

١٤ ق(س) = { ٣ − س² ، س ≤ ١ ; ٢/س ، س > ١ }

جد فترات التقعر

أسئلة الثوابت

لحل هذا النوع من الاسئلة يجب مراعاة ما يلي .

١- نكون معادلات بعدد الثوابت

٢- الزوج المرتب (س ، ص) ← ق(س) = ص

٣- كلمة درجة ، قصوى ، صغرى ، عظمى

ق′(P) = ٠

٤- كلمة إنحطاف ق″(P) = ٠

٥- زاوية الإنحطاف ظاهـ = ق′(جـ) من نقطة الانحطاف

٦- ميل المماس = المشتقة عند التماس

---

[١] إذا كان ق(س) = س^{٤} + P٢ س وكانت نقطة حرجة عند س = ٦ ما قيمة P .

الحل :- من حرجة ق′(٦) = ٠

ق′(س) = ٢س + P٢

ق′(٦) = ١٢ + P٢ = ٠ ⇐ P = -٦

---

[٢] ق(س) = P س^{٣} + ٣ب س^{٢} جد P ، ب علماً بأن النقطة (٣ ، ١٨) نقطة قصوى .

الحل :- ق(٣) = ١٨ ← ①

حرجة ق′(٣) = ٠ ← ②

ق(٣) = P٢٧ + ٢٧ب = ١٨ ⇐ P٣ + ٣ب = ٢

ق′(س) = P٣ س^{٢} + ٦ب س

ق′(٣) = P٢٧ + ١٨ب = ٠ ⇐ P٣ + ٢ب = ٠

بحل المعادلات P = $\frac{٤}{٣}$ - ، ب = ٢

---

[٣] ق(س) = س^{٣} + P س^{٢} + ب س + ٥ جـ ما قيمة الثوابت حيث (١ ، ٩) نقطة عظمى محلية و يوجد انحطاف عند س = ٢

الحل :-

ق(١) = ٩ ⇐ P + ب + ٥ + جـ = ٨ ①

ق′(١) = ٠ ⇐ P٢ + ب = -٣ ②

ق″(٢) = ٠ ⇐ P = -٦ ③

ب = ٩ ، جـ = ١

---

[٤] ق(س) إقتران من الدرجة الثالثة في س و يمس بالنقطة (١ ، ٥) و كانت نقطة الانحطاف (٢ ، ١) بحيث ان معادلة المماس عند نقطة الانحطاف هي ٣س + ص = ٧

الحل :- قاعدة كثير الحدود

ق(س) = P س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

ق(١) = ٥ ⇐ P + ب + جـ + د = ٥ ←①

ق′(٢) = ١ ⇐ P٨ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ ←②

ق″(٢) = -٣ ⇐ P١٢ + ٤ب + جـ = -٣ ←③

ق″(٢) = ٠ ⇐ P١٢ + ٢ب = ٠ ←④

① مع ② P + ب + جـ + د = ٥

P٨ + ٤ب + ٢جـ + د = ١

P٧ + ٣ب + جـ = -٤ ←⑤

⑤ مع ③ P١٢ + ٤ب + جـ = -٣ ←③

P٥ + ب = ١ ←⑥

⑥ مع ④ P٦ + ب = ٠ ←④

P = -١

ب = ٦

جـ = -٥

د = ٥

ق(س) = -س^{٣} + ٦ س^{٢} - ٥(س + ٥)

---

[٥] جد معادلة المماس للاقتران ق(س) = جا س + $\frac{١}{٤}$ س^{٢} - $\frac{١}{٤}$ عند نقطة انحطاف ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

الحل :- ق′(س) = جتا س + $\frac{١}{٢}$ س

ق″(س) = -جا س + $\frac{١}{٢}$ = ٠

جا س = $\frac{١}{٢}$ ⇐ س = $\frac{\pi}{٦}$

نقطة الانحطاف ($\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi^{٢}}{١٤٤}$)

الميل = ق′($\frac{\pi}{٦}$) = $\frac{٣٦ + \pi}{١٢}$

معادلة المماس

ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

ص - $\frac{\pi^{٢}}{١٤٤}$ = $\frac{٣٦ + \pi}{١٢}$ (س - $\frac{\pi}{٦}$)

إيجاد القيم بإستخدام المشتقة الثانية

نستخدم هذه الطريقة عند طلبها في السؤال فقط

خطوات الحل:

١- نجد اصفار المشتقة الاولى
٢- نجد المشتقة الثانية لفحص اصفار المشتقة الاولى

أ. اذا كان ناتج التعويض (+) فإن ق(س) يوجد قيمة صغرى.
ب. اذا كان ناتج التعويض (-) فإن ق(س) يوجد قيمة عظمى.
ج. اذا كان ناتج التعويض (٠) نفشل المشتقة الثانية ونعود بعدها للمشتقة الاولى.

---

١ جد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٣} - س^{٢} + ١ باستخدام إختبار المشتقة الثانية.

الحل: ق(س) = ٣س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠

(٣س + ٣)(س - ١) = ٠

س = -١ ، س = ١

ق''(س) = ٦س - ٢

ق''(-١) = -٨ < ٠ عظمى محلية عند س = -١

ق''(١) = ٤ > ٠ صغرى محلية عند س = ١

---

٢ جد القيم القصوى المحلية للإقتران

ق(س) = جاس - √٣ جتاس ، س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل: ق'(س) = جتاس + √٣ جاس = ٠

$\frac{جاس}{جتاس} = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ⇐ ظاس = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

س = $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$

ق''($\frac{٥\pi}{٦}$) = (-) < ٠ عظمى عند س = $\frac{٥\pi}{٦}$

ق''($\frac{١١\pi}{٦}$) = (+) > ٠ صغرى عند س = $\frac{١١\pi}{٦}$

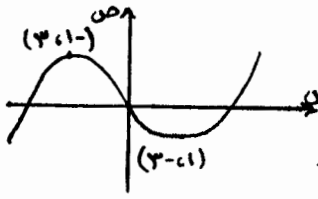
---

٣ جد القيم القصوى المحلية للاقتران

ق(س) = ١٢س^{٢} - ١ - اس + ١١ + س^{٣}

إستنتاج خصائص ق من الرسم

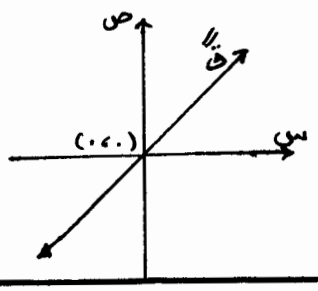
١ الرسم المجاور يمثل منحنى ق(س) جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية وفترات التقعر ونقط الانعطاف للإقتران ق(س).

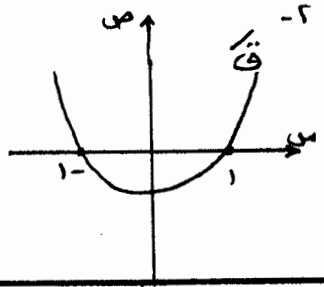


الحل:-

١- ق متزايد في (-∞ ، -١] وفي [١ ، ∞) ومتناقص في [-١ ، ١]
ق(-١) = ٣ قيمة عظمى محلية ، ق(١) = -٣ قيمة صغرى محلية ، ق مقعر لاسفل (-∞ ، ٠] ، لاعلى [٠ ، ∞)
(٠ ، ٠) نقطة إنعطاف.

٢-





ملاحظات هامة

إذا كان الرسم ق'(س)

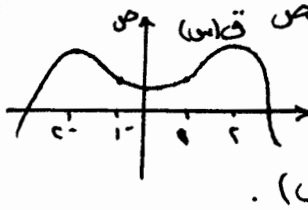
أ. تقطع السينات عند النقاط الحرجة للاقتران ق، قيم قصوى.
ب. عندما تكون ق' > ٠ (فوق السينات) يكون ق متزايداً وعندما تكون ق' < ٠ (تحت السينات) يكون ق متناقصاً.
ج. عندما تكون ق' (متزايدة)، ماعدا. يكون ق مقعراً لاعلى وعندما تكون ق' (متناقصة) حاول يكون ق مقعراً لاسفل.
د. نقاط القمة أو القاع هي نقاط الإنعطاف

إذا كان الرسم ق''(س)

أ. تقطع محور السينات عند نقطة الانعطاف
ب. عندما تكون ق'' > ٠ (فوق السينات) يكون ق مقعراً لأعلى وعندما تكون ق'' < ٠ (تحت السينات) يكون ق مقعراً لاسفل.

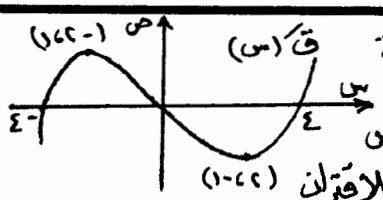
---

٢ جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وفترات التقعر ونقط الانعطاف للإقتران ق(س)



ثم ارسم ق'(س) ، ق''(س).

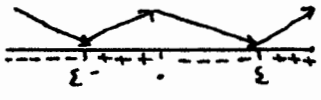
٣ جد قيم س الحرجة



للإقتران ق(س)، فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للإقتران وفترات التقعر ونقط الإنعطاف وزوايا الانعطاف للإقتران ق، ثم ارسم ق(س)، ق″(س).

الحل:-

الحرجة {-٤، ٠، ٤}



ق متزايد [-٤، ٠]، [٤، ∞)

ق متناقص (-∞، -٤]، [٠، ٤]

ق(-٤) قيمة صغرى محلية ق(٤) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية.

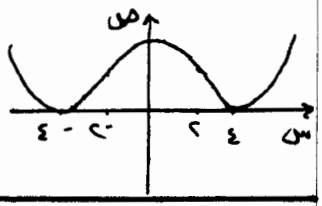
ق مقعر لأعلى (-∞، -٢]، [٢، ∞)

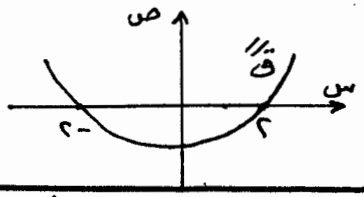
ق مقعر لأسفل [-٢، ٢].

(-٢، ق(-٢))، (٢، ق(٢)) نقاط انعطاف

ظا θ_1 = ق′(-٢) = ١- $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$

ظا θ_2 = ق′(٢) = ١- $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$

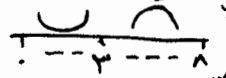




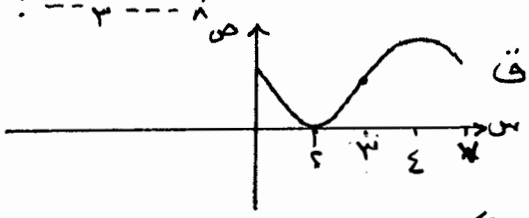
صغرى محلية عند س = ٢، عظمى محلية عند س = ٤

ق مقعر لأعلى [٠، ٣]، مقعر لأسفل [٣، ٧]

نقطة الانعطاف (٣، ق(٣))



رسمة ق



رسمة ق″

بما ان ق′ خط مستقيم فإن ق″ (ثابت)

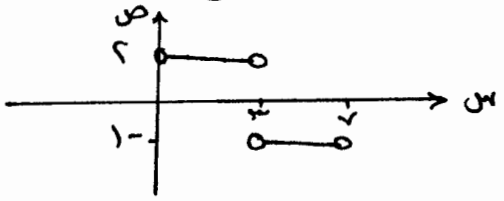
ميل ق′ = ق″

القطعة الأولى (٠، -٢)، (٣، ٤)

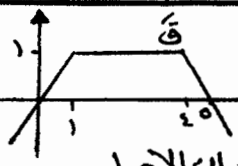
$ق'' = \frac{٤ - (-٢)}{٣ - ٠} = ٢$

القطعة الثانية (٣، ٢)، (٧، -٢)

$ق'' = \frac{-٢ - ٢}{٧ - ٣} = \frac{-٤}{٤} = -١$



٤ جد قيم س الحرجة



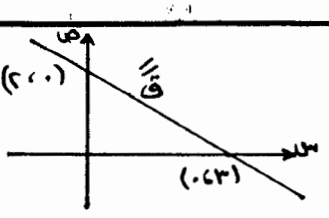
مجالات التزايد والتناقص

مجالات التقعر ونقط الانعطاف

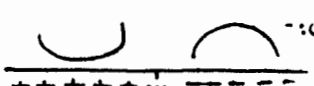
ارسم منحنى ق الذي يمر بنقطة الأصل.

٥ جد مجالات التقعر لـ ق(س)

نقط الانعطاف



الحل:-



ق مقعر لأعلى (-∞، ٣]، ق مقعر لأسفل [٣، ∞)

نقطة الانعطاف (٣، ق(٣))

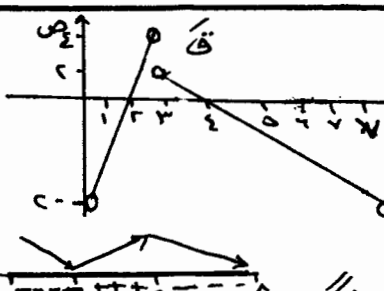
٦ جد قيم س الحرجة

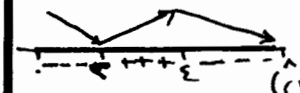
فترات التزايد والتناقص

القيم القصوى

فترات التقعر وزوايا الانعطاف ونقط الانعطاف

ثم ارسم ق(س)، ق″(س)



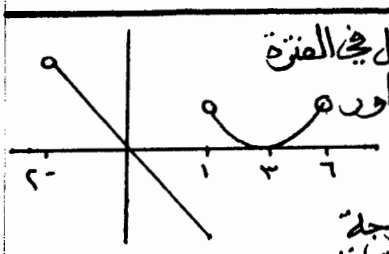


الحل:- قيم س الحرجة {٠، ٢، ٣، ٤، ٨}

ق متزايد في [٢، ٤]

ق متناقص [٠، ٢] ، [٤، ٨]

٧ اذا كان ق متصل في الفترة [-٢، ٦] والشكل المجاور يمثل ق′(س) في (-٢، ٦) جد



١- قيم س الحرجة

٢- مجالات التزايد والتناقص

٣- نقط وزوايا الانعطاف

٤- ارسم ق، ق″

إختبر نفسك عزيزي الطالب

[1] إذا كان ق(س) = -٢س^٣ - ٣س^٢ + ٣٦س + ١٠
فجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق وبين نوعها ثم جد فترات التقعر ونقط الانعطاف وزوايا الانعطاف.

[2] ليكن ق(س) = ٤ - س + جاس ، س ∈ [-π، π]
جد الفترة، الفترات، التي يكون فيها ق متناقصاً

[3] إذا كان ق(س) = ٤س - (١/٣)س^٣ ، س ∈ [-٣، ٣]
فجد
١- الفترة، الفترات، التي يكون فيها ق متزايد
٢- القيم القصوى المطلقة للاقتران ق وبين نوعها
٣- الفترة، الفترات، التي يكون فيها منحنى ق مقعراً للاسفل.

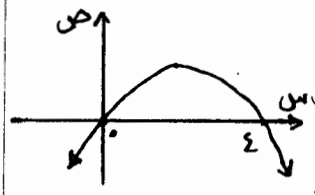
[4] إذا كان ق(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س + ٢ حيث س ∈ [٠، ٤] فجد كلاً من
١- الفترة التي يكون فيها ق متزايداً.
٢- القيم القصوى المطلقة للاقتران وبين نوعها
٣- نقطة الانعطاف لمنحنى ق إن وجدت.

[5] ق(س) = (١/٤)س^٤ - ٢س^٢ + ٣ حيث س ∈ (-٣، ٢)
فجد
١- الفترة التي يكون فيها ق متناقصاً
٢- القيم القصوى المطلقة للاقتران وبين نوعها
٣- الفترة التي يكون فيها منحنى ق مقعراً للاسفل

[6] إذا كان ق(س) = ٦س^٢ - ٢س^٣ ، س ∈ [٠، ٤]
فجد كل مما يأتي:

١- الفترة، الفترات، التي يكون فيها ق متناقصاً.
٢- القيم القصوى للاقتران ق وبين نوعها.
٣- الفترة، الفترات، التي يكون فيها ق مقعراً
٤- نقط الانعطاف إن وجدت
٥- زوايا الانعطاف

[7] يمثل الشكل المجاور ق'(س) جد فترات التقعر ونقط الانعطاف



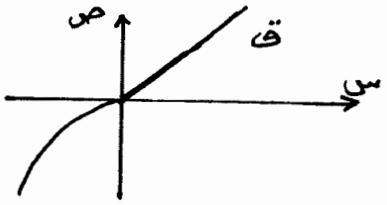
اذا كانت س = ٢، س = ٦
هما نقطتان حرجتان فجد القيم القصوى والتزايد والتناقص للاقتران ق(س).

[8] ارسم ق(س) إذا كان ق(٠) = ٢
ق'(س) > ٠ عندما |س| < ١
ق'(س) < ٠ عندما |س| > ١
ق''(س) > ٠ عندما س < ٠
ق''(س) < ٠ عندما س > ٠

[9] معتمداً على الجدول الآتي ارسم ق حيث ق(١) = ٢

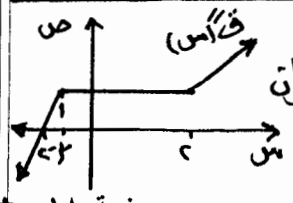
س	-١	١	٣
ق'	٠	٥	٠
ق''	٥	٠	-٥

[10] ارسم شكلاً تقريبياً لـ ق'(س)



[11] اذا كان ق(س) = س^٤ - ٤س^٣ ، س ∈ [-١، ٤]
فجد القيم القصوى للإقتران وبين نوعها ثم جد فترات التقعر ونقط الانعطاف وزوايا الانعطاف

[12] جد مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران ق نقطة إنعطاف



قوانين هامة جداً ، حفظ "

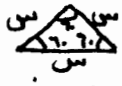
١ المسافة بين نقطتين

ف = $\sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2}$

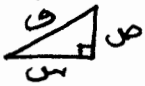
٢ المثلثات

م - م = $\frac{1}{2}$ س × ع

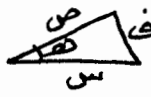
ب - م = $\frac{1}{2}$ س ص جا هـ



ج - م = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2

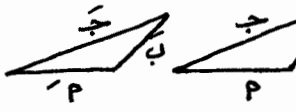


د - ف^2 = س^2 + ص^2

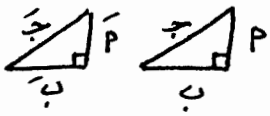


هـ - ف^2 = س^2 + ص^2 - ٢ س ص جتا هـ

و - تشابه المثلثات



$\frac{م}{م'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج'}$



$\frac{م}{ب} = \frac{م'}{ب'}$

$\frac{م}{ج} = \frac{م'}{ج'}$ ، $\frac{ب}{ج} = \frac{ب'}{ج'}$

إستخدامات تشابه المثلثات

١- مثلث داخل مثلث

٢- إسطوانه داخل مخروط

٣- مخروط داخل مخروط

٤- مستطيل داخل مثلث

الحجوم والمساحات الكلية

١- حجم متوازي المستطيلات

ح = س × ص × ع

م = ٢ س ص + ٢ س ع + ٢ ص ع

١ الإسطوانة

ح = π س^2 ع

م$_{الكلية}$ = ٢π س^2 + ٢π س ع

م$_{الجانبية}$ = ٢π س ع

٣ المخروط

ح = $\frac{1}{3}$ π س^2 ع

م$_{الجانبية}$ = π س ل

س : نصف قطر
ع : الارتفاع
ل : طول الراسم

٤ الكرة

س = نصف قطر

ح = $\frac{4}{3}$ π س^3

م = ٤π س^2
السطح الكروي

٥ الدائرة

م = π س^2

ح = ٢π س

ح : المحيط
م : المساحة
س : نصف القطر

٦ المربع

م = س^2 / ح = ٤س

ف = $\sqrt{2}$ س

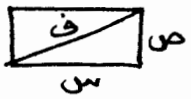
مساحة المربع بدلالة القطر، المحيط

م = $\frac{ف^2}{2}$ ، ح = $2\sqrt{2}$ ف

البعد بين نقطة عن المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ والنقطة (س$_1$ ، ص$_1$)

ف = $\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

٨ المستطيل

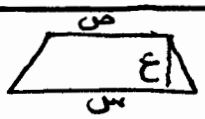


م = س ص

ح = ٢س + ٢ص

ف = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

مساحة شبه المنحرف



م = $\frac{1}{2}$ (س + ص) × ع

مساحة القطاع الدائري

م = $\frac{1}{2}$ س^2 هـ

طول القوس = س × هـ

المعدلات المرتبطة بالزمن.

نعين هذا النوع من الاسئلة نجد كلمة جد معدل تغير أو السرعة.

خطوات الحل

١ نرسم فكرة السؤال على قدر الامكان واذا اعطيت الرسمة في السؤال

٢ إذا كان هناك مقادير ثابتة، توابت. نضعها على الرسم

٣ نجد علاقة بين المعطيات في السؤال

٤ نشتق ضمنياً بالنسبة للزمن.

مثلاً مشتقة (س) هي $\frac{د س}{د ن}$

مشتقة ($س^2$) هي $٢ س \frac{د س}{د ن}$

امثلة :-

١ مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ١٠٠ سم/ ث جد معدل تناقص حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم

الحل:-

$ح = س^3$

$\frac{د ح}{د ن} = ٣ س^2 \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د ح}{د ن} = ٣ \times ١٠^2 \times \frac{-١}{١٠٠٠} = -٣٠٠$ سم^3/ ث

$\frac{د س}{د ن} = -١٠٠$

$س = ١٠$

٢ قرص دائري يتمدد بالحرارة فتزداد مساحته بمعدل ١٠ سم^2/ د جد معدل التغير في محيط القرص عندما يكون نصف قطره ٥ سم

الحل:-

$ح = ٢ \pi س$

$\frac{د ح}{د ن} = ٢ \pi \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د ح}{د ن} = ٢ \pi \times \frac{١}{\pi} = ٢$

$س = ٥$ سم

$\frac{د م}{د ن} = ١٠$

$م = \pi س^2$

$\frac{د م}{د ن} = ٢ \pi س \frac{د س}{د ن}$

$١٠ = ٢ \pi \times ٥ \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د س}{د ن} = \frac{١}{\pi}$

٣ خزان ماء اسطواني الشكل قطر قاعدته ٢٠ م يخرج منه الماء بمعدل ١٠ م^3/ د جد سرعة إنخفاض سطح الماء في الخزان

الحل:-

$ح = \pi س^2 ع$

$ح = ١٠٠ \pi ع$

$\frac{د ح}{د ن} = ١٠٠ \pi \frac{د ع}{د ن}$

س ثابتة = ١٠ م

$\frac{د ح}{د ن} = -١$

$-١ = ١٠٠ \pi \frac{د ع}{د ن}$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{-١}{١٠٠ \pi}$ م

٤ كرة حديدية قطرها ٨ سم مغطاة بطبقة منتظمة من الجليد. فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل ١٠ سم^3/ د فكم

١- سرعة تناقص سمك الجليد عندما يكون سمكه ٢ سم.

٢- سرعة تناقص مساحة الجليد الخارجي عند تلك اللحظة.

الحل.

١- $ح = \frac{٤}{٣} \pi (س+٤)^3$

$\frac{د ح}{د ن} = ٤ \pi (س+٤)^2 \times \frac{د س}{د ن}$

$-١٠ = ٤ \pi (٦)^2 \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د س}{د ن} = \frac{-٥}{٧٢ \pi}$

$\frac{د ح}{د ن} = -١٠$

$س = ٢$

٢- $م = ٤ \pi (٤+س)^2$

$\frac{د م}{د ن} = ٨ \pi (٤+س) \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن} = ٨ \pi \times (٦) \times \frac{-٥}{٧٢ \pi} = \frac{-١٠}{٣}$

٥ مخروط دائري قائم رأسه لاسفل ارتفاعه ١٢ سم وطول قطر قاعدته ١٢ سم، ينسكب فيه الماء بمعدل ٨ سم^3/ س فما معدل إرتفاع سطح الماء فيه. عندما يكون ارتفاع الماء فيه ٣ سم

الحل:-

$ح = \frac{١}{٣} \pi س^2 ع$

$ح = \frac{١}{٣} \pi \frac{ع^2}{٤} ع$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{\pi}{٤} ع^2 \frac{د ع}{د ن}$

$٨ = \frac{\pi}{٤} \times ٩ \times \frac{د ع}{د ن}$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{٣٢}{٩ \pi}$ سم/ ث

$\frac{س}{ع} = \frac{٦}{١٢}$

$س = \frac{ع}{٢}$

صفحة ٢٠

٦ خزان ماء مخروطي الشكل رأسه لاسفل وزاوية رأسه ٦٠°، فإذا كان الماء يتسرب من الخزان بمعدل ١ قدم³/ث وكانت حنفية تصب في الخزان بمعدل ثابت هو (ب) اوجد قيمة (ب) بحيث يكون معدل إرتفاع الماء $\frac{2}{\pi}$ قدم/ث في اللحظة التي يكون عمق الماء يساوي ٣ قدم.

الحل:-

$ح = \frac{1}{3}\pi س^2 ع$

$ح = \frac{1}{3}\pi \frac{ع^2}{9} ع$

$ح = \frac{1}{9}\pi ع^3$

$\frac{دح}{دن} = \frac{1}{3}\pi ع^2 \times \frac{دع}{دن}$

$ب - ١ = \frac{\pi}{3} \times 9 \times \frac{2}{\pi}$

$ب = ٧$ قدم³

ظا ٣٠ = $\frac{س}{ع}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{س}{ع} \Leftarrow س = \frac{ع}{\sqrt{3}}$

$\frac{دح}{دن} = ب - ١$ (الداخل الخارج)

عند ع = ٣

$\frac{دع}{دن} = \frac{2}{\pi}$

٧ يتراكم الرمل على الارض بمعدل $\frac{32\pi}{3}$ سم³/د ليكون كومة مخروطية بحيث يكون إرتفاعها يساوي قطر القاعدة، جد معدل التغير في مساحة القاعدة بعد ٨ دقائق.

الحل:-

$ح = \frac{1}{3}\pi س^2 ع$

$ع = ٢س$

$ح = \frac{2}{3}\pi س^3$

$\frac{دح}{دن} = ٢\pi س^2 \frac{دس}{دن}$

بعد ٨د

$ح = \frac{32\pi}{3} \times 8$

$ح = \frac{256\pi}{3} س^3$

$\frac{256\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi س^3$

$س = ٢$

$\frac{دح}{دن} = ٢\pi س^2 \frac{دس}{دن}$

$\frac{32\pi}{3} = ٢\pi \times ٤ \times \frac{دس}{دن}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{1}{12}$

$\frac{دح}{دن} = ٢\pi س \frac{دس}{دن} = ٢\pi \times ٢ \times \frac{1}{12}$

$= \frac{\pi}{3}$ سم²/د

٨ صفيحة معدنية مثلثة الشكل، ارتفاعها يساوي نصف قاعدتها تتمدد بالحرارة فتزايد مساحتها بمعدل ٠.٥ سم²/ث، جد معدل التغير في طول قاعدة الصفيحة عندما يصبح طولها ١٠ سم.

٩ إسطوانة دائرية قائمة إرتفاعها يساوي $\frac{7}{6}$ طول قطر قاعدتها دائماً فإذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل ١ سم/ث فجد معدل التغير في حجم هذه الاسطوانة عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم.

الحل:

$ح = \pi س^2 ع$

$ح = \pi(\frac{ع}{2})^2 ع$

$ح = \frac{9}{49}\pi ع^3$

$\frac{دح}{دن} = \frac{9\pi}{49} \times 3 \times ع^2 \frac{دع}{دن}$

$\frac{دح}{دن} = \frac{9\pi}{49} \times 3 \times ١٤ \times$ (١.٠) $= ٨٠\pi$

$ع = \frac{7}{6}(٢س)$

$ع = \frac{7}{3}س$

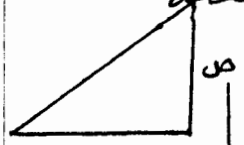
$\frac{دع}{دن} =$ (١.٠)

$س = \frac{3ع}{7}$

$ع = \frac{7}{3} \times 6 = ١٤$

١٠ في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ١٢ سم، ١٦ سم فإذا كان الضلع الاول يزداد بمعدل ٢ سم/ث وطول الضلع الثاني ينقص بمعدل ١ سم/ث بحيث ان المثلث يبقى محافظاً على شكله جد معدل التغير في مساحة المثلث بعد ٢ ثانية من تلك اللحظة.

الحل:-



$م = \frac{1}{2} س \times ص$

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2}(س \frac{دص}{دن} + ص \frac{دس}{دن})$

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2}(١٦ \times -١ + ١٤ \times ٢)$

$= \frac{1}{2} \times (-١٦ + ٢٨) = ٦$

$\frac{دس}{دن} = ٢$

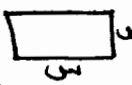
$\frac{دص}{دن} = -١$

بعد ٢ ث

$س = ١٢ + ٢ \times ٢ = ١٦$

$ص = ١٦ - ٢ \times ١ = ١٤$

١١ يزداد طول ضلع مستطيل بمعدل ٤ سم/د ويتناقص الضلع الاخر بحيث تبقى مساحته ثابتة وتساوي ٤٠ سم² فما معدل التغير في محيط المستطيل عندما يكون الضلع المتزايد ٨ سم؟



$ح = ٢س + ٢ص$

$= ٢س + \frac{٨٠}{س}$

$\frac{دح}{دن} = ٢\frac{دس}{دن} - ٨٠ \times \frac{دس}{دن} \times \frac{1}{س^2}$

$= ٢ \times ٤ - \frac{٤ \times ٨٠}{٦٤}$

$= ٣$ سم/ث

$\frac{دس}{دن} = ٤$ سم/ث

$م = ٤٠$

$م = س \times ص$

$ص = \frac{٤٠}{س}$

١٢ حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات بعداً قاعدته ٢٠ ، ٣٠ ، وعمقه ٢ م إذا ضخ الماء في الحوض بمعدل ٣٥ م³/د فجد سرعة إرتفاع الماء فيه

١٣ يضخ غاز داخل بالون كروي بمعدل (١٢٥) سم³/ث جد معدل الزيادة في مساحة سطح البالون عندما يكون طول قطر البالون (١٠) سم .

الحل:

$$ح = \frac{٤}{٣}\pi نق^{٣}$$

$$\frac{دح}{دن} = ٤\pi نق^{٢} \frac{دنق}{دن}$$

$$١٢٥ = ٤\pi \times ٥^{٢} \times \frac{دنق}{دن}$$

$$\frac{دنق}{دن} = \frac{٥}{٤\pi} \text{ سم/ث}$$

$$م = ٤\pi نق^{٢}$$

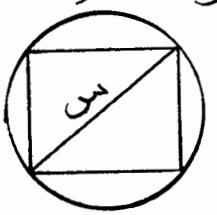
$$\frac{دم}{دن} = ٨\pi نق \frac{دنق}{دن}$$

$$\frac{دم}{دن} = ٨ \times ٥ \times \pi \times \frac{٥}{٤\pi}$$

$$\frac{دم}{دن} = ٥٠ \text{ سم}^{٢}/\text{ث}$$

١٤ تتمدد دائرة بحيث يزداد طول قطرها بمعدل ٦ سم/د ، رسم مربع داخل الدائرة واخذ يتمدد معها بحيث تبقى رؤوسه ملامسة لها جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول قطر الدائرة ١٠ سم

الحل:-



م = مساحة الدائرة - مساحة المربع

$$م = \frac{\pi}{٤} س^{٢} - \frac{س^{٢}}{٢}$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{\pi}{٢} س \frac{دنق}{دن} - س \frac{دس}{دن}$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{\pi}{٢} \times ١٠ \times ٦ - ١٠ \times ٦$$

$$= ٦٠ (\frac{\pi}{٢} - ١) = ٦٠ (\frac{\pi - ٢}{٢})$$

$$\frac{دم}{دن} = ٣٠ (\pi - ٢) \text{ سم}^{٢}/\text{د}$$

مساحة الدائرة $= \pi (نق)^{٢}$

$$= \frac{\pi}{٤} س^{٢}$$

م المربع بدلالة قطره

$$م = \frac{س^{٢}}{٢}$$

١٥ خطان حديديان يميل أحدهما على الآخر بزاوية وينتقيان في النقطة (م) . يسير القطار P على احدهما بسرعة ٨٠ كم/س مقتربا من (م) ، ويسير القطار ب على الخط وبسرعة ٥٠ كم/س مقتربا من (م) عند الساعة ٩ صباحا كان القطاران على بعد ١٠ كم ، ١٨٠ كم من (م) . جد معدل إقتراب القطارين من بعضهما عند ١١ صباحا .

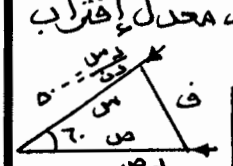
الحل:- $ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س ص \text{ جتا} ٦٠$

$$ف = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢} - س ص}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ س \frac{دس}{دن} + ٢ ص \frac{دص}{دن} - س \frac{دص}{دن} - ص \frac{دس}{دن}}{٢ \sqrt{س^{٢} + ص^{٢} - س ص}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{-٢٢٥٠ - ٨٠ \times ٥٠ \times ٢ + ٥٠ \times ٨٠ + ٨٠ \times ٨٠}{٢ \sqrt{٥٠^{٢} + ٨٠^{٢} - ٨٠ \times ٥٠}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٧١٠٠}{١٤٠} = \frac{٧١٠}{١٤} \text{ كم/س}$$



$$\frac{دص}{دن} = -٨٠$$

$$س = ١٨٠ - ٢ \times ٥٠ = ٨٠$$

$$ص = ١٠ - ٢ \times ٢٠ = ٥٠$$

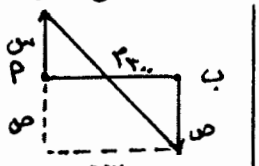
١٦ إنطلق شخص من النقطة P متجها شمالا راكبا دراجة هوائية تسير بسرعة ٦ م/ث ، وبعد ٣٠ ث ومن النقطة ب الواقعة على بعد ٣٢٠٠ م شرق P إنطلق شخص ثان متجها جنوبا راكبا دراجة هوائية تسير بسرعة ٥ م/ث جد معدل التغير في المسافة بين الشخصين بعد ٢٠ ث من إنطلاق الدراجة الثانية .

الحل:- $ف = \sqrt{(س+ص)^{٢} + (٣٠٠)^{٢}}$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(س+ص) \times (\frac{دص}{دن} + \frac{دس}{دن})}{٢ \sqrt{(س+ص)^{٢} + (٣٠٠)^{٢}}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{(٣٠٠ + ١٠٠) \times (٦ + ٥)}{٢ \sqrt{(٣٠٠ + ١٠٠)^{٢} + (٣٠٠)^{٢}}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{١١٧٤٠٠}{٥٠٠} = \frac{٤٤}{٥} \text{ م/ث}$$



$$\frac{دس}{دن} = ٦ \text{ م/ث}$$

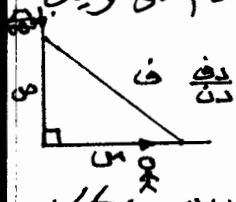
$$\frac{دص}{دن} = ٥ \text{ م/ث}$$

$$س = ٦ \times (٢٠ + ٢) = ٣٠٠ \text{ م}$$

$$ص = ٥ \times ٢٠ = ١٠٠ \text{ م}$$

١٧ طريقان مستقيمان متعامدان في م يسير رجل على احدهما مبتعدا عن م بسرعة ٤ كم/س . وتسير سيارة على الطريق الاخر مقتربة من م بسرعة ٥٣ كم/س ما معدل التغير في البعد بين الرجل والسيارة عندما يبعد الرجل والسيارة عن م ٣ كم ، ٤ كم على الترتيب

الحل:



$$ف = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ س \frac{دس}{دن} + ٢ ص \frac{دص}{دن}}{٢ \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٣ \times ٤ + ٤ \times -٥٣}{\sqrt{٩ + ١٦}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{-٢٠٠}{٥} = -٤٠ \text{ كم/س}$$

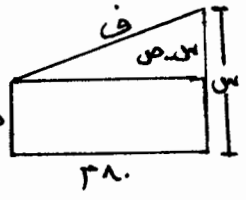
$$\frac{دس}{دن} = ٤٠ \text{ كم/س}$$

$$\frac{دص}{دن} = -٥٣ \text{ كم/س}$$

$$س = ٣ ، ص = ٤$$

١٨ قاربان P ، ب المسافة الافقية بينهما ٣٨٠ م ، بدأ القارب P بالحركة بسرعة ٢٠ م/ث وبعد ٢ ث بدأ القارب (ب) بالحركة في خط مستقيم موازٍ للقارب (P) وبنفس الإتجاه بسرعة ١٠ م/ث جد معدل التغير في المسافة بين القاربين بعد ٤ ث من انطلاق القارب P .

الحل:



$$ف = \sqrt{(س - ص)^{٢} + (٨٠)^{٢}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(س - ص)(\frac{دس}{دن} - \frac{دص}{دن})}{٢ \sqrt{(س - ص)^{٢} + (٨٠)^{٢}}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{(٨٠ - ٢٠)(٢٠ - ١٠)}{\sqrt{(٨٠ - ٢٠)^{٢} + ٦٤٠٠}}$$

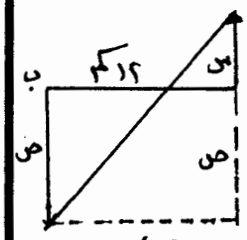
$$\frac{دف}{دن} = \frac{٦٠٠}{١٠٠} = ٦ \text{ م/ث} .$$

$$س = ٢٠ \times ٤ = ٣٨٠$$

$$ص = ١٠ \times ٢ = ٣٢٠$$

١٩ سفينتان P الى الشرق من ب والبعد بينهما ١٢ كم أبحرت P شمالاً بسرعة $\frac{3}{4}$ كم/س ، وفي نفس اللحظة أبحرت ب جنوباً بسرعة ٣ كم/س ، جد معدل التغير في البعد بين السفينتين بعد مرور ساعتين على الإبحار

الحل:



$ف = \sqrt{(س+ص)^2 + 12^2}$

$ف = \sqrt{(س+ص)^2 + 144}$

$\frac{df}{dن} = \frac{2(س+ص) \times (\frac{ds}{dن} + \frac{dص}{dن})}{2\sqrt{(س+ص)^2 + 144}}$

$\frac{df}{dن} = \frac{9 \times (\frac{3}{4} + 3)}{\sqrt{81 + 144}} = \frac{9 \times 4.5}{15}$

$\frac{df}{dن} = 4.5$ كم/س

$\frac{ds}{dن} = \frac{3}{4}$ ، $\frac{dص}{dن} = 3$

$س = \frac{3}{4} \times 2 = 3$

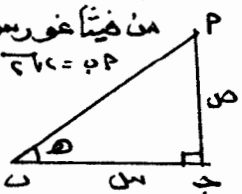
$ص = 3 \times 2 = 6$

٢٠ سفينتان P الى الجنوب من ب والبعد بينهما ٨٨ كم ، تبحر P شمالاً بسرعة ٢٤ كم/س وتبحر ب غرباً ٥ كم/س ، ما معدل التغير في البعد بينهما بعد ساعتين من الابحار

$\frac{-51}{5}$

٢١ في مثلث قائم الزاوية إذا كان طولا الضلعين المتمايل والمجاور للزاوية الحادة هـ في اللحظة ن هما ص ، س على التوالي وإذا كان معدل تزايد س هو ا سم/ث ومعدل تناقص ص هو ٢,٥ سم/ث فجد سرعة تغير الزاوية هـ في اللحظة التي يتساوى فيها الضلعان س ، ص حيث س = ٢ سم.

الحل:



ظاهـ = $\frac{ص}{س}$

قاهـ $\times \frac{dهـ}{dن} = \frac{dص}{dن} \times س - \frac{ds}{dن} \times ص$ / $(س)^2$

$2 \times \frac{dهـ}{dن} = \frac{-2.5 \times 2 - 2 \times 1}{4}$

$\frac{dهـ}{dن} = \frac{-5}{8} = -\frac{5}{16}$ راديان/ث

$\frac{ds}{dن} = 1$ ، $\frac{dص}{dن} = -2.5$

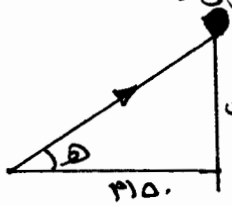
$س = ص = 2$

جتاهـ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

٢٢ سلم طوله ٣٥ م ، يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي ، وبطرفه السفلي على ارض افقية ، إذا انزلق الطرف السفلي للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢ م/د فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣ م عن الحائط.

٢٣ يرتفع بالون رأسياً الى اعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م/ث ، إذا تم رصد البالون من شاهد على الارض بمعدل ٣١٥٠ م عن موقع البالون على الارض فجد معدل تغير زاوية إرتفاع نظر المشاهد (هـ) للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع ٣١٥٠ م من سطح الارض.

الحل:



ظاهـ = $\frac{س}{3150}$

قاهـ $\times \frac{dهـ}{dن} = \frac{ds}{dن} \times \frac{1}{3150}$

$\frac{dهـ}{dن} = \frac{42}{3150}$

$\frac{dهـ}{dن} = \frac{42}{3000}$

$\frac{dهـ}{dن} = \frac{7}{500}$ راد/ث

$\frac{ds}{dن} = 42$ م/ث

$س = 3150$ م

ظاهـ = $\frac{3150}{3150} = 1$

هـ = $\frac{\pi}{4}$ ، جتاهـ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

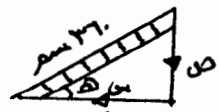
٢٤ سلم طوله ٣٦٠ سم ، يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على ارض افقية إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٩٠ سم/ث وفي لحظة ما كان الطرف السفلي للسلم على بعد ١٨٠ سم من الحائط فجد عندها في اللحظة

أ - سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم

ب - معدل تغير في مساحة المثلث

جـ - سرعة تغير زاوية السلم مع الارض.

الحل:



أ. $ص = \sqrt{(360)^2 - س^2}$

$\frac{dص}{dن} = \frac{-2س \frac{ds}{dن}}{2\sqrt{(360)^2 - س^2}}$

$\frac{ds}{dن} = 90$ ، $ص = \sqrt{360^2 - 180^2} = 180\sqrt{3}$

$\frac{dص}{dن} = \frac{-90}{3\sqrt{3}}$

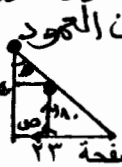
ب. $م = \frac{1}{2} س \times ص \Leftarrow \frac{dم}{dن} = \frac{1}{2}(س \times \frac{dص}{dن} + ص \times \frac{ds}{dن})$

$\frac{dم}{dن} = \frac{1}{2}(180 \times \frac{-90}{3\sqrt{3}} + 90 \times 180\sqrt{3}) = \frac{16200}{3\sqrt{3}}$

جـ. جتاهـ $= \frac{س}{360} \Leftarrow -جاهـ \frac{dهـ}{dن} = \frac{ds}{dن} \times \frac{1}{360}$

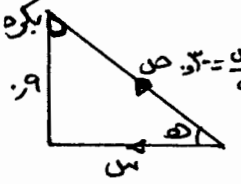
$\frac{dهـ}{dن} = \frac{-1}{360\sqrt{3}}$

٢٥ رجل طوله ١٨٠ سم ، يقف امام مصباح كهربائي يرتفع عن سطح الارض بمقدار ٥٤٠ سم ، إذا أخذ الرجل في الاقتراب من المصباح بمعدل ٣٠ سم/ث فجد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد ١٨٠ سم من قاعدة المصباح



٢٤ يقف رجل على رصيف حوض السفن ويسحب حبلاً أحد طرفيه متصل بقارب بمعدل ٠,٣ م/ث وطرفه الآخر يميل بكره ثم تضع ٠,٩ م عن خط سير القارب، فجد سرعة تغير الزاوية المحصورة بين الحبل وخط سير القارب على بعد ١,٢ م عن الرصيف

الحل:-



$\frac{دص}{دن} = -٠,٣$

$س = ١,٢$

$ص^٢ = ١,٢^٢ + ٠,٩^٢ = ١,٥^٢$

$جتاهـ = \frac{١,٢}{١,٥} = \frac{٤}{٥}$

$ظاهـ = \frac{٠,٩}{ص}$

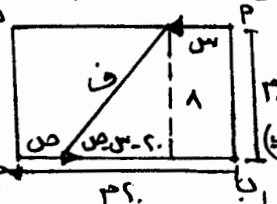
$جتاهـ \times \frac{دهـ}{دن} = -٠,٩ \times \frac{دص}{دن} \times \frac{١}{ص^٢}$

$\frac{٤}{٥} \times \frac{دهـ}{دن} = -٠,٩ \times -٠,٣ \times \frac{١}{٢,٢٥}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{٣}{٤٠}$ راد/ث

٢٥ ملعب على شكل مستطيل كما في الشكل تدحرجت كرة من P باتجاه د، وبسرعة ٣ م/ث وفي اللحظة نفسها بدأت كرة أخرى الحركة من ج الى ب، بسرعة ٤ م/ث ما معدل التغير في البعد بين الكرتين بعد مرور ثانيتين على بدء الحركة.

الحل:-



$ف = \sqrt{٨^٢ + (٢٠-س-ص)^٢}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(٢٠-س-ص)(-\frac{دس}{دن}-\frac{دص}{دن})}{٢\sqrt{٦٤+(٢٠-س-ص)^٢}}$

$\frac{دس}{دن} = ٣$ ، $\frac{دص}{دن} = ٤$

$س = ٣ \times ٢ = ٦$

$ص = ٤ \times ٢ = ٨$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(٢٠-٦-٨)(-٣-٤)}{٢\sqrt{٦٤+(٢٠-٦-٨)^٢}}$

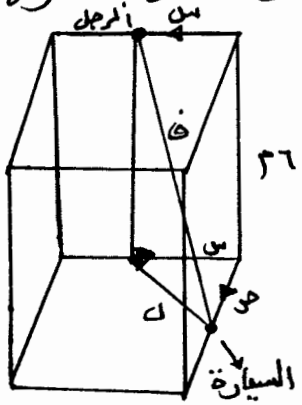
$= \frac{-٤٢}{١٠} = -٤,٢$

٢٦ ملعب كرة كما في المثال السابق تدحرجت كرة من P باتجاه د وبسرعة ٣ م/ث وفي اللحظة نفسها بدأت كرة أخرى الحركة من ج الى ب بسرعة ٤ م/ث ما معدل التغير في البعد بين الكرتين بعد مرور (٤ ث) من بدء الحركة.

٢٧ مربع تتمدد أضلاعه بمعدل ٤ سم/د رسمت دائرة داخل المربع وأخذت تتمدد مع المربع والدائرة بحيث تبقى ملامسة لأضلاعه جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة، عندما يكون طول ضلع المربع ٢ سم

٢٨ جسر للمشاه يرتفع عن مستوى الشارع ٣٦ م، يسير عليه رجل بمعدل ٣ كم/س وفي اللحظة نفسها مرت من تحته سيارة بسرعة ٦٠ كم/س، جد معدل إبتعاد السيارة عن الرجل بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة

الحل:-



$ف = \sqrt{ل^٢ + ٣٦^٢}$

$ف = \sqrt{ص^٢ + س^٢ + ٣٦^٢}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ص\frac{دص}{دن} + ٢س\frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{٣٦^٢ + ص^٢ + س^٢}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{\frac{١}{٤٠} \times ١ \times ١ + \frac{١}{٤٠} \times ٣٦ \times ١}{\sqrt{١ + \frac{١}{٤٠^٢} + ٣٦}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{\frac{٤١}{٤٠}}{\sqrt{٣٧ + \frac{١}{٤٠^٢}}}$

$\frac{دس}{دن} = ٣$ ، $\frac{دص}{دن} = ٦٠$

$ل^٢ = ف^٢ - ٣٦^٢$

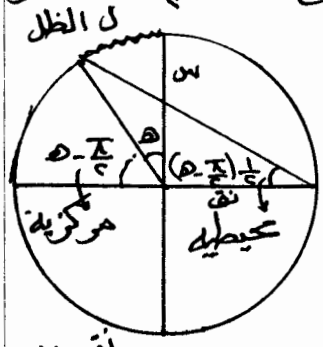
$ل^٢ = س^٢ + ص^٢$

$س = ١ \times \frac{٣}{٦٠} = \frac{١}{٢٠}$

$ص = ١ \times \frac{٦٠}{٦٠} = ١$

٢٩ مضمار سباق دائري يوجد على طرف قطره مصدر ضوء ينطلق حصان من نهاية قطر آخر عمودي على القطر الأول مقتربًا من المركز ٤ كم/د جد سرعة تغير ظل الحصان على المضمار عندما يقطع الحصان $\frac{١}{٤}$ المسافة عن المركز

الحل:-



طول القوس = نق × هـ

$ل = نق \times هـ$

$\frac{دل}{د} = نق \times \frac{دهـ}{دن}$

$= نق \times \frac{٣٢}{٥ نق}$

$\frac{دل}{دن} = \frac{٣٢}{٥}$

$ظا\frac{١}{٢}(\frac{\pi}{٢}-هـ) = \frac{نق-س}{نق}$

$ظا^٢(\frac{\pi}{٤}-\frac{هـ}{٢})(-\frac{دهـ}{٢دن}) = \frac{-دس}{دن}$

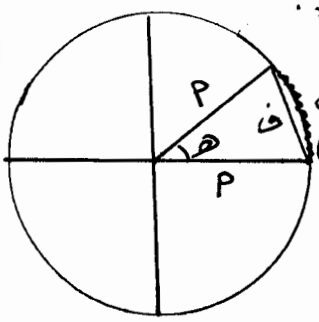
$(ظا^٢(\frac{\pi}{٤}-\frac{هـ}{٢})+١)(\frac{دهـ}{٢دن}) = \frac{-٤}{نق}$

$\frac{دهـ}{٢دن} = \frac{-٤}{نق} \times \frac{٥}{٤}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٣٢}{٥ نق}$

[٣٠] بدأت نقطة بالحركة على دائرة مركزها (٠،٠) ومن النقطة (P ، ٠) بعكس عقارب الساعة بحيث يزداد طول القوس الذي ترسمه في اثناء حركتها بمعدل ٨ سم/ث جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (P ، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{3}$.

الحل :-



$ف = \sqrt{P^2 + P^2 - 2P \times P \times جتا هـ}$

$ف = \sqrt{2P^2 - 2P^2 جتا هـ}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{-2P^2 جا هـ \frac{دهـ}{دن}}{2\sqrt{2P^2 - 2P^2 جتا هـ}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{-P^2 جا \frac{\pi}{3} \times \frac{8}{P}}{\sqrt{2P^2 - 2P^2 \times \frac{1}{2}}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{-P \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8}{P^2}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{-8P \times \sqrt{3}}{4P} = -4\sqrt{3}$

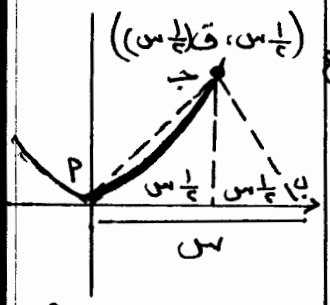
$ف = \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times س \times \frac{1}{4} س^2$

$= \frac{1}{8} س^3$

$\frac{دم}{دن} = \frac{3}{8} س^2 \times \frac{دس}{دن}$

$= \frac{3}{8} \times 64 \times 96 = 96$



$ق(\frac{1}{2} س) = \frac{1}{4} س^2$

س بعد ثانيتين

$س = 2 \times 4 = 8$

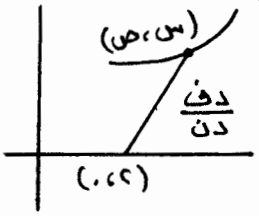
$ل = P \times هـ$

$\frac{دل}{دن} = P \times \frac{دهـ}{دن}$

$8 = P \times \frac{دهـ}{دن} \Leftarrow \frac{دهـ}{دن} = \frac{8}{P}$

[٣١] تتحرك نقطة على منحنى الاقتران $ق = \sqrt{س^2 + 5}$ بحيث يزداد الاحداثي السيني لها بمعدل ٣ سم/ث اوجد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٠،٢) عندما س = ٥

الحل:



$ف = \sqrt{(ص - 0)^2 + (س - 2)^2}$

$ف = \sqrt{ص^2 + (س - 2)^2}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{2ص \frac{دص}{دس} + 2(س-2)\frac{دس}{دن}}{2\sqrt{ص^2 + (س-2)^2}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{2 \times 5 \times 3 + 2 \times 3}{2\sqrt{25 + 9}} = \frac{24}{2\sqrt{34}}$

[٣٢] بدأت النقطتان ب ، جـ الحركة معاً من نقطة الاصل (P) بحيث تتحرك النقطة ب على محور السينات الموجب مبتعدة عن نقطة الاصل بسرعة ٤ وحدات/ ث وتتحرك النقطة جـ في الربع الاول وعلى منحنى الاقتران $ق(س) = س^2$ بحيث يبقى دائما طول P جـ = ب جـ =

تطبيقات القيم القصوى

نعين المسؤال من كلمة اكبر ما يمكن أو اصغر أو اقل أو اكبر أو اقرب الخ..

خطوات الحل:

1. نرسم علاقة من السؤال
2. تكون العلاقة الاصلية من كلمة اكبر أو اصغر.
3. نستبدل المتغيرات بدلالة بعضها باستخدام علاقة مساعدة من المسألة.
4. نشتق إشتقاق عادي ثم نساوي بالصفر كي نجد أصفار المشتقة الاولى.
5. نتحقق عن طريق الرسم.

---

1) جد العددين اللذين مجموعهما ٢٠ ومجموع مربعيهما اقل ما يمكن

الحل:- العدد الاول س، العدد الثاني ص

$م = س^2 + ص^2$

$م = س^2 + (٢٠ - س)^2$

$م' = ٢س + ٢(٢٠ - س)(-١) = ٠$

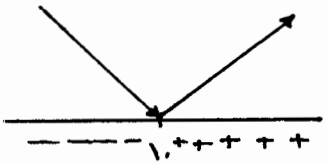
$٢س - ٤٠ + ٢س = ٠$

$٤س = ٤٠$

$س = ١٠$

$ص = ١٠$

العلاقة المساعدة: $س + ص = ٢٠$، $ص = ٢٠ - س$



---

2) قطعة ارض مستطيلة الشكل يراد إحاطتها بسياج طوله ٤٠٠ م ما اكبر مساحة لهذه القطعة

الحل:-

$م = س \times ص$

$م = س (٢٠٠ - س)$

$م = ٢٠٠س - س^2$

$م' = ٢٠٠ - ٢س = ٠ \Leftarrow س = ١٠٠$

$ص = ١٠٠$

$م = ١٠٠ \times ١٠٠ = ١٠٠٠٠$ م^2

العلاقة المساعدة: المحيط $= ٢س + ٢ص$

$٤٠٠ = ٢س + ٢ص$

$ص = ٢٠٠ - س$

---

3) إذا كان مجموع عددين ثلاثة امثال احدهما يساوي ٦٠ جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما اكبر ما يمكن

الحل: $م = س \times ص$

$م = (٦٠ - ٣ص) \times ص = ٦٠ص - ٣ص^2$

$م' = ٦٠ - ٦ص = ٠ \Leftarrow ص = ١٠$

$س = ٣٠$

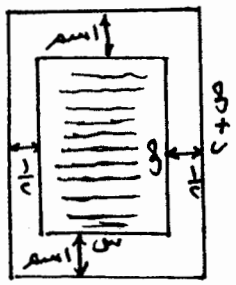
المساعدة: $س + ٣ص = ٦٠$

$س = ٦٠ - ٣ص$

---

4) صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢ سم^2 يراد طباعة اعلان عليها بحيث يترك من اعلى الصفحة واسفلها (سم) هوامش، ولكل منهما ومن الجانبين ٢ سم لكل منهما ما ابعاد الورقة لتكون المساحة المطبوعة اكبر ما يمكن

الحل:-



$م = س \times ص$

$م = س \times \left(\frac{٣٢}{س+١} - ٤\right)$

$م = \frac{٣٢س}{س+١} - ٤س$

$م' = \frac{٣٢(س+١) - (٣٢س \times ١)}{(س+١)^2} - ٤ = ٠$

$\frac{٣٢س + ٣٢ - ٣٢س}{(س+١)^2} = ٤$

$(س+١)^2 = ٨$

$س + ١ = \sqrt{٦٤} \Leftarrow س = ٣$

$ص = ٦$

$م = (س+١)(ص+٤)$

$٣٢ = (س+١)(ص+٤)$

$\frac{٣٢}{س+١} = ص + ٤$

$ص = \frac{٣٢}{س+١} - ٤$

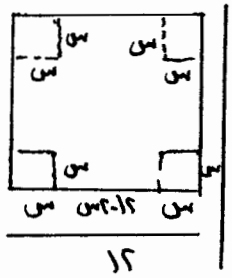
أبعاد الورقة $ص + ٤ = ٦ + ٤ = ١٠$

$س + ١ = ٣ + ١ = ٤$

---

5) صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ سم قص من زواياها الاربع اربعة مربعات متساوية طول كل منها س، ثم طويت الجوانب بحيث اصبحت الصفيحة بشكل علبة مفتوحة من الاعلى جد قيمة س ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن

الحل:-



ح = طول × عرض × ارتفاع

ح = $(١٢ - ٢س)(١٢ - ٢س)(س)$

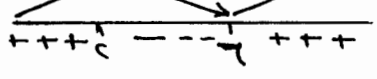
ح = $٤س^3 - ٤٨س^2 + ١٤٤س$

ح' = $١٢س^2 - ٩٦س + ١٤٤ = ٠$

$= س^2 - ٨س + ١٢ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٦) = ٠$

$س = ٢$ $س = ٦$



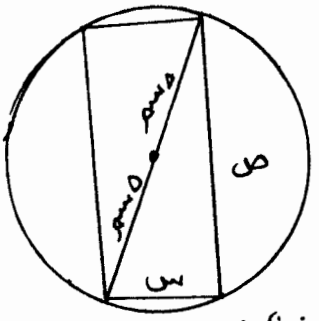
س = ٢ عظمى

---

6) يراد طباعة إعلان على ورقة مستطيلة الشكل بحيث يكون عرض كل من الهامشين في راس الورقة واسفلها ٣ سم وفي كل من الجانبين ٢ سم إذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة تساوي ٢٠٠ سم^2 فجد ابعاد الورقة التي مساحتها اصغر ما يمكن ويمكن استعمالها لطباعة الاعلان

٦ ما مساحة أكبر مستطيل يرسم داخل دائرة نصف قطرها ٥ سم

الحل:-



$م = س \times ص$

$م = س \times \sqrt{١٠٠ - س^٢}$

$م' = \sqrt{١٠٠ - س^٢} + س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٠٠ - س^٢}} = ٠$

$م' = \frac{١٠٠ - س^٢ - س^٢}{\sqrt{١٠٠ - س^٢}} = ٠$

$١٠٠ - ٢س^٢ = ٠$

$٢(٥٠ - س^٢) = ٠$

$س = ٠$ تهمل $\quad س^٢ = ٥٠$

$س = \sqrt{٥٠}$

$ص = \sqrt{٥٠}$

فيثاغورس

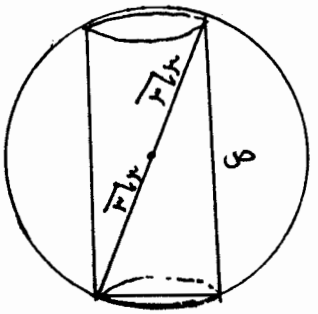
$س^٢ + ص^٢ = ١٠٠$

$ص = \sqrt{١٠٠ - س^٢}$

$م = \sqrt{٥٠} \times \sqrt{٥٠} = ٥٠$ سم^٢

٧ ما حجم أكبر اسطوانة ترسم داخل كرة نصف قطرها $٣\sqrt{٣}$ سم.

الحل:



$ح = \pi س^٢ \times ص$

$ح = \pi \frac{(١٠٨ - ص^٢)}{٤} \times ص$

$ح = \frac{\pi}{٤}(١٠٨ ص - ص^٣)$

$ح' = \frac{\pi}{٤}(١٠٨ - ٣ص^٢) = ٠$

$١٠٨ - ٣ص^٢ = ٠$

$ص^٢ = ٣٦$

$ص = ٦$

$س^٢ = ١٨$

$ح = \pi (١٨)(٦) = ١٠٨\pi$ سم^٣

فيثاغورس

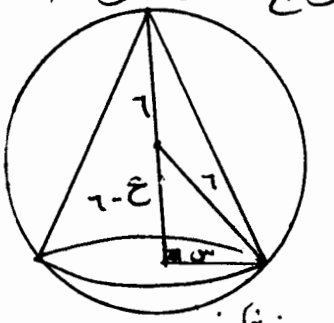
$(٣\sqrt{٣})^٢ = ص^٢ + (٢س)^٢$

$١٠٨ = ٤س^٢ + ص^٢$

$س^٢ = \frac{١٠٨ - ص^٢}{٤}$

٨ جد حجم أكبر مخروط يوضع داخل دائرة نصف قطرها ٦ سم.

الحل:-



$ح = \frac{١}{٣}\pi س^٢ ع$

$ح = \frac{١}{٣}\pi (١٢ ع - ع^٢) \times ع$

$ح = \frac{١}{٣}\pi (١٢ ع^٢ - ع^٣)$

$ح' = \frac{١}{٣}\pi (٢٤ ع - ٣ع^٢) = ٠$

$٣ع (٨ - ع) = ٠$

$ع = ٨$

$س = ٣٢$

$ح = \frac{\pi}{٣}(٣٢)(٨) = \frac{٥٦}{٣}\pi$ سم^٣

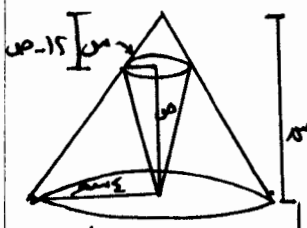
فيثاغورس

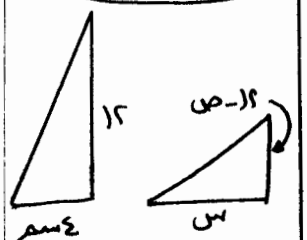
$٣٦ = س^٢ + (ع - ٦)^٢$

$س^٢ = ١٢ ع - ع^٢$

٩ جد حجم أكبر مخروط يمكن رسمه داخل مخروط بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على قاعدة الخارجي، نصف قطر المخروط الكبير ٤ سم والارتفاع ١٢ سم.

الحل:





$ح = \frac{١}{٣}\pi س^٢ ص$

$ح = \frac{١}{٣}\pi س^٢ (١٢ - ٣س)$

$ح = \frac{١}{٣}\pi (١٢ س^٢ - ٣س^٣)$

$ح' = \frac{١}{٣}\pi (٢٤ س - ٩ س^٢) = ٠$

$٣س (٨ - ٣س) = ٠$

$س = ٠$ تهمل $\quad س = \frac{٨}{٣}$

$\frac{س}{١٢ - ص} = \frac{٤}{١٢}$

$ص = ٤$

$ص = ١٢ - ٣س$

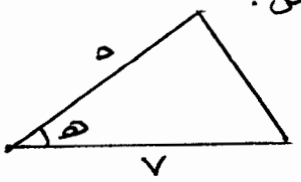
$ح = \frac{٥٦}{٢٧}\pi$ سم^٣

١٠ قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ م جد بعدي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.

١١ مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم يراد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقي المثلث جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن

١٢ مثلث طولا ضلعين فيه ٥ سم، ٧ سم والزاوية المحصورة بينهما هـ، جد قيمة هـ التي تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن.

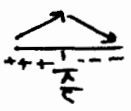
الحل:-



$م = \frac{1}{2} \times ٥ \times ٧ \times جا هـ$

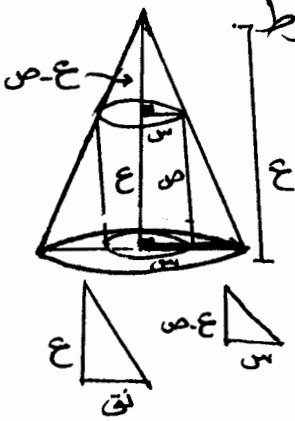
$م = \frac{٣٥}{٢} جا هـ$

$م' = \frac{٣٥}{٢} جتا هـ = ٠ \Leftarrow جتا هـ = ٠$



١٣ اثبت ان أكبر حجم لإسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط.

الحل:-



$ح = \pi س^٢ ص$

$ح = \pi س^٢ (ع - \frac{ع س}{نق})$

$ح = \pi س^٢ ع - \frac{\pi ع س^٣}{نق}$

$ح' = ٢\pi س ع - \frac{٣ ع س^٢ \pi}{نق} = ٠$

$= \pi ع س (٢ - \frac{٣ س}{نق}) = ٠$

$س = \frac{٢}{٣} نق$

$ح = \pi س^٢ \times ص$

$ح = \pi (\frac{٢}{٣} نق)^٢ (ع - \frac{ع}{نق} \times \frac{٢}{٣} نق)$

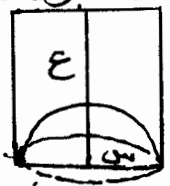
$ح = \pi \frac{٤}{٩} نق^٢ \times \frac{١}{٣} ع$

$ح = \frac{٤}{٩} (\frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع)$

$ح = \frac{٤}{٩}$ حجم المخروط

١٤ نصف كرة داخل اسطوانة قائمة المساحة الجانبية للاسطوانة ٤٠٠π سم^٢، جد طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة الذي يجعل الجزء المتبقي من الاسطوانة اكبر ما يمكن

الحل:- ح = ح (الجزء المتبقي اسطوانة) − ح (نصف الكرة)



$ح = \pi س^٢ ع - \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \pi س^٣ = \pi س^٢ \times \frac{٤٠٠\pi}{\pi س^٢} - \frac{٢}{٣} \pi س^٣$

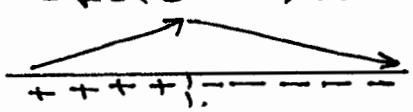
$ح = ٨٠٠\pi س - \frac{٢}{٣} \pi س^٣$

$ح' = ٨٠٠\pi - ٢\pi س^٢ = ٠$

$٢\pi (٤٠٠ - س^٢) = ٠ \Leftarrow س = ٢٠$

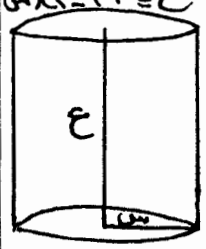
$\pi ع س^٢ = ٤٠٠\pi$

$ع = \frac{٤٠٠}{س^٢}$



١٥ إسطوانة دائرية قائمة مجموع محيط قاعدتها وارتفاعها يساوي ٦٦ سم، إحسب إرتفاع الاسطوانة الذي يجعل حجمها اكبر ما يمكن

الحل:-



محيط القاعدة + ع = ٦٦

$٢\pi س + ع = ٦٦$

$ع = ٦٦ - ٢\pi س$

$ح = \pi س^٢ ع$

$ح = \pi س^٢ (٦٦ - ٢\pi س)$

$ح = ٦٦\pi س^٢ - ٢\pi^٢ س^٣$

$ح' = ١٣٢\pi س - ٦\pi^٢ س^٢ = ٠$

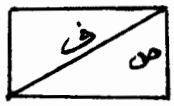
$٦\pi س (٢٢ - \pi س) = ٠$

$س = ٠$ تهمل ، $س = \frac{٢٢}{\pi}$

$ع = ٦٦ - ٢\pi \frac{٢٢}{\pi} = ٢٢$ سم.

١٦ مستطيل مساحته ١٦ سم^٢، جد بعديه عندما يكون طول قطره اصغر ما يمكن

الحل:-



$ف = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

$ف = \sqrt{\frac{١٦^٢}{ص^٢} + ص^٢}$

$ف' = \frac{-٢٥٦ \times ٢ ص^٣ + ٢ ص}{٢ \sqrt{\frac{١٦^٢}{ص^٢} + ص^٢}} = ٠$

$س ص = ١٦$

$س = \frac{١٦}{ص}$

$س^٢ = \frac{١٦^٢}{ص^٢}$

$٢ص (\frac{-٢٥٦}{ص^٤} + ١) = ٠ \Leftarrow ص^٤ = ٢٥٦$

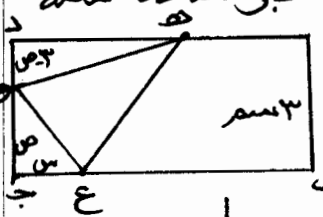
$ص = ٤$

$ص = ٠$ تهمل.

$س = ٤$

١٧ يمثل الشكل المجاور مستطيل P ب ج د فيه P ب = ٣ سم طويت الزاوية P د ج وفق الخط (و هـ) حتى إنطبق الراس د على المستقيم ب ج في النقطة ع جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث وج ع.

الحل:-



$م = \frac{١}{٢} س ص$

$م = \frac{١}{٢} س \times \frac{١}{٢} (٩ - س^٢)$

$م = \frac{٩}{١٢} س - \frac{١}{١٢} س^٣$

$م' = \frac{٩}{١٢} - \frac{٣}{١٢} س^٢ = ٠$

$\frac{١}{١٢} (٩ - ٣ س^٢) = ٠$

$س^٢ = ٣ \Leftarrow س = \sqrt{٣}$

$ص = \frac{١}{٢} (٩ - ٣) = ٣$

$م = \frac{١}{٢} \times \sqrt{٣} \times ٣ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

ع و = د و = ٣ − ص

$س^٢ + ص^٢ = (٣ - ص)^٢$

$٩ - ٦ص + ص^٢ + ص^٢ = ٩ - ٦ص + ص^٢$

$ص = \frac{١}{٢} (٩ - س^٢)$

١٨ ما مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في نقطة الأصل والرأسان الآخران على منحنى ق(س) = ٢٧ - س٢

الحل :-

م = ½ (٢س) (ص)

م = س ص

م = س (٢٧ - س٢)

م = ٢٧س - س٣

م' = ٢٧ - ٣س٢ = ٠ ⇐ ٣س٢ = ٢٧ ⇐ س٢ = ٩ ⇐ س = ٣ (تهمل)

ص = ١٨

م = ½ × ٣ × ١٨ = ٥٤

١٩ ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س٢ ، هـ(س) = ٦ - س٢ بحيث أحد أضلاعه يوازي محور السينات

الحل :-

م = ٢س × (هـ - ق)

م = ٢س × (٦ - س٢ - س٢)

م = ١٢س - ٤س٣

م' = ١٢ - ١٢س٢ = ٠

س٢ = ١ ⇐ س = ١

م = ١٢ - ٤ = ٨

٢٠ جد بعدي أكبر مستطيل من حيث المساحة يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = ٣٦ - س٢

الحل :-

م = ٢س × ص

م = ٢س × (٣٦ - س٢)

م = ٧٢س - ٢س٣

م' = ٧٢ - ٦س٢ = ٠

٦س٢ = ٧٢

س٢ = ١٢ ⇐ س = ٢√٣

ص = ٣٦ - ١٢

ص = ٢٤

٢١ جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٥) ويقطع من الربع الأول في المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أقل ما يمكن .

٢٢ م ب شارع مستقيم طوله ٢٠ كم وتقع المدينة جـ شمال النقطة م وتبعد عنها ١٢ كم وتقع المدينة د شمال النقطة ب وتبعد عنها ١٠ كم ، عين موقع محطة المحروقات التي تقع على الشارع بحيث يكون مجموع مربعي بعديها عن المدينتين أقل ما يمكن

الحل :

م = س٢ + ص٢

م = ١٠٠ + ل٢ + ١٤٤ + (٢٠ - ل)٢

م = ١٠٠ + ل٢ + ٤٤١ + ٤٠٠ - ٤٠ل + ل٢

م' = ٢ل٢ - ٤٠ل + ٦٤٤

م' = ٤ل - ٤٠ = ٠

ل = ١٠

س٢ = ١٠٠ + ل٢

ص٢ = ١٤٤ + (٢٠ - ل)٢

٢٣ م ب جـ د مستطيل فيه م ب = ٦٠ سم

ب جـ = ٨٠ سم وبداخله متوازي أضلاع أ ن ل د حيث تقع رؤوسه على أضلاع المستطيل كما في الشكل المجاور جد قيمة س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع أكبر ما يمكن علماً بأن أ ن = ٢٠ سم

الحل :-

م = مستطيل - أربع مثلثات

م = (٦٠ × ٨٠) - [٢ (½ س × ٢س) + ٢ × ½ (٨٠ - س) (٦٠ - ٢س)]

م = ٢٢٠س - ٤س٢

م' = ٢٢٠ - ٨س = ٠ ⇐ س = ٥٥/٢

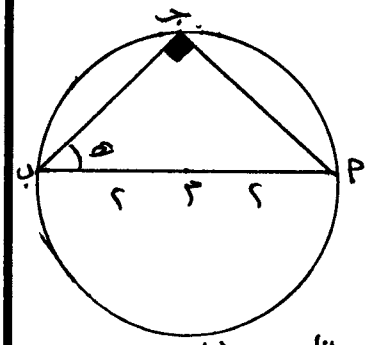
أكبر مساحة = ٢٢٠ × ٥٥/٢ - ٤ (٥٥/٢)٢

= ٣٠٢٥ سم٢

كل مثلثين متقابلين متساويين

٢٤ الشكل المجاور يمثل دائرة قطرها $\overline{AB}$ طوله ٤ سم بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه النقطة P لترسم مع القطر P ب مثلثا قائم الزاوية في جـ جد قياس الزاوية P ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

الحل:-



$م = \frac{1}{2} \times ٤ \times ب جـ \times جا هـ$

$م = \frac{1}{2} \times ٤ \times ٤ جتا هـ جا هـ$

$م = ٤ \times ٢ جا هـ جتا هـ$

$م = ٤ جا ٢هـ$

$م' = ٨ جتا ٢هـ = ٠$

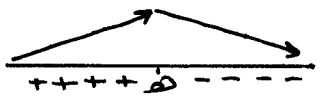
$جتا ٢هـ = ٠$

$٢هـ = \frac{\pi}{2}$

$هـ = \frac{\pi}{4}$

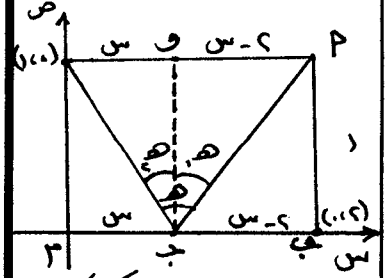
$جتا هـ = \frac{ب جـ}{٤}$

$ب جـ = ٤ جتا هـ$



٢٥ يمثل الشكل المجاور مستطيل P ب جـ د فيه ب (٢، ٠)، د (٠، ١) فرضت النقطة جـ على الضلع $\overline{AB}$ (P ب)، وعلى بعد (س) ر سم من نقطة الأصل م، وصل جـ P، جـ د فتكونت الزاوية المتغيرة هـ جد قيمة س التي تجعل هـ في نهايتها العظمى

الحل:-



$ظا(هـ + هـ) = ظا$

$ظا = \frac{ظا هـ + ظا هـ}{1 - ظا هـ ظا هـ}$

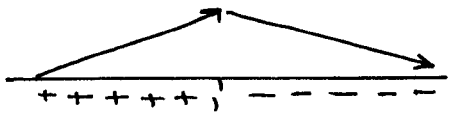
$ظا = \frac{\frac{٢-س}{1} + \frac{٣}{1}}{1 - (٢-س)(س)}$

$ظا = \frac{٢}{1 - ٢س + س^٢}$

$قا^٢ هـ \times هـ = \frac{-٢(-٢+٢س)}{(1-٢س+س^٢)^٢}$

$هـ = \frac{-٢(-٢+٢س)}{(1-٢س+س^٢)^٢ (قا^٢ هـ)} = ٠$

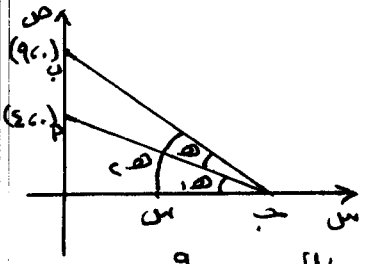
$-٢(-٢+٢س) = ٠ \Leftarrow س = ١$



نقيم عمود وجـ كي نكون مثلثين فنضع $هـ = هـ_١ + هـ_٢$

٢٦ P (٠، ٤)، ب (٠، ٩) نقطتان ثابتتان جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب جد الاحداثي السيني للنقطة جـ الذي يجعل قياس الزاوية P جـ ب أكبر ما يمكن

الحل:-



$ظا هـ = ظا(هـ_٢ - هـ_١)$

$= \frac{ظا هـ_٢ - ظا هـ_١}{1 + ظا هـ_٢ ظا هـ_١}$

$ظا هـ = \frac{\frac{٩}{س} - \frac{٤}{س}}{1 + \frac{٩}{س} \times \frac{٤}{س}}$

$ظا هـ = \frac{٥س}{س^٢ + ٣٦}$

$ظا هـ_٢ = \frac{٩}{س}$

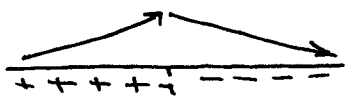
$ظا هـ_١ = \frac{٤}{س}$

$قا^٢ هـ \times هـ = \frac{٥(س^٢+٣٦) - ٢(٥س)(س)}{(س^٢+٣٦)^٢} = ٠$

$٥س^٢ + ١٨٠ - ٢س^٢ = ٠$

$٥س^٢ = ١٨٠ \Leftarrow س^٢ = ٣٦$

$س = ٦$



تطبيقات إقتصادية

الايراد الكلي = د (س) = السعر × عدد الوحدات

التكلفة الكلية = ك (س)

الايراد الكلي = الربح الكلي + التكلفة الكلية

د (س) = ر (س) + ك (س)

٢٧ وجد مصنع ان التكلفة الكلية بالدينار للانتاج الإسبوعي لعزف نوع معين من تقدر بالاقتران ك (س) = $س^٣ - ٣٠س^٢ + ٥٠٠ + ٨٠س$ فإذا بيعت كل عزفة نوع بسعر ٢٨٠ دينار فكم ينتج المصنع ليجعل الربح أكبر ما يمكن.

الحل:- ر (س) = د (س) - ك (س)

ر (س) = $٢٨٠س - (س^٣ - ٣٠س^٢ + ٨٠س + ٥٠٠)$

ر (س) = $٢٨٠س - س^٣ + ٣٠س^٢ - ٨٠س - ٥٠٠$

ر' (س) = $٢٠٠ - ٣س^٢ + ٦٠س + ٨٠$ ÷ -٣

$س^٢ - ٢٠س + ٩٦٠ = ٠$

$(س - ٣٢)(س + ٣٠)$

$س = ٣٢$ $س = -٣٠$

٢٨ اتفقت احدى الجامعات مع شركة سياحية لتسيير رحلة بأن يدفع كل شخص ٦٥ دينار اذا كان عدد المشتركين ١٠٠ شخص لكن اذا زاد عدد المشتركين عن ١٠٠ شخص فسوف يتم تخفيض $\frac{1}{2}$ دينار عن كل مشترك جديد جد عدد المشتركين ليكون ايراد الشركة اكبر ما يمكن.

الحل: نعتبر عدد المشتركين بعد (١٠٠) هو س

الايراد د(س) = عدد المشتركين × سعر التذكرة

$د(س) = (١٠٠ + س)(٦٥ - \frac{1}{2}س)$

$د'(س) = (١٠٠ + س)(-\frac{1}{2}) + (٦٥ - \frac{1}{2}س)(١) = ٠$

$٥ - س = ٠$

$س = ٥$

عدد المشتركين = ١٠٠ + ٥ = ١٠٥

٢٩ اذا كان الانتاج اليومي لمصنع حديد ص طنا من نوع الحديد الجيد، س طنا من نوع الحديد الاقل جودة، فإذا كانت $ص = \frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}$ ، $س \neq ١٠$ وكان سعر الطن من الحديد الجيد يساوي مثلي سعر الطن من الحديد الاقل جودة. جد الكمية التي ينتجها المصنع يوميا من كل نوع حتى يحقق أكبر ايراد.

الحل:

نفرض سعر الحديد الاقل جودة = جـ دينار

نفرض سعر الحديد الجيد = ٢ جـ دينار

ايراد المصنع د = ٢ جـ ص + جـ س

$د(س) = ٢جـ(\frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}) + جـ س$

$د(س) = \frac{٨٠جـ - ١٠جـ س + ١٠جـ س - جـ س^٢}{١٠ - س}$

$د(س) = \frac{٨٠جـ - جـ س^٢}{١٠ - س}$

$د'(س) = \frac{(١٠ - س)(-٢جـ س) - (-١)(٨٠جـ - جـ س^٢)}{(١٠ - س)^٢}$

$د' = \frac{-٢٠جـ س + ٢جـ س^٢ + ٨٠جـ - جـ س^٢}{(١٠ - س)^٢}$

$جـ(س^٢ - ٢٠س + ٨٠) = ٠$

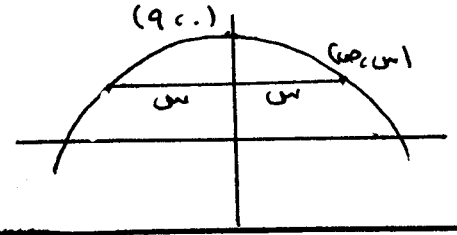
$س^٢ - ٢٠س + ٨٠ = ٠$

$س = ١٠ + ٢\sqrt{٥}$ ، $س = ١٠ - ٢\sqrt{٥}$

تهمل $١٠ + ٢\sqrt{٥}$ ، ١٠ تهمل ، $١٠ - ٢\sqrt{٥}$

$ص = \frac{٤٠ - ٥(١٠ - ٢\sqrt{٥})}{١٠ - (١٠ - ٢\sqrt{٥})} \simeq ٢,٧$ طن

٣٠ جد أكبر مساحة ممكنة لمثلث متساوي الساقين يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى ق(س) حيث ق(س) = ٩ - س^٢ كما في الشكل المجاور



٣١ نافذة محيطها (٦م) على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة إذا كان الزجاج الذي يشكل نصف دائرة ملونا ويسمح بإدخال نصف كمية الضوء الذي يسمح بإدخاله الزجاج العادي الذي يكون الجزء السفلي المتبقي من النافذة مجاورا لمنطقة المستطيلة للنافذة بحيث يسمح بإدخال اكبر كمية ممكنة من الضوء.

٣٢ قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري هـ ونصف قطر دائرته نق، حول الى محروط دائري قائم نصف قطر قاعدته س وارتفاعه ع جد قيمة هـ التي تجعل المخروط اكبر ما يمكن.