4.000

MATHEMATICS

الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي و الصناعي - الفصل الدراسي الأول

المنهاج الجديد

الوحدة الأولى :

النهايات و الاتصال

إعداد المعلم :

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

مكتبة الوسام
ALWESAM
tawjihi center & service store

الصف الثاني عشر

الفرعين العلمي والصناعي

الوحدة الاولى

النهايات والاتصال

١- مفهوم النهاية

٢- نظريات على النهايات

٣- نهاية عند الجذور

٤- نهاية الاقترانات المتشعبة

٥- نهاية القيمة المطلقة واكبر عدد صحيح

٦- نهاية اقترانات كسرية

٧- نهاية الاقترانات المثلثية

٨- الاتصال عند نقطة

٩- نظريات الاتصال

١٠- الاتصال على فترة

١١-اسئلة الوحدة وحلولها

١٢- حلول جميع تدريبات واسئلة الكتاب

١٣- اسئلة الوزارة (٢٠٠٨- ٢٠١٨) مع الحلول النموذجية

١٤- ورقة عمل على كل درس مع الحلول النموذجية

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

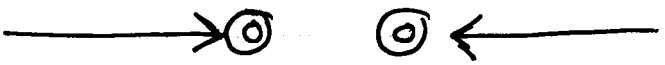
مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

النهايات

مفهوم النهاية

اذا كان لدينا الجدول التالي الذي يمثل قيم س ، وقيم ه(س) = ص للاقتران
ه(س) = س + ٣

← يمين					يسار →			
س	١٫٩	١٫٩٩	١٫٩٩٩	٢	٢٫٠٠١	٢٫٠١	٢٫١	
ه(س)	٤٫٩	٤٫٩٩	٤٫٩٩٩		٥٫٠٠١	٥٫٠١	٥٫١	



س ← ٢⁺ تعني س تقترب أو تؤول للعدد ٢ من اليمين
س > ٢

س ← ٢⁻ تعني س تقترب أو تؤول قيمة العدد (٢) من اليسار
س < ٢

نلاحظ من الجدول
كلما اقتربت قيم س من العدد ٢ من جهة اليمين (س > ٢) فإن قيم ه(س) تقترب من العدد (٥)
ويعبر عن ذلك بالرموز

نهـا ه(س) = ٥ النهاية من اليمين
س ← ٢⁺
وتقرأ : نهاية الاقتران ه(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٢ من اليمين تساوي (٥)

ونلاحظ أن
كلما اقتربت قيم س من العدد (٢) من جهة اليسار (س < ٢) فإن قيم ه(س) تقترب من العدد (٥) ويعبر عن ذلك بالرموز

نهـا ه(س) = ٥ النهاية من اليسار
س ← ٢⁻
وتقرأ : نهاية الاقتران ه(س) عندما تقترب قيم س من العدد (٢) من اليسار تساوي (٥)

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ملاحظه

س ← P⁺ تعني

س ← P⁺ كذلك س ← P⁻

P ≠ س

P⁺ : يمين العدد P (عدد أكبر من P)

P⁻ : يسار العدد P (عدد أقل من P)

نظريه

اذا كانت

هـا(س) = هـا(س) = ل

س ← P⁺ ، س ← P⁻

حيث P ، ل ∈ ح فان

هـا(س) = ل (موجودة)

س ← P

بينما اذا كانت

هـا(س) ≠ هـا(س)

س ← P⁺ ، س ← P⁻

فان هـا(س) غير موجودة

س ← P

ملاحظه

النهايه موجودة تعني أن

النهايه من اليمين = النهايه من اليسار

مثال ①

اذا كانت هـا(س) = ٦

س ← ٤⁺

وكانت هـا(س) = ٢

س ← ٤⁻

← هـا(س) غير موجودة

س ← ٤

مثال ②

اذا كانت هـا(س) = ٧

س ← ١⁺

وكانت هـا(س) = ٧

س ← ١⁻

⇐ هـا(س) = ٧ (موجودة)

س ← ١

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

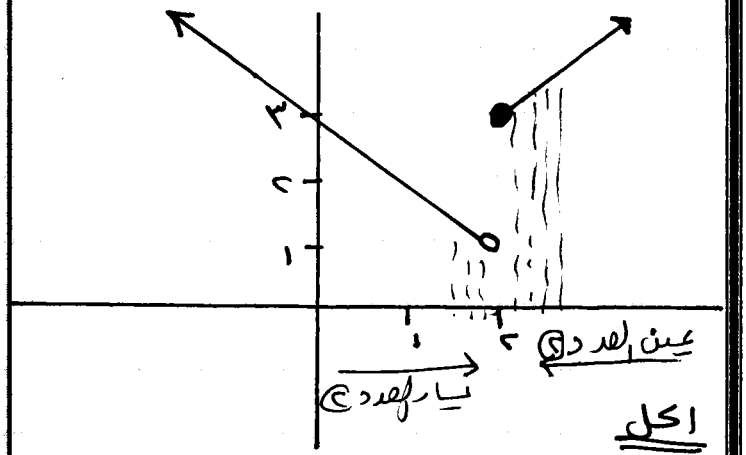
ايجاد النهاية من رسمة الأقتران

مثال توضيحي

معتمداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الأقتران $f(x)$

جد هنا $f(x)$

$x \leftarrow 2$



الحل

من خلال الرسم لابد من ايجاد النهايه من عين العدد ٢ ويساره

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$ كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليمين يقترب $f(x)$ من العدد ③

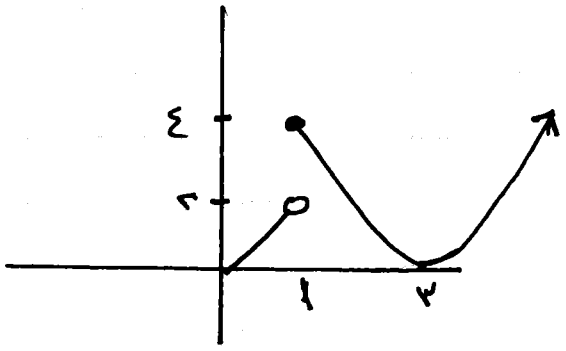
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$ كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليسار يقترب $f(x)$ من العدد ①

$\Leftarrow \lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

لأن $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$

مثال ①

معتمداً على الشكل الذي يمثل $f(x)$ أوجد



① $\lim_{x \to 3} f(x)$

$x \leftarrow 3$

الحل $\lim_{x \to 2} f(x) =$ صفر

$x \leftarrow 2$

② $\lim_{x \to 1} f(x)$

$x \leftarrow 1$

الحل

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$ ، $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$x \leftarrow 1^+$ ، $x \leftarrow 1^-$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$

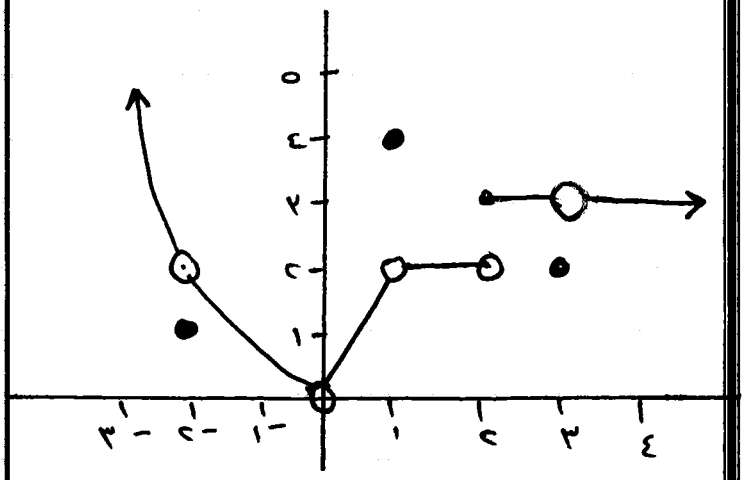
$\Leftarrow \lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

$x \leftarrow 1$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ②

اعتمد على الشكل التالي الذي يمثل منحنى $ه(س)$ في الاجابة عن الاسئلة التالية



① $\lim_{س \to ٠} ه(س)$ = صفر

② $\lim_{س \to ٢} ه(س)$ = ٢

③ $\lim_{س \to ١} ه(س)$ = ٢

④ $ه(١) = ٤$ و $ه(-٢) = ١$

⑤ $\lim_{س \to ٢} ه(س)$

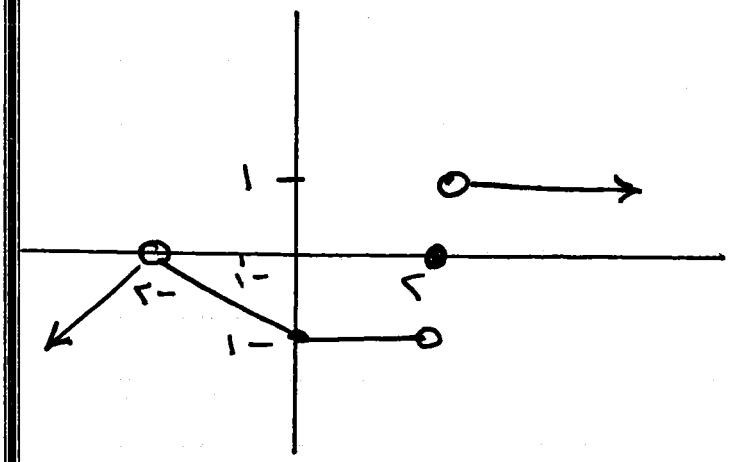
الحل

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ٣$ و $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٢} ه(س)$ غير موجودة

مثال ③

معتمداً على الشكل التالي أوجد ما يلي



① $\lim_{س \to -٢} ه(س)$ = صفر

② $\lim_{س \to ٢} ه(س)$

الحل $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ١$ و $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = -١$

$\lim_{س \to ٢} ه(س)$ غير موجودة

③ أوجد قيمة أو قيم P حيث ان $\lim_{س \to P} ه(س) = ١$

الحل $P = (-٣ ، ٣)$

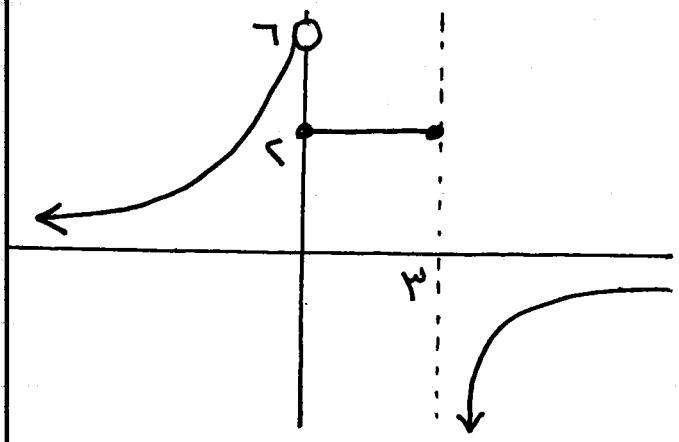
④ أوجد قيمة أو قيم P حيث ان $\lim_{س \to P} ه(س)$ غير موجودة

الحل $P = ٢$

مكتبة الوسام AL WESTAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④

بالاعتماد على الشكل الجانبي الذي يمثل منحنى $ه(س)$ ، أوجد كلاً مما يلي :



① $\lim_{س \to 3^+} ه(س) = ٢$

② $\lim_{س \to 3^-} ه(س) = ٦$

③ $\lim_{س \to 0} ه(س)$ غير موجودة

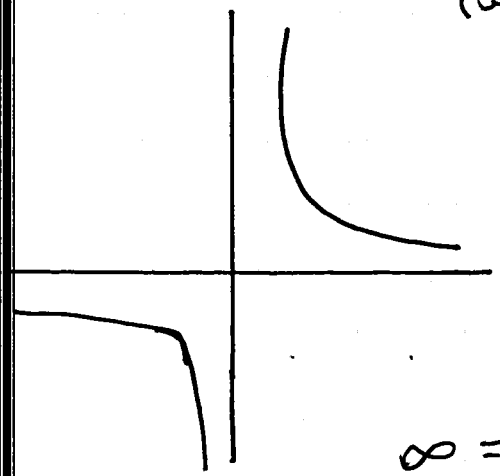
④ $\lim_{س \to +\infty} ه(س) = -\infty$

⑤ $\lim_{س \to -3} ه(س) = ٢$

⑥ $\lim_{س \to 3} ه(س)$ غير موجودة

مثال ⑤

معتمداً على الشكل الجانبي الذي يمثل منحنى $ه(س)$ أوجد $\lim_{س \to 0} ه(س)$



الحل

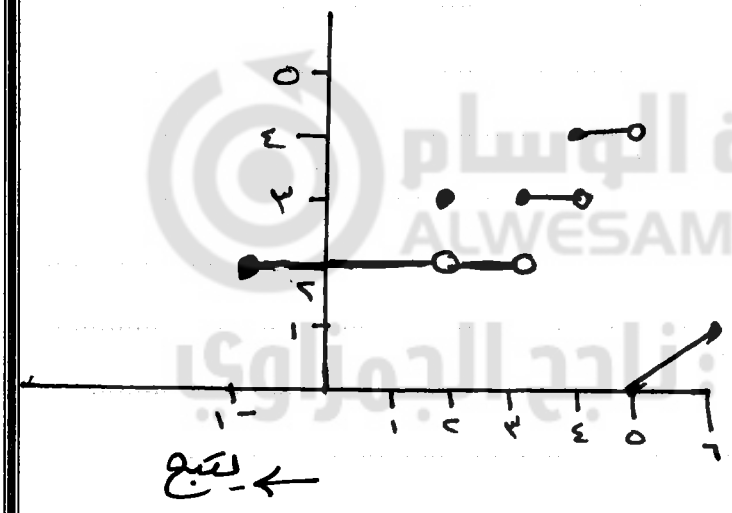
$\lim_{س \to 0^+} ه(س) = \infty$

$\lim_{س \to 0^-} ه(س) = -\infty$

$\lim_{س \to 0} ه(س)$ غير موجودة

مثال ⑥

معتمداً على الشكل التالي الذي يمثل $ه(س)$ أوجد كلاً مما يأتي



مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

① نهـا ق(س)
س ← ٤
الحل
نهـا ق(س) = ٣ ، نهـا ق(س) = ٢
س ← ٤⁺ ، س ← ٤⁻
نهـا ق(س) غير موجودة
س ← ٤

② نهـا ق(س) = ٢
س ← ٢,٥

③ نهـا ق(س)
س ← ٦
نهـا ق(س) غير موجودة (طرف فترة)
س ← ٦⁺
نهـا ق(س) = ١
س ← ٦⁻
← نهـا ق(س) غير موجودة
س ← ٦

④ نهـا ق(س)
س ← -١
نهـا ق(س) = ٢
س ← -١⁺
نهـا ق(س) = غير موجودة
س ← -١⁻
← نهـا ق(س) غير موجودة
س ← -١
طرف فترة

⑤ جد مجموعة قيم م حيث ان
نهـا ق(س) غير موجودة
س ← م
م = { ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ١- }
-١ ، ٦ طرفي فترة

⑥ جد مجموعة قيم م حيث ان
نهـا ق(س) = ٣
س ← م
م = (٢ ، ٤)

⑦ جد مجموعة قيم م حيث ان
نهـا ق(س) = ٤
س ← م⁺
الحل
م = [٤ ، ٥)

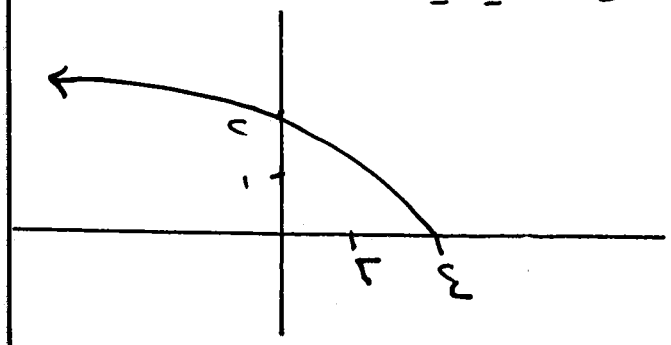
ملاحظة هامة

عند اطراف الفترات تكون النهاية بشكل عام غير موجودة لأن الفترات عند الاطراف يكون معرف من جهة واحدة فقط

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $و(س) = \sqrt{٤ - س}$ جد كلاً مما يأتي



① $\lim_{س \to ٤^+} و(س)$ غير موجود

لأن الاقتران غير معرف على يمين العدد ٤

② $\lim_{س \to ٤^-} و(س)$ = صفر

لأن الاقتران معرف على يسار العدد ٤

③ $\lim_{س \to ٤} و(س)$ غير موجود

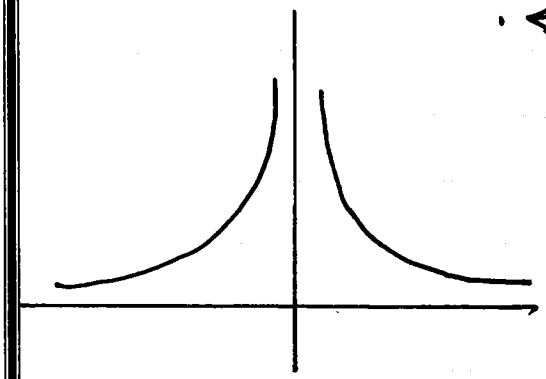
لأن $\lim_{س \to ٤^+} و(س) \neq \lim_{س \to ٤^-} و(س)$

④ $\lim_{س \to ٠} و(س) = \sqrt{٤ - ٠} = \sqrt{٤} = ٢$

مثال ⑧

الشكل المجاور يمثل منحنى $و(س) = \frac{١}{س}$

نجد $\lim_{س \to ٠} و(س)$



الحل

$\lim_{س \to ٠^+} و(س) = +\infty$

$\lim_{س \to ٠^-} و(س) = -\infty$

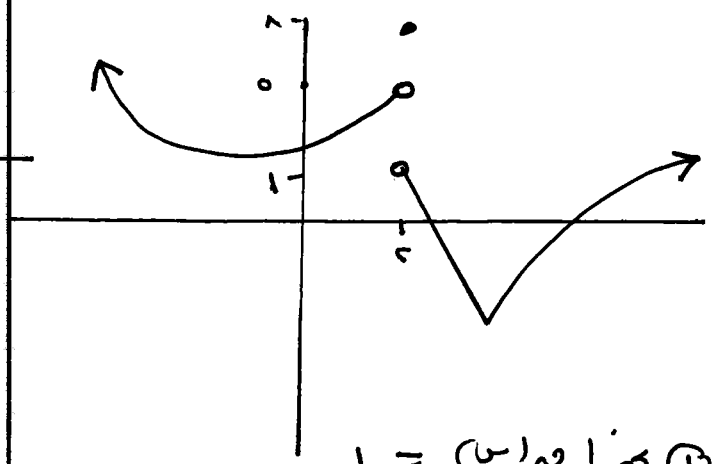
$\therefore \lim_{س \to ٠} و(س) = +\infty$ غير موجودة

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ① ص ١٥

معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى ق
جد كلاً مما يأتي إن أمكن



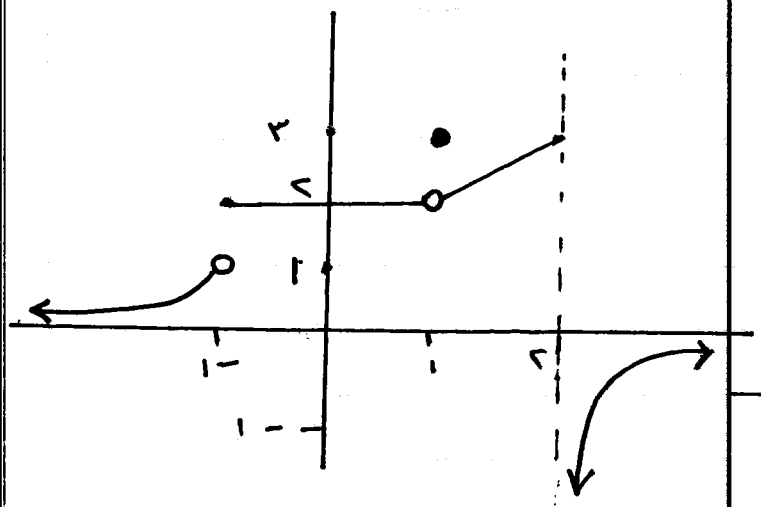
① هـا ق(س) = ١
س ← ٢+

② هـا ق(س) = ٥
س ← ٢-

③ هـا ق(س) غير موجودة
س ← ٢

تدريب ② ص ١٦

معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرّف على ح جد كلاً مما يأتي



① هـا ق(س) = ٢
س ← ١

② هـا ق(س) =
س ← ١-

هـا ق(س) = ٢ ما هـا ق(س) = ١
س ← ١-+ — س ← ١-

← هـا ق(س) غير موجودة
س ← ١-

③ هـا ق(س) = ٢
س ← ٠

④ هـا ق(س) = ٣
س ← ٢-

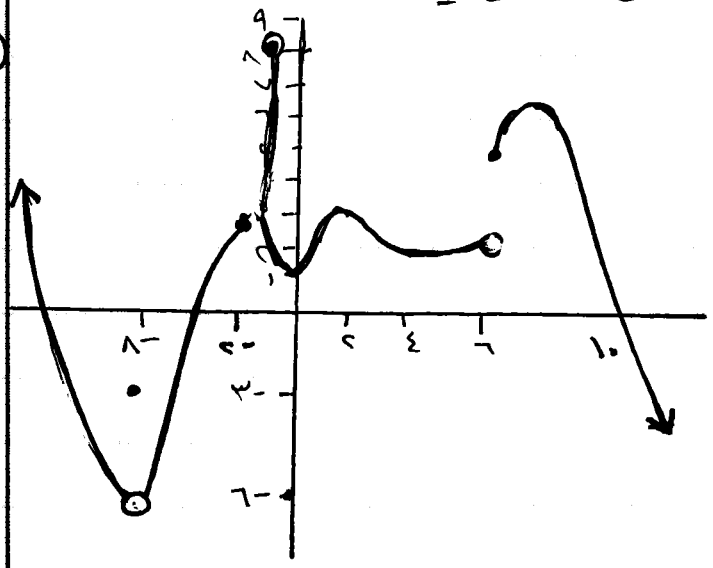
⑤ هـا ق(س) غير موجودة
س ← ٢

م = {١- ، ٢}

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل ص ١٧

① معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الأقتران ق المعرف على ح ، جد كلاً مما يأتي



① هـ ا ق(س) = ٥
س ← ٦+

② هـ ا ق(س) = ٢
س ← ٦-

③ هـ ا ق(س) = ١
س ← ٠

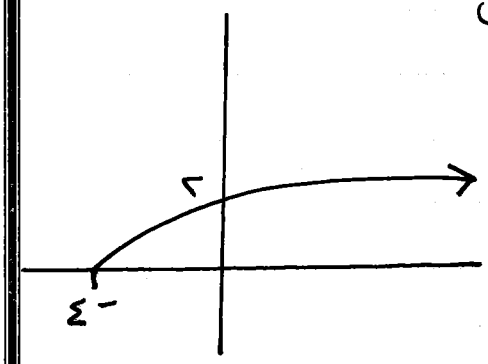
④ هـ ا ق(س)
س ← ٢-
هـ ا ق(س) = ٩ ، هـ ا ق(س) = ٣
س ← ٢+ ، س ← ٢-
هـ ا ق(س) غير موجودة
س ← ٢

⑤ هـ ا ق(س) = ٦-
س ← ٨-+

⑥ هـ ا ق(س) = ٦-
س ← ٨-

⑦ هـ ا ق(س) = صفر
س ← ١٠

② معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى الأقتران ل(س) = $\sqrt{س+٤}$ جد كلاً مما يلي



أ) مجال الاقتران ل

س + ٤ ≥ ٠
س ≥ -٤

مجال ل = [-٤ ، ∞)

① هـ ا ل(س) = صفر ، -٤ ∈ مجال
س ← -٤+

② هـ ا ل(س) غير موجودة ، -٤ ∉ مجال
س ← -٤-

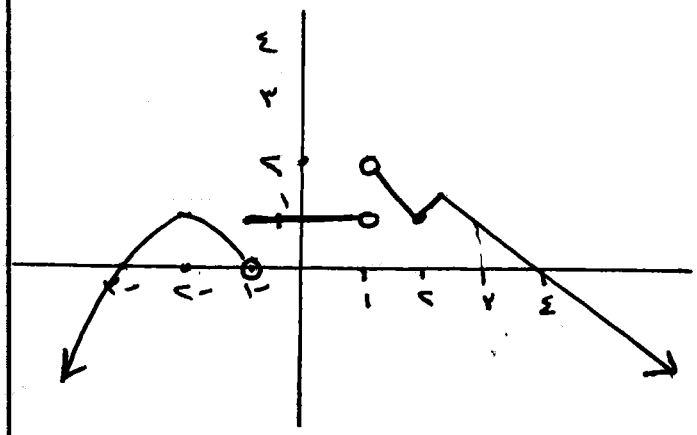
③ هـ ا ل(س) غير موجودة
س ← -٤

④ هـ ا ل(س) = $\sqrt{٠+٤}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢
س ← ٠

أو من الرسم = ٢

مكتبة السلام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ع ، جد كلاً مما يأتي



① مجموعة قيم م حيث
نهـا ع(س) = ١
س ← م

م = { -٢ ، ٢ ، ٣ } ∪ (-١ ، ١)

② مجموعة قيم ح حيث نهـا ع(س) = ١
س ← ح+

ح = { -٢ ، ٢ ، ٣ } ∪ [-١ ، ١)

③ مجموعة قيم ك حيث نهـا ع(س) غير موجودة
س ← ك

ك = { -١ ، ١ }

④ مجموعة قيم ل حيث
نهـا ع(س) = صفر
س ← ل

{ -٣ ، ٤ ، -١ }

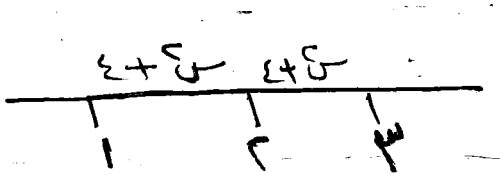
④

إذا كان ل(س) = { س+١ ، س ∈ ص ؛ س < ١ ; س²+٤ ، س ∉ ص }

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

جد نهـا ل(س)
س ← ٢

الحل



نهـا ل(س) = س+٤ = ٢+٤ = ٦
س ← ٢+

نهـا ل(س) = س²+٤ = ٢²+٤ = ٨
س ← ٢-

بما أن
ل(٢) = ٢×٢+٤
= ٨

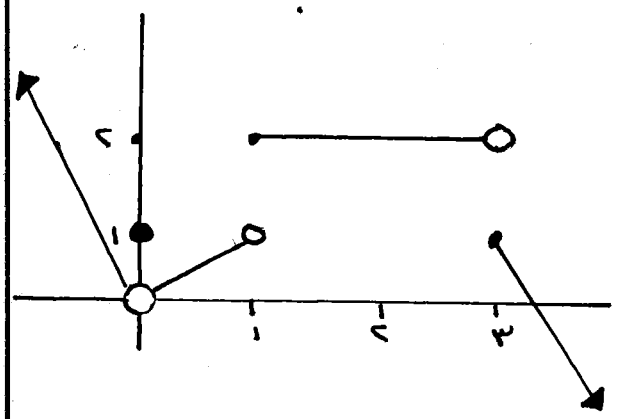
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى $هـ(س)$ المعرف على ح فأوجد مجم (P) حيث $هـ(س)$ غير موجودة

$س \leftarrow P$



الحل

تكون النهاية غير موجودة عند القفزات

عند $س = ١$

$هـ(س) = ٢$ ، $هـ(س) = ١$

$س \leftarrow ١^+$ ، $س \leftarrow ١^-$

$هـ(س)$ غير موجودة

$س \leftarrow ١$

عند $س = ٣$

$هـ(س) = ١$ ، $هـ(س) = ٢$

$س \leftarrow ٣^+$ ، $س \leftarrow ٣^-$

$هـ(س)$ غير موجودة

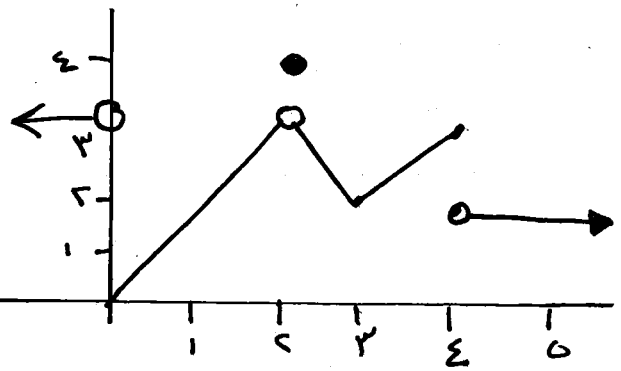
$س \leftarrow ٣$

$P = \{١ ، ٣\}$

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى $هـ(س)$ المعرف على ح فأوجد مجم (P) حيث $هـ(س)$ غير موجودة

$س \leftarrow P$



الحل

$P = (-\infty ، ٥) \cup \{٢\}$

ملاحظة

عند $س = ٤$ النهاية غير موجودة ولكن (٣)

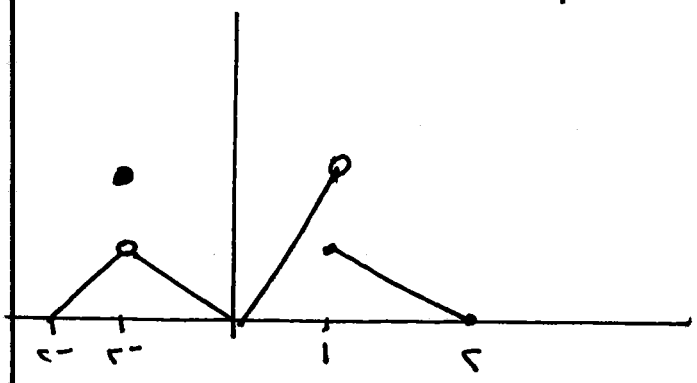
لكنه $هـ(س) = ٣$

$س \leftarrow ٤^-$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم : ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١١) صيفية

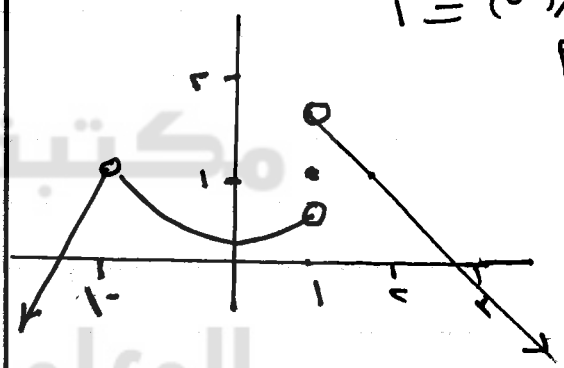
اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د حيث د(س) المعرف على $[-٣، ٢]$ فاوجد مجموعة قيم م حيث أن $\lim_{س \to م^-} د(س) =$ صفر



الحل $م = \{٠، ٢\}$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

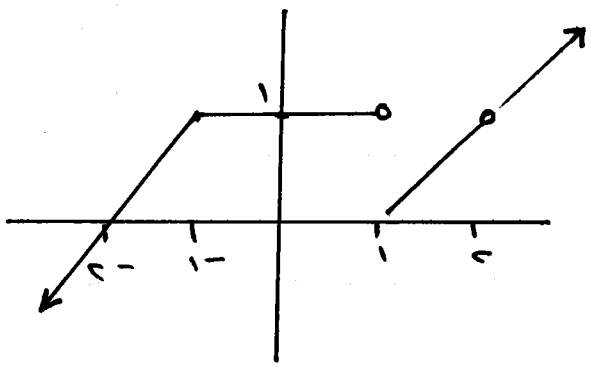
اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى د(س) المعرف على ح فاوجد مجموعة قيم م حيث $\lim_{س \to م} د(س) = ١$



الحل $= \{-١، ٢\}$

وزارة (٢٠١٣) صيفية

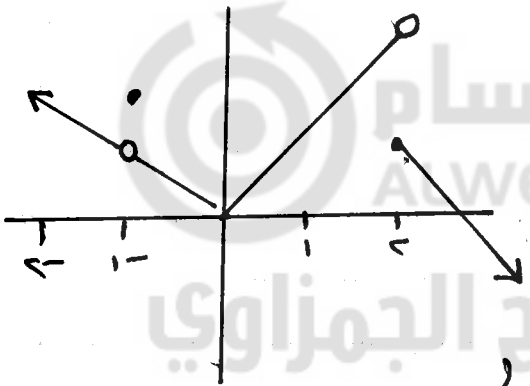
اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى د المعرف على ح، فاوجد مجموعة قيم س١ التي تجعل $\lim_{س \to س_١} د(س) = ١$



$س_١ = [-١، ١) \cup \{٢\}$

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى د(س) المعرف على ح فاوجد مجموعة كل قيم ل حيث $\lim_{س \to ل} د(س)$ غير موجودة

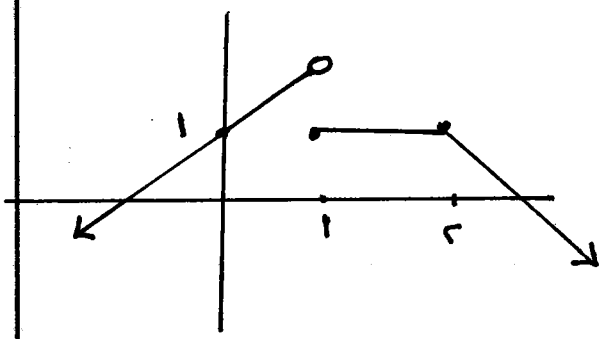


$ل = \{٢\}$

مكتبة الوسام AWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ه المعرف على ع فأوجد مجموعة قيم P التي تجعل نهـا ه(س) = ١
س ← P

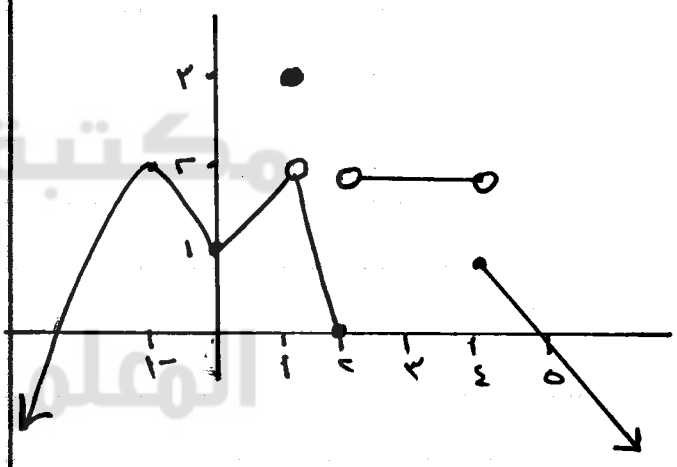


الحل

P = (١، ٢] ∪ {٠}

وزارة (٢٠١٦) شتوية

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ه(س)
س ∈ ع



مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

P) اذا كانت نهـا ه(س) = ٢
س ← P
أوجد قيم الثابت P

الحل

P = (٢، ٤) ∪ {-١، ١}

ب) اذا كانت نهـا ه(س) غير موجودة
س ← ب
جد قيم (ب)

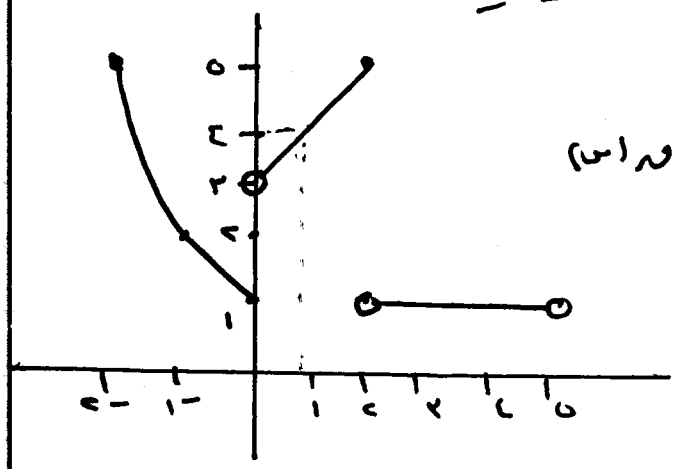
الحل

ب = {٢، ٤}

وزارة (٢٠١٧) صيفية

تمثل الشكل المجاور منحنى الاقترانين $هـ(س)$ ، $س \in [-٢، ٥]$

حيث ما يأتي



١) جا $(س \cdot هـ^{٢}(س) + \frac{٢}{هـ(س)})$
$س \leftarrow -١$

الحل

$= -١ \times ٢^{٢} + \frac{٢}{٢}$

$= -٤ + ١ = -٣$

ب) جا $هـ(٣ - س)$
$س \leftarrow ٢^{+}$

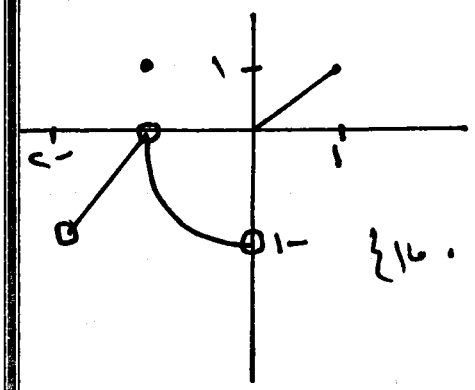
$ص = ٣ - س \quad س \leftarrow ٢^{+}$

$ص \leftarrow ٣ - ٢^{+} = ١^{-}$

$=$ جا $هـ(ص) = ٤$
$ص \leftarrow ١^{-}$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $هـ(س)$ المعرف على $[-٢، ١]$ فان مجموعة قيم $م$ التي تجعل جا $هـ(س)$ غير موجودة هي
$س \leftarrow م$



أ) $\{-١، ٠\}$

ب) $\{-٥، -٣، -١، ٠، ١\}$

ج) $\{١، ٠\}$

د) $\{-١، ٠، ١\}$

الحل

ج) $\{١، ٠\}$

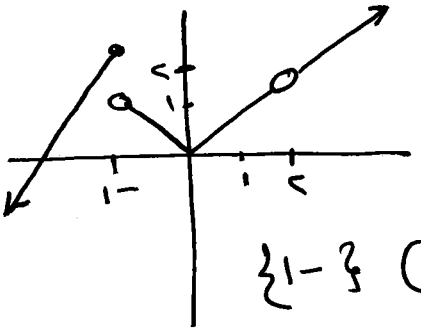
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)، فان مجموعة قيم م التي تكون عندها نهاية ق(س) عندما س ← م غير موجودة

أ) {-١}　　ب) {-١، ٢}

ج) {٠، ٢}　　د) {-١، ٦، ٧}



الجواب (أ) {-١}

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

نظريات على النهايات

الجزء الأول

نظريات في النهايات

نظرية ①

① اذا كان $\text{هـ}(س) = جـ$ ، حيث جـ : ثابت
فإن
$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} جـ = جـ$
نهاية الاقتران الثابت = نفسه

مثال
$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٤} ٥ = ٥$ ، $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \pi = \pi$
$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} (٢ص + ٣ب) = ٢ص + ٣ب$

② اذا كان الأقتران $\text{هـ}(س)$ كثير حدود
فإن
$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(أ)$
في كثيرات الحدود نعوض في النهاية تعويض مباشر

مثال ①
$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} س^٣ + ٤س - ٥ = (٠)^٣ - ٤(٠) + ٥$
$= ٥$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow -٢} س^٢ + ٢ = (-٢)^٢ + ٢$
$= ٤ + ٢ = ٦$

مثال ②
اذا كانت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} (س^٢ - ٥س + ٢) = -٢$
فاوجد الثابت $ب$ ؟

الحل تعويض مباشر
$ب^٢ - ٥ب + ٢ = -٢$
$ب^٢ - ٥ب + ٤ = ٠$
$(ب - ٤)(ب - ١) = ٠$
$ب = ٤$ ، $ب = ١$

مثال ③
اوجد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الأولى بحيث $\text{هـ}(١) = ٧$ ، $\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} \text{هـ}(س) = ٤$

الحل
نفرض ان $\text{هـ}(س) = ب س + ب$
يتبع الحل

نها (أس + ب) = ٤
س ← ١

⇐ أ + ب = ٤ ⇐ ٢ + ب = ٤ ... ①
نها (ق(س)) = ٧ ⇐ ٤ أ + ب = ٧
س ← ٢

⇐ ٤ أ + ب = ٧ ... ②
بطرح ① − ② ⇐
−أ = −٣ ⇐ أ = ٣
بتعويضها في ①
⇐ ٣ + ب = ٤ ⇐ ب = ٤ − ٣ = ١

④ نها (ق(س))^ن = (نها ق(س))^ن
س ← أ — س ← أ

= (ل)^ن ن ∈ ص+

⑤ نها ⁿ√ق(س) = ⁿ√(نها ق(س))
س ← أ — س ← أ

في حالة ان ن عددي أو
ن زوجي ، أ ≥ ٠

نظرية ③

اذا كانت نها ق(س) = ل ، نها هـ(س) = ك
س ← أ — س ← أ

وكانت جـ ∈ ح فإن

① نها (ق(س) ± هـ(س)) = نها ق(س) ± نها هـ(س) = ل ± ك
س ← أ — س ← أ — س ← أ

② نها جـ ق(س) = جـ × نها ق(س) = جـ × ل
س ← أ — س ← أ

③ نها ق(س) / هـ(س) = نها ق(س) / نها هـ(س) = ل / ك ، ك ≠ ٠
س ← أ — س ← أ — س ← أ

ملاحظة هامة

كوزع النهاية على الجمع والطرح والضرب والقسمة في حالة ان نهاية كل اقتران موجودة ولكن اذا كان احدهما أو كلاهما غير موجودة فهنالك طريقة ستشرح لاحقاً

مثال ①

اذا كانت نها ق(س) = ٤ ، نها هـ(س) = −٥
س ← ١ — س ← ١

اوجد مايلي

① نها ٣ق(س) = ٣ نها ق(س) = ٣ × ٤ = ١٢
س ← ١ — س ← ١

② نها (٢ق(س) − ٣هـ(س))
س ← ١

= ٢ نها ق(س) − ٣ نها هـ(س) = ٢ × ٤ − ٣ × −٥
س ← ١ — س ← ١

= ٨ + ١٥ = ٢٣

مكتبة القسم ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تابع ←

③ $\lim_{س \to 1} (س^2 \times هـ(س) - 5س + 1)$

الحل

$= \lim_{س \to 1} س^2 \times \lim_{س \to 1} هـ(س) + \lim_{س \to 1} 5س + 1$

$= (1)^2 \times 4 + (-5 \times 1 + 1)$

$= 4 - 4 = صفر$

---

④ $\lim_{س \to 1} \frac{1}{4} هـ(س) + 3س)$

الحل

$= \frac{1}{4} (\lim_{س \to 1} هـ(س)) + \lim_{س \to 1} 3س$

$= \frac{1}{4} \times 4 + 3 \times 1 = \frac{1}{4} \times 16 + 3$

$= 4 + 3 = 7$

---

⑤ $\lim_{س \to 1} \frac{هـ(س) + 5}{هـ(س)^2}$

الحل

$= \frac{\lim_{س \to 1} هـ(س) + \lim_{س \to 1} 5}{(\lim_{س \to 1} هـ(س))^2} = \frac{4+5}{(-5)^2}$

$= \frac{9}{25}$

---

⑥ $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 - 1}{هـ(س)} + \sqrt{2 هـ(س) + 14}$

الحل

$= \frac{\lim_{س \to 1} (س^2 - 1)}{\lim_{س \to 1} هـ(س)} + \sqrt{2 \lim_{س \to 1} هـ(س) + 14}$

$= \frac{1-1}{4} + \sqrt{2 \times 5 + 14} = 0 + \sqrt{24}$

مثال ⑦

اذا كانت $\lim_{س \to 2} (2هـ(س) - هـ(س)) = 8$

و كانت $\lim_{س \to 2} (3هـ(س) - 5س) = -4$

فاوجد $\lim_{س \to 2} (هـ(س)^3 + 2)$

الحل

نجزء المعطيات وذلك بجعل $\lim_{س \to 2} هـ(س)$ لوحدها دون اي $س$

$2 \lim_{س \to 2} هـ(س) - \lim_{س \to 2} س = 4$

$2 \lim_{س \to 2} هـ(س) - 5 \times 2 = -4$

$\Rightarrow 3 \lim_{س \to 2} هـ(س) = -4 + 10 = 6$

$\Rightarrow \lim_{س \to 2} هـ(س) = \frac{6}{3} = 2$

لكن $\lim_{س \to 2} (2هـ(س) - هـ(س)) = 8$

$\Rightarrow 2 \lim_{س \to 2} هـ(س) - \lim_{س \to 2} هـ(س) = 8$

$2 \lim_{س \to 2} هـ(س) - 2 = 8$

$\Rightarrow \lim_{س \to 2} هـ(س) = \frac{10}{2} = 5$

نجد المطلوب

$= (\lim_{س \to 2} هـ(س))^3 + 2$

$= (5)^3 + 2 = 125 + 2$

$= 127$

مثال ③
اذا كانت $\lim_{س \to ٣} (ق^{٣}(س) + ٢) = ١٠$
فاوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{١}{٤} ق^{٢}(س)$

الحل
$(\lim_{س \to ٣} ق(س))^{٢} + ٢ = ١٠$
$\Leftarrow (\lim_{س \to ٣} ق(س))^{٣} = ٨$ اخذ الجذر التكعيبي
$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} ق(س) = \sqrt[٣]{٨} = ٢$
نعوضها في المطلوب
$\Leftarrow \frac{١}{٤}(\lim_{س \to ٣} ق(س))^{٢} = \frac{١}{٤} \times (٢)^{٢}$
$= \frac{١}{٤} \times ٤ = ١$

مثال ④
اذا كانت $\lim_{س \to -١} |ق(س) + ٥س + س^{٢}| = ٣$
اوجد $\lim_{س \to -١} ق^{٢}(س)$

الحل
$\lim_{س \to -١} |ق(س) + ٥س + س^{٢}| = |\lim_{س \to -١} ق(س) + \lim_{س \to -١} ٥س + \lim_{س \to -١} س^{٢}|$
$= ٣$
بتربيع الطرفين
$\lim_{س \to -١} ق(س) + ٥(-١) + (-١)^{٢} = ٩$
$\lim_{س \to -١} ق(س) - ٤ = ٩$
$\lim_{س \to -١} ق(س) = ١٣$
نعوضها في المطلوب
$= (\lim_{س \to -١} ق(س))^{٢} = (١٣)^{٢}$
$= ١٦٩$

مثال ⑤
اذا كانت $\lim_{س \to ٢} س^{٣} ق(س) = ١٦$
فاوجد مايلي :
① $\lim_{س \to ٢} (٣ق^{٢}(س) + |س + ١٥|)$
② $\lim_{س \to ٢} ٣س^{٢} ق(س) + [\frac{١}{٣}س + ٢]$

الحل
نجزئ المعطيات $= \lim_{س \to ٢} س^{٣} \times \lim_{س \to ٢} ق(س) = ١٦$
$\frac{٨}{٨} \times \lim_{س \to ٢} ق(س) = \frac{١٦}{٨} \Leftarrow \lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢$

① $٣(\lim_{س \to ٢} ق(س))^{٢} + \lim_{س \to ٢} |س + ١٥|$
$= ٣ \times ٢^{٢} + |١٧| = ١٢ + ١٧ = ٢٩$

② $\lim_{س \to ٢} ٣س^{٢} \times \lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} [\frac{١}{٣}س + ٢]$
$= ٣ \times ٢^{٢} \times ٢ + [\frac{٢}{٣} + ٢]$
$= ٢٤ + ٢ = ٢٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

اذا كانت $\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٢$ وكانت $هـ(٤) = ٥$ فاوجد

① $\lim_{س \to ١} (٤س هـ(٣س+١) + ٣س^{٢})$

② $\lim_{س \to ٣} هـ^{٣}(٧-س)$

الحل

$\lim_{س \to ١} ٤س \times \lim_{س \to ١} هـ(٣س+١) + \lim_{س \to ١} ٣س^{٢}$

$= ٤ \times ١ \times \lim_{س \to ١} هـ(٣س+١) + ٣ \times ١^{٢}$

$= ٤ \lim_{س \to ١} هـ(٣س+١) + ٣$ ... ①

نوجد $\lim_{س \to ١} هـ(٣س+١)$ وذلك بطريقة الفرض

نفرض $ص = ٣س+١$

عندما $س \to ١$ فان $ص \to ٣ \times ١ + ١ = ٤$

$= \lim_{ص \to ٤} هـ(ص)$ وهي تساوي ٢

الجواب بتعويضها في ①

$٤ \times ٢ + ٣ = ٨ + ٣ = ١١$

② $\lim_{س \to ٣} هـ^{٣}(٧-س)$

نفرض ان $ص = ٧ - س$

عندما $س \to ٣$ فان $ص \to ٧ - ٣ = ٤$

$= \lim_{ص \to ٤} هـ^{٣}(ص) = (\lim_{ص \to ٤} هـ(ص))^{٣}$

$= ٢^{٣} = ٨$

مثال ⑦ (٣٤)

$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٦ & س > ٣ \\ ٢س & س < ٣ \end{cases}$

اوجد

١) $\lim_{س \to ٣} هـ(س+٢)$

٢) $\lim_{س \to ٤^{+}} هـ(٧-س)$

٣) $\lim_{س \to -١} هـ(٤)$

الحل

① نفرض $ص = س + ٢$

$س \to ٣$ فان $ص \to ٣ + ٢ = ٥$

$= \lim_{ص \to ٥} هـ(ص) = ٥ \times ٢ = ١٠$ لقاعدة ④

② $\lim_{س \to ٤^{+}} هـ(٧-س)$

نفرض ان $ص = ٧ - س$

$س \to ٤^{+}$ فان $ص \to ٧ - ٤^{+} = ٣^{-}$

انتبه

يتبع الحل

$\text{نها}_{س \to 4^+} \text{ه}(٧ - س) = \text{نها}_{ص \to 3^-} \text{ه}(ص)$

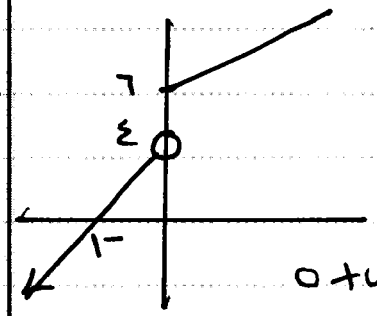
$= \text{القاعدة الأولى} = ٣^٢ + ٦ = ١٥$

٣) $\text{ه}(٤) = ٢ \times ٤ = ٨$

$\text{نها}_{س \to ١^-} \text{ه}(٤) = \text{نها}_{س \to ١^-} ٨ = ٨$

مثال ٨

اذا كان ه(س) ممثلاً في الشكل المجابي



فاوجد

م) $\text{نها}_{س \to ٠^+} \text{ه}(٤س) + ٥$

الحل

$= (\text{نها}_{س \to ٠^+} \text{ه}(س))^٢ + ٤ \times ٠ + ٥$

$= ٦^٢ + ٥ = ٣٦ + ٥ = ٤١$

ب) $\text{نها}_{س \to -٢} \sqrt[٣]{\text{ه}(س + ١)}$

نفرض ص = س + ١

س ← -٢ فان ص ← -٢ + ١ = -١

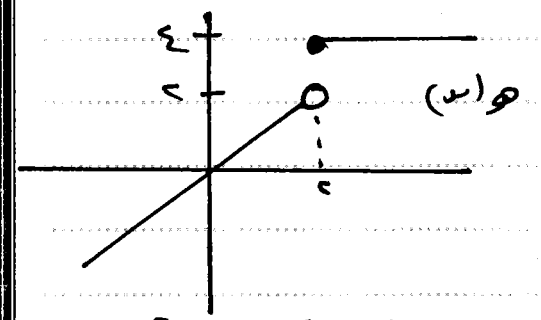
$= \sqrt[٣]{\text{نها}_{ص \to -١} \text{ه}(ص)} = \sqrt[٣]{٠} = \text{صفر}$

مثال ٩

اذا كان الجدول التالي يمثل ه(س)

س	١ د ٤	١ د ٠١	١ د ٠٠١	٢	٢ د ٠٠١	١٫٩٩٩	١٫٩٩	١٫٩
ه(س)	١ د ٤	١ د ٠٤	١ د ٠٠٤		٥٫٠٠٠٤	٥٫٩٩٩	٥٫٩٩	٥٫٩

وكان هـ(س) ممثلاً بالشكل التالي



اوجد

$\text{نها}_{س \to ٢} (\text{ه}(س) + \text{هـ}(س))^٢ + ٢س$

الحل

$= \text{نها}_{س \to ٢} (\text{ه}(س) + \text{هـ}(س))^٢ + \text{نها}_{س \to ٢} ٢س$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \text{ه}(س) + \text{هـ}(س) = ٤ + ٤ = ٨$

$\text{نها}_{س \to ٢} (\text{ه}(س) + \text{هـ}(س)) = ٦ + ٢ = ٨$

اكو اب

$= \text{نها}_{س \to ٢} (\text{ه}(س) + \text{هـ}(س))^٢ + ٢(٢)$

$= ٨ + ٨ = ١٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑩

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$ ، $هـ(٣) = ٦$

فما قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{هـ^{٢}(٤س+١) - س^{٢}+٢}{}$

الحل

نفرض ان $ص = ٢س + ١$

عندما $س \to ١$ فان $ص \to ٣$

$$\lim_{س \to ١} \frac{هـ^{٢}(٤س+١) + هـ(س+٢)}{}$$

$$= هـ^{٢}(ص) + ١ - ٢ + ١$$

$ص \to ٣$

$$= ٤^{٢} + ١ = ١٧$$

مثال ⑪

اذا علمت أن $\lim_{س \to ٣} \frac{١}{٣} هـ(س) - ٤ = ١$

فجد $\lim_{س \to ٩} هـ(\sqrt{س}) + ٢س - ١$

الحل

تجهيز المعطيات

$$\frac{١}{٣} هـ(س) - ٤ = ١$$

$س \to ٣$

$$\frac{١}{٣} هـ(س) = ٥$$

$س \to ٣$

$$\frac{١}{٣} هـ(س) - ٤ = ١$$

$س \to ٣$

$$\frac{١}{٣} هـ(س) = ٤ + ١$$

$س \to ٣$

$$هـ(س) = ١٥$$

$س \to ٣$

المطلوب

$$\lim_{س \to ٩} هـ(\sqrt{س}) + \lim_{س \to ٩} هـ(٢س - ١)$$

نفرض $ص = \sqrt{س}$

عندما $س \to ٩$ فان $ص \to ٣$

$$= هـ(ص) + ١٨ - ١$$

$ص \to ٣$

$$= ١٥ + ١٨ - ١ = ٣٢$$

مثال ⑫

اذا علمت ان $\lim_{س \to ١} هـ(س^{٢} - ١) = ٦$

فجد $\lim_{س \to ٠} هـ(٤س - ٧)$

من المعطيات

$$\lim_{س \to ١} هـ(س^{٢} - ١) = ٦ \Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س^{٢} - ١) = ٣$$

$ص = س^{٢} - ١$

عندما $س \to ١$ فان $ص \to ٠$

$$\Leftarrow \lim_{ص \to ٠} هـ(ص) = ٣$$

$$\lim_{س \to ٠} ٤ هـ(س) - ٧$$

$$= ٤ \times ٣ - ٧ = ٥$$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

اذا كان ق(س) كثير حدود وكان
ق(-٢) = -١ وكانت هـا ع(س) = ٩
س ← -٢

فاوجد
هـا ((س - ١) / (ع(س) - ٣) - ∛(ق(س) - ٧))
س ← -٢

الحل
بما ان ق(س) كثير حدود
فان هـا ق(س) = ق(-٢) = -١
س ← -٢

⇐

(هـا س - ١ / هـا ع(س) - ٣) - ∛(هـا ق(س) - ٧)
س ← -٢ ، س ← -٢

= (-٢ - ١ / ٩ - ٣) - ∛(-١ - ٧)

= -٣/٦ - ∛-٨ = -١/٢ + ٢ = ٣/٢

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ① ص٢١

اذا كان $ق(س) = ٢س$ ، $ه(س) = س^٣ + س$

أوجد كلاً مما يلي

① $\lim_{س \to -٢} (ق(س) + ه(س) \times س)$

$= \lim_{س \to -٢} ق(س) + \lim_{س \to -٢} ه(س) \times س$

$= ٢ \times -٢ + (-٢^٣ + -٢) \times -٢$

$= -٤ + (-١٠) \times -٢$

$= -٤ + ٢٠ = ١٦$

② $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{ه(س)} = \frac{١ \times ٢}{١ + ١^٣} = \frac{٢}{٢} = ١$

③ $\lim_{س \to ١} (\sqrt{ق(س)} + ٣\sqrt{ه(س)} + ١٥)$

$= \sqrt{\lim_{س \to ١} ق(س)} + ٣\sqrt{\lim_{س \to ١} ه(س)} + ١٥$

$= \sqrt{٢ \times ١} + ٣\sqrt{١ + ١^٣} + ١٥$

$= \sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} + ١٥$

$= ٤\sqrt{٢} + ١٥$

تمارين وسائل ص٢٧

السؤال الأول

اذا كان $ق(س) = س^٢ - س - ٦$

$ل(س) = س^٢ - ٢س - ٣$ أوجد كلاً مما يأتي

④ $\lim_{س \to ١} (ق(س) + ل(س))$

$= \lim_{س \to ١} ق(س) + \lim_{س \to ١} ل(س)$

$= (١^٢ - ١ - ٦) + (١^٢ - ٢ \times ١ - ٣)$

$= -٦ + -٤ = -١٠$

⑤ $\lim_{س \to ١} ق(س) \times ل(س)$

$= \lim_{س \to ١} ق(س) \times \lim_{س \to ١} ل(س)$

$= (١^٢ - ١ - ٦) \times (١^٢ - ٢ \times ١ - ٣)$

$= -٦ \times -٤ = ٢٤$

⑥ $\lim_{س \to ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{\lim_{س \to ١} ل(س)}{\lim_{س \to ١} ق(س)}$

$= \frac{١^٢ - ٢ \times ١ - ٣}{١^٢ - ١ - ٦} = \frac{-٤}{-٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ $\text{هـا}_{س \to ٢} (\text{ل}(س))^{٤}$

$= (\text{هـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س))^{٤}$

$= (٢^{٢} - ٤ - ٣-)^{٤} = (٣-)^{٤}$

$= (٣-)^{٤} = ٨١$

⑥ $\text{هـا}_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - \text{ل}(س)}$

$= \sqrt[٣]{١ - \text{هـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س)}$

$= \sqrt[٣]{١ - (٢^{٢} - ٢ \times ٢ - ٣)}$

$= \sqrt[٣]{١ - (٤ - ٤ - ٣)}$

$= \sqrt[٣]{١ - ٣-} = \sqrt[٣]{٤}$

⑦ $\text{هـا}_{س \to ١-} \dfrac{\text{ل}(س)}{\text{ه}(س)}$

$= \dfrac{\text{هـا}_{س \to ١-} \text{ل}(س)}{\text{هـا}_{س \to ١-} \text{ه}(س)}$

$= \dfrac{(١-)^{٢} - ٢ \times ١- - ٣}{(١-)^{٤} - ١ - ٦} = \dfrac{١ + ٢ - ٣}{١ + ١ - ٦}$

$= \dfrac{\text{صفر}}{٤-}$

$=$ صفر

السؤال الثاني

اذا كانت $\text{هـا}_{س \to ٢} \text{ع}(س) = ١٠$

$\text{هـا}_{س \to ٢} ٣ \text{ل}(س) + ١ = ٧$ حيث كل مما يلي

تجهيز المعطيات

$\text{هـا}_{س \to ٢} \text{ع}(س) = ١٠ \Leftarrow \text{هـا}_{س \to ٢} \text{ع}(س) = ٥$

$٣ \text{هـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س) + ١ = ٧$

$٣ \text{هـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س) = ٦$

$\Leftarrow \text{هـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س) = ٢$

⑧ $\text{هـا}_{س \to ٢} (٢ \text{ع}(س) + \text{ل}(س))$

$= ٢ \text{هـا}_{س \to ٢} \text{ع}(س) + \text{هـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س)$

$= ٢ \times ٥ + ٢ = ١٢$

⑨ $\text{هـا}_{س \to ٢} (\text{ع}^{٣}(س) - \text{ل}^{٢}(س))$

$= (\text{هـا}_{س \to ٢} \text{ع}(س))^{٣} - (\text{هـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س))^{٢}$

$= ٥^{٣} - ٢^{٢} = ١٢٥ - ٤ = ١٢١$

مكتبة المعلم ناجح الجمزاوي

ⓑ $\lim_{س \to ٢} \frac{ل(س)}{ع(س)}$

$= \frac{\lim_{س \to ٢} ل(س)}{\lim_{س \to ٢} ع(س)} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

ⓒ $\lim_{س \to ٢} (ع^{٢}(س) - ل^{٢}(س))$

$= (\lim_{س \to ٢} ع(س))^{٢} - (\lim_{س \to ٢} ل(س))^{٢}$

$= ٥^{٢} - ٢^{٢} = ٢٥ - ٤$

$= ٢١$

ⓐ $\lim_{س \to ٢} (٣س - ٣)$

نفرض ان ص = ٣س - ٣

عندما س ← ٢ فان ص ← ٣

$= \lim_{ص \to ٣} ل(ص)$ من الرسمة

$= ١$

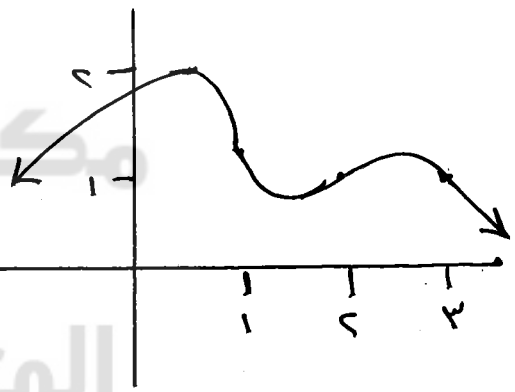
ⓓ $\lim_{س \to ٢} (س + ل(س))$

$= \lim_{س \to ٢} س + \lim_{س \to ٢} ل(س)$ من الرسمة

$= ٢ + ١ = ٣$

السؤال السابع ص ٢٨

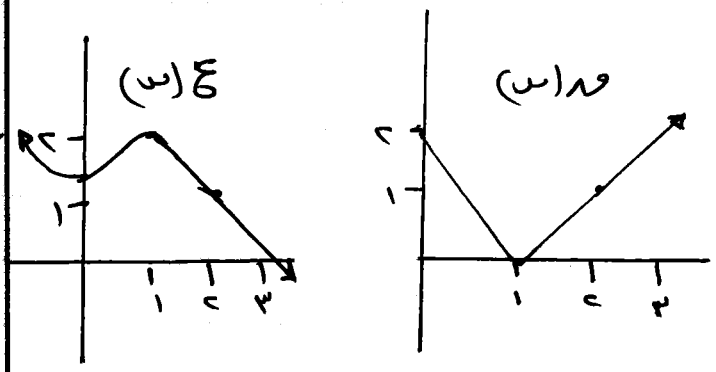
معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى ل
حدد كل مما يأتي



مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن ص٢٨

معتمداً الشكل الذي يمثل منحنيي الاقترانين
هـ ، ع ، جد كلاً مما يأتي



(أ) $\lim_{س \to ١} (هـ(س) + ع(س))$

$= \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} ع(س)$

$= ٠ + ٢ = ٢$

لأن الاقترانين متصلين

(ب) $\lim_{س \to ٢} هـ(س) \times ع(س)$

$= \lim_{س \to ٢} هـ(س) \times \lim_{س \to ٢} ع(س)$

$= ١ \times ١ = ١$

(جـ) $\lim_{س \to ١} (٢هـ(س-١) + ع(س))$

$= ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س-١) + \lim_{س \to ١} ع(س)$

نفرض ص = س - ١

س ← ١ فان ص ← ٠

$= ٢ \lim_{ص \to ٠} هـ(ص) + \lim_{س \to ١} ع(س)$

$= ٢ \times ٢ + ٢$

$= ٤ + ٢ = ٦$

السؤال التاسع ص٢٩

اذا كان هـ كثير حدود غير
بالتعطه (-٣ ، ٤) وكانت

$\lim_{س \to -٣} س - ل(س) = -١٠$

فجد $\lim_{س \to -٣} (هـ^٢(س) - ٢ل(س))$

الحل هـ(-٣) = ٤

بما ان هـ(س) كثير حدود فان

$\lim_{س \to -٣} هـ(س) = هـ(-٣) = ٤$

$\lim_{س \to -٣} س - \lim_{س \to -٣} ل(س) = -١٠$

$-٣ - \lim_{س \to -٣} ل(س) = -١٠$

$\lim_{س \to -٣} ل(س) = ٧$

$(\lim_{س \to -٣} هـ(س))^٢ - ٢ \lim_{س \to -٣} ل(س)$

$= ١٦ - ١٤ = ٢$

السؤال العاشر ص٢٩

اذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س-٢) يساوي (٥) فجد
هـا (٣ع(س) + ٤س٢)
س ← ٢

الحل
حسب نظرية الباقي
باقي قسمة ع(س) على س-٢
يساوي ٥ فأن
ع(٢) = ٥
وبما ان ع(س) كثير حدود ⇐
هـا ع(س) = ع(٢) = ٥
س ← ٢

هـا (٣ع(س) + ٤س٢)
س ← ٢

= ٣ هـا ع(س) + هـا ٤س٢
س ← ٢ س ← ٢

= ٣×٥ + ٤(٢)٢

= ١٥ + ١٦ = ٣١

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الجزء الثاني
النهاية عند الجذور

أولاً :- الجذور الفردية

يتم ايجاد النهايه وذلك بالتعويض المباشر لأن الجذور الفرديه دائماً معرفه .

مثال ①
اوجد قيمة النهايات التالية

① نهـا $\sqrt[3]{س^2 + 10}$ = $\sqrt[3]{-2^2 + 10}$ = $\sqrt[3]{8}$ = 2
س ← -2

② نهـا $\frac{\sqrt[3]{س^2 - 31} + 2س}{س + 4}$ = $\frac{\sqrt[3]{(-4)^2 - 31} + 2(-4)}{-4 + 4}$
س ← -4
= $\frac{\sqrt[3]{-27} + 8}{8}$ = $\frac{-3 + 8}{8}$ = $\frac{6}{8}$

③ نهـا $(\sqrt[5]{س + 3} - 2س)$
س ← -4
= $\sqrt[5]{-4 + 3} - 2(-4)$ = $\sqrt[5]{-1} + 8$ = -1 + 8 = 7

④ نهـا $\sqrt[3]{س^2 - 8} - 8$
س ← 6
= $\sqrt[3]{6^2 - 8} - 8$ = $\sqrt[3]{28} - 8$

ثانياً :- الجذور الزوجية

وهناك ثلاث حالات

الحالة الأولى

اذا كان ناتج التعويض تحت الجذر الزوجي موجب يكون هو الجواب

مثال ①
اوجد النهايات التالية .

① نهـا $\sqrt{س + 1}$ = $\sqrt{4}$ = 2
س ← 3

② نهـا $\frac{\sqrt[4]{س + 11}}{س - 1}$ = $\frac{\sqrt[4]{16}}{4}$ = $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{2}$
س ← 5

الحالة الثانية

اذا كان ناتج التعويض تحت الجذر الزوجي سالب تكون النهايه غير موجودة

مثال
① نهـا $\sqrt{س - 5}$ = $\sqrt{-1}$ غير موجودة
س ← 4

② نهـا $\frac{\sqrt[4]{س^2 - 3س + 5}}{س + 3}$ = $\frac{\sqrt[4]{6^2 - 3(-6) + 5}}{-6 + 3}$ = $\frac{\sqrt[4]{36 + 18 + 5}}{-3}$ = $\frac{\sqrt[4]{59}}{-3}$ غير موجودة
س ← -6

الحالة الثالثة :- مهمة جداً

اذا كان ناتج التعويض تحت الجذر التربيعي يساوي صفر فهناك مشكلة وكل المشكلة نقوم بتحديد المجال واذا كانت النقطة داخل المجال نعوض التعويض مباشر ، واذا كانت النقطة خارج المجال يمنع التعويض نهائياً وتكون النهاية غير موجودة .

مثال ①

اوجد قيمة النهايات التالية :-

① $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٣}$ ناتج التعويض تحت الجذر = صفر

$س \to ٣$

لابد من تحديد المجال .

$س - ٣ = ٠$

$س = ٣$

المجال ←

+ + + + + | - - - - -

٣

$س \geq ٣$

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٣} = \sqrt{٣ - ٣} =$ صفر

$س \to ٣^+$ (داخل المجال)

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٣}$ غير موجودة (خارج المجال)

$س \to ٣$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٣}$ غير موجودة

$س \to ٣$

---

② $\lim_{س \to ٥} \sqrt{١٠ - ٢س}$ ناتج التعويض = ٠

$س \to ٥$

تحدد المجال

$١٠ - ٢س = ٠ \Leftarrow ٢س = ١٠ \Leftarrow س = ٥$

المجال ←

+ + + + + | - - - -

٥

$\lim_{س \to ٥} \sqrt{١٠ - ٢س}$ غير موجودة خارج المجال

$س \to ٥^+$

$\lim_{س \to ٥} \sqrt{١٠ - ٢س} = \sqrt{٠} = ٠$ داخل المجال

$س \to ٥^-$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٥} \sqrt{١٠ - ٢س}$ غير موجودة

$س \to ٥$

---

③ $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٤ - س^٢}$ ناتج التعويض صفر

$س \to ٢$

تحدد المجال $٤ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٤$

$\Leftarrow س = \pm ٢$

المجال

- - - | + + + | - - -

-٢ ، $+٢$

$\lim_{س \to ٢} \sqrt{٤ - س^٢}$ تقع في المجال

$س \to ٢$

$\sqrt{٤ - ٤} =$ صفر

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

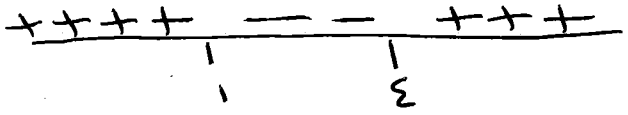
④ هات $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٤س + ٢س}{٣س - ٨}$

الحل

ناتج التعويض $= \frac{٤^٢ - ٤ \times ٢}{٣ \times ٤ - ٨} = \frac{٠}{٠}$ تحديد المجال

$س^٢ - ٤س = ٠ \leftarrow س(س - ٤) = ٠$

$\Leftarrow س = ٠$ ، $س = ٤$



هات $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٤س + ٢س}{٣س - ٨} = \frac{\text{صفر} + ٢ \times ٤}{٣ \times ٤ - ٨}$

$= \frac{٨}{٤} = ٢$

كما $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٤س + ٢س}{٣س - ٨}$ غير موجودة

خارج المجال

⑤ هات $\lim_{س \to ٣} س^٢ - ٦س + ٩$

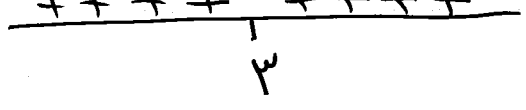
الحل

التعويض $= ٩ - ١٨ + ٩ = ٠$ تحديد مجال

$س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٣) = ٠$

$س = ٣$



هات $\lim_{س \to ٣^+} س^٢ - ٦س + ٩ =$ صفر

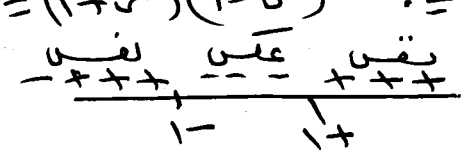
هات $\lim_{س \to ٣^-} س^٢ - ٦س + ٩ =$ صفر

هات $\lim_{س \to ٣} س^٢ - ٦س + ٩ =$ صفر

ملاحظة هامة

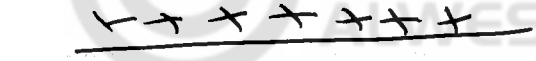
① الاقترانان التربيعي اذا كان له جذريه فان له اشارتان

$س^٢ - ١ = ٠ \quad (س - ١)(س + ١) = ٠$



② الاقترانان التربيعي لا حل له اشارة واحدة نفس اشارة $س^٢$

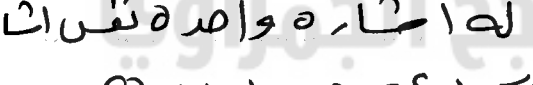
$س^٢ + ١ = ٠$ لا حل



③ اقتران تربيعي له جذر واحد تكون له اشارة واحدة نفس اشارة $س^٢$

$س^٢ + ٤س + ٤ = ٠$

$(س + ٢)(س + ٢) = ٠$



مثال ⑥

اوجد هنا $\lim_{س \to -١} \sqrt{س^٢ - ٢س - ١}$

الحل

$= \sqrt{(-١)^٢ - ٢(-١) - ١} = \sqrt{١ + ٢ - ١}$

$= \sqrt{٢}$ تحديد مجال

$س^٢ - ٢س - ١ = ٠$

$-(س^٢ + ٢س + ١) = ٠$

$(س + ١)(س + ١) = ٠$

$س = -١$ ⑥

(نفس اشارة $س^٢$) -١

$\Rightarrow$ هنا $\sqrt{س^٢ - ٢س - ١}$ غير موجودة

$س \to -١$

مثال ⑦

اوجد مجال $\sqrt{س^٢ - ٤}$

$س \to ٢$

موجودة ؟

الحل

هنا $\sqrt{س^٢ - ٤}$ موجودة اذا كانت

$س \to ٢$ $\quad ٢ \in$ المجال

نجد المجال

$س^٢ - ٤ = ٠$

+++ | --- | +++

-٢ $\quad +٢$

$٢ \in (-\infty, -٢] \cup [٢, \infty)$

مثال ⑧

اوجد قيم ٢ حيث ان

هنا $\sqrt{س^٢ - ٥س + ٦}$ غير موجودة

$س \to ٢$

الحل

هنا $\sqrt{س^٢ - ٥س + ٦}$ غير موجودة

$س \to ٢$

عندما $٢ \notin$ المجال

نحدد المجال

$س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = ٣ \quad س = ٢$

+++ | --- | +++

٢ $\quad ٣$

$٢ \in [٢, ٣]$.

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

اوجد قيمة أ، ب حيث

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + أس + ب}{س - ٢}$ ان هذا غير موجود

$س \to ٢$

الحل

نجد المجال

$س^٢ + أس + ب = ٠$ للحل

المميز $= ب^٢ - ٤أ$

$= ١ - ٤ \times ١ \times ١ = -٣ < ٠$

لذلك دائماً تكون موجبة على ح

$+ + + + + + + +$

$\therefore ح = \emptyset$

تذكير

$ب^٢ - ٤أ$ مميز المعادلة التربيعية

① $ب^٢ - ٤أ > ٠$ له جذران (تحلل)

② $ب^٢ - ٤أ = ٠$ له جذر واحد (تحلل)

③ $ب^٢ - ٤أ < ٠$ ليس له جذور لا تحلل

مثال ⑩

هذا $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

$س \to ٣$

الحل

هذا ناتج التعويض بـ داخل الجذر لذلك نجد المجال

	$-\infty$		٣-		٣		∞
$س^٢ - ٩$		+ + + +	٠	- - -	٠	+ + +	
$س - ٣$		- - - -		- - -	٠	+ + +	
$\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$		+ + + +		+ + + +	٠	+ + +	

نلاحظ انه على يمين ويسار العدد (٣) تنتمي إلى المجال

$\leftarrow$

هذا $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

$س \to ٣$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} س + ٣ = ٦$

$س \to ٣$

مثال (١١)

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$$

الحل

المقاوض = $\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}$ نحدد مجال البسط ونحدد مجال المقام ويكون المجال هو التقاطع بينهما

$\sqrt{س^٢ - ٩}$: + + + + | − − − − | + + + + ، عند -٣ و $+٣$

$\sqrt{س - ٣}$: − − − − − | + + + ، عند ٣

التقاطع : + + + عند ٣

$$\text{نهـا}_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}} = \sqrt{\frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}}$$

$= \sqrt{٦}$ ، $+٣ \in$ المجال

$$\text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}} = \text{غير موجودة}$$

$-٣ \notin$ المجال

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}} \text{ غير موجودة}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ⑤ صـ٤٢

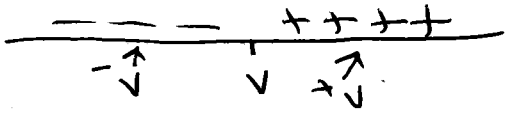
جد كلاً من النهايات الآتيه

① $\lim_{س \to ٧} |س - ٧|$

الحل

$|٧ - ٧| = ٠$ تحديد مجال

$س - ٧ = ٠ \Leftarrow س = ٧$



$\lim_{س \to ٧^+} |س - ٧|$ = صفر ∈ المجال

$\lim_{س \to ٧^-} |س - ٧|$ غير موجودة ∉ المجال

$\Leftarrow \lim_{س \to ٧} |س - ٧|$ غير موجودة

② $\lim_{س \to ٥} |س - ٧|$

$= |٥ - ٧| = |-٢|$

غير موجودة

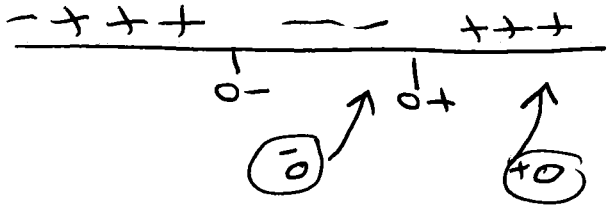
٥ ∉ المجال

③ $\lim_{س \to ٥} |س^٢ - ٢٥|$

التعويض $= |٥^٢ - ٢٥| = ٠$

تحديد مجال

$س^٢ - ٢٥ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٥$



$\lim_{س \to ٥^+} |س^٢ - ٢٥|$ = صفر ∈ المجال

$\lim_{س \to ٥^-} |س^٢ - ٢٥|$ غير موجودة ∉ المجال

$\Leftarrow \lim_{س \to ٥} |س^٢ - ٢٥|$ غير موجودة

④ $\lim_{س \to -٧} |س^٢ - ٢٥|$

$= |(-٧)^٢ - ٢٥|$

$= |٤٩ - ٢٥| = |٢٤|$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل
ص ٢٧

السؤال الثالث

(ز) $\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{٥ - س}$

الحل

$٥ - س = ٠ \Rightarrow س = ٥$

مجال	$(-\infty, ٥)$	$(٥, \infty)$
$٥ - س$	+	−

$٥^- \in$ مجال $\Rightarrow$

$\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{٥ - س} = \sqrt{٠} =$ صفر

(ح) $\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^٢}$

الحل

$١ - س^٢ = ٠$ تحديد مجال

$١ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ١$

$\Rightarrow س = \pm ١$

مجال	$(-\infty, -١)$	$(-١, ١)$	$(١, \infty)$
$١ - س^٢$	−	+	−

$\lim_{س \to ١^+} \sqrt{١ - س^٢} =$ غير موجودة $\because ١^+ \notin$ مجال

$\lim_{س \to ١^-} \sqrt{١ - س^٢} =$ صفر $\because ١^- \in$ مجال

$\Rightarrow \lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^٢}$ غير موجودة

(ط) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$

$\sqrt{(-٢)^٢ + ٤(-٢) + ٤} = \sqrt{٠}$

تحديد مجال

$س^٢ + ٤س + ٤ = ٠$

$(س + ٢)(س + ٢) = ٠$

$س = -٢$

مجال	$(-\infty, -٢)$	$(-٢, \infty)$
$س^٢ + ٤س + ٤$	+	+

$\Rightarrow \lim_{س \to -٢} \sqrt{س^٢ + ٤س + ٤} =$ صفر

السؤال الرابع ص ٢٨

برهن $\exists$ $د$ التي تجعل $\lim_{س \to ٥} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة

$\lim_{س \to ٥^+} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة

$\because ٥^+ \in$ مجال

$٦ - د \geq ٠ \Leftarrow ٦ \geq د$

$\Rightarrow د \in (-\infty, ٦]$

مكتبة الوسام AWSSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

نهاية الاقترانات المتشعبة

اذا كان ق(س) اقتران متشعب

$$ق(س) = \begin{cases} \text{قاعدة (١)} & س \geq ٢ \\ \text{قاعدة (٢)} & س < ٢ \end{cases}$$

أو

$$ق(س) = \begin{cases} \text{قاعدة (١)} & س \neq ٢ \\ \text{قاعدة (٢)} & س = ٢ \end{cases}$$

لايجاد النهايات للأقتران ق(س) فاننا نحوض قيم س في القاعدة التي تنتمي اليها (س)

أما اذا كانت (س) نقطة تشعب مثل (٢) فاننا ندرس النهاية من اليمين واليسار حول (٢) وحسب قواعد الأقتران

هنا ق(س)
س ← ٢+
نعوض في القاعدة التي تحوي
س > ٢ ، س ≠ ٢

هنا ق(س)
س ← ٢-
نعوض في القاعدة التي تحوي
س < ٢ أو س = ٢

واذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار فان النهاية موجودة

س > ٢ تعني يمين العدد ٢

س < ٢ تعني يسار العدد ٢

يمين	يسار
س > ٢	س < ٢

كذلك
س ≠ ٢ تعني
س > ٢ أو س < ٢

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

مثال ①

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} 2س - 1 & -2 \le س \le 1 \\ س^2 & 1 < س \le 3 \end{cases}$$

أوجد ما يلي

① $\lim_{س \to 0} \text{ه}(س) = \lim_{س \to 0} (2س - 1)$

القاعدة الأولى

$= 2 \times 0 - 1 = -1$

② $\lim_{س \to 2} \text{ه}(س) = \lim_{س \to 2} س^2$

القاعدة الثانية

③ $\lim_{س \to 1} \text{ه}(س)$

هنا س = ١ نقطة تشعب لذلك لابد ايجاد النهاية من اليمين واليسار

$\lim_{س \to 1^+} \text{ه}(س) = (1)^2 = 1$

$\lim_{س \to 1^-} \text{ه}(س) = 2 \times 1 - 1 = 1$

$\Leftarrow \lim_{س \to 1} \text{ه}(س) = 1$

④ $\lim_{س \to -2^+} \text{ه}(س) = (2 \times -2 - 1)$

$= -5$

⑤ $\lim_{س \to 3^-} \text{ه}(س) = 3^2 = 9$

ملاحظة هامة

النهاية عند الأطراف بشكل عام دائماً غير موجودة

مثال ②

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^3 + 7س & س \neq 4 \\ 5 & س = 4 \end{cases}$$

① أوجد ه(٤) ، ② $\lim_{س \to 4} \text{ه}(س)$

الحل

① ه(٤) = ٥

② $\lim_{س \to 4} \text{ه}(س) = \lim_{س \to 4} س^3 + 7س$

$= 4^2 + 7 \times 4$

$= 64 + 2 = 66$

مكتبة الهدف
Alhadaf
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظه

$\text{نها}_{س \to ٢} \, ق(س)$ تعوض عند $س \neq ٢$

لأن $س \to ٢$ تعني $س \neq ٢$

مثال ③

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ١ & س \leq ٢ \\ ٣س & س > ٢ \end{cases}$$

وكانت $\text{نها}_{س \to ٢} \, ق(س)$ موجوده أوجد قيمة (٢) ؟

الحل

بما أن $\text{نها}_{س \to ٢} \, ق(س)$ موجود $\Leftarrow$ $س \to ٢$

فذلك يعني أن

$$\text{نها}_{س \to ٢^{+}} \, ق(س) = \text{نها}_{س \to ٢^{-}} \, ق(س)$$

$$٢(٢)^{٢} - ١ = ٣ \times ٢$$

$$٢٤ - ١ = ٦$$

$$٢٤ = ٧$$

$$٢ = \frac{٧}{٤}$$

مثال ④

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ب س + ٥ & س \leq ١ \\ ٣س - ٢ & س > ١ \end{cases}$

جد $٢، ب$ علماً بأن $\text{نها}_{س \to ١} \, ق(س) = ٥$

الحل

بما أن $\text{نها}_{س \to ١} \, ق(س) = ٥$ فذلك

يعني أن

① $\text{نها}_{س \to ١^{+}} \, ق(س) = ٥$

$$٢(١)^{٢} + ب \times ١ + ٥ = ٥$$

$$٢ + ب + ٥ = ٥$$

$$٢ + ب = ٠ \quad \cdots\cdots ①$$

② $\text{نها}_{س \to ١^{-}} \, ق(س) = ٥$

$$٣ \times ١ - ٢ = ٥$$

$$٣ - ٢ = ٥$$

$$٢ = -١ \Leftarrow ٢ = -٢$$

بتعويض $٢ = -١$ في ①

$$-١ + ب = ٠$$

$$ب = ١$$

$$\therefore ب = \frac{١}{٢}$$

مكتبة الوسام AL-WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤ (ص مهم جداً)

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٥ + ٤س & س < ٢ \\ ٤س & س \geq ٢ \end{cases}$

فأوجد كل مما يأتي

① $\lim_{س \to ٠} هـ(س^٢ + ١)$

الحل

$ص = س^٢ + ١$

$س \to ٠$ فإن $ص \to ١$

$= \lim_{ص \to ١} هـ(ص) = ٤ \times ١ + ٥ = ٩$

② $\lim_{س \to ٠} هـ(س + ٢)$

$س \to ٠$

نفرض

$ص = س + ٢$

$س \to ٠$ فإن $ص \to ٢$

$\lim_{ص \to ٢} هـ(ص)$

$= \lim_{ص \to ٢^+} هـ(ص) = ٤ \times ٢ = ٨$

$\lim_{ص \to ٢^-} هـ(ص) = ٥ + ٤ \times ٢ = ٩$

$\Leftarrow \lim_{ص \to ٢} هـ(ص)$ غير موجودة

③ $\lim_{س \to ٣^+} هـ(٥ - س)$

$س \to ٣^+$

$ص = ٥ - س$

$س \to ٣^+$ فإن $ص \to (٥ - ٣)^-$

$= ٢^-$

$= \lim_{ص \to ٢^-} هـ(ص) = ٥ + ٤ \times ٤$

$= ٩$

④ $\lim_{س \to ٤^+} ٣ هـ(١٢ - ٤س) + ٥س$

$= ٣ \lim_{س \to ٤^+} هـ(١٢ - ٤س) + \lim_{س \to ٤^+} ٥س$

$ص = ١٢ - ٤س$

$س \to ٤^+$ فإن $ص \to ١٢ - ٤ \times ٤^+$

$ص \to ٤^-$

$= ٣ \lim_{ص \to ٤^-} هـ(ص) + ٥ \times ٤$

$= ٣ \times (٤ \times ٤) + (٥ \times ٤)$

$= ٤٨ + ٢٠$

$= ٦٨$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

نهاية القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح

تذكير

مثال ① عرف الأقترن
$هـ(س) = |س - ٤|$

الحل

① نجد صفر الأقترن $س - ٤ = ٠$
$\Leftarrow س = ٤$

② نضع $س = ٤$ على خط الأعداد ونحدد اشارة هـ

	$س - ٤$	$٤ - س$
	$- - - - -$	$+ + + + +$
	٤	

الأقترن لما هو — نضرب الأقترن بسالب

$$هـ(س) = \begin{cases} س - ٤ & س \geq ٤ \\ ٤ - س & س < ٤ \end{cases}$$

تدريب

اعد تعريف الأقترنات التالية

(أ) $هـ(س) = |س^٢ - ٩|$

(ب) $هـ(س) = |٩ - س^٢|$

(ج) $هـ(س) = |٤ - س|$

مثال ②

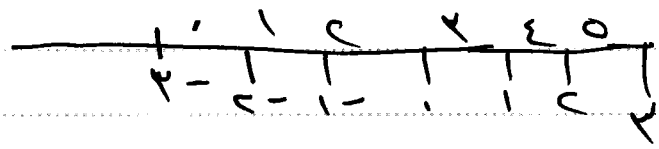
اعد تعريف الأقترن
$هـ(س) = [س + ٣]$
في الفترة $-١ \leq س < ٢$

الحل

① نجد طول الدرجة $= \frac{١}{\text{معامل س}}$
$= \frac{١}{١} = ١$

② نجد صفر الأقترن
$س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٣$

③ خط الأعداد



$$هـ(س) = \begin{cases} ٤ & -١ \leq س < ٢ \\ ٥ & ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظات هامة على القيمة المطلقة

① $|س \times ص| = |س| \times |ص|$

$\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$

$|س - ص| = |ص - س|$

$|س \pm ص| \neq |س| \pm |ص|$

② معادلة القيمة المطلقة

$|س| = ب$

الحل

$س = ب$ أو $س = -ب$

③ متباينات القيمة المطلقة

① $|س| \leq ب$

$\Leftarrow -ب \leq س \leq ب$

② $|س| \geq ب$

$\Leftarrow س \leq -ب$ أو $س \geq ب$

ملاحظة هامة

لإيجاد نهاية القيمة المطلقة نعيد تعريف الأقترانات

واذا كانت النقطة نقطة تشعب نأخذ النهاية من اليمين واليسار

مثال ①

اوجد نها $|٣س - ٢|$

$س \to \frac{٢}{٣}$

الحل

نعيد التعريف

$٣س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = \frac{٢}{٣}$

	$٣س - ٢$	$٢ - ٣س$
	$---$	$+++$

$\frac{٢}{٣}$

نها $ق(س) = ٣ \times \frac{٢}{٣} - ٢ = ٠$ = صفر

$س \to \frac{٢}{٣}^+$

نها $ق(س) = ٢ - ٣ \times \frac{٢}{٣} = ٠$ = صفر

$س \to \frac{٢}{٣}^-$

$\Leftarrow$ نها $|٣س - ٢| = ٠$ = صفر

$س \to \frac{٢}{٣}$

مثال ②

نها $\frac{|س^٢ - ٤س| + ٥}{س^٢ + ٢}$

$س \to ٢$

الحل

$س^٢ - ٤س = ٠ \Leftarrow س(س - ٤) = ٠$

$س(س - ٢)(س + ٢) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٢ \quad س = -٢$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

$س^2-٤س$ | $٤-س$ | $س^3$ | $س^2-٤س$ | $٤-س$ | $س^2$

$++++$ | $---$ | $++++$ | $---$ | $+++$ | $+++$

٠ | ٤

$$\text{نها}_{س\to ٤} \frac{س^2-٤س+٥}{س^2-٤س+٤} = \frac{٥}{٦}$$

$$\text{نها}_{س\to ٤} \frac{س^3-٤س^2+٥}{س^2-٤س+٤} = \frac{٥}{٦}$$

$$\Leftarrow \text{نها}_{س\to ٤} \frac{|س^2-٤س|+٥}{(س-٤)^2} = \frac{٥}{٦}$$

مثال ③

إذا كان $د(س) = \begin{cases} |س|-١ & ١ \le س < ٣ \\ ٢ & ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$

أوجد ① $\text{نها}_{س\to ٣} د(س)$

الحل

$س = ٠$

$س$	$-$	$س$	$-$	$س$
$---$	0	$+++$	0	$---$
-١		٠		٣

$$د(س) = \begin{cases} -س & -١ \le س < ٠ \\ س & ٠ \le س < ٣ \\ ٢ & ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$$

① $\text{نها}_{س\to ٣} د(س)$

$س \to ٣^+$

$\text{نها}_{س\to ٣} د(س) = ٢$

$س \to ٣^-$

$\text{نها}_{س\to ٣} د(س) = ٣$

$\text{نها}_{س\to ٣} د(س)$ غير موجودة

$س \to ٣$

② $\text{نها}_{س\to ٠^+} د(س) = ٠$ ، $\text{نها}_{س\to ٠^-} د(س) = ٠$

$\Leftarrow \text{نها}_{س\to ٠} د(س) = ٠$

$س \to ٠$

مثال ④

$$د(س) = \begin{cases} ١ & |س-١| \ge ٣ \\ \text{ص ف} & |س-١| < ٢ \end{cases}$$

أوجد $\text{نها}_{س\to ٤} د(س)$ ، $\text{نها}_{س\to ٢} د(س)$

الحل

$|س-١| \ge ٣ \Leftarrow -٣ \ge س-١ \ge ٣$

$+١ \quad +١ \quad +١$

$\Leftarrow -٢ \ge س \ge ٤$

$|س-١| < ٣$

$س-١ < ٣$ | $س-١ > -٣$

$+١ \quad +١$ | $+١ \quad +١$

$س < ٤$ | $س > -٢$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع

$$ق(س) = \begin{cases} 1 & -2 \le س \le 4 \\ \text{صفر} & س > 4 ، س < -2 \end{cases}$$

① $\lim_{س \to 4^+} ق(س) =$ صفر

$\lim_{س \to 4^-} ق(س) = 1$

$\lim_{س \to 4} ق(س)$ غير موجود

② $\lim_{س \to 2} ق(س) = \lim_{س \to 2} 1 = 1$

مثال ⑤

اوجد $\lim_{س \to 0} \sqrt{|س|}$

الحل

س		0		
|س|	+	0	−	

$\lim_{س \to 0^+} \sqrt{س} =$ تابع للتعويض = صفر

مجاله $س \ge 0$

$= \sqrt{0} =$ صفر

$\lim_{س \to 0^-} \sqrt{س}$ تابع للتعويض = صفر

المجال

س		0		
س	−	0	+	

(٠) داخل المجال

$= \sqrt{0} =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to 0} \sqrt{|س|} =$ صفر

مثال ⑥

$$ق(س) = \begin{cases} |س - 1| & 0 \le س \le 2 \\ 3س & 2 < س \le 4 \end{cases}$$

اوجد

① $\lim_{س \to 2} ق(س)$ ② $\lim_{س \to 1} ق(س)$

الحل

نعيد تعريف $|س - 1|$

س		1		
س − 1	−	0	+	
1 − س	+	0	−	

$$ق(س) = \begin{cases} س(1-س) & 0 \le س \le 1 \\ س(س-1) & 1 \le س \le 2 \\ 3س & 2 < س \le 4 \end{cases}$$

① $\lim_{س \to 2^+} ق(س) = 3 \times 2 = 6$

$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = 2(2-1) = 2$

$\therefore \lim_{س \to 2} ق(س)$ غير موجودة

② $\lim_{س \to 1} ق(س) = 1(1-1) =$ صفر

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة هامة

لإيجاد قيمة المجاهيل في النهايات التي تحتوي على القيمة المطلقة يتم التعويض المباشر مع بقاء رمز القيمة المطلقة .

مثال ⑦

اذا كانت $\lim_{س \to -٣} \frac{أ س^{٢} + ب س + ٣}{س + ٣} = ١$

اوجد قيمة $ب$ ؟

الحل

$$\frac{أ(-٣)^{٢} + ب(-٣) + ٣}{-٣ + ٣} = ١$$

$$\frac{٩أ - ٣ب + ٣}{٠} = ١ \Leftarrow ٩أ - ٣ب + ٣ = ٠$$

$$٣ب = ٩أ + ٣$$

مثال ⑧

اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أ س + ١٢}{س^{٢} + ١} = ٤$

اوجد قيمة $أ$

الحل

$$\frac{أ + ١٢}{١ + ١} = ٤$$

$$\Leftarrow \frac{|أ + ١٢|}{٣} = ٤ \Leftarrow |أ + ١٢| = ١٢$$

$$أ + ١٢ = ١٢ \quad \text{أو} \quad أ + ١٢ = -١٢$$

$$أ = ١١ \quad أ = -٢٤$$

مثال ⑨

اذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{٤ - س}{|س - ١٤|} & س < ٤ \\ ٩ - ب س^{٢} & س \geq ٤ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٤} د(س)$ موجودة

اوجد قيمة $ب$ ؟

الحل

$س$	٤	
$س - ٤$	$- \quad 0 \quad +$	
$٤ - س$	$+ \quad 0 \quad -$	
$|س - ١٤|$	$+ \quad + \quad +$	
	$\frac{-}{٤}$	

$$= \begin{cases} \frac{٤ - س}{س - ٤} = -١ & س < ٤ \\ ٩ - ب س^{٢} & س \geq ٤ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ٤^{+}} د(س) = \lim_{س \to ٤^{-}} د(س)$$

$$٩ - ب(٤)^{٢} = -١$$

$$٩ - ١٦ب = -١$$

$$\Leftarrow ١٦ب = ١٠$$

$$ب = \frac{١٠}{١٦} = \frac{٥}{٨}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} |٢س + ٢| & س \leq ١ \\ ٣س + ١ & س > ١ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ١} \text{ه}(س)$ موجودة

فأوجد قيمة $ب$ ؟

الحل

$$\lim_{س \to ١^+} \text{ه}(س) = \lim_{س \to ١^-} \text{ه}(س)$$

$$|٢ب + ١ \times ٢| = ٣ \times ١ + ١$$

$$|٢ب + ٢| = ٤$$

$$٢ب + ٢ = ٤ \quad ، \quad ٢ب + ٢ = -٤$$

$$٢ب = ٢ \qquad ٢ب = -٦$$

$$ب = ١ \qquad ب = -٣$$

مثال (١١)

اذا كان $\text{ه}(س)$ كثير حدود وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{\text{ه}(١ - س)}{س} = -١$ وكانت $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ه}(س)}{س} = -٣$

فأوجد $\lim_{س \to ١} (|٣س + ١| \cdot \text{ه}(١ + س) + ٤س^٢)$

الحل

① $\lim_{س \to ١} \frac{\text{ه}(١ - س)}{س} = -١$

$ص = ١ - س$ عندما $س \to ١$ ، $ص \to ٠$

$\Rightarrow \lim_{ص \to ٠} \frac{\text{ه}(ص)}{ص} = -١$

لكن $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ه}(س)}{س} = -٣$

$= \lim_{س \to ٠} \text{ه}(س) \cdot \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} = -٣$

$= -١ \times \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ه}(٠ - س)}{س} = -٣$

ايضاً $٠ - س = ع$

عندما $س \to ٠$ ، فإن $ع \to ٠$

$$= \boxed{\lim_{ع \to ٠} \frac{\text{ه}(ع)}{ع} = ٣} \quad \cdots ①$$

المطلوب

$$\lim_{س \to ١} (|٣س + ٣| \cdot \text{ه}(١ + س) + ٤س^٢)$$

$$= ٤ \cdot \lim_{س \to ١} \text{ه}(١ + س) + ٤$$

$$= ٤ \times \lim_{س \to ١} \frac{\text{ه}(١ + س)}{س} + ٤$$

نفرض $ص = ١ + س$

$س \to ١$ فإن $ص \to ٠$

$$= ٤ \times \lim_{ص \to ٠} \frac{\text{ه}(ص)}{ص} + ٤$$

$$= ٤ \times ٣ + ٤ = ١٦$$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٢)

اوجد قيمة P حيث $\text{ها}_{س \to P} \sqrt{٣ - |س|}$ موجودة ؟

الحل

$٣ - |P| > ٠ \Leftarrow$

$|P| < ٣$

$-٣ < P < ٣$

مثال (١٣)

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} |س| & س \geq ٠ \\ \sqrt{-س} & س < ٠ \end{cases}$$

جد $\text{ها}_{س \to ٠} \text{ق}(س)$ ، ثم جد ق(٠) ؟

الحل

$|س| \Leftarrow$ س ، −س

$\Leftarrow \text{ق}(س) = \begin{cases} س & س \geq ٠ \\ \sqrt{-س} & س < ٠ \end{cases}$

$\text{ها}_{س \to ٠^+} \text{ق}(س) =$ صفر

ها ق(س) حدد المجال

$س \to ٠^-$

$\sqrt{-س}$ ، − − − − + + + +

-٠ ↗ !

تنتمي للمجال

$\Leftarrow \text{ها}_{س \to ٠^-} \text{ق}(س) =$ صفر

$\Leftarrow \text{ها}_{س \to ٠} \text{ق}(س) =$ صفر

ق(٠) = صفر

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب (٣) ص٢٢

(١) هنا |س - ١٨| = |٠ - ١٨|
س ← ٠ = |-١٨| = ١٨

(٢) هنا |س - ١٦|
س ← ١٦
نعيد التعريف

س - ١٦ = ٠ ⇐ س = ١٦

	س - ١٦	١٦ - س
	+ + +	- - -

١٦

هنا ق(س) = ١٦ - ١٦ = صفر
س ← ١٦+

هنا ق(س) = ١٦ - ١٦ = صفر
س ← ١٦-

هنا |س - ١٦| = صفر
س ← ١٦

(٣) هنا |س٢ - ١٦|
س ← ٤

الحل

س٢ - ١٦ = ٠ ⇐ س = ±٤

	س٢ - ١٦	١٦ - س٢
	+ + +	- - -

-٤ ، +٤

هنا |س٢ - ١٦| = ٤٢ - ١٦ = صفر
س ← ٤+

هنا |س٢ - ١٦| = ١٦ - ٤٢ = صفر
س ← ٤-

هنا |س٢ - ١٦| = صفر
س ← ٤

تمارين ومسائل ص٢٧

السؤال الثالث

(٤) هنا |س٢ - ٢٥|
س ← ٥+

	س٢ - ٢٥	٢٥ - س٢	س٢ - ٢٥
	+ + +	- - -	+ + +

-٥ ، +٥

= هنا |س٢ - ٢٥| = ٥٢ - ٢٥
س ← ٥+ = صفر

(٥) هنا |س٢ - ٢٥| = ٢٥ - ٢٥
س ← ٥- = صفر

(٦) هنا |س - ٢|
س ← ٢-

	س - ٢	٢ - س
	- - -	+ + +

٢-

هنا |س - ٢| = ٢ - ٢ = صفر
س ← ٢-

مكتبة الوسام ALWESAM
الإعلام: ناجح الجمزاوي

تابع حل السؤال الثالث

⑤ هـا | س^{٢} - ١٦٤ |
س ← ٨

س^{٢} - ٦٤ = ٠ ⇒ س = ± ٨

	س^{٢} - ٨	٨ - س^{٢}	س^{٢} - ٨
	+	−	+

٨- ٨+

هـا | س^{٢} - ١٦٤ | = صفر
س ← ٨$^{+}$

هـا | س^{٢} - ١٦٤ | = صفر
س ← ٨$^{-}$

هـا | س^{٢} - ١٦٤ | = صفر
س ← ٨

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

نهاية اكبر عدد صحيح

ملاحظات هامة

① $P \in$ ص فان

$[س+P] = [س] + P$

$[س-P] = [س] - P$

مثال

$[س+٥] = [س] + ٥$

$[س-٢] = [س] - ٢$

② اذا كانت $P \in$ ص فان

$[P] = P^{+}$ ، $[P] = P - ١^{-}$

③ اذا كانت $P \notin$ ص فان

$[P] = [P]^{-} = [P]^{+}$

④ معادلة أكبر عدد صحيح

$[س] = P$

$\Leftarrow P \leq س < P + ١$

⑤ اعادة تعريف أكبر عدد صحيح

مثال ①

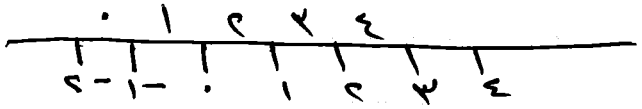
$هـ(س) = [س+٢]$ ، $٠ \leq س < ٣$

الحل

① طول الدرجة $= \frac{١}{\text{معامل س}} = \frac{١}{١} = ١$

② نجد صفر المقدار $س+٢ = ٠$

$\Leftarrow س = -٢$



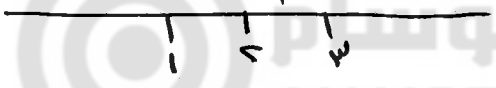
$هـ(س) = \begin{cases} ٢ & ٠ \leq س < ١ \\ ٣ & ١ \leq س < ٢ \\ ٤ & ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

مثال ②

$هـ(س) = [٣-س]$ $\quad ١ < س \leq ٣$

الحل

طول الدرجة $= ١$ صفر المقدار $س = ٢$



$هـ(س) = \begin{cases} ٠ & ١ < س \leq ٢ \\ -١ & ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$

مكتبة الوسام ALWESAM العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١)

اوجد

(أ) $\lim_{س \to ٠} [٤س - ٤و٠]$

(ب) $\lim_{س \to ٠} [٤س - ٤و٠]$

الحل

(أ) $\lim_{س \to ٠} [٤س - ٤و٠] = ٠$

نلاحظ ان $٠و٠$ هي نقطة تشعب لذلك يجب ايجاد النهاية من اليمين واليسار

$\lim_{س \to ٠^+} [٤س - ٤و٠] = ١$

$\lim_{س \to ٠^-} [٤س - ٤و٠] =$ صفر

$\lim_{س \to ٠}$ غير موجودة

(ب) $\lim_{س \to ٠} [٤س - ٤و٠] = -١$

هنا عند $س = ٠$ نأخذ فترة واحدة لأن $س = ٠$ ليست نقطة تشعب

مثال (٢)

اوجد $\lim_{س \to ٣} س^٢ [س + ١]$

الحل

$س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$ الجذر

طول الدرجة $= \frac{١}{١} = ١$

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ \times ٣ & ٢ \leq س < ٣ \\ س^٢ \times ٤ & ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٣^+} س^٢ [س + ١] = \lim_{س \to ٣^+} س^٢ \times ٤ = ٣٦$

$\lim_{س \to ٣^-} س^٢ [س + ١] = \lim_{س \to ٣^-} س^٢ \times ٣ = ٢٧$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} س^٢ [س + ١]$ غير موجودة

مثال ٣

اوجد نها $[س-١]-[س+٢]$
س ← ١,٦

الحل
حسب خواص
نها $[س]-١-[س]-٢$
س ← ١,٦

$= نها\ -١-٢ = -٣$
س ← ١,٦

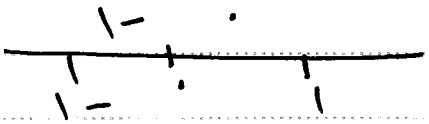
مثال ٤

نها $[س]$
س ← ٠

$(س+١)$

الحل

$[س]$



نها $(س+١) = نها\ ١ = ١$
س ← ٠+

نها $(س+١)^{-١} = نها\ \frac{١}{س+١} = ١$
س ← ٠-

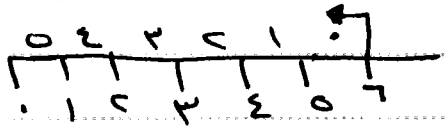
$\Leftarrow$ نها $(س+١)^{[س]} = ١$
س ← ٠

مثال ٥

نها $|س-٢| + [٦-س]$
س ← ٢

الحل

$[٦-س]$ $\quad س = ٦$ طول الدرجة = ١



$|س-٢|$ عند $س = ٢$

نها $|س-٢| + [٦-س]$
س ← ٢+

$= نها\ س-٢+٣ = ٣$
س ← ٢+

نها $|س-٢| + [٦-س]$
س ← ٢-

$= نها\ ٢-س+٤ = ٤$
س ← ٢-

$\leftarrow$
نها $|س-٢| + [٦-س]$
س ← ٢
غير موجودة

مكتبة الوسام AlWesam
العلم: ناجح الجمزاوي

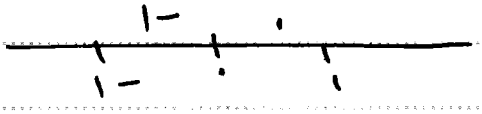
مثال ٦

اوجد $\lim_{س \to 0^-} \frac{|س+٣|+٣}{[س+٧]-١}$

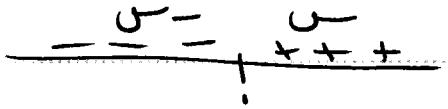
الحل

$\lim_{س \to 0^-} \frac{|س+٣|+٣}{[س]+٧-١} = \lim_{س \to 0^-} \frac{|س+٣|+٣}{[س]+٦}$

$[س]$



$|س+٣|$



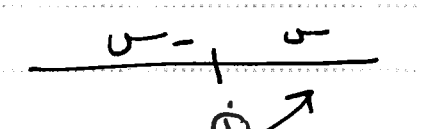
$= \frac{-س+٣}{-١+٦} = \frac{٠+٣}{٥}$

$= \frac{٣}{٥}$

مثال ٧

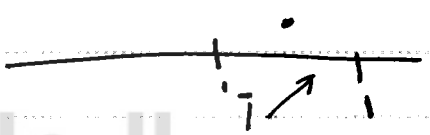
$\lim_{س \to 1^-} \frac{١}{١-[|س|]}$

$|س| =$



$= \lim_{س \to 1^-} \frac{١}{١-[س]}$

$[س]$



$= \frac{١}{١-٠} = ١$

مثال ٨

اذا كانت $ق \ni ص$ وكانت

$\lim_{س \to 3^-} [س+ق] = ٥$ اوجد $ق$

الحل

بما ان $ق \ni ص$ يمكن استخدام الخاصية

$\lim_{س \to 3^-} [س]+ق = ٥$

$[٣]^- + ق = ٥$

$٢ + ق = ٥ \Leftarrow ق = ٣$

مثال ٩

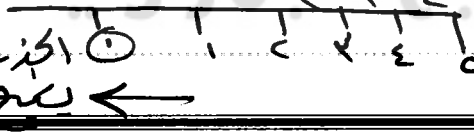
$ق(س) = \begin{cases} ٥س-١ & س \leq ٤ \\ [س+ق] & س > ٤ \end{cases}$

اوجد قيمة الثابت $ق \ni ص$ بحيث

ان $\lim_{س \to 4^-} ق(س)$ موجودة

الحل

$[س+٢] = [س]+ق$



← يسمح الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع الكل

$$د(س) = \begin{cases} ٥س - ١ & س < ٤ \\ ٣ + ٩ & س \geq ٤ \end{cases}$$

هنا $(٥س - ١) = ٣ + ٩$ هنا
$س \to ٤^+$ $س \to ٤^-$

$١٩ = ٣ + ٩$
$\Leftarrow ٩ = ١٦$

مثال (١٠)

اوجد قيم الثابت ٩ في كل من الحالات التالية

① هنا $[س + ٩] = ٧$
$س \to ٣^+$

② هنا $[س + ٩] = ٧$
$س \to ٣^-$

③ هنا $[س + ٩] = ٧$
$س \to ٣$

الحل

① هنا $[س + ٩] = ٧$
$س \to ٢^+$

$\Leftarrow [٣ + ٩]^+ = ٧$

$\Leftarrow [٩]^+ + ٣ = ٧$

$[٩]^+ = ٤$

حالتان

① $٩ \in$ ص $\Leftarrow [٩] = ٤$

② $٩ \notin$ ص $[٩] = ٤$
وهنا $٤ < ٩ < ٥$

$٩ = (٤ ، ٥)$

---

② هنا $[س + ٩] = ٧$
$س \to ٣^-$

$[٣ + ٩]^- = ٧ \Leftarrow ٣ + [٩]^- = ٧$

$[٩]^- = ٤$

حالتان

① $٩ \in$ ص

$[٩]^- = ٩ - ١ = ٤ \Leftarrow ٩ = ٥$

② $٩ \notin$ ص

$[٩]^- = [٩] = ٤$

$\Leftarrow ٤ \leq ٩ < ٥$

بما أن $٩ \notin$ ص فتكمل $\leq$

$٤ \leq ٩ < ٥$

$(٤ ، ٥)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع الحل

③ نهـا [س+٢] = ٧
س ← ٣

لاحظ ان النهاية المطلوبة بشكل عام
٢+٢ ∉ ص لأنه لو كانت
٢+٢ ∈ ص لكانت النهاية غير موجودة
ولكنه النهاية موجودة هنا
← [٢+٣] = ٧ ← ٣+[٢] = ٧
⇐ [٢] = ٤

① ٢ ∈ ص مرفوضة
② ٢ ∉ ص ⇐ [٢] = ٤
٤ ≤ ٢ < ٥ نرحل ٤
٤ < ٢ < ٥ ⇐ ٢ ∈ (٤، ٥)

مثال ⑪

اذا كان
ق(س) = { ا س ا + ٥ ، س < ٢
[س] + ٢٢ ، س > ٢

جد ٢ ∈ ص، اذا كانت نهـا ق(س) موجودة
س ← ٢
؟

الحل

نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
س ← ٢+ ، س ← ٢-

[٢] + ٢٢ = ا ٢ ا + ٥
٢ - ا ٢ ا + ٢٢ = ا ٢ ا + ٥
⇐ ا ٢ ا = ٣٢ - ٦

٢ = ٣٢ - ٦ أو ٢ = -٣٢ + ٦
٦ = ٣٢ ، ٢٤ = ٦
٢ = ٣ ، ٢ = ٦/٤ مرفوضة

⇐ ٢ = ٣

مثال ⑫

اذا كانت
ق(س) = { [س + ١] ، س > ٢
٨ - [س] ، س < ٢

وكانت نهـا ق(س) موجودة
س ← ٢
عائمية ٢ ؟

الحل

نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
س ← ٢+ ، س ← ٢-

تابع الحل

$\lim_{س \to ٨} [س] - [س] = \lim_{س \to ٨} [س+١]$

$س \to ٨^+ \quad س \to ٨^-$

$٨ - [٨]^+ = [٨]^- + ١$

أولاً $٨ \in ص$

$[٨]^+ = ٨$ ، $[٨]^- = ٨ - ١$

$\Leftarrow ٨ - ٨ = ٨ - ١ + ١$

$\Leftarrow ٢ ٨ = ٨ \Leftarrow ٨ = ٤$

ثانياً $٨ \notin ص$

$[٨]^+ = [٨]$ ، $[٨]^- = [٨]$

$\Leftarrow ٨ - [٨] = [٨] + ١$

$\frac{٢}{٢}[٨] = \frac{٧}{٢}$

$[٨] = ٣,٥$ مستحيل

مثال (١٣)

$د(س) = \begin{cases} [\frac{س}{٣} + ٢] & س \neq ٠ \\ \frac{|س|}{س} & س < ٠ \end{cases}$

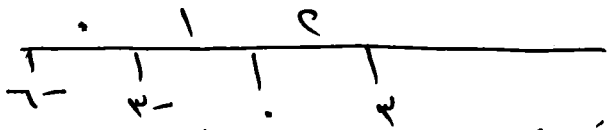
جد $\lim_{س \to ٠} د(س)$

الحل

نعيد تعريف الدالة عدد صحيح

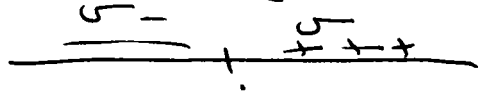
طول المدى $= \frac{١}{\frac{١}{٣}} = ٣$

صفر الأقران $\frac{س}{٣} + ٢ = ٠ \Leftarrow س = -٦$



نعيد تعريف القيمة المطلقة

$|س| = ٠ \quad س = ٠$



$د(س) = \begin{cases} ١ & -٣ \leq س < ٠ \\ \frac{س}{س} & س > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} ١ & -٣ \leq س < ٠ \\ ١ & س > ٠ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = ١$

$\lim_{س \to ٠^-} د(س) = ١$

$\lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٤)

$$ق(س) = \begin{cases} ١ + ٣[س] & س < ٢ \\ ٥ - [س] & س > ٢ \end{cases}$$

جد ٢ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة حيث ٢ ∉ ص .

الحل

$$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$$

$$\lim_{س \to ٢^+} (١ + ٣[س]) = \lim_{س \to ٢^-} (٥ - [س])$$

$$١ + ٣[٢] = ٥ - [٢]$$

$$٤[٢] = ٤$$

$$[٢] = ١ \Leftarrow ١ \leq ٢ < ٢$$

٢ ∈ [١ ، ٢) لكن ٢ ∉ ص

← ٢ ∈ (١ ، ٢)

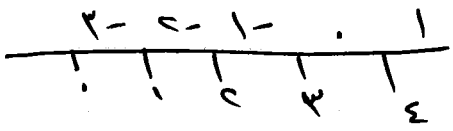
مثال (١٥)

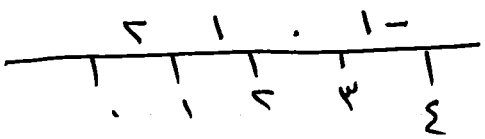
اذا كان $ق(س) = [س + ٣]$

$ه(س) = [٣ - س]$ فأوجد

$\lim_{س \to ٣} ق(س) \times ه(س)$

الحل





$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) \times ه(س) = ٠ \times -١ = صفر$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) \times ه(س) = -١ \times ٠ = صفر$

$\Rightarrow \lim_{س \to ٣} ق(س) \times ه(س) = صفر$

نسمى هذه العملية دمج الاقتران

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ④ ص٢٣

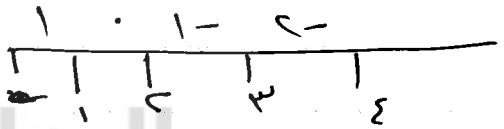
اذا كان $هـ(س) = [٢ - س]$ فاجب عن كل مما يأتي

① حدد قيم p التي تجعل لها $\lim_{س \to p} هـ(س)$ غير موجودة

هنا $[٢ - س]$ غير موجود عندما $p \in ص$

② حدد قيم $ج$ التي تجعل $\lim_{س \to ج} هـ(س) = ١$

$[٢ - س]$
طول الدرجة $= ١$
$٢ - س = ٠ \Leftarrow س = ٢$



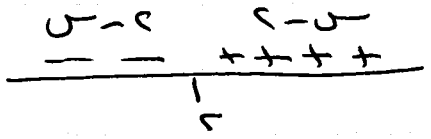
$هـ \notin (٣، ٢)$

تدريب ⑥ ص٢٥

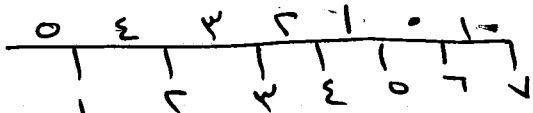
اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} |س - ٢| & س \geq ٢ \\ [٦ - س] & س < ٢ \end{cases}$

الحل

$|س - ٢|$



$[٦ - س]$ طول الدرجة $= ١$
$٦ - س = ٠ \quad س = ٦$



$هـ(س) = \begin{cases} س - ٢ & س \geq ٢ \\ ٤ & ١ < س < ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٢ - ٢ =$ صفر

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

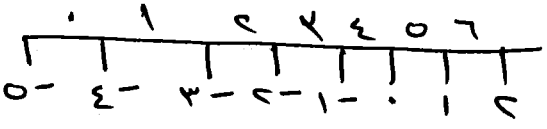
تدريب ⑦ ص ٦٢

اذا كان $ه(س) = [س+٥]$
$ل(س) = [٤ - س]$ ، أوجد كلاً مما يأتي

① $\lim_{س \to ١} ه(س)$

طول الدرجة = ١

$س+٥ = ٠ \Leftarrow س = -٥$



$\lim_{س \to ١^+} ه(س) = ٦$

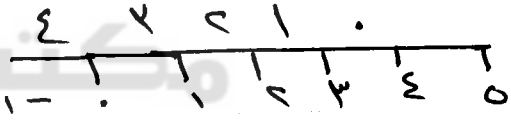
$\lim_{س \to ١^-} ه(س) = ٥$

$\lim_{س \to ١} ه(س)$ غير موجودة

② $\lim_{س \to ١} [٤ - س]$

طول الدرجة = ١

$٤ - س = ٠ \Leftarrow س = ٤$



$\lim_{س \to ١^+} ل(س) = ٢$

$\lim_{س \to ١^-} ل(س) = ٣$

$\lim_{س \to ١} ل(س)$ غير موجودة

③ $\lim_{س \to ١} (ه(س) + ل(س))$

$\lim_{س \to ١^+} ه(س) + ل(س) = ٦ + ٢ = ٨$

$\lim_{س \to ١^-} ه(س) + ل(س) = ٥ + ٣ = ٨$

$\lim_{س \to ١} ه(س) + ل(س) = ٨$

نسمى هذه العملية دمج الاقترانات

حل آخر

$ه + ل = \begin{cases} ٩ & س = ٠ \\ ٨ & ٠ < س < ١ \\ ٩ & س = ١ \\ ٨ & ١ < س < ٢ \end{cases}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين وسائل ص٢٧

السؤال الخامس ص٢٨

اذا كان $ق(س) = [\![٢ق٠ س]\!]$

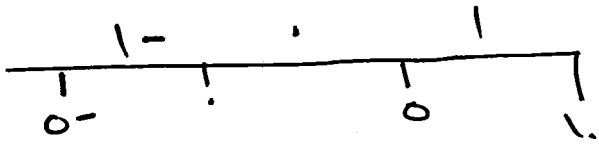
أجد قيم ح التي تجعل $\lim_{س \to ح} [\![٢ق٠ س]\!] = -١$

الحل

طول الدرجة $= \frac{١}{٢ق٠} = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = \frac{١٠}{٢}$

$= ٥$

$٢ق٠ س = ٠ \Leftarrow س = ٠$



$ح \in (-٥ ، ٠)$

السؤال السادس ص٢٨

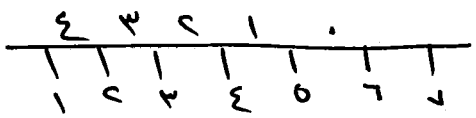
اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٩ق & س \geq ٣ \\ [\![-٦ س]\!] & س < ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة

أجد قيمة الثابت ق

الحل

$[\![-٦ س]\!]$



$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} ق(س)$

$٩ق - ٢٤ = ٣$

$٩ق = ٣ - ٢٤$

$٩ق = ٦ \Leftarrow ٢٤ = ٦ \Leftarrow ق = \frac{٦}{٢٤} = \frac{٣}{١٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان $ه(س) = \frac{\sqrt{٥-س} + ٣}{س^٢ + ٢}$

فاوجد هـا $ه(س)$
$س \leftarrow ٥$

الحل

ناتج التعويض $= \sqrt{٥-٥} = ٠$

حدد المجال

المجال		
− − −	٥	+ + +

هـا $ه(س) = \frac{\sqrt{٥+٣} + ٣}{٥^٢ + ٢} = \frac{٣}{٢٧}$
$س \leftarrow ٥^+$

هـا $ه(س)$ غير موجودة
$س \leftarrow ٥^-$

$\Leftarrow$ هـا $ه(س)$ غير موجودة
$س \leftarrow ٥$

وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كان

$ه(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{|س-١٣|} & س < ٣ \\ ح س^٢ - ٤ & س > ٣ \end{cases}$

وكانت هـا $ه(س)$ موجودة فاوجد P
$س \leftarrow ٣$

الحل

$|س-١٣|$

$٣-س$	٣	$س-٣$

$ه(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{٣-س} = -١ & س < ٣ \\ ح س^٢ - ٤ & س > ٣ \end{cases}$

هـا $ه(س) =$ هـا $ه(س)$
$س \leftarrow ٣^+$ — $س \leftarrow ٣^-$

$ح(٣)^٢ - ٤ = -١$

$٩ح = ٣$

$ح = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) صيفية

اوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{|س^٢ - ٩|}{|س - ٣|}$

الحل

ناخذ المقاوض = $\frac{\text{أ}}{\text{أ}}$ نحدد مجال

$س^٢ - ٩$: + + + | − − − | + + + (عند -٣ و $+٣$)

$س - ٣$: − − − | + + + (عند $+٣$)

نأخذ مجال $س \to ٣^+$

$= \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$: + + + | + (عند $+٣$)

$= \frac{|س - ٣| \times |س + ٣|}{س - ٣}$

$= \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$

$= ٦$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{|س^٢ - ٩|}{|س - ٣|}$ = غير موجود

لاتقع في مجال

$\lim_{س \to ٣} \frac{|س^٢ - ٩|}{|س - ٣|}$ غير موجود

وزارة (٢٠١٤) شتوية

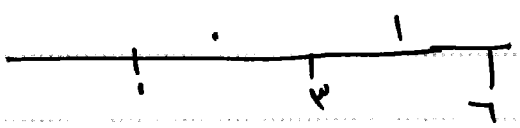
اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + \frac{١}{س} + [\frac{س}{٣}] & ١ \le س \le ٣ \\ \frac{|س - ١٣|}{س^٢ - ٩} & ٣ < س < ٤ \end{cases}$

اوجد $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

الحل

$[\frac{س}{٣}]$ طول المدرج = ٣

اكبر $س = ٠$



$|س - ١٣|$: $س - ١٣$ | $١٣ - س$ (عند ١٣)

$س^٢ - ٩$: + + + | − − − (عند ٣)

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ١٣}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{١}{٦}$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} س^٢ + \frac{١}{س} + ٠$

$= (٣)^٢ + \frac{١}{٣} = ١٨ + \frac{١}{٣}$

$= \frac{٥٤ + ١}{٣} = \frac{٥٥}{٣}$

$\lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجود

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفي

اذا كان $\lim_{س \to ٣} (ق(س+١) - ٣س) = ٠$
فان $\lim_{س \to ٩} ٣ ق(س+٢)$ تساوي

أ) ٥ ب) ٦ ج) ١٣ د) ١٠٨

الحل

$\lim_{س \to ٠} ق(س+١) - ٦ = ٠$

$\lim_{س \to ٠} ق(س+١) = ٦$

ص = س + ١
س → ٠ ⇒ ص → ٥

$\lim_{ص \to ٥} ق(ص) = ٦$

$٣ \lim_{س \to ٩} ق(\sqrt{س}+٢)$

⇐ ص = $\sqrt{س}$ + ٢
س → ٩ ⇒ ص → $\sqrt{٩}$ + ٢
٥ = ٥ + ٣

$= ٣ \times (٦)$
$= ٣ \times ٣٦ = ١٠٨$

(د)

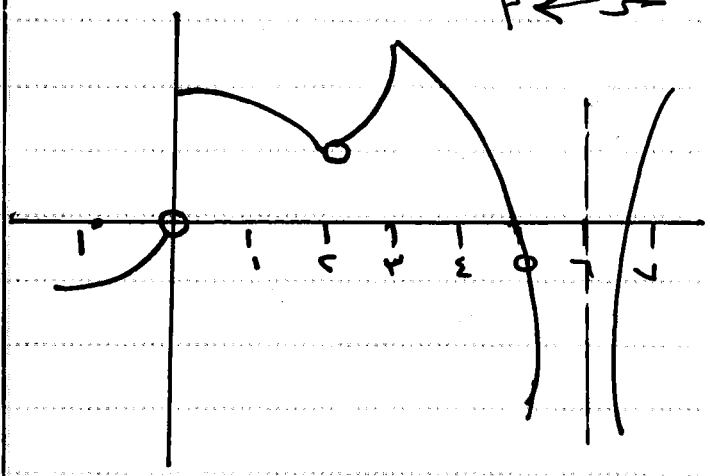
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

نهاية اقتران عند نقطة
نظريات النهايات

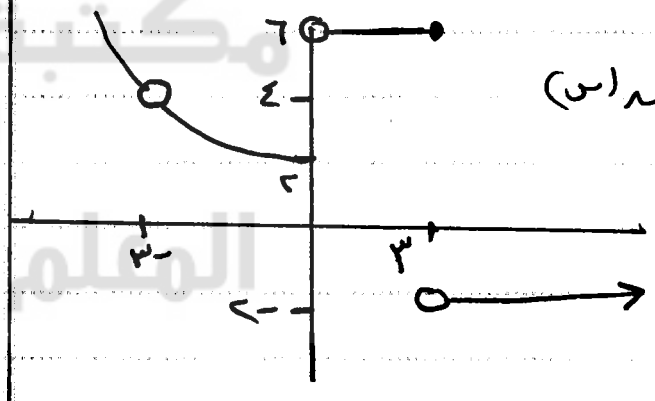
السؤال الأول

الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)
اوجد مما يلي (م) التي يكون عندها
نهـا ق(س) غير موجودة
س ← م



السؤال الثاني

اعتماداً على الشكل المجاور - اوجد مما يلي



١) جد مما م حيث نهـا ق(س) غير موجودة
س ← م

٢) نهـا √(س^٢ ق(س) + ٧) + √(س^٢ + ٧)
س ← -٣

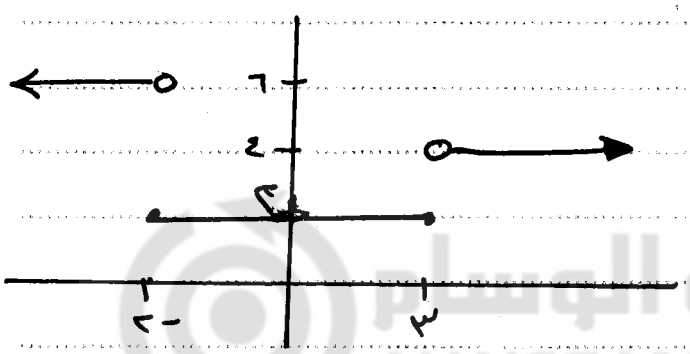
٣) مما م حيث نهـا ق(س) = -٢
س ← م

٤) جد نهـا ٦ ق(س + ٤) + س^٢
س ← -٤

٥) جد نهـا ٤ ق(٥ - س)
س ← ٢+

السؤال الثالث

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) اوجد مما يلي



أ) نهـا ق(س)
س ← -٤

ب) نهـا ق(س)
س ← ٧

ج) مما م حيث نهـا ق(س) غير موجودة
س ← م

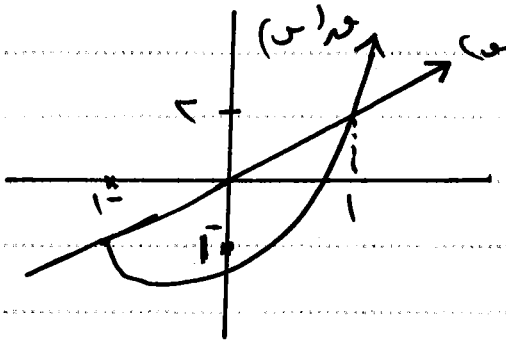
د) مما م حيث نهـا ق(س) = ٢
س ← م

مكتبة الوسام AL WESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

الشكل المرافق يمثل منحنى الاقترانين $ق(س)$ ومنحنى $ل(س)$ حيث $ق$، $ل$ كثيرا حدود اوجد

$$\text{نها}_{س \leftarrow ٢} ٣ ق(٥ - ٣س) + \text{نها}_{س \leftarrow ٢} (٤س - ٥)$$



⑤

$$ق(س) = \begin{cases} [\frac{س}{٢} + ٢] & س < ٠ \\ ٤س + ٢ & س \geq ٠ \end{cases}$$

حيث هنا $ق(س)$

$س \leftarrow ٠$

⑤

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} & س < ٠ \\ س^{٢} + ١ & س \geq ٠ \end{cases}$$

نهاية $ق(س)$

$س \leftarrow ٠$

السؤال الخامس

جد كل من الاقترانات التالية ثم اوجد النهاية المطلوبة

④ $ق(س) = [\frac{١}{٣}س + ٢]$

$س \in [٨، ١٠]$

اوجد نهاية $ق(س)$ ثم نهاية $ق(س)$

$س \leftarrow ٣$ — $س \leftarrow ٢$

⑤

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|س - ١|}{س} & س < ٢ \\ [\frac{١}{٤}س + ٢] & س \geq ٠ \end{cases}$$

اوجد نهاية $ق(س)$

$س \leftarrow ٠$

السؤال السادس

④ اذا كان

نهاية $(٤س \cdot ق(س) + \frac{١٢}{س}) = ٥٢$

$س \leftarrow ٣$

جد نهاية $ق^{٣}(س) + \frac{٤٢}{\sqrt{ق(س)}}$

$س \leftarrow ٣$

⑤ اذا كانت نهاية $ق(س) = ١٥٠$

$س \leftarrow ٥$

اوجد نهاية $(٤ق(س) + [\frac{س}{٢} + ٧])$

$س \leftarrow ٥$

⑥ اذا كانت نهاية $ق(س) = ٤$ و نهاية $ق(٧) = ٣$

$س \leftarrow ٧$

جد نهاية $(٤ق(س + ١) + س^{٢} + ٥)$

$س \leftarrow ٣$

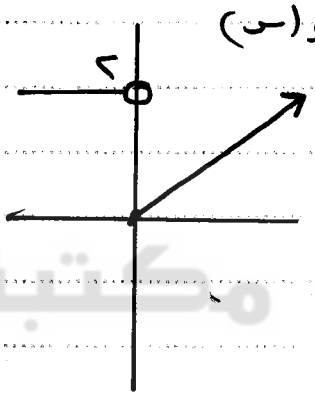
مكتبة السحاب ALSAHAB
المعلم: ناجح الجمزاوي

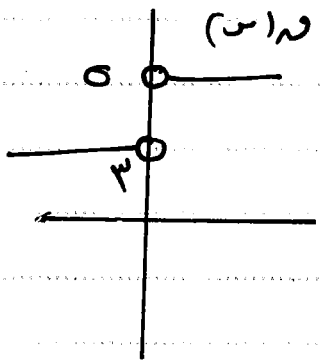
السؤال السابع

(أ) اذا كان $هـ(س) = [٤ + س]$
$و(س) = [٥ - س]$ اوجد
$\lim_{س \to ٢} (هـ(س) + و(س))$

(ب) اذا كانت $\lim_{س \to ١} هـ(س-١) = -١$ وكانت
$هـ(س) \cdot هـ(٢-س) = -٣$
$\lim_{س \to ٠}$
اوجد $\lim_{س \to ١} (٣+س) هـ(١+س)$

(ج) بالاعتماد على الشكل المجاور
اوجد $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) + و(س))$





(د) اذا كانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س+١) = ٨$
اوجد $\lim_{س \to ٣} [\frac{١}{٥} س + ٤] هـ(س) + ٢$

السؤال الثامن

(أ) اذا كان $هـ(س)$ كثير حدود وكانت
$\lim_{س \to ١} هـ(١-س) = -١$ وكانت
$\lim_{س \to ٠} هـ(س) \cdot هـ(٢-س) = -٣$
اوجد $\lim_{س \to ١} (٣+س) هـ(١+س)$

(ب) اذا كان
$هـ(س) = \begin{cases} ٢ - |س-١| & س \neq ١ \\ \frac{[س]}{١ - س} & س < ١ \end{cases}$
وكانت $\lim_{س \to ١} هـ(س)$ موجودة أوجد ؟

(ج) اذا كان
$هـ(س) = \begin{cases} \frac{|س-٣|}{٣-س} & س \neq ٣ \\ ٢س + ٤ & س < ٣ \end{cases}$
وكانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$ موجودة أوجد ؟

(د) اوجد ان $\lim_{س \to ٣} |س-٣|$ موجودة
$\lim_{س \to ٣}$

مكتبة الوسام
AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(ك) اذا كانت $ق(س) = أس^2 + ب|س| + 2$ حيث أ، ب أعداد حقيقية وكانت $\lim_{س \to 2} ق(س) = 4$ ، $\lim_{س \to -1} ق(س) = صفر$ فأوجد قيمة أ، ب

(هـ) أوجد قيمة أ حيث أن $\lim_{س \to 3^+} [أس + 1] = 4$

(و) إذا كانت $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 12}{س - 3} = ب$ فأوجد قيمة أ ؟

(ز) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س + 4 & س \leq أ \\ [س] + 2أ & س > أ \end{cases}$

أوجد قيمة أ علماً بأن أ ∈ ص كما أن $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة

(ح) إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} [س + 2] & س < أ \\ 8 - [س] & س \geq أ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة حيث أ ∉ ص

السؤال التاسع

(أ) أوجد $\lim_{س \to 0} [س] \, هـ(س^2 + 1)$

(ب) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس + ب & س < 2 \\ س^2 + بس + أ & س \geq 2 \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to 2} ق(س) = 7$

أوجد قيم أ، ب ؟

(ج) أوجد النهايات التالية

(١) $\lim_{س \to 0} س \times \sqrt[3]{1 - \frac{1}{س^3}}$

(٢) $\lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س^2 - 16}}{\sqrt[3]{س - 4}}$

(٣) $\lim_{س \to 7} \frac{س - 7}{\sqrt{س} - \sqrt{7}}$

(٤) $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س^2 - 4} + \sqrt{س - 2}}{\sqrt{س - 2} + \sqrt{س^2 - 4}}$

(٥) $\lim_{س \to 0} \sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}$

مكتبة نجم العلم
ALNEGAM
نجم العلم: ناجح الجمزاوي

حلول ورقة عمل النهاية عند نقطه

السؤال الأول

$$P = \{٠ ، ٦\}$$

السؤال الثاني

① $P = \{٠ ، ٣\}$

② $\text{نها}_{س \to -٣} س^{٢} \text{ق}(س) + \text{نها}_{س \to -٣} \sqrt{س + ٧}$

$= ٩ \times ٤ + \sqrt{-٣ + ٧}$

$= ٣٦ + \sqrt{٤} = ٣٦ + ٢ = ٣٨$

③ $\text{نها}_{س \to ٢} \text{ق}(س) = -$

$P \ni (٣ ، ٥)$

④ $\text{نها}_{س \to -٤} ٦ \text{ق}(س + ٤) + س^{٢}$

$س + ٤ = ص \quad س \to -٤ \quad ص \to ٠$

$٦ \text{نها}_{ص \to ٠} \text{ق}(ص) + ١٦$

$= ٦ \times ٢ + ١٦ = ١٢ + ١٦ = ٢٨$

⑤ $\text{نها}_{س \to ٤} \text{ق}(٥ - س) + ج$

$ص = ٥ - س \quad س \to ج$ مثلاً $= ١$

$ص \to ٥ - ١$

$ص \to ٤$

$ص \to -٣$

$\text{نها}_{ص \to -٣} \text{ق}(ص) = ٦ \times ٤ = ٢٤$

السؤال الثالث

⑥ $\text{نها}_{س \to -٤} \text{ق}(س) = ٦$

⑦ $\text{نها}_{س \to ٧} \text{ق}(س) = ٤$

⑧ $P = \{٣ ، -٢\}$

⑨ $\text{نها}_{س \to P} \text{ق}(س) = -٢$

$(-٢ ، ٣)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

$= \text{هـا}_{س \to ج} ٣ \text{وه}(٥ - ٣س)$

ص = ٥ − ٣س

س ← ج ⇒ ص ← ٥ − ٦ = −١

$= ٣ \text{هـا}_{ص \to -١} \text{وه}(ص) = \text{وه}(-١) = ٣ \times \frac{-١}{ج} = -٣$

$\text{هـا}_{س \to ٢} (\text{هـا}_{ع \to ٣} \text{ل}(ع - ٥))^{ج} = (\text{هـا}_{ص \to -١} \text{ل}(ص - ٥))^{ج}$

ص = ع − ٥

س ← ٢ ⇒ ص ← ٦ − ٥ = ١

$= (\text{هـا}_{ص \to ١} \text{ل}(ص))^{ج} = ٢^{ج} = ٤$

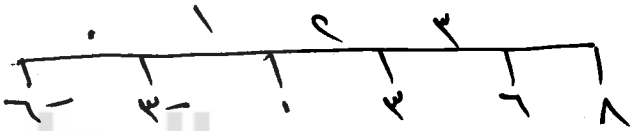
الجواب

$-٣ + ٤ = ١$

السؤال الخامس

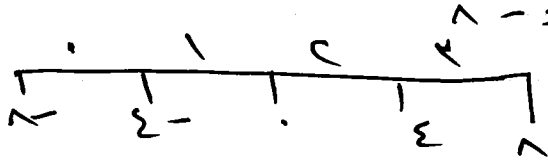
(أ) $[\frac{١}{٤}س + ج]$ طول الدرجة = ٣

س = −٦



(ب) ① $[\frac{١}{٤}س + ج]$ طول الدرجة = ٤

س = −٨



$\text{وه}(س) = \begin{cases} \frac{س}{س} = ١ & س > ٠ \\ ١ & س < ٠ \end{cases}$

$\text{هـا}_{س \to ٠^+} \text{وه}(س) = ١$

$\text{هـا}_{س \to ٠^-} \text{وه}(س) = ١$

$\Leftarrow \text{هـا}_{س \to ٠} \text{وه}(س) = ١$

① $\text{هـا}_{س \to ج} \text{وه}(س) = ج$

س ← ج+

$\text{هـا}_{س \to ج} \text{وه}(س) = ج$

س ← ج−

$\text{هـا}_{س \to ج} \text{وه}(س) = ج$

س ← ج

② $\text{هـا}_{س \to ٣^+} \text{وه}(س) = ٣$

$\text{هـا}_{س \to ٣^-} \text{وه}(س) = ٢$

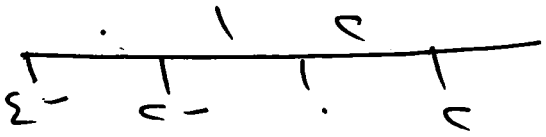
$\text{هـا}_{س \to ٣} \text{وه}(س)$ غير موجودة

س ← ٣

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

ج) $\left[\frac{س}{٢}+٢\right]$ طول المدرج = ٢

س = ٠ - ٤



$$د(س)=\begin{cases}١ & \text{عندما } ٠ \le س < ١\\ ٢س+٢ & \text{عندما } ١ \le س < ٠\end{cases}$$

نهـا د(س) = ٢ + ٠ × ٢ = ٢
س ← ٠+

نهـا د(س) = ١
س ← ٠-

السؤال السادس

(أ) بجمع

نهـا ٤ س × نهـا د(س) + نهـا ١٢ = ٥٢
س ← ٣ — س ← ٢ — س ← ٣

١٢ × نهـا د(س) + ٤ = ٥٢
س ← ٣

$$\frac{\text{نهـا } ١٢}{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{د(س)}}{} = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$$

$$\left(\text{نهـا د(س)}_{س \leftarrow ٣}\right)^{٣} + \frac{٢٤}{\sqrt{\text{نهـا د(س)}_{س \leftarrow ٣}}}$$

$$٤^{٣} + \frac{٢٤}{\sqrt{٤}} = ٦٤ + ١٢$$

$$= ٧٦$$

(ب) نهـا (س - ٥) نهـا د(س) = ١٥٠
س ← ٥ — س ← ٥

$$\frac{\text{نهـا } ٥(س-٥)}{\text{س} \leftarrow ٥} \frac{\text{نهـا د(س)}}{\text{س} \leftarrow ٥} = \frac{١٥٠}{٥}$$

نهـا د(س) = ٦
س ← ٥

٤ نهـا د(س) + نهـا [$\frac{س}{٢}$ + ٧]
س ← ٥ — س ← ٥

٤ × ٦ + [$\frac{٥}{٢}$ + ٧]

٢٤ + [٩٫٥] = ٢٤ + ٩

= ٣٣

(ج) نهـا د(س) = ١
س ← ٠+

نهـا د(س) = ٠
س ← ٠-

نهـا د(س) غير موجودة
س ← ٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ⓐ نفرض ص = ع س + ١
س ← ٣ ، ص ← ٧
٤ هـا هـ(ص) + هـا (س + ٥)
ص ← ٧ ، س ← ٣
= ٤ × ٤ + (٥ + ٩)
= ١٦ + ١٤ = ٣٠

السؤال الرابع

ⓐ [٤ + س]
٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦
٤- ٣- ٢- ١- ٠ ١ ٢

[٥ - س]
٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

هـ + و = ٨ ، ١ < س < ٣
هـ + ٥ = ٨
و + ٢ = ٨
هـا (و + هـ) (س) = ٨
س ← ٢-
هـا (و + هـ) (س) = ٨
س ← ٠+
هـا (و + هـ) (س) = ٨
س ← ٢

ⓑ
هـا هـ (١ - س) = -١
س ← ١
ص = ١ - س ، س ← ١ ، ص ← صفر
هـا هـ (ص) = -١
ص ← ٠

ⓒ هـا هـ (س) × هـا هـ (٢ - س) = -٣
س ← ٠ ، س ← ٠
؟ × هـا هـ (٢ - س) = ٢
س ← ٠
هـا هـ (١ - س) = ٣
س ← ٠
ص = ٢ - س ، س ← ٠ ، ص ← ٢
هـا هـ (ص) = ٣
ص ← ٢
هـا (٣ + س) × هـا هـ (١ + س)
س ← ١ ، س ← ١
= ٤ × هـا هـ (١ + س)
س ← ١
ص = ١ + س ، س ← ١ ، ص ← ٢
= ٤ هـا هـ (ص) = ٤ × ٣
ص ← ٢
= ١٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ب)

$\lim_{س \to 0^+} هـ(س) + ه(س) = ٥ + ٠ = ٥$

$\lim_{س \to 0^-} هـ(س) + ه(س) = ٣ + ٢$

$= ٥$

$\lim_{س \to 0} هـ(س) + ه(س) = ٥$

ج) $\lim_{س \to ج} هـ(س+١) = ٨$

ص = س + ١ ، س ← ج ⇒ ص ← ٣

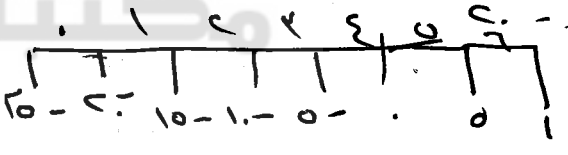
$\lim_{ص \to ٣} هـ(ص) = ٨$

$٣ \lim_{س \to ٣^+} هـ(س) + ج \lim_{س \to ٣^+} [\frac{١}{٥}س + ٤]$

$٣ \times ٨ + ج \lim_{س \to ٣^+} [\frac{١}{٥}س + ٤]$

$[\frac{١}{٥}س + ٤]$ الدرجة = ٥

س = ج

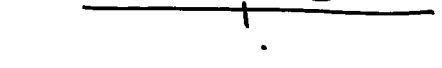


$٢٤ + ج٨ = ٥$

$ج٤ = ١٠ + ٣٤$

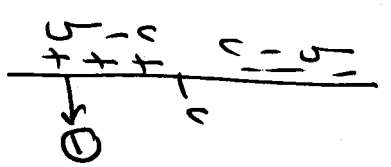
السؤال الثامن

أ) $|س| = \begin{cases} س & س \geq ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$



$[س] = \begin{cases} ٠ & ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ١ \leq س < ٢ \\ ٢ & ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

$|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & س \geq ٢ \\ ٢ - س & س < ٢ \end{cases}$



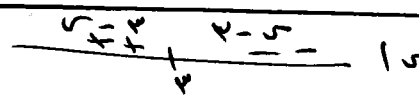
$هـ(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ٠ \leq س < ١ \\ \frac{١}{٢ - س} & ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ١^-} ٣س - ٢ = \lim_{س \to ١^+} \frac{١}{٢ - س}$

$٣ - ٢ = \frac{١}{١ - ٢}$

$١ = ٢ - ٣ \Leftarrow ٣ = ٣$

ب) $|س - ٣| = \begin{cases} س - ٣ & س \geq ٣ \\ ٣ - س & س < ٣ \end{cases}$



$ه(س) = \begin{cases} \frac{س - ٣}{س - ٣} = ١ & س \geq ٣ \\ ٩ - ٢س + ٤ & س < ٣ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^+} ه(س)$

$٩ - ٦ + ٤ = ١$

$٩ - ٦ = ٣ - ٤$

$\frac{١}{٣} = \frac{٣}{٩} = ٣ = ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٥) نفرض أن $\sqrt{٣ - |أ - ١|}$ موجودة $\forall$ $س \to ٥$

عندما $٣ - |أ - ١| \geq ٠$

$|أ - ١| \leq ٣$

$-٣ \leq أ - ١ \leq ٣$

$-٢ \leq أ \leq ٤$

(٦) نفرض أن $\lim_{س \to ٣} [أ س] + ١ = ٤$

$\lim_{س \to ٣^+} [أ س] = ٣$

$[٣ أ] = ٣$

$٣ \leq ٣ أ < ٤$

$١ \leq أ < \frac{٤}{٣}$

عندما $أ = ١$ $\quad [٣] = ٣$ ✗

عندما $أ = \frac{٤}{٣}$ $\quad [٣ \times \frac{٤}{٣}] = ٤$ ✓

$[١ ، \frac{٤}{٣})$

(٧) نفرض أن $\lim_{س \to ٥} أ(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٠} أ(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٠} ٤ أ + ج = ٤$

$٤ أ + ج = ٤$ ---- ①

$\lim_{س \to -١} أ(س) = ٠$

$\lim_{س \to -١} أ + ب + ج = ٠$

$أ + ب + ج = ٠$ ---- ②

$\lim_{س \to ١} أ + ب + ج = -١$ ---- ③

من ① ② ③

$٤ أ + ج = ٤$

$أ + ب + ج = ٠$

$\therefore ٣ أ + ب = ٤$

$\lim_{س \to \frac{٣}{٢}} أ = \frac{٣}{٢} \neq ١$

بتعويضها في ③

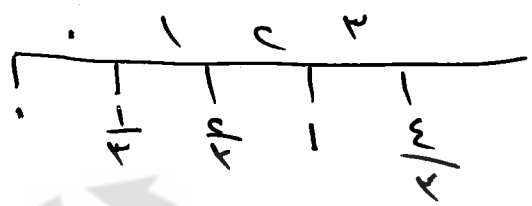
$\frac{٩}{٤} أ + \frac{٣}{٢} ب = -١$

$٩ أ + ٦ ب = -٤$

$٣ أ + ٢ ب = -٤$

$ب = \frac{-٢}{٢} = -١$

أوجد أعداد النهايات



$[١ ، \frac{٤}{٣})$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ نهاية المقام = صفر

نهاية البسط = صفر

$|أ - ٣ \times ٢| = ٠$

$|أ - ٦| = ٠$

$أ - ٦ = ٠$

$أ = ٦$

ⓐ $\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^+} هـ(س)$

$|أ + ٤| = [٣]^+ + أ ٢$

$أ \in ص$

$[٣]^+ = ٣ \Leftarrow$

$|أ + ٤| = ٣ + أ ٢$

$|أ + ٤| = ٣ - أ ٢$

$أ + ٤ = ٣ - أ ٢$ أو $أ + ٤ = -٣ + أ ٢$

$أ = -١$ $\quad$ $أ = ٧$

ⓔ $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} هـ(س)$

$[٢]^+ + ٢ = ٨ - [٢]^-$

$أ \notin ص$

$[٢]^+ = [٢]^- = [٢]$

$[٢] + ٢ = ٨ - [٢]$

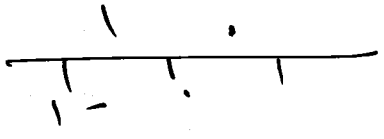
$٢ [٢] = ٦$

$[٢] = ٣$

$٣ \leq أ < ٤$

السؤال التاسع

ⓑ $\lim_{س \to ٠} (س^٢ + ١)^{[س]}$



$\lim_{س \to ٠^+} (س^٢ + ١)^{[س]} = (٠ + ١)^{٠} = ١$

$\lim_{س \to ٠^-} (س^٢ + ١)^{[س]} = (٠ + ١)^{-١} = ١$

$\lim_{س \to ٠} (س^٢ + ١)^{[س]} = ١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

① هـا $d(س) = ٧$
$س \to ج$

① هـا $أ س + ب ص = ٧$
$س \to ج^+$
$\Leftarrow أ ج + ب ص = ٧$ ---- ①

② هـا $س^٤ + ب س ص + أ ص = ٧$
$س \to ج^-$
$٤ + ب ج ص + أ ص = ٧$
$أ ج + ص = ٣$ ---- ②
طريقة الحذف
$أ ج + ب ص = ٧$
$أ ج + ص = ٣$ × (-)
$ب ص - ص = ٤$
$ص (ب - ١) = ٤$
$ص = ٤ \Leftarrow ب - ١ = ١$
$ب = ٥$
بالتعويض في ②
$أ ج + ٤ = ٣$
$أ ج = -١$

③ هـا $\sqrt[٢]{س - ١}$
$س \to ١^+$
$= \sqrt[٢]{١ - ١} = ٠$

② هـا $\frac{\sqrt[٣]{س^٤ - ١٦}}{\sqrt[٣]{س - ٤}}$
$س \to ٤$
$= هـا \sqrt[٣]{\frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤}}$
$س \to ٤$
$= \sqrt[٣]{٤ + ٤} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

③ هـا $\frac{س - ٧}{\sqrt{س - ٧} + ٧}$
$س \to ٧^+$
$٧ + ٠$ حالة
$= هـا \frac{\sqrt{س - ٧} \times \sqrt{س - ٧}}{\sqrt{س - ٧} + ٧}$
$س \to ٧^+$
$= ٧ \times ٠ = ٠$

④ هـا $\frac{\sqrt{س^٤ - ٤}}{س - ٢} + \frac{س - ٢}{\sqrt{س - ٢}}$
$س \to ٢^+$
$٠ + ٠$ حالة
$= هـا \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{\sqrt{س - ٢}} + ١$
$س \to ٢^+$
$= \sqrt{٤} + ١$
$= ٢ + ١ = ٣$

⑤ هـا $س \times \sqrt[٣]{\frac{١}{س^٣} - ١}$
$س \to ٠$
$= هـا س \times \sqrt[٣]{\frac{١ - س^٣}{س^٣}}$ توحيد المقام
$س \to ٠$
$= هـا س \times \frac{\sqrt[٣]{١ - س^٣}}{س}$
$س \to ٠$

مكتبة الإمام
IMAM LIBRARY
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ $\lim_{س \to 0} \sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2 + 1}}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2 + 1}}{|س|}$

① $\lim_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{س^2 + 1}}{س}$

$= \sqrt{0 + 1} = 1$

② $\lim_{س \to 0^-} \frac{\sqrt{س^2 + 1}}{-س}$

$= -\sqrt{0 + 1} = -1$

$\Rightarrow \lim_{س \to 0} \sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}$

غير موجودة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

نهاية الاقترانات الكسرية

نقسم الدرس الى الاجزاء التاليه :-

١. حساب النهاية عندما يكون ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

٢. حساب النهاية عندما يكون احد الاقترانين او كلاهما نهايته غير موجودة

٣. حساب النهاية باستخدام مرافق الجذر التربيعي والتكعيبي ،

٤. حساب النهاية باستخدام الطرح والاضافه

٥. حساب النهاية باستخدام القرض

ملاحظه

عندما يكون ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

فان النهايه غير موجودة

لايجاد نهاية الاقترانات الكسريه نبدأ بالتعويض المباشر

① اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$

فان النهايه موجوده وتساوي ذلك العدد

② اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$

الجواب = صفر

لكنه

اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

فان النهاية غير موجوده .

③ اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

تكون مشكله ولها حل ونتبع الخطوات التاليه :

١- التحليل الى العوامل

٢- الاختصار بين البسط والمقام

٣- التعويض المباشر

ملاحظه :

التحليل الى العوامل يشمل اخراج العامل المشترك

ضربين مربعين ، فرق مجموع مكعبين ، تحليل عبارة تربيعيه القسمة التركيبيه ، توحيد المقام

مكتبة الأوائل AWAEL
الاستاذ : ناجح الجمزاوي

القسم الأول

ناتج التعويض = صفر / صفر

مثال ①
اوجد قيمة النهايات التالية ان وجدت

١. نهـا $\frac{س^{٢}-٩}{س-٣}$ التعويض = ؟
$س \to ٣$

الحل
$= نهـا \frac{(س-٣)(س+٣)}{(س-٣)}$
$س \to ٣$
$= ٣+٣ = ٦$

---

٢. نهـا $\frac{٤-٢س}{س^{٢}-٤}$ التعويض = ؟
$س \to ٢$
$= نهـا \frac{-٢(٢-س)}{(س-٢)(س+٢)}$
$س \to ٢$
$= نهـا \frac{-٢}{س+٢} = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$
$س \to ٢$

---

٣. نهـا $\frac{س^{٢}-س-٢}{-٣س^{٢}+س+٢}$ التعويض = ؟
$س \to -١$
الحل
$= نهـا \frac{(س-٢)(س+١)}{(١+س)(١-٣س)}$
$س \to -١$
$= \frac{-٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

---

٤. نهـا $\frac{س^{٣}-٤س}{س^{٢}-٤س}$ التعويض = ؟
$س \to ٢$
الحل
$= نهـا \frac{س(س^{٢}-٤)}{س(س-٤)}$
$س \to ٢$
$= نهـا \frac{س(س-٢)(س+٢)}{س(س-٤)}$
$س \to ٢$
$= \frac{-٢(٤)}{-٢} = -٤$

---

٥. نهـا $\frac{٢س^{٤}-٣٢}{س^{٣}-٨}$ التعويض = ؟
$س \to ٢$
الحل
$= نهـا \frac{٢(س^{٤}-١٦)}{س^{٣}-٨}$
$س \to ٢$
$= نهـا \frac{٢(س^{٢}-٤)(س^{٢}+٤)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}$
$س \to ٢$
$= نهـا \frac{٢(س-٢)(س+٢)(س^{٢}+٤)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}$
$س \to ٢$
$= \frac{٢(٤)(٨)}{١٢} = \frac{٦٤}{١٢}$
$= \frac{١٦}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة

① فرق بين مربعين
$س^٢ - ب^٢ = (س - ب)(س + ب)$

② فرق بين مكعبين
$س^٣ - ب^٣ = (س - ب)(س^٢ + ب س + ب^٢)$

③ مجموع مكعبين
$س^٣ + ب^٣ = (س + ب)(س^٢ - ب س + ب^٢)$

④ $(س - ب)^٢ = (س - ب)(س - ب)$
$= س^٢ - ٢ ب س + ب^٢$

مثال ②

اوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)^٧}{(س^٢ - ٢٥)^٧}$

الحل: التعويض $= \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)^٧}{(س - ٥)^٧ (س + ٥)^٧}$

$= \frac{١}{(٥ + ٥)^٧} = \frac{١}{١٠^٧}$

$= ١٠^{-٧}$

مثال ③

$\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)^٣ - ٨}{١ - س^٢}$ التعويض $\frac{٠}{٠}$

الحل

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س + ١ - ٢)((س + ١)^٢ + ٢(س + ١) + ٤)}{(١ - س)(١ + س)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)((س + ١)^٢ + ٢(س + ١) + ٤)}{(١ - س)(١ + س)}$

$= \frac{-١(٤ + ٤ + ٤)}{٢} = \frac{-١٢}{٢} = -٦$

مثال ④

$\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س + ١)^٣ - ١٢٥}{س^٣ (س - ٢) + ٢ + ٢س}$ التعويض $= \frac{٠}{٠}$

الحل

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢س + ١ - ٥)((٢س + ١)^٢ + ٥(٢س + ١) + ٢٥)}{(س - ٢)(س^٣ - ١)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢س - ٤)((٢س + ١)^٢ + ٥(٢س + ١) + ٢٥)}{(س - ٢)(س^٣ - ١)}$

$= \frac{٢ \times (٢٥ + ٢٥ + ٢٥)}{٨ - ١} = \frac{١٥٠}{٧}$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س-١)^{٤} - ١٦}{س - ٣}$$ التعويض = $\frac{٠}{٠}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{((س-١)^{٢} - ٤)((س-١)^{٢} + ٤)}{س - ٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{((س-١) - ٢)((س-١)+٢)((س-١)^{٢}+٤)}{س - ٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+١)(س-١)^{٢}+٤)}{س - ٣}$$

$$= \frac{٤(٤+٤)}{١} = ٨ \times ٤ = ٣٢$$

مثال ⑥

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤}{١ - س^{٢}}$$ التعويض = $\frac{٠}{٠}$

الحل

البسط درجة ثالثة لذلك نستخدم القسمة التركيبية

العدد ① جذر للبسط ← البسط يقبل القسمة على $(س-١)$

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	حد ثابت
①	١	-٥	٠	٤
		١	-٤	-٤
	١	-٤	-٤	٠

$$س^{٢} - ٤س - ٤$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{٢} - ٤س - ٤)}{(١-س)(١+س)}$$

$$= -\frac{(١^{٢} - ٤ \times ١ - ٤)}{٢} = \frac{+٧}{٢}$$

مثال ⑦

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{س^{٣} + س^{٢} - ٢س}$$

الحل التعويض = $\frac{٠}{٠}$

القسمة التركيبية

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	حد ثابت
①	١	٠	-٧	٦
		١	١	-٦
	١	١	-٦	٠

$$س^{٢} + س - ٦$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{٢}+س-٦)}{س(س^{٢}+س-٢)}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{٢}+س-٦)}{س(س+٢)(س-١)}$$

$$= \frac{١+١-٦}{١ \times (٢+١)} = \frac{-٤}{٣}$$

مثال ⑧

$$\text{نهـا}_{س\to 1}\frac{(س+1)^3-(س+1)^2-٤}{س-1}$$

الحل التعويض $=\frac{٠}{٠}$

من الجملة ص هذا السؤال

١- التحليل ← قسمة تركيب

٢- الطرفا ← قسمة تركيب

نفرض ان ص $=$ س $+1$

س $\to 1 \Leftarrow$ ص $\to ٢$

$\Leftarrow$ س $=$ ص -1

$$\text{نهـا}_{ص\to ٢}\frac{ص^3-ص^2-٤}{ص-١-١}$$

$$=\text{نهـا}_{ص\to ٢}\frac{ص^3-ص^2-٤}{ص-٢}$$

قسمة تركيب

	$ص^3$	$ص^2$	ص	حد ثابت
٢	١	١-	٠	٤-
		٢	٢	٤
	١	١	٢	٠

$ص^2+ص+٢$

$$\text{نهـا}_{ص\to ٢}\frac{(ص-٢)(ص^2+ص+٢)}{ص-٢}=٤+٢+٢$$

$=٨$

بطريقة التحليل

$$(س+1)^3=(س+1)(س+1)(س+1)$$

$$=س^3+٣س^2+٣س+1$$

$$(س+1)^2=س^2+٢س+1$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1}\frac{س^3+٣س^2+٣س+1-(س^2+٢س+1)-٤}{س-1}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to 1}\frac{س^3+٣س^2+٣س+1-س^2-٢س-1-٤}{س-1}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to 1}\frac{س^3+٢س^2+س-٤}{س-1}$$

قسمة تركيب

	$س^3$	$س^2$	س	حد ثابت
١	١	٢	١	٤-
		١	٣	٤
	١	٣	٤	٠

$س^2+٣س+٤$

$$\text{نهـا}_{س\to 1}\frac{(س-1)(س^2+٣س+٤)}{س-1}$$

$=١+٣+٤$

$=٨$

مثال ⑨

نهـا $\frac{|س-٢|}{س-٢}$ $\leftarrow$ ٢ المقوض = ؟

الحل

$|س-٢| = \frac{|س-٢|}{-(س-٢)}$ $\quad$ $س-٢<٠$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س-٢}{س-٢} & س > ٢ \\ \frac{٢-س}{س-٢} & س < ٢ \end{cases}$

$= \begin{cases} ١ & س > ٢ \\ -١ & س < ٢ \end{cases}$

نهـا ق(س) = ١ ، نهـا ق(س) = -١
$س \to ٢^+$ $\quad$ $س \to ٢^-$

$\Rightarrow$ نهـا ق(س) غير موجودة
$س \to ٢$

مثال ⑩

نهـا $\frac{\sqrt{س^٢-٤س+٤}}{س-٢}$ $\leftarrow$ ٢ المقوض = ؟

$= نهـا \frac{\sqrt{(س-٢)(س-٢)}}{س-٢} = نهـا \frac{\sqrt{(س-٢)^٢}}{س-٢}$
$س \to ٢$ $\quad$ $س \to ٢$

$= نهـا \frac{|س-٢|}{س-٢}$
$س \to ٢$

الحل : مثال ⑨ السابقة

مثال ⑪

نهـا $\frac{|س^٢-٣س|}{س^٢-٩}$ $\leftarrow$ ٣

الحل

$س^٢-٣س = س(س-٣)$

$س = ٠ ، س = ٣$

	$س^٢-٣س$	$س^٢-٩$
	+ + +	- + +
	٠	٣

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢-٣س}{س^٢-٩} & س \geq ٣ ، س \leq ٠ \\ \frac{٣س-س^٢}{س^٢-٩} & ٠ < س < ٣ \end{cases}$

نهـا $\frac{س^٢-٢س}{س^٢-٩}$ $\leftarrow$ ٣^+

$= \frac{س(س-٣)}{(س+٣)(س-٣)} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

نهـا $\frac{٣س-س^٢}{س^٢-٩}$ $\leftarrow$ ٣^-

نهـا $\frac{س(٣-س)}{(س+٣)(س-٣)} = \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

نهـا ق(س) غير موجودة
$س \to ٣$

مركز الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

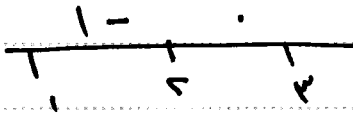
ملاحظة مهمة

$\sqrt{(\text{ق}(\text{س}))^2} = |\text{ق}(\text{س})|$

مثال (١٢)

$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{[\text{س}-2]}{|\text{س}-1|}$

الحل



$[\text{س}-2]$: -1 عند $\text{س}=2$، 0 عند $\text{س}=3$

$|\text{س}-1|$: $\text{س}-1$ عند $\text{س}=2$، $-\text{س}+1$ عند $\text{س}=1$

$\lim_{\text{س}\to 2^+} \frac{0}{\text{س}-2} =$ صفر

$\lim_{\text{س}\to 2^-} \frac{-1}{2-\text{س}} = \frac{-1}{\text{صفر}}$

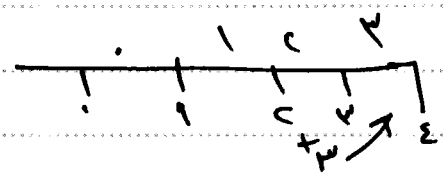
$=$ غير موجودة

$\therefore \lim_{\text{س}\to 2} \frac{[\text{س}-2]}{|\text{س}-1|}$ غير موجودة

مثال (١٣)

$\lim_{\text{س}\to -3^+} \frac{[\text{س}]^2 - 9}{|\text{س}|^2 - 9}$

الحل



$[\text{س}]$: 0 عند $\text{س}=0$، 1 عند $\text{س}=1$، 2 عند $\text{س}=2$، 3 عند $\text{س}=3$، 4 عند $\text{س}=4$

$|\text{س}|$: س عند $\text{س}=0$، $-\text{س}$ عند $\text{س}=-3$

$\lim_{\text{س}\to -3^+} \frac{3^2-9}{\text{س}^2-9} =$ ها صفر / صفر

$=$ صفر

مثال (١٤)

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{8\text{س}^3-1}{\text{س}-\frac{1}{2}} & \text{س} \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{س} = \frac{1}{2} \end{cases}$

هل ها $\text{ق}(\text{س})$ ؟

$\text{س}\to\frac{1}{2}$

الحل المعوض $= \frac{0}{0}$

$= \lim_{\text{س}\to\frac{1}{2}} \frac{(2\text{س}-1)(4\text{س}^2+2\text{س}+1)}{\text{س}-\frac{1}{2}}$

$= \lim_{\text{س}\to\frac{1}{2}} \frac{2(\text{س}-\frac{1}{2})(4\text{س}^2+2\text{س}+1)}{\text{س}-\frac{1}{2}}$

$= 2(1+1+1) = 6$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة

اختصار $\frac{س-ع}{ع-س} = -١$

توحيد المقام

$$\frac{ب}{ل} + \frac{ع}{ء} = \frac{ب \times ء + ع \times ل}{ل \times ء}$$

$$\frac{\frac{ب}{ل}}{\frac{ع}{ء}} = \frac{ب}{ل} \times \frac{ء}{ع}$$

مثال (١٥)

$$\text{نها}_{س \to ٧} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٧}}{س - ٧}$$ التعويض = ب

توحيد المقامات

$$\text{نها}_{س \to ٧} \frac{\frac{٧ - س}{س ٧}}{س - ٧}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٧} \frac{-(س-٧)}{س ٧} \times \frac{١}{س-٧}$$ (-١)

$$= \frac{-١}{٧ \times ٧} = \frac{-١}{٤٩}$$

مثال (١٦)

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\frac{س}{س+٢} - \frac{١}{٣}}{\frac{١}{س} - ١}$$

الكل

التعويض = ب ← توحيد مقامات

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{\frac{٣س - ٢ - س}{٣(س+٢)}}{\frac{١-س}{س}}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{٢س - ٢}{٣(س+٢)} \times \frac{س}{١-س}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{٢(س-١)}{٣(س+٢)} \times \frac{س}{-(س-١)}$$ (-١)

$$= \frac{١ \times ٢-}{٣(١+٢)} = \frac{-٢}{٩}$$

مثال (١٧)

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س^{٢}}}{٨ - س^{٣}}$$

الكل

التعويض = ب

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س^{٢}}}{٨ - س^{٣}}$$ ← يتبع الكل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢}{٤ س^٢} \div \frac{س^٣ - ٨}{٢}$ توحيد مقامات

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{٤ س^٢} \times \frac{١}{س^٣ - ٨}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{٤ س^٢} \times \frac{١}{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}$ (١)

$= \frac{-(٢ + ٢)}{٤ \times ٢^٢ (٤ + ٤ + ٣)} = \frac{-١}{٤٨}$

مثال (١٨)

$\text{نها}_{س \to ١^-} \frac{\left| \frac{١}{س + ٣} \right| - \frac{١}{٤}}{|س - ١|}$

الحل

$\left| \frac{١}{س + ٣} \right| = \frac{١}{|س + ٣|}$

$|س + ٣|$ $\quad س + ٣ \quad | \quad -س - ٣$
$\quad \nearrow ١^- \quad | \quad ٣$

$|س - ١|$ $\quad س - ١ \quad | \quad ١ - س$
$\quad \nearrow ١^- \quad | \quad ١$

$\text{نها}_{س \to ١^-} \frac{\frac{١}{س + ٣} - \frac{١}{٤}}{١ - س}$ توحيد مقامات

$\text{نها}_{س \to ١^-} \frac{٤ - (س + ٣)}{٤(س + ٣)} \div \frac{١ - س}{١}$

$= \text{نها}_{س \to ١^-} \frac{٤ - س - ٣}{٤(س + ٣)} \times \frac{١}{١ - س}$

$= \text{نها}_{س \to ١^-} \frac{١ - س}{٤(س + ٣)} \times \frac{١}{١ - س}$

$= \frac{١}{٤ \times ٤} = \frac{١}{١٦}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

نهاية الأقترانات الأسية

يتم ايجاد نهاية الأقترانات الكسرية بطريقة الفرض ولكنه قبل عملية الفرض يجب ان تساوى الاساس للجميع

مثال ①

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{٢٥^{س} - ٥^{س}}{٥^{س} - ١}$$

الحل

$$٢٥^{س} = (٥^{٢})^{س} = (٥^{س})^{٢}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{(٥^{س})^{٢} - ٥^{س}}{٥^{س} - ١}$$

نفرض ان $ص = ٥^{س}$

عندما $س \to 0$ فان $ص \to ١$

$$= \text{نها}_{ص \to ١} \frac{ص^{٢} - ص}{ص - ١}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ١} \frac{ص(ص - ١)}{ص - ١}$$

$$= ١$$

مثال ②

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{٣^{٢س} - ٣^{س} - ٦}{٣^{س} - ٣}$$ بالتعويض ←

الكل

نفرض $ص = ٣^{س}$

$س \to ١ \Leftarrow ص \to ٣$

$$= \text{نها}_{ص \to ٣} \frac{ص^{٢} - ص - ٦}{ص - ٣}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٣} \frac{(ص - ٣)(ص + ٢)}{ص - ٣}$$

$$= ٣ + ٢ = ٥$$

مثال ③

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{٣^{س+١} - ٣}{٩^{س} - ٣^{س}}$$

الكل

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{٣ \times ٣^{س} - ٣}{(٣^{س})^{٢} - ٣^{س}}$$

$ص = ٣^{س}$ $\quad س \to 0 \Leftarrow ص \to ٣$

$$= \text{نها}_{ص \to ٣} \frac{٣ص - ٣}{ص^{٢} - ص}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٣} \frac{٣(ص - ١)}{ص(ص - ١)}$$

$$= \frac{٣}{٣} = ١$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

إيجاد المجاهيل في نهاية الأقترانات الكسرية

صنائ ثلاثة انواع

① النوع الأول للأقترانات المتعبه

② النهاية موجوده يطلب مجهول واحد

الحل

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

① النهاية = عدد مجهولين

الحل

النهاية من اليمين = العدد

النهاية من اليسار = العدد

③ النوع الثاني

كتابة المطلوب بشكل معادلات

③ النوع الثالث
الأقترانات الكسرية

النهاية موجوده
نهاية المقام = ٠ ← نهاية البسط = ٠

مثال ①

اذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} \frac{٣س^٢ - ٥س + ٢}{٤س^٢ - ٣س + ١} & س < ١ \\ ب & س \geq ١ \end{cases}$

فجد قيمة ب علماً بان نهاية ق(س) موجودة عند س ← ١

الحل

$\text{نها}_{س \to ١^+} \frac{٣س^٢ - ٥س + ٢}{٤س^٢ - ٣س + ١} = \text{نها}_{س \to ١^-} ب$

$\text{نها}_{س \to ١^+} \frac{(٣س - ٢)(س - ١)}{(٤س - ١)(س - ١)} = ب$

$\frac{٣ - ٢}{٤ - ١} = ب \Leftarrow ب = ١$

مثال ②

اذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} ٢س^٢ + ٤س + ب & س < ١ \\ ٣س + ٢ب & س \geq ١ \end{cases}$

وكانت نهاية ق(س) عند س ← ١ = ٦

اوجد قيمة ٢ب

الحل

الحل

نهـا $_{س \to 1^+}$ ق(س) = ٦

$ب(1)^2 + 4 \times 1 + ج = 6$

$ب + ج + 4 = 6$

$ب + ج - 2 = 0$ ---- ①

نهـا $_{س \to 1^-}$ ق(س) = ٦

نهـا $_{س \to 1^-}$ $3ب س^2 + 2ج = 6$

$3ب + 2ج - 6 = 0$ ---- ②

$ب + ج - 2 = 0$ × -2

$3ب + 2ج - 6 = 0$

$-2ب - 2ج + 4 = 0$

$ب - 2 = 0$ ⇐

$ب = 2$

نعوض في ①

$2 + ج - 2 = 0$ ⇐ $ج = 0$

مثال ③

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^3 - 3ب س + 3}{س - 1} & س < 1 \\ أ س - 5 & س \geq 1 \end{cases}$$

وكانت نهـا ق(س) موجودة

$س \to 1$

ضد $ب$ ، $أ$

الحل

نهـا $\dfrac{س^3 - 3ب س + 3}{س - 1}$ موجودة

$س \to 1$

نهاية البسط = صفر

⇐ نهاية المقام = صفر

$(1)^3 - 3ب(1) + 3 = 0$

$1 - 3ب + 3 = 0$ ⇐ $ب = 4$

بما أن $س^3 - 4س + 3$ مقدار تكعيبي

	$س^3$	$س^2$	$س$	ص.ث
①	1	0	-4	3
		1	1	-3
	1	1	-3	0

$س^2 + س - 3$

نهـا $\dfrac{(س - 1)(س^2 + س - 3)}{س - 1}$

$س \to 1$

$= 1 + 1 - 3 = -1$

نهـا $أ س - 5 = -1$

$س \to 1$

$أ - 5 = -1$

$أ = 4$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④

اذا كانت $\lim_{س \to ٥} \frac{ه(س) - ٧}{س - ٥} = ٨$

فجد $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٤س - ١٥}{ه(س) - ٧}$

الحل

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٢)}{ه(س) - ٧}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{ه(س) - ٧} \times$ نها $(س + ٣)$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{\frac{ه(س) - ٧}{س - ٥}} \times ٨$

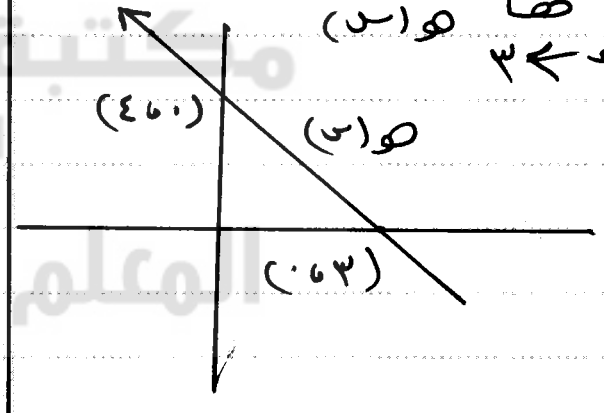
$= \frac{١}{٨} \times ٨ = ١$

مثال ⑤

اذا كان $ه(س) = س^٢ - ٩$

وكان الشكل المجاور يمثل $ه(س)$

اوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{ه(س)}{ه(س)}$



الحل

نجد قاعدة $ه(س)$ ، اقران خطي يمر بالنقطتين (٠٦٣) ، (٤٦٠)

الميل $= \frac{٤ - ٠}{٣ - ٠} = -\frac{٤}{٣}$

$ص - ٠ = -\frac{٤}{٣}(س - ٣)$

$ص = -\frac{٤}{٣}س + ٤ = ه(س)$

$\Leftarrow$ نها $\frac{ه(س)}{ه(س)} =$ نها $\frac{س^٢ - ٩}{-\frac{٤}{٣}س + ٤}$

$س \to ٣$ $\quad س \to ٣$

$=$ نها $\frac{(ص - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

$س \to ٣ \quad -\frac{٤}{٣}$

$= \frac{٣ + ٣}{-\frac{٤}{٣}} = ٦ \times -\frac{٣}{٤} = -\frac{١٨}{٤}$

$= -\frac{٩}{٢}$

مثال ⑥

اذا كانت نها $\frac{ص س^٢ - ٥س + ١}{س - ٢}$ موجودة

$س \to ٢$

اوجد قيمة $ص$ ؟

الحل

بما ان النهاية موجودة

ونها المقام $= ٠$ فان نها البسط $= ٠$

$س \to ٢$

نها $ص س^٢ - ٥س + ١ = ٠ \Leftarrow ٤ص - ١٠ + ١ = ٠$

$٤ص = ٩ \Leftarrow ص = \frac{٩}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٢س + ٦}{س - ٣} = ب$

موجودة فاوجد ٢، ب ؟

الحل

بما أن النهاية موجودة

بما المقام = صفر ⇐ بما البسط = صفر

⇐ بما $(س^٢ - ٢س + ٦) = ٠$
$س \to ٣$

$٩ - ٦ + ٦ = ٠ \Leftarrow$

$٣ = ١٥ \Leftarrow ٠ = ٦ + ٣ - ٩$

$٢ = ٥ \Leftarrow$

بما $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣} = ب$

بما $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س - ٢)}{س - ٣} = ب$

$ب = ٣ - ٢$

$ب = ١$

مثال ⑧ (٣٠)

بما $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٢س - (٣٢ + ٩)}{س - ٣} = ٥$

حيث ٢ ثابت

الحل

بما أن النهاية موجودة

بما المقام = صفر ⇐ بما البسط = صفر

بما $(س^٢ + ٢س - (٣٢ + ٩)) = ٠$
$س \to ٣$

$٩ + ٦ - ٣٢ - ٩ = ٠$

$٠ = ٠$

لم نستفد شيئاً للقسمة التركيبية

	$س^٢$	$س$	حد ثابت
٣	١	٢	$-٩ - ٣٢$
		٣	$٩ + ٣٢$
	١	$٣ + ٢$	٠

$(س - ٣)(س + (٣ + ٢))$

بما $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + (٣ + ٢))}{س - ٣} = ٥$

$٥ = ٦ + ٢ \Leftarrow ٥ = ٣ + ٢ + ٣$

$٢ = -١$

ملاحظة

اذا لم نستفد منه ان بما المقام = ٠
⇐ بما البسط = صفر بعرف
ان المجهول بشطين
نلجأ الى القسمة التركيبية

مكتبة السلام ALWEFAQ
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{أ س^٢ + ٢ ب س + ٦}{س - ٢} = ١٠$

فاوجد قيمة أ ، ب ؟

الحل

النهاية موجودة وكانت نهاية المقام = صفر فان نهاية البسط تساوي صفر

$$أ \times ٤ + ب ٤ + ٦ = ٠ \quad \cdots ①$$

	$س^٢$	س	حد
②	أ	ب	٦
		$ب ج$	$ب ج + أ ج^٢$
	أ	$ب ج + أ ج^٢$	$٦ + ب ج + أ ج^٢$

$$\text{نهاية} \frac{(ب ج + أ ج^٢ + أ)(س - ج)}{(س - ج)} = ١٠$$

$$ب ج + أ ج^٢ = ١٠ \quad \cdots ②$$

حل المعادلتين بالحذف

$$أ \times ٤ + ب ٤ = -٦$$

$$ب ج + أ ج^٢ = ١٠ \quad \text{ضرب} -٢$$

$$\Leftarrow$$

$$أ \times ٤ + ب ٤ = -٦$$

$$-٢ أ ج^٢ - ب ٤ = -٢٠$$

$$-٢ أ (ج^٢ - ٢) = -٢٦$$

$$أ = \frac{-٢٦}{-٢(ج^٢ - ٢)} = \frac{١٣}{ج^٢ - ٢}$$

بالتعويض $أ = ١٣$ في ①

$$\Leftarrow ١٣ \times ٤ + ب ٤ + ٦ = ٠$$

$$٥٢ + ب ٤ + ٦ = ٠$$

$$ب ٤ + ٥٨ = ٠$$

$$\Leftarrow ب ٤ = -٥٨$$

$$\Leftarrow ب = \frac{-٥٨}{٤} = \frac{-٢٩}{٢}$$

مثال نهاية $\frac{س^٣ - ٣ س^٢ + ٢ س + ٦ ج ب - ٦}{س - ٣} = ١١$

فما قيمة ج ، ب ؟

الحل ① نهاية المقام = صفر البسط = صفر

$$٢٧ - ٢٧ + ٦ ج + ٦ ب - ٦ = \text{صفر} \quad \cdots ①$$

② نهاية $\frac{(س - ٣)(س^٢ + ج)}{س - ٣} = ١١$

$س \to ٣$

نهاية $(س^٢ + ج) = ١١$

$س = ٣$

$٩ + ج = ١١ \Leftarrow ٩ + ج = ١١$

$ج = ٢$ ⑤ ...

بالتعويض في ① $\Leftarrow$

$$٦ ب + ٦ ج - ٢٧ + ٢٧ - ٦ = ٠$$

$$٦ ب + ١٢ - ٦ = ٠$$

$$٦ ب + ٦ = ٠$$

$$ب = -١$$

$$\frac{أ}{ج} = \frac{-١١ - ٣}{ج} = \frac{-١١ - ب}{ج} = \frac{٨}{٢}$$

$$ج = ٢$$

مثال (١٠)

اذا كانت $\lim_{س \to -٢} \frac{ه(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$

وكانت $ه(س)$ كثير حدود فاوجد مايلي

أ) $\lim_{س \to -٢} (ه(س) + ٢س)$

ب) $\lim_{س \to -٢} (ه^{٢}(س) + ٢س)$

الحل

بما ان النهاية موجودة

$\lim_{س \to -٢}$ المقام $= ٠ \Leftarrow \lim_{س \to -٢}$ البسط $= ٠$

$\lim_{س \to -٢} (ه(س) + ٥) = ٠$

$\Leftarrow \lim_{س \to -٢} ه(س) = -٥$

أ) $\lim_{س \to -٢} (ه(س) + ٢س)$

$= \lim_{س \to -٢} ه(س) + \lim_{س \to -٢} ٢س$

$= -٥ + ٨ - = -٩$

ب) $(\lim_{س \to -٢} ه(س))^{٢} + ٨ - ٢$

$(-٥)^{٢} - ٤ = ٢٥ - ٤$

$= ٢١$

مثال (١١)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ه(س) - ٢}{س - ٢} = ٥$

فاوجد

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} ه(س) - ١٢}{س - ٢}$

حيث $ه(س)$ كثير حدود

الحل

$\lim_{س \to ٢}$ المقام $= ٠ \Leftarrow \lim_{س \to ٢}$ البسط $= ٠$

$\lim_{س \to ٢} ه(س) - ٣ = ٠$ وبذلك

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ه(س) = ٣ \Leftarrow ه(٢) = ٣$

يكون الناتج (ب)

لذلك لايجاد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} ه(س) - ١٢}{س - ٢}$

نطرح ونضيف إما $(٢)^{٢} ه(س)$

$= ٤ ه(س)$

أو $س^{٢} ه(٢)$

لتختار $٤ ه(س)$ الذي تم اضافته وطرحه

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} ه(س) - ٤ ه(س) + ٤ ه(س) - ١٢}{س - ٢}$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة المعلم
المعلم: ناجح الجمزاوي

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٢ ق(س) - ٤ ق(س)}{س - ٢} + \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٤ ق(س) - ١٢}{س - ٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س)(س^٢ - ٤)}{س - ٢} + \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٤(ق(س) - ٣)}{س - ٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س)(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} + ٤ \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢}$$

$$= ٣ \times (٢ + ٢) + ٤ \times ٥$$

$$= ١٢ + ٢٠ = ٣٢$$

مثال (١٢)

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ٩}{س - ٣} = ٤ \text{، فجد نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - س^٢}{س - ٢}$$

الحل

نطرح ونضيف $٣^٢ = ٩$

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ٩ + ٩ - س^٢}{س - ٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ٩}{س - ٣} + \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(٣ - س)(٣ + س)}{-(س - ٣)}$$

$$٤ + (-١)(٣ + ٣)$$

$$٤ - ٦ = -٢$$

القسم الثاني

حساب النهاية عندما يكون أحد الأقترانين أو كلاهما نهايته غير موجودة

عندما تكون نهاية احد الأقترانين أو كلاهما غير موجودة فانه يمنع توزيع النهاية على المجموع والطرح والضرب والقسمة ولا نستطيع الحكم على الناتج النهائي بانها موجودة أو غير موجودة، ولجميع هذه النهايات تحل بطريقة التحليل والأختصار والتعويض مثل (صفر/صفر)

مثال (١)

اوجد قيمة $\text{نهـا}_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}\right) \times \frac{١}{س - ٢}$

لاحظ ان ناتج التعويض صفر × $\frac{١}{\text{صفر}}$

أي ان الاولى نهايتها موجودة والثانية غير موجودة

نلجأ للتحليل (توحيد المقام)

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{٢ س} \times \frac{١}{س - ٢} = \frac{-١}{٤}$$

مثال ②

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^٢}{س-٣} - \frac{٥}{س-٣}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^٢-٥}{س-٣} = \frac{٤}{\text{غير موجود}}$$

مثال ③

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^٢}{س-٣} - \frac{٩}{س-٣}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^٢-٩}{س-٣} = \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{س-٣}$$

$$= ٣+٣ = ٦$$

مثال ④

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س}{٩-س^٢} + \frac{٣س}{س(س^٢-٩)}$$

توحيد المقامات

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{-س \times س}{س(٩-س^٢)} + \frac{٣س}{س(س^٢-٩)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{-س^٢+٣س}{س(س^٢-٩)} = \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{-س(س-٣)}{س(س-٣)(س+٣)}$$

$$= \frac{-١}{٣+٣} = \frac{-١}{٦}$$

مثال ⑤

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{(س+١)^٢} - ١ \right)$$

الحل

توحيد المقامات

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س} \times \left(\frac{١}{(س+١)^٢} - \frac{١ \times (س+١)^٢}{(س+١)^٢} \right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١-(س+١)^٢}{(س+١)^٢} \right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١-س^٢-٢س-١}{(س+١)^٢} \right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-س(س+٢)}{(س+١)^٢} \right)$$

$$= \frac{-(٠+٢)}{(٠+١)^٢} = \frac{-٢}{١} = -٢$$

مثال ⑥

$$\text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{١}{٣س^٢-س-١٤} \left(\frac{١}{١+س} + \frac{١}{٥+س} \right)$$

الحل

توحيد المقام ← يتبع الحل

مكتبة نسام
NewSam
الاستاذ ناجح الجمزاوي

$= \text{نها}_{س \to -٢} \frac{١}{٣س^٢ - س - ١٤} \left(\frac{١٢س + ٥ + س^٢}{(٥+س)(١+س)} \right)$

$= \text{نها}_{س \to -٢} \frac{١}{٣س^٢ - س - ١٤} \left(\frac{٦ + ٣س}{(١+س)(٥+٣)} \right)$

$= \text{نها}_{س \to -٢} \frac{١}{(٣س - ٧)(س+٢)} \left(\frac{٣(س+٢)}{(١+س)(٥+س)} \right)$

$= \frac{٣}{(٣ \times -٢ - ٧)(١ + -٢)(٥ + -٢ \times ٢)}$

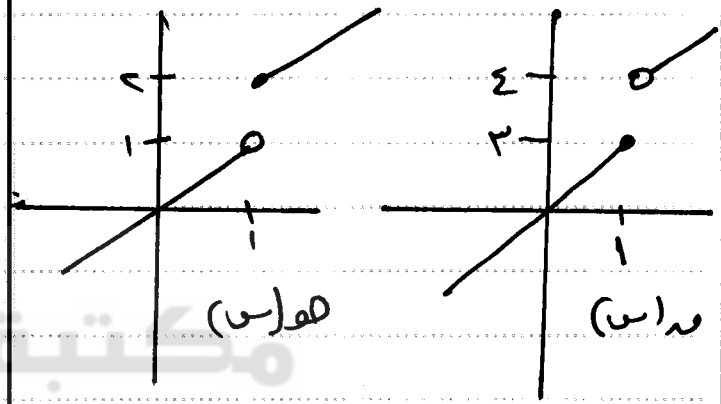
$= \frac{٣}{-١٣ \times -١ \times ٣} = \frac{٢}{١٣}$

مثال ⑦

اعتمد على الشكل المجاور لايجاد

نها $(هـ(س) - هـ(س))$

$س \to ١$



الحل

نلاحظ ان نها هـ(س) غير موجوده

$س \to ١$

نها هـ(س) غير موجوده

$س \to ١$

لذلك نلجأ للتحليل ونجد

النهايه من اليمين واليسار

نها $(هـ(س) - هـ(س)) = ٤ - ٢ = ٢$

$س \to ١^+$

نها $(هـ(س) - هـ(س)) = ٣ - ١ = ٢$

$س \to ١^-$

$\Leftarrow$ نها $(هـ(س) - هـ(س)) = ٢$

$س \to ١$

مثال ⑧

اذا كانت نها هـ(س) = ٥

$س \to ٣$

نها هـ(س) = -٥

$س \to ٣^-$

اوجد نها هـ^٢(س)

$س \to ٣$

الحل

نها هـ^٢(س) = $٥^٢ = ٢٥$

$س \to ٣^+$

نها هـ^٢(س) = $(-٥)^٢ = ٢٥$

$س \to ٣^-$

$\Leftarrow$ نها هـ^٢(س) = ٢٥

$س \to ٣$

مكتبة السام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

القسم الثالث

النهاية باستخدام مرافق الجذر التربيعي و الجذر التكعيبي

أولاً :. مرافق الجذر التربيعي

ملاحظه هامة

$س^2 - ص^2 = (س - ص)(س + ص)$

ليس $س - ص$ مرافقه لـ $س + ص$

ليس $س + ص$ مرافقه لـ $س - ص$

وعند ضربهما ببعض

$(س - ص)(س + ص) = س^2 - ص^2$

مرافقه $\sqrt{س + ٥} - ٢$ هو $\sqrt{س + ٥} + ٢$

وحاصل ضربهما $= س + ٥ - ٢$

$= س + ٣$

ونستخدم مرافقه الجذر التربيعي عندما يكون ناتج التعويض في النهاية = صفر / صفر

مثال ①

اوجد $\lim_{س \to ٦} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٣}{س - ٦}$ بالتعويض

نضرب كل من البسط و المقام في مرافق البسط

$= \lim_{س \to ٦} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٣}{س - ٦} \times \frac{\sqrt{س + ٣} + ٣}{\sqrt{س + ٣} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{س + ٣ - ٩}{(س - ٦)(\sqrt{س + ٣} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{س - ٦}{(س - ٦)(\sqrt{س + ٣} + ٣)}$

$= \frac{١}{(\sqrt{٦ + ٣} + ٣)} = \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٦}$

مثال ②

جد $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س^2 + ١٢} - ٥}$

الحل

$\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س^2 + ١٢} - ٥} \times \frac{\sqrt{س^2 + ١٢} + ٥}{\sqrt{س^2 + ١٢} + ٥}$

يتبع الحل ←

مكتبة البسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)(٥+\sqrt{\text{س}^2+٢١})}{٢٥-(\text{س}^2+٢١)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)(٥+\sqrt{\text{س}^2+٢١})}{٢٥-\text{س}^2-٢١}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)(٥+\sqrt{\text{س}^2+٢١})}{٤-\text{س}^2}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\overset{-١}{(\text{س}-٢)}(٥+\sqrt{\text{س}^2+٢١})}{(٢-\text{س})(٢+\text{س})}$$

$$= \frac{-١(٥+\sqrt{٤+٢١})}{٢+٢}$$

$$= \frac{-١\times(٥+٥)}{٤} = \frac{-١٠}{٤} = \frac{-٥}{٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{((\text{س}^2+٧)-(\text{س}+١٣))(\sqrt{\text{س}+١}+٢)}{((\text{س}+١)-٤)\times(\sqrt{\text{س}^2+٧}+\sqrt{\text{س}+١٣})}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{(\text{س}^2+٧-\text{س}-١٣)(\sqrt{٣+١}+٢)}{(\text{س}-٣)\times(\sqrt{٩+٧}+\sqrt{٣+١٣})}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{(\text{س}^2-\text{س}-٦)\times ٤}{(\text{س}-٣)\times(٤+٤)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٢)\times ٤}{(\text{س}-٣)\times ٨}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}+٢}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

مثال ③

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\sqrt{\text{س}^2+٧}-\sqrt{\text{س}+١٣}}{\sqrt{\text{س}+١}-٢}$$

نضرب بمرافق البسط والمقام

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\sqrt{\text{س}^2+٧}-\sqrt{\text{س}+١٣}}{\sqrt{\text{س}+١}-٢} \times \frac{\sqrt{\text{س}^2+٧}+\sqrt{\text{س}+١٣}}{\sqrt{\text{س}^2+٧}+\sqrt{\text{س}+١٣}} \times \frac{\sqrt{\text{س}+١}+٢}{\sqrt{\text{س}+١}+٢}$$

مثال ④

$$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}-٨}{\text{س}-٤}$$

الحل

$$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}-٨}{\text{س}-٤} \times \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}+٨}{\text{س}\sqrt{\text{س}}+٨}$$

$$= \frac{\text{س}^2(\text{س})-٦٤}{(\text{س}-٤)(\text{س}\sqrt{\text{س}}+٨)} = \lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}^3-٦٤}{(\text{س}-٤)(٤\sqrt{٤}+٨)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٤} \frac{(\text{س}-٤)(\text{س}^2+٤\text{س}+١٦)}{(\text{س}-٤)\times ١٦}$$

$$= \frac{١٦+١٦+١٦}{١٦} = \frac{٤٨}{١٦} = ٣$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

استخدام المرافق عندما يكون هناك ثلاثة حدود

طريقة الحل

نجزأ الثلاثة حدود الى حدين حيث نجعل الجزء الأول الذي يحتوي على الجذر حد والباقي حد آخر .

مثال ⑦

اوجد $\lim_{س \to 1} \frac{س - ٤\sqrt{س} + ٣}{س^{٢} - ١}$

الحل

$= \lim_{س \to 1} \frac{(س+٣) - ٤\sqrt{س}}{س^{٢} - ١}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{(س+٣) - ٤\sqrt{س}}{س^{٢} - ١} \times \frac{(س+٣) + ٤\sqrt{س}}{(س+٣) + ٤\sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{(س+٣)^{٢} - ١٦س}{(س^{٢}-١)(١+٣+٤\sqrt{س})}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س^{٢} + ٦س + ٩ - ١٦س}{(س^{٢}-١)(٨)}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س^{٢} - ١٠س + ٩}{٨(س^{٢}-١)}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{(س-١)(س-٩)}{٨(س-١)(س+١)}$

$= \frac{١-٩}{٨(١+١)} = \frac{-٨}{١٦} = -\frac{١}{٢}$

هناك طريقة اخرى وذلك عن طريق الفرض حيث نفرض $ص = \sqrt{س}$ ولكل عام عكسه استخدام طريقة الفرض عندما يكون تحت الجذر اقتران خطي

الحل (المثال السابق)

نفرض $ص = \sqrt{س}$

عندما $س \to ١$ فان $ص \to ١$

وبتربيع الطرفين $ص^{٢} = س$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س - ٤\sqrt{س} + ٣}{س^{٢} - ١}$

$= \lim_{ص \to 1} \frac{ص^{٢} - ٤ص + ٣}{ص^{٤} - ١}$

$= \lim_{ص \to 1} \frac{(ص-٣)(ص-١)}{(ص^{٢}-١)(ص^{٢}+١)}$

$= \lim_{ص \to 1} \frac{(ص-٣)(ص-١)}{(ص-١)(ص+١)(ص^{٢}+١)}$

$= \frac{١-٣}{(١+١)(١+١)} = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

مثال ⑧

اوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س+٥} - \sqrt{-٢س+٥}}{س^٢ - ٤س}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س+٥} + \sqrt{-٢س+٥}}{س^٢ - ٤س} \times \frac{\sqrt{س+٥} - \sqrt{-٢س+٥}}{\sqrt{س+٥} - \sqrt{-٢س+٥}}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س+٥ - (-٢س+٥)}{(س^٢ - ٤س)(\sqrt{س+٥} - \sqrt{-٢س+٥})}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س+٥ + ٢س - ٥}{(س^٢ - ٤س)(\sqrt{س+٥} - \sqrt{-٢س+٥})}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{٣س}{(س^٢ - ٤س)(\sqrt{س+٥} - \sqrt{-٢س+٥})}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{٣}{(س - ٤)(\sqrt{س+٥} - \sqrt{-٢س+٥})}$$

$$= \frac{٣}{(٣)(٣+٣)} = \frac{١}{٦}$$

مثال ⑨

اوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{\sqrt{س^٣ + ١} - \sqrt{-٢س + ١}}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{\sqrt{س^٣ + ١} - \sqrt{-٢س + ١}} \times \frac{\sqrt{س^٣ + ١} + \sqrt{-٢س + ١}}{\sqrt{س^٣ + ١} + \sqrt{-٢س + ١}}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)(\sqrt{س^٣ + ١} + \sqrt{-٢س + ١})}{س^٣ + ١ - (-٢س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)(\sqrt{س^٣ + ١} + \sqrt{-٢س + ١})}{س^٣ + ٢س}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)(\sqrt{س^٣ + ١} + \sqrt{-٢س + ١})}{س(س^٢ + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)(\sqrt{س^٣ + ١} + \sqrt{-٢س + ١})}{س(س^٢ + ٢)}$$

$$= \frac{(٤)(٢)}{(٢)(٦)} = \frac{٤}{٣}$$

مكتبة الوسام AL WESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

ثانياً

مرافق الجذر التكعيبي

$س^3 - ص^3 = (س - ص)(س^2 + ص س + ص^2)$

يسمى $(س^2 + ص س + ص^2)$ المرافق التكعيبي للمقدار $(س - ص)$

وحاصل ضربهما = مكعب الأول − مكعب الثاني

$= س^3 - ص^3$

$س^3 + ص^3 = (س + ص)(س^2 - ص س + ص^2)$

يسمى $(س^2 - ص س + ص^2)$ مرافق $(س + ص)$

وحاصل ضربهما = مكعب الأول + مكعب الثاني

$= س^3 + ص^3$

مثال

مرافق $\sqrt[3]{س} - ٢$

هو $(\sqrt[3]{س})^2 + ٢\sqrt[3]{س} + ٤$

مرافق $\sqrt[3]{س + ١} + ٢$ هو

$(\sqrt[3]{س + ١})^2 - ٢\sqrt[3]{س + ١} + ٤$

وحاصل ضربهما

$= (س + ١) + ٨$

$= س + ٩$

مثال ①

جد نهاً $\dfrac{\sqrt[3]{س} - ٢}{س - ٨}$ التعويض = صفر

$س \to ٨$

الحل

الضرب بالمرافق التكعيبي

نهاً $\dfrac{\sqrt[3]{س} - ٢}{س - ٨} \times \dfrac{(\sqrt[3]{س})^2 + ٢\sqrt[3]{س} + ٤}{(\sqrt[3]{س})^2 + ٢\sqrt[3]{س} + ٤}$

$س \to ٨$

$= $ نهاً $\dfrac{س - ٨}{(س - ٨)((\sqrt[3]{س})^2 + ٢\sqrt[3]{س} + ٤)}$

$س \to ٨$

$= $ نهاً $\dfrac{١}{(\sqrt[3]{س})^2 + ٢\sqrt[3]{س} + ٤}$

$س \to ٨$

$= \dfrac{١}{٤ + ٤ + ٤} = \dfrac{١}{١٢}$

مثال ②

أوجد نهاً $\dfrac{س^2 - ٣س - ٢}{\sqrt[3]{س + ٦} - ٢}$

$س \to ٢$

الحل

نهاً $\dfrac{س^2 - ٣س - ٢}{\sqrt[3]{س + ٦} - ٢} \times \dfrac{(\sqrt[3]{س + ٦})^2 + ٢\sqrt[3]{س + ٦} + ٤}{(\sqrt[3]{س + ٦})^2 + ٢\sqrt[3]{س + ٦} + ٤}$

$س \to ٢$

$= $ نهاً $\dfrac{(س^2 - ٣س - ٢)((\sqrt[3]{س + ٦})^2 + ٢\sqrt[3]{س + ٦} + ٤)}{(س + ٦ - ٨)}$

$س \to ٢$

← يتبع الحل

مكتبة الوفاء ALWAFA SAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

← تابع الحل

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س^٣ - ٣س - ٢) \times ١٢}{(س - ٢)}$$

قسمة تركيبية

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	حدثابت
	١	٠	-٣	-٢
٢		٢	٤	٢
	١	٢	١	٠

$$س^٢ + ٢س + ١$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ١) \times ١٢}{(س - ٢)}$$

$$= (٤ + ٤ + ١) \times ١٢ = ٩ \times ١٢$$

$$= ١٠٨$$

مثال ③

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{٥ + ٣س} - ٢}{\sqrt[٣]{س + ١}}$$

مرافقه تربيعي ومرافقه تكعيبي

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{٥ + ٣س} - ٢}{\sqrt[٣]{س + ١}} \times \frac{\sqrt{٥ + ٣س} + ٢}{\sqrt{٥ + ٣س} + ٢} \times \frac{(\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + \sqrt[٣]{س+١} + ١)}{(\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + \sqrt[٣]{س+١} + ١)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{(٥ + ٣س - ٤)(\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + \sqrt[٣]{س+١} + ١)}{(س + ١)(٥ + ٣س + ٢\sqrt{٥ + ٣س} + ٤)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{(٣س + ١)(\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + \sqrt[٣]{س+١} + ١)}{(س + ١)(٥ + ٣س + ٢\sqrt{٥ + ٣س} + ٤)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{٣}{٥ + ٣س + ٢\sqrt{٥ + ٣س} + ٤} = \frac{٣}{٤ + ٢ + ٤} = \frac{٣}{١٠}$$

مثال ④

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{س + ١} \times \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س + ١}}} + ١ \right)$$

الحل

توحيد مقام

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{س + ١} \left(\frac{\sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س + ١}} + ١}{\sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س + ١}}} \right)$$

الضرب بالمرافق التكعيبي

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{س + ١} \left(\frac{\sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س + ١}} + ١}{\sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س + ١}}} \right) \times \frac{\sqrt[٣]{(١ + \sqrt{٤س+١})^٢} - \sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س+١}} + ١}{\sqrt[٣]{(١ + \sqrt{٤س+١})^٢} - \sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س+١}} + ١}$$

$$= \frac{١ + (١ + \sqrt{٤س + ١})}{(س + ١) \times ٢ \times \sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س + ١}}}$$

$$= \frac{٢ + \sqrt{٤س + ١}}{٣ \times \sqrt[٣]{١ + \sqrt{٤س + ١}}}$$

يتبع الحل

$$\text{نها}_{س\to -1} \frac{1}{1+س} \times \frac{س^2+2س+2}{3\times -1^2}$$

$$= \text{نها}_{س\to -1} \frac{1}{1+س} \times \frac{(س+1)^2}{-3}$$

$$= \frac{-2}{3}$$

مثال ⑤

اوجد $\text{نها}_{س\to 8} \frac{س^{\frac{2}{3}} - 16}{س - 8}$

الحل

$$= \text{نها}_{س\to 8} \frac{س^{\frac{2}{3}} - 16}{س - 8} \times \frac{(س^{\frac{1}{3}})^2 + 16س^{\frac{2}{3}} + 256}{(س^{\frac{1}{3}})^2 + 16س^{\frac{2}{3}} + 256}$$

$$= \frac{س^{\frac{2}{3}\times 3} - (16)^3}{(س-8)((س^{\frac{1}{3}})^3)^2 + 16(س^{\frac{1}{3}})^2 + 256)}$$

$$= \text{نها}_{س\to 8} \frac{س^4 - 8^4}{(س-8)(س^2+16س+256)}$$

$$= \text{نها}_{س\to 8} \frac{(س^2-8^2)(س^2+8^2)}{(س-8)(3\times 256)}$$

$$= \text{نها}_{س\to 8} \frac{(س-8)(س+8)(س^2+8^2)}{(س-8)(3\times 256)}$$

$$= \frac{16\times 16\times 16}{3\times 256} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

مثال ⑥

$\text{نها}_{س\to 3} \frac{س-3}{س^{\frac{2}{3}} - 5س^{\frac{1}{3}} - 1}$ ثلاثة حدود

الحل

$$\text{نها}_{س\to 3} \frac{س-3}{(س^{\frac{1}{3}})^2 - 5س^{\frac{1}{3}} - 1}$$

$$= \text{نها}_{س\to 3} \frac{س-3}{(س-1)^2 - 5س^{\frac{1}{3}} - 1} \times \frac{(س-1)^2 + (س-1)5س^{\frac{1}{3}} + (5س^{\frac{1}{3}})^2}{(س-1)^2 + (س-1)5س^{\frac{1}{3}} + (5س^{\frac{1}{3}})^2}$$

$$= \text{نها}_{س\to 3} \frac{(س-3)((3-1)^2 + (3-1)5(3)^{\frac{1}{3}} + (5(3)^{\frac{1}{3}})^2)}{(س-1)^2 - (5س^{\frac{1}{3}} + 1)}$$

$$= \text{نها}_{س\to 3} \frac{(س-3)(4+10+25)}{س^2 - 2س + 1 - 5س^{\frac{1}{3}} - 1}$$

$$= \text{نها}_{س\to 3} \frac{39(س-3)}{س^2 - 3س^{\frac{2}{3}} + 3س^{\frac{1}{3}} - 6}$$ صحة تركيبية

	$س^2$	$س^{\frac{2}{3}}$	$س^{\frac{1}{3}}$	حد
3	1	3-	3	6-
		0	3	6
	1	0	2	0

$$= \text{نها}_{س\to 3} \frac{(س-3)(39)}{(س^{\frac{1}{3}}+2)(س-3)} = \frac{39}{11}$$

عكس حل السؤال السابق بالتعويض

نفرض $ص = س^{\frac{1}{3}}$

الاضافه والطرح

وتستخدم هذه الطريقة لايجاد النهايات التي يكون احد مقاديرها عباره عن حاصل ضرب اقترانين

مثل

$س^2 \sqrt{س+1}$ ، $س$ وا$س$ ، $س^2$ وا$س$

--- وهكذا --- $س$ ع$(س)$ ---

و نقوم باضافه وطرح مقدار معين وتتم العمليه كالتالي.

مثال $س^2 \sqrt{س+1}$

$س \leftarrow 3$

هنا نتم اضافه وطرح (تعويض $س = 3$ في احد المقادير $س^2$ أو $\sqrt{س+1}$ مع بقاء الآخر كما هو وبالتالي نضيف ونطرح

واما $(3)^2 \sqrt{س+1}$ أو $س^2 \sqrt{3+1}$

$9\sqrt{س+1}$ أو $س^2 \times 2$

مثال ①

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{\sqrt{س}\,(س+1)^2 - 4}{س - 1}$$

الحل

① نضيف ونطرح

واما $\sqrt{2}\,(س+1)^2 = (س+1)^2$

أو $\sqrt{س}\,(1+1)^2 = 4\sqrt{س}$

فيكون $(س+1)^2$ الذي تم اضافته وطرحه

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{\sqrt{س}\,(س+1)^2 - (س+1)^2 + (س+1)^2 - 4}{س - 1}$$

② نوزع النهايه

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{\sqrt{س}\,(س+1)^2 - (س+1)^2}{س - 1} + \text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{(س+1)^2 - 4}{س - 1}$$

اخراج عامل مشترك — تحليل

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{(س+1)^2(\sqrt{س} - 1)}{س - 1} + \text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{(س+1-2)(س+1+2)}{س - 1}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{(1+1)^2(\sqrt{س} - 1)}{س - 1} \times \frac{\sqrt{س} + 1}{\sqrt{س} + 1}$$

$$+ \text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{(س-1)(س+3)}{س - 1}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 1} \frac{4(س-1)}{(س-1)(\sqrt{س}+1)} + \text{نهـا}_{س \leftarrow 1} س + 3$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1}+1} + 1 + 3 = \frac{4}{2} + 4 = 6$$

ملاحظه هامه

يمكنك حل السؤال السابق

① الضرب بالمرافقه

② الفرض ص $= \sqrt{س}$

ملاحظه هامه

في الحاله استخدام طريقه الاضافه والطرح على ايجاد نهايه الاقترانات التي تحتوي على جذور مع اختلاف ما داخلها .

مثال ②

نها $\frac{\sqrt{س+٥} + \sqrt{س+٦} - ٥}{س - ٣}$ ، $س \to ٣$

الحل

نضيف ونطرح

إما $\sqrt{٣+٥} = \sqrt{٨} = ٢$

أو $\sqrt{٣+٦} = \sqrt{٩} = ٣$

هنا نطرح ونضيف العدد ٢ (الاضافه والطرح)

نها $\frac{\sqrt{س+٥} - ٢ + س + \sqrt{س+٦} - ٥}{س - ٣}$ ، $س \to ٣$

$= $ نها $\frac{\sqrt{س+٥} - ٢}{س - ٣}$ + نها $\frac{\sqrt{س+٦} - ٣}{س - ٣}$

مرافقه تكعيبي — مرافقه كبير

لكل الحل - - - ؟؟

الجواب $= \frac{١}{٤}$

مثال ③

اذا كانت نها $\frac{ه(س) - ٣}{س - ٢} = ٥$ ، $س \to ٢$

فاوجد نها $\frac{س^٢ ه(س) - ١٢}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

الحل

نضيف ونطرح

إما $(٢)^٢ ه(س)$ أو $س^٢ ه(٢)$

لتكن $٤ ه(س)$

نها $\frac{س^٢ ه(س) - ٤ ه(س) + ٤ ه(س) - ١٢}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

$= $ نها $\frac{س^٢ ه(س) - ٤ ه(س)}{س - ٢}$ + نها $\frac{٤ ه(س) - ١٢}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

$= $ نها $\frac{ه(س)(س^٢ - ٤)}{س - ٢}$ + نها $\frac{٤(ه(س) - ٣)}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

$= $ نها $\frac{ه(س)(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢}$ + ٤ نها $\frac{ه(س) - ٣}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

$= $ نها $ه(س)$ $(٤ + ٤) + ٤ \times ٥$

لكن نهايه (ثابت) = صفر ← نهايه البسط صفر

← نها $ه(س) - ٣ = ٠$ ← نها $ه(س) = ٣$ ، $س \to ٢$

بالتعويض الجواب $= ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ = ٣٢$

مثال ④

اذا كان $\lim_{س \to ٤} \frac{ه(س) - ١٦}{س - ٤} = ٥$

فاوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{ه(س) - س^٢}{س - ٤}$

الحل

نطرح واضافة $(٤)^٢ = ١٦$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{ه(س) - ١٦ + ١٦ - س^٢}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{ه(س) - ١٦}{س - ٤} + \lim_{س \to ٤} \frac{١٦ - س^٢}{س - ٤}$

$= ٥ + \lim_{س \to ٤} \frac{(٤ - س)(٤ + س)}{س - ٤}$ (-١)

$= ٥ - (٤ + ٤)$

$= ٥ - ٨ = -٣$

مثال ⑤

$\lim_{س \to ٨} \frac{س\sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨}$

الحل

نطرح ونضيف $س\sqrt[٣]{٨} = ٢س$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س\sqrt[٣]{س} - ٢س + ٢س - ١٦}{س - ٨}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س(\sqrt[٣]{س} - ٢)}{س - ٨} + \lim_{س \to ٨} \frac{٢(س - ٨)}{س - ٨}$

$=$ مرافقه تكعيبي $+ ٢$

$=$ اكمل السؤال

$= \frac{٤}{٣} + ٢ = \frac{١٠}{٣}$

مثال ⑥

$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - \sqrt[٣]{س+٧}}{س - ١}$

الحل

نضيف ونطرح $\sqrt{١+٣} = \sqrt{٤} = ٢$

$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{٢ - \sqrt[٣]{س+٧}}{س - ١}$

مرافقه تربيعي — مرافقه تكعيبي

اكمل

$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{١٢} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٦}$

مكتبة المعلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

امثلة اضافية على نهايات المقدارات الجذرية

مثال ①

$$\text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س + ٢٧} - ٣}{س - ٨}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س + ٢٧} - ٣}{س - ٨} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+٢٧)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{س+٢٧} + ٩}{\sqrt[٣]{(س+٢٧)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{س+٢٧} + ٩}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{س + ٢٧ - ٢٧}{(س-٨)(\sqrt[٣]{(س+٢٧)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{س+٢٧} + ٩)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{س}{(س-٨) \times (٣+٣+٣)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{س}{(س-٨) \times ٩}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{س}{(س-٨)(س^{\frac{٢}{٣}} + ٢س^{\frac{١}{٣}} + ٤)} \times \frac{(س^{\frac{١}{٣}})^{٢} + ٢س^{\frac{١}{٣}} + ٤}{(س^{\frac{١}{٣}})^{٢} + ٢س^{\frac{١}{٣}} + ٤}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{س}{(س-٨)((س^{\frac{١}{٣}})^{٣} + ٢^{٣})}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{س}{(س-٨)(س^{\frac{١}{٣}} + ٢)((س^{\frac{١}{٣}})^{٢} - ٢س^{\frac{١}{٣}} + ٤)}$$

$$= \frac{١}{٤ \times (١٢)} = \frac{١}{٤٨}$$

مثال ②

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٤]{س + ١٣} - ٢}{س - ٣}$$

اكتب وعرف

ملاحظة

اذا كان هناك جذر فى المقدار الرابعة فما فوقه وكان ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ نقوم بالتعويض

الحل

نفرض $ص = \sqrt[٤]{س + ١٣}$

$ص^{٤} = س + ١٣$

$س = ص^{٤} - ١٣$

$س \to ٣$ فان $ص \to \sqrt[٤]{٣ + ١٣} = ٢$

$$= \text{نهـا}_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{ص^{٤} - ٣ - ١٣} = \text{نهـا}_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{ص^{٤} - ١٦}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{(ص^{٢} - ٤)(ص^{٢} + ٤)}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{(ص - ٢)(ص + ٢)(ص^{٢} + ٤)}$$

$$= \frac{١}{(٤)(٤+٤)} = \frac{١}{٣٢}$$

ملاحظه هامه

عكس حفظ القاعدة

$$أ^ن - ب^ن = (أ-ب)(أ^{ن-1} + أ^{ن-2}ب + أ^{ن-3}ب^2 + \dots + ب^{ن-1})$$

بعدد الحدود

$$س^5 - 32 = س^5 - 2^5$$
$$= (س-2)(س^4 + 2س^3 + 4س^2 + 8س + 16)$$

$$س^5 + 2^5 =$$
$$(س+2)(س^4 - 2س^3 + 4س^2 - 8س + 16)$$
لاحظ + - + - +

مثال ③

$$\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^7 - 1}{س - 1}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^6 + س^5 + س^4 + س^3 + س^2 + س + 1)}{س - 1}$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1 = 7$$

مثال ④

$$\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س^5 - 32}{س - 2} = \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س^5 - 2^5}{س - 2}$$
$$= \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{(س-2)(س^4 + 2س^3 + 4س^2 + 8س + 16)}{س - 2}$$
$$= 16+16+16+16+16 =$$
$$5 \times 16 = 80$$

بشكل عام

$$\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن\, أ^{ن-1}$$

$$\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن-م}$$

مثال

$$\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س^9 - 2^9}{س^7 - 2^7} = \frac{9}{7}(2)^{9-7}$$
$$= \frac{9}{7} \times 2^2$$

مثال ⑤

اثبت ان $\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{ن^{س} - 1}{م^{س} - 1} = \frac{ن}{م}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{ن^{\frac{1}{س}} - 1}{م^{\frac{1}{س}} - 1}$$

نفرض ان $س = ص$

عندما $س \to 1$ فان $ص \to 1$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 1} \frac{(ص^ن)^{\frac{1}{ن}} - 1}{(ص^م)^{\frac{1}{م}} - 1}$$

بتتبع الحل

$$= \text{نها}_{\substack{ص \to ١ \\ ص^{\frac{١}{ن}} \to ١}} \frac{ص^{\frac{١}{م}} - ١}{ص^{\frac{١}{ن}} - ١}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ١} \frac{ص^{م} - ١}{ص^{ن} - ١}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ١} \frac{(ص - ١)(ص^{م-١} + ص^{م-٢} + \cdots + ١)}{(ص - ١)(ص^{ن-١} + ص^{ن-٢} + \cdots + ١)}$$

$$= \frac{م}{ن}$$

مثال ①

اذا كانت $\text{نها}_{س \to ٢} \left(\frac{ب}{س^{٢} - ٤} - \frac{ا}{س - ٢} \right) = \frac{١}{٤}$

فاوجد قيمة $ا$ ، $ب$

الحل توحيد مقامات

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{ا(س + ٢) - ب(س - ٢)}{(س - ٢)(س^{٢} - ٤)} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(ا(س + ٢) - ب)}{(س - ٢)(س^{٢} - ٤)} = \frac{١}{٤}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{ا س + ٢ ا - ب}{س^{٣} - ٤} = \frac{١}{٤}$$

نهاية المقام = صفر ⇐ نهاية البسط = صفر

$$\Leftarrow ٢ ا - ب + ٢ = ٠$$

$$٤ ا - ب = ٠ \quad \cdots \cdots (١)$$

باستخدام القسمة التركيبية

	س	ا	ب + ٢
	٢	٤ ا	٠

$$٤ ا - ب = ٠$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{ا(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{ا}{٤} = \frac{١}{٤} \Leftarrow ا = ١$$

نعوض في ①

$$٤ \times ١ - ب = ٠ \Leftarrow ب = ٤$$

ملاحظة

$$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ٢} \frac{ا}{(س - ٢)(س + ٢)} - \frac{ب}{(س - ٢)(س^{٢} + ٤)} = \frac{١}{٤}$$

توحيد المقام

مكتبة نواتج
AWRAQ
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

$$\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{\sqrt[4]{س} - 1}{\sqrt[3]{س} - 1}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{\frac{\sqrt[4]{س} - 1}{س - 1}}{\frac{\sqrt[3]{س} - 1}{س - 1}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{4}} - 1}{س - 1} = \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{4}} - 1}{س^{\frac{3}{4}} - 1}$$

$$= \frac{\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{4}} - 1}{(س^{\frac{1}{4}} - 1)(س^{\frac{1}{4}} + 1)}}{\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{(س^{\frac{1}{4}} - 1)((س^{\frac{1}{4}})^2 + س^{\frac{1}{4}} + 1)}{(س^{\frac{1}{4}} - 1)}}$$

$$= \frac{\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{1}{(س^{\frac{1}{4}} + 1)}}{\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{1}{((س^{\frac{1}{4}})^2 + س^{\frac{1}{4}} + 1)}} = \frac{\frac{1}{(1+1)}}{\frac{1}{1+1+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{4}$$

حل آخر بالتعويض

نفرض $ص = \sqrt[12]{س}$

$ص^{12} = س$

$س \to 1 \Leftarrow ص \to 1$

$$\text{نهـا}_{ص \to 1} \frac{\sqrt[4]{ص^{12}} - 1}{\sqrt[3]{ص^{12}} - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 1} \frac{ص^3 - 1}{ص^4 - 1} = \text{نهـا}_{ص \to 1} \frac{(ص-1)(ص^2+ص+1)}{(ص-1)(ص+1)(ص^2+1)}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 1} \frac{(ص^2+ص+1)}{(ص+1)(ص^2+1)} = \frac{3}{4}$$

مثال (٨)

إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{(س^2-1)^{ن}}{(س^2-2س+1)^{ن}} = 81$

فما قيمة ن ؟

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{(س^2-1)^{ن}}{((س-1)^2)^{ن}} = 81$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{(س-1)^{ن} (س+1)^{ن}}{(س-1)^{ن}} = 81$$

$$(1+1)^{ن} = 81$$

$$2^{ن} = 3^4 \Leftarrow ن = 4$$

$$ن = 2$$

مثال ⑨

اثبت ان

$$\text{نها}_{س\to 1} \frac{س^{ن+1} - (ن+1)س + ن}{(س-1)^2} = \text{صفر}$$

الحل

$$= \text{نها}_{س\to 1} \frac{س^{ن+1} - ن س - س + ن}{(س-1)^2}$$

$$= \text{نها}_{س\to 1} \frac{س^{ن+1} - س}{(س-1)^2} + \frac{ن - ن س}{(س-1)^2}$$

$$= \text{نها}_{س\to 1} \frac{س(س^{ن}-1)}{(س-1)^2} + \frac{ن(1-س)}{(س-1)^2}$$

$$= 1 \times ن + ن \times -1$$

$$= ن - ن = \text{صفر}$$

مثال ⑩

اذا كانت $\text{نها}_{ص\to 1} \frac{ص^{ن}-1}{ص-1} = ن$ حيث $ن \in ط^+$

فما قيمة الثابت ن اذا كانت

$$\text{نها}_{س\to 2} \frac{س^2 + س - 6}{\sqrt[ن]{س^2 + س - 5} - 1} = ؟$$

الحل

نفرض $ص = \sqrt[ن]{س^2 + س - 5}$

$\Leftarrow$ $ص^{ن} = س^2 + س - 5$

$\Leftarrow$ $ص^{ن} + 5 = س^2 + س$

$س \to 2$ فان $ص \to 1$

$$= \text{نها}_{ص\to 1} \frac{ص^{ن} + 5 - 6}{ص - 1} = ؟$$

$$\text{نها}_{ص\to 1} \frac{ص^{ن}-1}{ص-1} = ؟$$

ومن المعطيات

$ن = ؟$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ① ص٣١

جد كلاً من النهايات الآتيه

① $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥}$

الحل

التعويض $= \frac{٢٥ - ١٥ - ١٠}{-٥ + ٥} = \frac{٠}{٠}$ ÷

$\lim_{س \to -٥} \frac{(س + ٥)(س - ٢)}{س + ٥}$

$= \lim_{س \to -٥} س - ٢ = -٧$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

التعويض $= \frac{٩ + ١}{٣ - ٣} = \frac{١٠}{٠}$

غير موجودة

تدريب ② ص٣

① $\lim_{س \to ٥} (\frac{١}{س - ٥} - \frac{٢}{س^٢ - ٢٥})$

الحل

التعويض ÷ توحيد المقامات

$\lim_{س \to ٥} (\frac{س - ١٠}{س^٢ - ٢٥})(\frac{١}{س - ٥})$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س - ٢)}{(س - ٥)(س + ٥)^٢}$ (١)

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٢}{(س + ٥)^٢}$

$= \frac{٣}{١٠^٢} = \frac{٣}{١٠٠}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ نهـا $\frac{س-٢}{\sqrt{س+٣٤}-٦}$
س ← ٢

الحل
التعويض = $\frac{٠}{٠}$
الضرب بمرافق (الجذر التربيعي)

نهـا $\frac{س-٢}{\sqrt{س+٣٤}-٦} \times \frac{\sqrt{س+٣٤}+٦}{\sqrt{س+٣٤}+٦}$
س ← ٢

= نهـا $\frac{(س-٢)(\sqrt{س+٣٤}+٦)}{س+٣٤-٣٦}$
س ← ٢

= نهـا $\frac{(س-٢)(\sqrt{س+٣٤}+٦)}{س-٢}$
س ← ٢

= نهـا $(\sqrt{س+٣٤}+٦)$
س ← ٢

$= \sqrt{٢+٣٤}+٦ = ٦+٦ = ١٢$

---

③ نهـا $\frac{\sqrt{س^٢+١}-\sqrt{١-٤س^٢}}{س^٢}$
س ← ٠

الحل
التعويض = $\frac{٠}{٠}$
الضرب بمرافق الجذر التربيعي

نهـا $\frac{\sqrt{س^٢+١}-\sqrt{١-٤س^٢}}{س^٢} \times \frac{\sqrt{س^٢+١}+\sqrt{١-٤س^٢}}{\sqrt{س^٢+١}+\sqrt{١-٤س^٢}}$
س ← ٠

= نهـا $\frac{س^٢+١-١+٤س^٢}{س^٢(\sqrt{س^٢+١}+\sqrt{١-٤س^٢})}$
س ← ٠

= نهـا $\frac{٣س^٢}{س^٢(\sqrt{س^٢+١}+\sqrt{١-٤س^٢})}$
س ← ٠

$= \frac{٣}{\sqrt{٠+١}+\sqrt{١-٠}} = \frac{٣}{١+١} = \frac{٣}{٢}$

تدريب ③ ص ٣٥

جد كلاً من النهايات الآتية

① نهـا $\frac{\sqrt{س^٢+٤}}{س-٢+\sqrt{س-٢}}$
س ← ٢

ناتج التعويض = $\frac{٢}{٠}$

نحدد الإشارات

$س^٢-٤$	+	٠ −	٠ +
		٢	
$س-٢$	−	٠ +	+
$\frac{س^٢-٤}{س-٢}$	−	٠ +	+
		٢	

الإشارات المتقاطعة

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

$\Leftarrow$ نها $\frac{\sqrt{س^2-٤}}{\sqrt{س-٢}}$ تنتمي للحال
$س \to ٢^+$

$= $ نها $\frac{\sqrt{س-٢} \times \sqrt{س+٢}}{\sqrt{س-٢}}$
$س \to ٢^+$

$= \sqrt{٤} = ٢$

---

⑦ نها $\frac{\sqrt{س^2-٤}}{\sqrt{س-٢}}$
$س \to ٢$

من الفرع السابق

نها $\frac{\sqrt{س^2-٤}}{\sqrt{س-٢}} = ٢$
$س \to ٢^+$

نها $\frac{\sqrt{س^2-٤}}{\sqrt{س-٢}}$ غير موجود
$س \to ٢^-$ لا تنتمي للحال

$\Leftarrow$ نها $\frac{\sqrt{س^2-٤}}{\sqrt{س-٢}}$
$س \to ٢$

غير موجودة

تدريب ④ ص ٣٦

نها $\frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{س-٧}$
$س \to ٧$

الكل

التعويض $= \frac{٠}{٠}$

نها $\frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{س-٧} \times \frac{(\sqrt[٣]{س+١})^2+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤}{(\sqrt[٣]{س+١})^2+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤}$
$س \to ٧$

$= $ نها $\frac{س-٧}{(س-٧)((\sqrt[٣]{س+١})^2+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤)}$
$س \to ٧$

$= \frac{١}{٤+٤+٤} = \frac{١}{١٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

ص ٣٨

السؤال الأول

جد كلاً من النهايات الآتية

(أ) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س+١)^{٢} - ٨١}{س - ٨}$

الحل

$= \frac{\text{المقدار}}{\text{المقدار}}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س+١١-٩)(س+١+٩)}{س - ٨}$

$= ٩ + ٩ = ١٨$

(ب) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{\frac{س}{٢} - ٤}$

الحل

$= \frac{\text{المقدار}}{\text{المقدار}}$

الضرب بالمرافق (الجذر التكعيبي)

$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{\frac{س}{٢} - ٤} \times \frac{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}$

(ج) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{س}\left(\frac{١}{(٩+س)^{٢}} - \frac{١}{٤}\right)}{}$

الحل

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{٤ - (٣+س)^{٢}}{٤(٣+س)^{٢}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-س^{٢} - ٤س - ٤}{٤(٣+س)^{٢}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-س(س+٤)}{٤(٣+س)^{٢}} \right)$

$= \frac{-١}{٤(٣)^{٢}} = \frac{-١}{٤}$

(د) $\lim_{س \to ٨} \frac{\text{المقدار}}{\text{المقدار}}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{\frac{١}{٣}(٨-س)(\sqrt[٣]{س}^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$

$= \frac{-٢}{(٤+٤+٤)} = \frac{-٢}{١٢} = \frac{-١}{٦}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

(5) هـا $\dfrac{|1+3س3| - 5}{8 + س^3}$ س ← -2

الحل

$|1+3س3|$	$1+3س$	$-3س-1$
	−	+
	$-\frac{1}{3}$

$= هـا \dfrac{5 - (-3س-1)}{8 + س^3}$ س ← -2

$= هـا \dfrac{5+3س3+1}{8+س^2}$ س ← -2

$= هـا \dfrac{6+3س}{8+س^3}$ س ← -2

$= هـا \dfrac{3(2+س)}{(2+س)(4+2س-س^2)}$ س ← -2

$= \dfrac{3}{4+4+2}$

$= \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

(6) هـا $\dfrac{6 - س\sqrt{1+س}}{9 - 3س^2}$ س ← 3

الحل

المرافق = $\frac{أ}{أ}$

هـا $\dfrac{6-س\sqrt{1+س}}{9-3س^2} \times \dfrac{6+س\sqrt{1+س}}{6+س\sqrt{1+س}}$ س ← 3

$= هـا \dfrac{36 - س^2(1+س)}{(9-3س^2)(6+س\sqrt{1+س})}$ س ← 3

$= هـا \dfrac{36 - س^3 - س^2}{(9-3س^2)(6+س\sqrt{1+س})}$ س ← 3

النظرية تركيبية

[3]	$س^2$	$س^3$	س	ثابت
	-1	-1	0	36
		3	12	36
	-1	-4	-12	0

$= هـا \dfrac{(1-س)(3-س)(-س^2-4س-12)}{(3-س)(6+س\sqrt{1+س})}$ س ← 3

$= \dfrac{-(-1)(3-3)(4+3+3)}{3(6+6)}$

$= \dfrac{3\times 11}{3\times 12} = \dfrac{11}{12}$

مكتب الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(و) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س^٢ - ١٠س + ٢٥}}{س - ٥}$

الحل

$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{(س-٥)(س-٥)}}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{(س-٥)^٢}}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{|س - ٥|}{س - ٥}$

$|س - ٥| = \begin{cases} س - ٥ & س \geq ٥ \\ ٥ - س & س < ٥ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{|س-٥|}{س-٥} = \lim_{س \to ٥^+} \frac{س-٥}{س-٥} = ١$

$\lim_{س \to ٥^-} \frac{|س-٥|}{س-٥} = \lim_{س \to ٥^-} \frac{٥-س}{س-٥} = -١$

$\lim_{س \to ٥} \frac{|س-٥|}{س-٥}$ غير موجودة

(ز) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}}$

الحل

التعويض $= \frac{٠}{٠}$

نحدد المجال

$س^٢ - ١$	+ + +	− − −	+ + +
		١-	١

المجال

$س - ١$	− − −	+ + +
	١	

المجال

$\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$	+ + +
	١

$\lim_{س \to ١^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}} = \lim_{س \to ١^+} \frac{\sqrt{(س-١)(س+١)}}{\sqrt{س-١}}$

$= \lim_{س \to ١^+} \sqrt{س + ١} = \sqrt{٢}$

$\lim_{س \to ١^-} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}}$ غير موجودة

لأن ١ لا تنتمي للمجال

$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}}$ غير موجودة

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٣س - ٤}{س^٢ - ١}$

الحل

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	$ص$
١	١	٠	٣	-٤
+٤		١	١	
	١	١	٤	٠

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢+س+٤)}{(س-١)(س+١)}$

$= \frac{٦}{٢} = ٣$

د) $\lim_{س \to ٧^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤٩}}{\sqrt{س - ٧}}$

٧^+ تنتمي للمجال

$س^٢ - ٤٩$: $+++$ عند -٧ و ٧، $---$ بينهما

$س - ٧$: $+++$ عند ٧

$\frac{س^٢ - ٤٩}{س - ٧}$: $\longrightarrow$ عند ٧

المجال هو التقاطع

$= \lim_{س \to ٧^+} \frac{\sqrt{(س-٧)(س+٧)}}{\sqrt{س-٧}}$

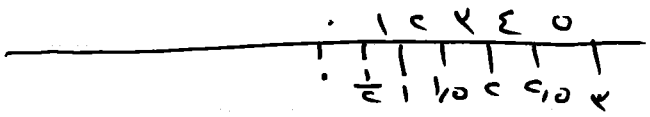
$= \sqrt{١٤}$

هـ) $\lim_{س \to ٥^+} \frac{س - [\![س]\!]}{٤س^٢ - ٢٥}$

الحل

$[\![س]\!]$ طول الدرجة $= \frac{١}{٢}$

$س = ٠ \Leftarrow س = ٠$



$= \lim_{س \to ٥^+} \frac{س - ٥}{(٢س+١٠)(٢س-١٠)}$

$= \frac{١}{٥+٥} = \frac{١}{١٠}$

و) $\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{٤س^٢ - ٢٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{(٢س+١٠)(٢س-١٠)}$

$= \frac{١}{صفر}$ غير موجودة

ز) $\lim_{س \to ٥} \frac{س - [\![س]\!]}{٤س^٢ - ٢٥}$ غير موجودة

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

(٤) هـ $\dfrac{\sqrt{١+س^{٢}}-\sqrt{١-س^{٢}}}{س^{٢}}$
س ← ٠

الحل

التعويض = ÷

هـ $\dfrac{\sqrt{١+س^{٢}}-\sqrt{١-س^{٢}}}{س^{٢}} \times \dfrac{\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}}}{\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}}}$
س ← ٠

= هـ $\dfrac{١+س^{٢}-١+س^{٢}}{س^{٢}(\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}})}$
س ← ٠

= هـ $\dfrac{٢س^{٢}}{س^{٢}(\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}})}$
س ← ٠

= $\dfrac{٢}{١+١}$ = $\dfrac{٢}{٢}$ = ١

الحل

بما أن المقام = ٠
بما أن البسط = ٠ لكن
النهاية موجودة ٥

هـ(س) + ٥ = ٠
س ← ٣

⇐ هـ(س) = −٥
س ← ٣

⇐
هـ(س) + هـ(−س) + ٣ب = ٧
س ← ٣ س ← ٣

−٥ − ٦ + ٣ب = ٧
٣ب + ١١ = ٧
+١١ +١١
٣ب = ١٨ ⇐ ب = ٦

السؤال الثاني ص ٣٨

اذا كان هـ كثير حدود وكانت
هـ(س) + ٥ / س − ٣ = ٤ فأوجد
س ← ٣

هـ(س) − ٢س + ٣ب = ٧
س ← ٣

مجد قيمة الثابت ب

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث ص٣٩

اذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{|س-١٣|} & س \geq ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ & س < ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٣} \text{ق}(س)$ موجودة

فاوجد قيمة الثابت جـ

الحل

س	٣	١٣
$\|س-١٣\|$	+ + +	- - -
$٣-س$	+ + +	- - -

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{س-٣} = -١ & س \geq ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ & س > ٣ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٣} \text{ق}(س) = \lim_{س \to ٣^{+}} \text{ق}(س) = \lim_{س \to ٣^{-}} \text{ق}(س)$

$-١ = ٩جـ - ٤$

$٩جـ = ٣$

$\frac{٩جـ}{٩} = \frac{٣}{٩}$

$جـ = \frac{١}{٣}$

السؤال الرابع ص٣٩

اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أ س^{٢} + ب س + ج}{س - ١} = ١$

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

الحل

النهاية موجودة $\Leftarrow$

نهاية المقام $= ٠$ $\Leftarrow$ نهاية البسط $= ٠$

$أ(١)^{٢} + ب(١) + ج = ٠$

$أ + ب + ج = ٠$ ---- ①

قسمة تركيبية

	$س^{٢}$	$س$	حد
١	أ	ب	ج
		أ	أ + ب
	أ	أ + ب	أ + ب + ج

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(أ س + أ + ب)}{(س-١)} = ١$

$أ + ب + ج = ١$ ---- ②

نطرح معادلة ① من ②

$أ = ١ \Leftarrow ج = ١$

بالتعويض $أ = ١$ في ①

$١ + ب = -٦ \Leftarrow ب = -٧$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس ص ٣٩

جد هـا $\frac{(٦٤)^{س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}}$

الحل

هـا $\frac{٨^{٢س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}}$ س ← ٠ ... (١)

= هـا $\frac{٨^{س}(٨^{س} - ١)}{١ - ٨^{س}}$

= $-٨^{٠} = -١$

عكس السؤال بطريقة الفرض

ص = $٨^{س}$

س ← ٠ فان ص ← ١

= هـا $\frac{ص^{٢} - ص}{ص - ١}$ ص ← ١

= هـا $\frac{ص(ص - ١)}{ص - ١}$ ص ← ١

= هـا ص ← ١ ص

= ١

السؤال السادس

$$ل(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{س^{٢} + ٥س + ١٨} & س \neq ٣ \\ س + ٥ & س = ٣ \end{cases}$$

جد قيمة الثابت ع التي تجعل هـا ل(س) موجودة

س ← ٣

الحل

هـا $\frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{س^{٢} + ٥س + ١٨}$ = هـا س + ٥

س ← ٣ ع

س = ٣ + ع

هـا $\frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س^{٢} + ٣س + ٩)(س + ٦ + ع)}$ = هـا س + ٥

س ← ٣ ع

$\frac{٣ - ع}{٦ + ع} = ٥ + ع$

$٣ - ع = ٣٠ + ١٠ع$

$-١٣ = ع$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السابع ص ٣٩

$$\text{ق}(س) = \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} - ٥س + ٦}$$

فأوجد قيم $ب$ التي تجعل $\text{ق}(س)$ غير موجودة عندما $س \to ب$

الحل

النهاية غير موجودة

المقام = صفر والبسط ≠ صفر

$ب^{٢} - ٥ب + ٦ = ٠$

$(ب - ٣)(ب - ٢) = ٠$

$ب = ٢$ ، $ب = ٣$

السؤال الثامن

إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{\text{ق}(س) - ٦}{س - ١} = ٨$

وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{\text{ق}(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

فما قيمة الثابت $ب$ ؟

الحل

$\lim_{س \to ١} \frac{(س + ٣)(س - ١)}{\text{ق}(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

$\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\text{ق}(س) - ٦} \times \lim_{س \to ١} (س + ٣) + ب = \frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٨} \times ٤ + ب = \frac{٣}{٢} \Leftarrow$

$\frac{١}{٢} + ب = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ب = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow ب = \frac{٢}{٢} = ١$

السؤال التاسع

إذا كان $هـ$ كثير حدود وكانت

$\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$ وكانت

$\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥ + ٣س) = ٢$

فأوجد قيمة الثابت $د$.

الحل

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) + ٥ = ٠$

$\Leftarrow هـ(٠) = -٥$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) - ٥ + ٣د = ٢$

$-٥ + ٣د = ٢$

$١٠ + ٣د = ٢$

$٣د = ١٢ \Leftarrow د = ٤$

مكتبة الهدف ALHADAF
الهدف : ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

مثال ① وزارة (٢٠٠٨) شتوية

① اوجد $\lim_{س \to 0} \frac{٦س^{٤} + ٨س^{٢}}{٤س^{٢} - ٣س^{٣}}$

الحل :

$$\text{بما} \quad \frac{٦س^{٢}(س^{٢}+٣)}{س^{٢}(٤-٣س)} = \frac{١٨}{٤} = ٩$$

$$\text{بما} \quad \frac{(س-١)(أس^{٢}+بس+ج)}{س-١} = ١$$

$$\text{بما} \quad أ + ب + ج = ١$$

$$٩أ + ٣ب + ج = ٠ \quad \text{---} \quad (٢)$$

$$٤أ + ٢ب + ج = ٠ \quad \text{بالطرح}$$

$$٥أ + ب = ٠$$

$$-٥أ + ٣ = ٠ \quad \Leftarrow \quad أ = \frac{٣}{٥}$$

$$ب = -٣$$

$$\frac{٣}{٥} - ٣ + ج = ١$$

$$ج = ١ + ٣ - \frac{٣}{٥} = ٤ - \frac{٣}{٥} = \frac{١٧}{٥}$$

② اذا كانت

$$\text{بما} \quad \frac{أس^{٢} + بس + ٢}{س - ١} = ١$$

$$س \to ١$$

فجد قيمة $أ$ ، $ب$ ؟

الحل

بتعويض المقام = ٠ ⇐ بتعويض البسط = ٠

$$أ(١)^{٢} + ب(١) + ٢ = ٠$$

$$أ + ب + ٢ = ٠ \quad \text{---} \quad (١)$$

قسمة تركيبية

	أ	ب	٢
١		أ +	أ + ب + ٢
	أ	أ + ب	٠

مثال ② وزارة (٢٠١٩) صيفية

اذا كان هـ اقتران كثير حدود وكانت $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س)+٥}{س} = \frac{١}{٢}$

وكانت $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥ + ب٣) = ٢$

فجد قيمة الثابت ب ؟

الحل

المقام = ٠ ⇐ البسط = ٠

$$هـ(٠) + ٥ = ٠$$

$$هـ(٠) = -٥ \quad \Leftarrow \quad ب٣ = ١٢$$

$$\text{الجواب} \quad -٥ - ٥ + ب٣ = ٢ \quad \Leftarrow \quad ب = \frac{١٢}{٣} = ٤$$

مكتبة الوسام ALWSAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③ وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان ق قترانا كثير حدود

وكانت $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)+٥}{س-٣} = ٤$

وكانت $\lim_{س \to ٣} (ق(س) - ٢س^{٣} + ٥س) = ٧$

اوجد قيمة الثابت ب

الحل

$\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)+٥}{س-٣}$ موجود

نهاية المقام = ٠ ⇐ نهاية البسط = ٠

⇐ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = -٥ = ق(٣)

⇐ $\lim_{س \to ٣} (ق(س) - ٢س^{٣} + ب س) = ٧$

$-٥ - ٢ \times ٢٧ + ٣ب = ٧$

$-٥ - ٥٤ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ٧ + ٥٤ + ٥$

$٣ب = ١٨ \Leftarrow ب = ٦$

مثال ④ وزارة (٢٠١١) شتوية

اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{\sqrt{١+٢س}} - ١ \right)$

الحل

بتوحيد المقامات

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١ - \sqrt{١+٢س}}{\sqrt{١+٢س}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١-\sqrt{١+٢س}}{\sqrt{١+٢س}} \right) \times \frac{١+\sqrt{١+٢س}}{١+\sqrt{١+٢س}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{(١) - (١+٢س)}{\sqrt{١+٢س}(١+\sqrt{١+٢س})} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-٢س}{\sqrt{١+٢س}(١+\sqrt{١+٢س})} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-س}{\sqrt{١+٢س}(١+\sqrt{١+٢س})} \right)$

$= -\frac{١}{٢}$

مثال ⑤ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كانت $\lim_{س \to -١} \frac{أ س^{٢} - ب س - ٥}{س+١} = -٧$

اوجد أ ، ب ؟

الحل

نهاية المقام = ٠ ⇐ نهاية البسط = ٠

$أ(-١)^{٢} - ب(-١) - ٥ = ٠$

$أ + ب - ٥ = ٠$ ..... (١)

يتبع الحل

مكتب نسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

[1]	أ	ب	−٥
	−أ	أ	ب + ٢
	٢	−٢ − ب	٥ − ب − ٢

ها $= \frac{(س+1)(ب-٢-٢س)}{س+1}$ عند س = −١ $= -٧$

$-٢ - ٢ - ب = -٧$

$ب = ٧ - ٢ - ٢ = ٣$ ... (٤)

$٢ + ب - ٥ = ٠$ بالجمع $-٢ب + ب = -٧$

$-ب = -٧ \Rightarrow ب = ٧$ ، $٢ = ٢$ بتعويض

$٢ + ب - ٥ = ٠$

$ب - ٣ = ٠ \Rightarrow ب = ٣$

مثال ٦ وزارة (٢٠١٢) شتوية

اوجد ها $\frac{س^٢ - ٣س}{س - ١ - \sqrt{٢س+١}}$ عند س → ٣

الحل

ها $\frac{س^٢ - ٣س}{(س-١) - \sqrt{٢س+١}}$ عند س → ٣

= ها $\frac{س^٢ - ٣س}{(س-١) - \sqrt{٢س+١}} \times \frac{(س-١) + \sqrt{٢س+١}}{(س-١) + \sqrt{٢س+١}}$ عند س → ٣

= ها $\frac{(س^٢ - ٣س)(س-١) + \sqrt{٢س+١}}{(س-١)^٢ - (٢س+١)}$ عند س → ٣

= ها $\frac{(س^٢ - ٣س)(٤+٢)}{س^٢ - ٤س - ١}$ عند س → ٣

= ها $\frac{٤(س^٢ - ٣س)}{س^٢ - ٣س}$ عند س → ٣

= ٤

مثال ٧ وزارة (٢٠١٣) صيفية

ها $\frac{\sqrt{٢س+٣} - \sqrt{٤س+١}}{س - ٢}$ عند س → ٢

= ها $\frac{\sqrt{٢س+٣} - \sqrt{٤س+١}}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{٢س+٣} + \sqrt{٤س+١}}{\sqrt{٢س+٣} + \sqrt{٤س+١}}$ عند س → ٢

= ها $\frac{٢س+٣ - (٤س+١)}{(س-٢)(\sqrt{٢س+٣} + \sqrt{٤س+١})}$ عند س → ٢

= ها $\frac{-٢س+٢}{(س-٢)(٦)}$ عند س → ٢

= ها $\frac{-(س-١)}{٦(س-١)} = \frac{-١}{٦}$ عند س → ١

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑧ وزارة (٢٠١٤) شعبة

① $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{\frac{س}{٢} - ٤}$

الحل

$= \lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{\frac{س}{٢} - ٤} \times \frac{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{(\frac{س}{٢} - ٤)((\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{-\frac{١}{٢}(٨ - س)(١٢)}$

$= -\frac{١}{٦}$

② $\lim_{س \to -٢} \frac{|٣س + ١١| - ٥}{س^{٣} + ٨}$

$|٣س + ١١|$: $-\frac{١١}{٣}$ (−) ، $\frac{١}{٣}$ (+)

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(١ - \sqrt{٣}) - ٥}{س^{٣} + ٨}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{١ + \sqrt{٣} + ٥}{س^{٣} + ٨}$ ، $= \lim_{س \to -٢} \frac{٣س + ٦}{س^{٣} + ٨}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{٣}{س^{٢} - ٢س + ٤}$

$= \frac{٣}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

③ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + \frac{١}{س} + [\frac{س}{٣}] & ١ \le س < ٣ \\ \frac{|س - ١٣|}{س - ٩} & ٣ < س < ٤ \end{cases}$

فحدد نهاية $ق(س)$ عند $س \to ٣$

$[\frac{س}{٣}]$: ٠ (0 ≤ س < 3)، ١ (3 ≤ س < 6)

طول المدى = ٣

أكبر عدد صحيح = ٠

$\lim_{س \to ٣} ٢س^{٢} + \frac{١}{س} + ٠ = ٢(٣)^{٢} + \frac{١}{٣}$

$= ١٨ + \frac{١}{٣}$

$= \frac{٥٥}{٣}$

$|س - ١٣|$: $س - ٣$ (+) ، $٣ - س$ (−)

$\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^{٤} - ٩}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س + ٣)}$

$= \frac{١}{٦}$

$\therefore$ نهاية $ق(س)$ عند $س \to ٣$ موجودة

مثال ⑨ وزارة (٢٠١٤) صيفية

اوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٣ - ٢س} - ٨}{س^٢ - ٥س - ١٢}$

الحل

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س^٣ - ٢س} - ٨}$$

④

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س^٣ - ٢س} - ٨} \times \frac{\sqrt{س^٣ - ٢س} + ٨}{س^٢ - ٥س - ١٢}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ٢س - ٦٤}{(س^٢ - ٥س - ١٢)(\sqrt{س^٣ - ٢س} + ٨)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)}{(س - ٤)(س + ٣)(\sqrt{س^٣ - ٢س} + ٨)}$$

$$= \frac{١٦}{١١ \times ١٦} = \frac{١}{١١}$$

مثال ⑩ وزارة (٢٠١٥) شتوية

$$\text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{\sqrt{س^٢ - ٢س + ٩} - س}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{\sqrt{س^٢ - ٢س + ٩} - س} \times \frac{\sqrt{س^٢ - ٢س + ٩} + س}{\sqrt{س^٢ - ٢س + ٩} + س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(\sqrt{س^٢ - ٢س + ٩} + س)}{(س^٢ - ٢س + ٩) - س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(\sqrt{س^٢ - ٢س + ٩} + س)}{-٢س + ٩}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(\sqrt{س^٢ - ٢س + ٩} + س)}{-٢(س - ٣)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(\sqrt{س^٢ - ٢س + ٩} + س)}{(-س + ٣)(-٢)}$$

$$= \frac{-٦}{٦} = -١$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١١) وزارة (٢٠١٥) صيفية

هـ = $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^٢ + ٧س + ١٢}{٩ - س^٢} - \frac{س + ٣}{س - ٣} \right)$

الحل

توحيد المقامات

هـ = $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^٢ + ٧س + ١٢}{٩ - س^٢} - \frac{(س+٣)(س+٣)}{(س-٣)(س+٣)} \right)$

= هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٧س + ١٢ - (س+٣)^٢}{٩ - س^٢}$

= هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٧س + ١٢ - (س^٢ + ٦س + ٩)}{٩ - س^٢}$

= هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{س + ٣}{-(س - ٣)(س + ٣)}$

= هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{-٦}{-(س+٣)}$

= $\frac{-٦}{٦}$ = -١

مثال (١٢) وزارة (٢٠١٦) شتوية

هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س\sqrt{س+١}}{٩ - ٣س}$

الحل

هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س\sqrt{س+١}}{٩ - ٣س} \times \frac{٦ + س\sqrt{س+١}}{٦ + س\sqrt{س+١}}$

= هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{٣٦ - س^٢(س+١)}{(٩ - ٣س)(٦ + س\sqrt{س+١})}$

= هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{٣٦ - س^٣ - س^٢}{(٩ - ٣س)(٦ + ٦)}$

قسمة تركيبية

	$س^٣$	$س^٢$	س	صـ
٣	-١	-١	٠	٣٦
		٣-	١٢-	٣٦-
	-١	٤-	١٢-	٠

= هـ = $\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(-س^٢ - ٤س - ١٢)}{٣(٣-س) \times ١٢}$

= $\frac{-١(-٩ - ١٢ - ١٢)}{٣٦}$

= $\frac{+٣٣}{٣٦}$ = $\frac{١١}{١٢}$

مكتبة الوسام WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٦) صيفية

$$\text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{\sqrt{٩-س} - ٦}{\sqrt[٣]{٣+س}}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{\sqrt{٩-س} - ٦}{\sqrt[٣]{٣+س}} \times \frac{\sqrt{٩-س} + ٦}{\sqrt{٩-س} + ٦} \times \frac{(\sqrt[٣]{(٣+س)^{٢}} + \sqrt[٣]{٣+س} + ٣)}{(\sqrt[٣]{(٣+س)^{٢}} + \sqrt[٣]{٣+س} + ٣)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{(٩-س-٣٦)(٩+٩+٩)}{(٢+س)(\sqrt{٩-س}+٦)(\sqrt[٣]{(٣+س)^{٢}} + \sqrt[٣]{٣+س} + ٣)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{(-س-٢٧)\times ٢٧}{(٢+س)\times ١٢} = \frac{-٢٧}{١٢}$$

$$= \frac{-٩}{٤}$$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٣}+٣س^{٢}-٤س-١٢}{س^{٢}-٤}$$

الحل

التعويض $= \frac{٠}{٠}$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢}(س+٣) - ٤(س+٣)}{س^{٢}-٤}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(س+٣)(س^{٢}-٤)}{س^{٢}-٤}$$

$$= ٥$$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س+١)^{٤}-٤}{(س^{٤}-٤س+٣)^{٢}}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س+٣)(س-١)^{٤}}{(س-١)^{٢}(س-٣)^{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س+٣)^{٤}}{(س-١)^{٢}(س-٣)^{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س+٣)^{٤}}{(س-١)^{٤}}$$

$$= \left(\frac{٤}{٠}\right)^{٤} = (+\infty)$$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) الشتوية

① اذا كانت $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٦س+٩} - ٣ - أس}{س} = صفر$

حدد قيمة الثابت أ ؟

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٦س+٩} - ٣}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{أس}{س} = ٠$

$\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٦س+٩} - ٣}{س} \times \frac{\sqrt{٦س+٩} + ٣}{\sqrt{٦س+٩} + ٣} + أ = ٠$

$\lim_{س \to 0} \frac{٦س+٩-٩}{س(\sqrt{٦س+٩}+٣)} + أ = ٠$

$\lim_{س \to 0} \frac{٦}{\sqrt{٦س+٩}+٣} + أ = ٠$

$\frac{٦}{٣+٣} + أ = ٠$

$١ + أ = ٠ \Leftarrow أ = -١$

② اذا كان $ق(س)$ اقتران كثير حدود وكانت $\lim_{س \to 0} \frac{ق(س)}{س} = ٤$ فإن

$\lim_{س \to 0} \frac{(س+١)^{٢} - ١}{ق(س)}$ تساوي

أ) ٤ ب) ١ ج) $\frac{١}{٤}$ د) ٢

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{ق(س)}{س} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\lim_{س \to 0} \frac{(س+١)^{٢} - ١}{ق(س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س^{٢} + ٢س + ١ - ١}{ق(س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س(س+٢)}{ق(س)}$

$= \lim_{س \to 0} س \times \lim_{س \to 0} \frac{س+٢}{ق(س)}$

$= ٢ \times \frac{١}{\lim_{س \to 0} \frac{ق(س)}{س}}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$

الجواب ب

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفية

جد قيمة

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{١}{س^٢ + ٧س} - \frac{١}{٢} \right)$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{٢ - س - ٧س}{٢(س + ٧س)} \right)$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{(٢ - س) - ٧س}{٢(س + ٧س)} \right)$$

$$\times \frac{(٢ - س) + ٧س}{(٢ - س) + ٧س}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{(٢ - س)^٢ - س}{(س + ٧س)} \right) \times \frac{١}{٢ - س + ٧س^٢} \times \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{١}{س - ١} \times \frac{٤ - ٤س + س^٢ - س}{(١ + ٧س)(٢ - س + ٧س)} \times \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{١}{س - ١} \times \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{٢ - س + ٧س} \times \frac{١}{٤}$$

$$\frac{(س - ٤)(س - ١)}{س - ١} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤}$$

$$\text{نها}_{س \to ١} (س - ٤) \times \frac{١}{٨} = \frac{-٣}{٨}$$

عكيه حل السؤال بالفرض ص = ٧س

ورقة عمل

نهاية اقترانات كسرية

السؤال الأول

(أ) اذا كانت $\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س) - ٣}{س^٢ - ٥} = ٨$

جد $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{٦س - ٣ق(س)}{س^٣ - ٧} + |س - ١٢٠| \right)$

(ب) اذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) + ٩}{س + ٢} = ٤$

اوجد $\lim_{س \to ١} \left(٤ق(س)(س + ١) - \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - س} \right)$

(ج) اذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ١}{س^٣} = ٦$

اوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{١ - ق(س)}{س^٢}$

(د) اذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)}{س^٢ - ٩} = ٥$

فاوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)}{س - ٣}$

السؤال الثاني

(أ) اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{٤س^٢ + أ س - ٥}{س^٢ - ٤} = ب$

هل يوجد قيمة او اكثر لـ أ ؟

(ب) اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{م س^٢ - ١}{م س - ١} = ٦$

فجد قيمة م ؟

(ج) اذا كانت $\lim_{س \to م} \frac{س^٢ - م^٢}{س - م} = ب$ فاوجد $\lim_{س \to ٢} (أ س + ١)^ب$

اوجد قيمة م

(د) اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + م س^٢ + ن}{س - ١} = ٧$

اوجد قيمة م ، ن

(هـ) اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{م س^٢ + ن س - ٤}$ غير موجود و أوجد م ، ن ؟

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(أ) اذا كانت

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{٤س^{٢} - س(٢-م) - م٥}{س^{٣} - ١} = ٦$$

فما قيمة م ؟

(ب) اذا كانت

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{ص^{٣} - (٢-م) ص - ٢م}{س^{٤} - ٤} = -٢$$

اوجد قيمة م ؟

(ج) اذا كانت

$$\text{نها}_{س \to ٠} \left(\frac{م}{س - ٢} - \frac{ن}{س^{٢} - ٤} \right) = \frac{١}{٤}$$

أوجد م ، ن .

(د) اذا كانت

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{(س^{٣} - ١)^{٢ن}}{(س^{٤} - ٤س + ١)^{ن}} = ٨١$$

اوجد قيمة ن

السؤال الرابع

اوجد قيمة النهايات التاليه

(١) $\text{نها}_{س \to -٨} \frac{٢ + \sqrt[٣]{س}}{١٧ - ٣ - ١س}$

(٢) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ١}$

(٣) $\text{نها}_{س \to ٠} \sqrt{\frac{٤}{س^{٢}} - ١}$

(٤) $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^{٣} + س^{٢}}}{س}$

(٥) $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}}{س - ٢}$

(٦) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{|٢س^{٢} - ١١س + ٥| - |٤ - ٥س|}{س - ١}$

(٧) $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{|س^{٢} - ٣س|}{س^{٢} - ٩}$

(٨) $\text{نها}_{س \to ٣} \left(\frac{س}{س^{٢} - ٣س} + \frac{٣س}{س^{٣} - ٩س} \right)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

اوجد النهايات التالية

① $\lim_{س \to ٤} \frac{(س+٤)\sqrt{س} - ٧٢}{س - ٤}$

② $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٣]{٦+٧س} - ٢}{س - ٤}$

③ $\lim_{س \to -٢} \left(\frac{١}{س+٢} \left(١ + \frac{١}{\sqrt[٣]{٣+٧س}}\right)\right)$

④ $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt[٣]{س} + ٢}{\sqrt{١-س} - ٣}$

⑤ $\lim_{س \to ٠} س \sqrt{١ + \frac{١}{س^{٢}}}$

⑥ $\lim_{س \to ١^{+}} \frac{\sqrt{س} - ١}{\sqrt{٣س^{٢}-٤س+١}}$

⑦ $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{٣}{س} - \frac{٣}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^{٢}-٥س}\right)$

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{(س+١)^{٣}}} - \frac{١}{٨}\right)$

⑨ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س-١)^{٣} - \frac{٢}{٤-س^{٣}}}{س - ٢}$

⑩ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٦} - ٩س^{٣} + ٨}{٣س^{٣} - ١٢س}$

⑪ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٦} - ١}{\frac{١}{(٣س-٢)^{٢}} - ١}$

⑫ $\lim_{س \to ٣} \frac{٥(س-٣)^{٤} + ٢س^{٢} - ١٨}{س - ٣}$

⑬ $\lim_{س \to ٨} \frac{(س^{\frac{١}{٣}} - ٢)(س^{\frac{٢}{٣}} + ٢س^{\frac{١}{٣}} + ٤)}{س^{٢} - ٤٦}$

⑭ $\lim_{س \to ١} \frac{(١ + \sqrt{٢س})^{٣} - ٢٧}{٣س^{٢} + ٢س - ٥}$

⑮ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٦ - ٣٦س + ٦} - ٥}{\frac{س}{١+س} - ١}$

⑯ $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٤]{س-١} - ١}{\sqrt[٢]{س-١} - \sqrt{س-١}}$

مكتبة الهدف AWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

أوجد النهايات التالية

① $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س-٤} - ٩ + ٧س - ٣٧}{\sqrt{س-٣} - س + ٣}$

② $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س+٤}} - ٢}{ص - ٤}$

③ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س+١)^{٤} - ٥(س+١)^{٢} - ٣٦}{س^{٣} - ٨}$

④ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{١٦} - ٤س + ٤}{٤ - ٤س}$

⑤ $\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١)^{٣} - ١٢٥}{-٢ + س^{٤}(س-٢) + س}$

⑥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt[٣]{(س^{٤} - س - ٢)^{٢}}}$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{(١+س)^{٣} - (١-س)^{٣}}{(١+س)^{٣} - ٣ - (١-س)^{٢}}$

السؤال السابع

(أ) اثبت ان

$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣س} - س}{\sqrt{س} - ٣} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$

(ب) اثبت ان

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٤]{س^{٣} + ٥س + ٤} - ٢}{س - ٢} = \frac{٩}{٣٢}$

(ج) اذا كانت

$\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{٣\sqrt{س} - ٢٤}$

أوجد قيمة ٩

(د) اذا كانت

$\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١} = ٢٤$

فما قيمة الثابت ن

حيث ن عدد صحيح موجب

مكتبة الأوائل AWSAM العلم ناجح الجمزاوي

حلول ورقة عمل نهاية اقترانات كسرية

السؤال الأول

(أ)

$$\frac{\text{ا س} - ١٠٠}{\text{س} - ١٠٠} \quad \frac{\text{س} - ١٠٠}{\text{ع}^{٠} - \text{س}^{٠}}$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٢٥} \frac{\text{ع}^{\text{ر}}(٣ - \text{د}(\text{س}))}{\sqrt{\text{س}} - ٥} + \text{نها}_{\text{س} \to ٢٥} \text{س}^{-٠٫٥}$$

$$٥٠ \text{ نها}_{\text{س} \to ٢٥} \frac{٣ - \text{د}(\text{س})}{\sqrt{\text{س}} - ٥} + ٥$$

$$٥٠ \times ٨ + ٥ = ٤٠٥$$

(ب)

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{د}(\text{س}) + ٩}{\text{ع}^{\text{س}^{٢}+٢} - ٣} = ٥$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \text{د}(\text{س}) + ٩ = ٥ \times ٣$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \text{د}(\text{س}) = ١٦$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\text{ع}^{\text{د}(\text{س}+١)} - \text{س}^{٢}}{\text{ع}^{\text{س}^{٢}} - \text{س}}$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to ١} \text{ع}^{\text{د}(\text{س}+١)} \times \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{ع}^{\text{س}^{٢}} - \text{ع}^{\text{س}}}$$

$$\text{ع}^{\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\text{د}(\text{س}+١)}{\text{س}}} \times \frac{\text{نها}_{\text{س} \to ١} (\text{س}+١)(\text{س}-١)}{\text{نها}_{\text{س} \to ١} \text{ع}^{\text{س}}(\text{ع}^{\text{س}^{٢}-\text{س}} - ١)}$$

$$\text{ع}^{\text{نها}_{\text{ص} \to ٢} \frac{\text{د}(\text{ص})}{\text{ص}}} \times \frac{٢ \times ٢}{\text{ع}^{١} \times \text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\text{ع}^{\text{س}^{٢}-\text{س}} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}}}$$

$$\text{ع}^{\text{نها}_{\text{ص} \to ٢} \frac{\text{د}(\text{ص})}{\text{ص}}} \times \frac{٤}{\text{ع} \times \text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\text{ع}^{\text{س}^{٢}-\text{س}} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}}}$$

$$\text{ص} = ٢\text{ع} + ١ \quad \text{س} \to ١ \text{ فإن}$$

$$\text{ص} \to ٣$$

$$\text{نها}_{\text{ص} \to ٣} \frac{\text{د}(\text{ص})}{\text{ص}}$$

$$\text{ع}^{\text{ع} \text{ نها}_{\text{ص} \to ٣} \text{د}'(\text{ص}) - \text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}}}$$

$$\text{ع}^{\text{ع}(١٦)} - \frac{١+١}{١}$$

$$٤ \times ٢٥٦ - ١ = ١٠٢٤ - ١$$

$$= ١٠٢٣$$

(ج) بالتبسيط

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{د}(\text{س}) \times (\text{س}+٣)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}$$

$$= \text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-٣} \times \text{نها}_{\text{س} \to ٣} (\text{س}+٣)$$

$$= ٦ \times ٥ = ٣٠$$

(د)

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{د}(\text{س})}{\text{ع}^{\text{س}}} \times \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{د}(\text{س})}{\text{س}^{٣}} \times \text{نها}_{\text{س} \to ٠} \text{س}$$

$$= -٦ \times ٢ = -١٢$$

مكتبة الوسام
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

(أ) نهـا $\frac{\sqrt{٤س^{٢}+أ}-٥}{س^{٢}-٤}$ موجودة

$س \leftarrow ٢$

نهاية المقام = ٠ ← نهاية البسط = ٠

$\sqrt{٤(٢)^{٢}+أ}-٥=٠$

$\sqrt{١٦+أ}-٥=٠$

$\sqrt{١٦+أ}=٥$ بتربيع الطرفين

$١٦+أ=٢٥$

$أ=٩$

(ب) نهـا $\frac{م^{٢}س-١}{م\sqrt{س}-١}$

$س \leftarrow ١$

$\frac{(م\sqrt{س}+١)(م\sqrt{س}-١)}{م\sqrt{س}-١}=٦$

$م\sqrt{١}+١=٦$

$م+١=٦$

$م=٥$

(ج) نهـا $\frac{(س-م)(س+م)}{(س-م)}=٢م+٨$

$س \leftarrow م$

$م+م=١٠$

$٢م=١٠$

$م=٥$

(د) نهاية المقام = ٠ ← نهاية البسط = ٠

$أ(١)^{٢}+ب+م=٠$

$أ+ب+م=٠$ ---- (١)

	$س^{٢}$	$س^{٢}$	$س$	ثوابت
١	١	٠	م	ب
	١	١	١	أ+م
أ+ب+م	أ+م	١	١	

نهـا $\frac{(س-١)(س^{٢}+س+أ+م)}{س-١}=٧$

$س \leftarrow ١$

$١+١+أ+م=٧$

$٣+م=٧ \Leftarrow م=٤$

بتعويضها $م=٤$

$٤+ب+١=٠$

$ب=-٥$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

(هـ)

نهاية البسط = ٠

نهاية المقام = صفر

$٤ أ + ب ج + ٤ = ٠$

	$س^{٢}$	$س$	حد
٤	$أ$	$ب$	-٤
	$أ ج + ٤ أ$	$أ ج$	
$ب ج + ٤$	$أ$	$أ ج + ب$	$٤ أ + ب ج - ٤$

هنا $\frac{(س - ج)}{(س - ج)(أ ج + ب + ٤ أ)}$

السؤال الثالث

(أ)

نهاية المقام = ٠ ⇐ نهاية البسط = صفر

$ج - (٢٥ - ج) - ٢٥ = ٠$

$ج^{٢} - ٢٥ ج + ٢٥ = ٠$ مرفوض

صنا نلجأ الى القسمة التركيبية

	$س^{٢}$	$س$	حد
١	١	-٢٥	٢٥
		$ج$	$-ج$
	١	$ج - ٢٥$	٠

هنا $\frac{(س - ج)(س - ج)}{(س - ج)}$ ⇐ $س \to ج$

$ج - ٢٥ = -ج$

$-٢٥ = -ج$

$ج = ٢٥$

(ب)

	$س^{٢}$	$س$	حد
١	ج	$-(٢٥ - ج)$	-٢٥
		$٢٥ + ج$	
	٢	٢٥	٢٥

هنا $\frac{(س - ١)(س + ٢٥ + ج)}{(س - ١)(س + ١)}$ ⇐ $س \to ١$

$\frac{٢٥ + ج}{٢} = ٦$

$٢٥ + ج = ١٢$

$٢٥ = ١٠ \Leftarrow ٢ = ب$

(ج)

نهاية المقام = ٠ ← نهاية البسط = ٠

$٤ - (٣ - ٣) \times ٢ - ٣ ج = ٠$

$٤ - ٣ ج + ٣ ج - ٣ ج = ٠$

قسمة تركيبية

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	حد
١	١	$-٢ + ٣$	$-٣ ج$	$٣ ج$
		٢	٣	$-ج$
	١	٣	٠	

هنا $\frac{(س - ج)(س + ٣)}{(س - ج)}$ ⇐ $س \to ج$

$ج + ٣ = -٢$

$ج = -٤$

مكتبة الوسام
AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٤)

$$\text{نهـا}_{س\to ٢}\left(\frac{أ(س+٣)}{(س-٢)(س+٣)}-\frac{ب}{س-٢}\right)=\frac{١}{٤}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{أ-أس+ب}{س-٢}=\frac{١}{٤}$$

بما أن المقام = ٠ ← فالبسط = ٠

$$أ-٢أ+ب=٠$$

$$أ+ب=٠$$

$$٤أ-ب=٠ \quad \cdots (١)$$

$$\Leftarrow ب=٤أ$$ بالتعويض

$$\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{أس-٢أ+٤أ}{س-٢}=\frac{١}{٤}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{أس+٢أ}{س-٢}=\frac{١}{٤}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{أ(س+٢)}{(س-٢)(س+٢)}=\frac{١}{٤}$$

$$\frac{أ}{٤}=\frac{١}{٤}$$

$$٤أ=٤$$

$$أ=١$$

(٥)

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\frac{(س^{٣}-١)^{ن}}{(س^{٤}-٤س+٣)^{ن}}=٨^{١}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\frac{(س^{٢}-١)^{ن}}{((س-١)^{٢})^{ن}}=٨^{١}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\left(\frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{س-١}\right)^{ن}=٨^{١}$$

$$=(١+١+١)^{ن}=٨^{١}$$

$$٣^{ن}=٣^{٤}$$

$$ن=٤ \Leftarrow ن^{٢}=٤ \Leftarrow ن=٢$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

① $\lim_{س \to -٨} \frac{ج + ٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣ - ١٧ - س}$

$س \to -٨$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{ج + ٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣ - ١٧ - س} \times \frac{(ج^{٢} - ٢ج س^{\frac{٣}{٢}} + (٢س^{\frac{٣}{٢}})^{٢})}{(ج^{٢} - ٢ج س^{\frac{٣}{٢}} + (٢س^{\frac{٣}{٢}})^{٢})} \times \frac{٣ + ١٧ - س}{٣ + ١٧ - س}$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{(ج^{٣} + (٢س^{\frac{٣}{٢}})^{٣}) \times (٣ + ١٧ - س)}{(٩ - (١ - س)) \times (ج^{٢} + ٢ج س^{\frac{٣}{٢}} + (٢س^{\frac{٣}{٢}})^{٢})}$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{(٨ + س) \times (٣ + ٩ - س)}{(٩ - ١ + س) \times ٤ ج^{٢}}$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{(٨ + س) \times \frac{١}{٤}}{(٨ + س) \times ٤ ج^{٢}} = \frac{١}{٤ ج^{٢}}$

---

② $\lim_{س \to ١^{+}} \frac{|[س] - س^{٢}|}{س - ١}$

$[س]$: ١ عند ١، ٠ عند ٠

$= \lim_{س \to ١^{+}} \frac{|١ - س^{٢}|}{س - ١}$

$|١ - س^{٢}|$: $س^{٢} - ١$ موجب، $١ - س^{٢}$ سالب — عند -١ و ١

$= \lim_{س \to ١^{+}} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^{+}} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١}$

$= ٢$

---

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٤ - س^{٢}} - ١}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٤ - س^{٢}} - ١}{س^{٢}} \times \frac{\sqrt{٤ - س^{٢}} + ١}{\sqrt{٤ - س^{٢}} + ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤ - س^{٢} - ١}{س^{٢}(\sqrt{٤ - س^{٢}} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣ - س^{٢}}{س^{٢}(\sqrt{٤ - س^{٢}} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{\sqrt{٤ - س^{٢}} + ١} = \frac{١}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ $\text{هـا}_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^3 + س^2}}{س}$

$= \text{هـا}_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2 (س+1)}}{س}$

$= \text{هـا}_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2}\sqrt{س+1}}{س}$

$= \text{هـا}_{س \to 0} \frac{|س|\sqrt{س+1}}{س}$

① $\text{هـا}_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{س+1} - 1}{س}$

$= \sqrt{0+1} = 1$

② $\text{هـا}_{س \to 0^-} \frac{-س\sqrt{س+1}}{س}$

$= -\sqrt{0+1} = -1$

$\Leftarrow$ هـا غير موجودة

⑤ $\text{هـا}_{س \to ج} \frac{\sqrt{س^2 - 4س + 4}}{س - ج}$

$= \text{هـا}_{س \to ج} \frac{\sqrt{(س-ج)^2}}{س - ج}$

$= \text{هـا}_{س \to ج} \frac{|س - ج|}{س - ج}$

$$\begin{cases} \frac{س - ج}{س - ج} = 1 & س > ج \\ \frac{ج - س}{ج - س} = -1 & س < ج \end{cases}$$

هـا $د(س) = 1$
$س \to ج^+$

هـا $د(س) = -1$
$س \to ج^-$

$\Leftarrow$ هـا غير موجودة
$س \to ج$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑥ $\text{هـا}\dfrac{|ك-1|-|ك-5|}{ك-1}$ $ك\to 1$

$|ك-1|$: $ك-1$ ، $1-ك$ ، $ك<1$ ، $\frac{1}{2}$

$|ك-5|$: $ك-5$ ، $5-ك$ ، $ك<5$ ، $\frac{4}{5}$

$= \text{هـا}\dfrac{ك-1-(5-ك)}{ك-1}$ $ك\to 1$

$= \text{هـا}\dfrac{ك-1-5+ك+4}{ك-1}$ $ك\to 1$

$= \text{هـا}\dfrac{2ك-2}{ك-1}$ $ك\to 1$

$= \text{هـا}\dfrac{2(ك-1)}{ك-1} = 2$

⑦ $\text{هـا}\dfrac{|ك^3-3ك|}{ك^2-9}$ $ك\to 3$

$ك^3-3ك=0$

$ك(ك^2-3)=0$

$ك=0 \quad ك=\sqrt{3} \quad ك=-\sqrt{3}$

$+++ \; 0 \; --- \; \sqrt{3} \; +++$

$= \begin{cases} \dfrac{ك^3-3ك}{ك^2-9} & ك<3 \\ \dfrac{3ك-ك^3}{ك^2-9} & ك>3 \end{cases}$

$\text{هـا}\dfrac{ك^3-3ك}{ك^2-9} = \text{هـا}\dfrac{ك(ك-3)}{(ك-3)(ك+3)}$ $ك\to 3^+$

$= \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\text{هـا}\dfrac{3ك-ك^3}{ك^2-9} = \text{هـا}\dfrac{ك(3-ك)}{(ك+3)(ك-3)}$ $ك\to 3^-$

$= \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{هـا}\dfrac{|ك^3-3ك|}{ك^2-9}$ غير موجودة

$ك\to 3$

⑧ $\text{هـا}\dfrac{ك^3-2ك+3ك}{ك^2-3ك}$ $ك\to 2$

$= \text{هـا}\dfrac{-ك^3+3ك}{ك^2-3ك}$ $ك\to 3$

$= \text{هـا}\dfrac{ك(3-ك)}{ك(ك-3)(ك+3)}$

$= \dfrac{-1}{6}$

السؤال الخامس

① $\lim_{س \to ٤} \frac{(س+٤)\sqrt{س} - ٧٤}{س - ٤}$

نفرض $ص = \sqrt{س} \Leftarrow س = ص^٢$

$س \to ٤$ فإن $ص \to ٢$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص^٢+٤)(ص) - ٧٤}{ص^٢ - ٤}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٣ + ٤ص - ٧٤}{ص^٢ - ٤}$

	$ص^٥$	$ص^٤$	$ص^٣$	$ص^٢$	$ص$	$ثـ$
	١	٠	٤	٠	٤	-٧٤
٢		٢	٤	٨	١٦	٣٢
	١	٢	٨	١٦	٣٢	٠

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص-٢)(ص^٤ + ٢ص^٣ + ٨ص^٢ + ١٦ص + ٣٢)}{(ص-٢)(ص+٢)}$

$= \frac{(١٦ + ١٦ + ٣٢ + ٣٢ + ٣٢)}{١٤}$

$= \frac{١١٢}{١٤} = \frac{٥٦}{٧}$

نحل بالضرب بالمرافق
ونحل بالطرح والإضافة

② هنا $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٣]{٦+٧س} - ٢}{س - ٤}$

الحل

نفرض $ص = \sqrt{س}$ $\quad ص^٢ = س$

$ص \to ٢$ عندما $س \to ٤$

هنا $\lim_{ص \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٦+ص} - ٢}{ص^٤ - ٤}$

هنا $\lim_{ص \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٦+ص} - ٢}{ص^٢ - ٤} \times \frac{(\sqrt[٣]{٦+ص})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٦+ص} + ٤}{(\sqrt[٣]{٦+ص})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٦+ص} + ٤}$

هنا $\lim_{ص \to ٢} \frac{٦+ص - ٨}{(ص^٢ - ٤)(٤+٤+٤)}$

هنا $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{(ص-٢)(ص+٢) \times ١٢}$

$= \frac{١}{٤ \times ١٢} = \frac{١}{٤٨}$

ضرب مرافق تكعيبي
ثم ضرب مرافق تربيعي

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

③ $\text{نها}_{س \to -٢} \left(\frac{١}{س+٢}\right)\left(١ + \frac{١}{\sqrt[٣]{٣+س^{٢}}}\right)$

$\text{نها}_{س \to -٢} \left(\frac{١}{س+٢}\right)\left(\frac{١ + \sqrt[٣]{٣+س^{٢}}}{\sqrt[٣]{٣+س^{٢}}}\right)$

$ص = \sqrt[٣]{٢+س^{٣}} \leftarrow ص^{٣} = ٣+س^{٣}$

$س = \frac{ص^{٣}-٣}{٣}$

$س \to -٢$ فان $ص \to ١-$

$\text{نها}_{ص \to ١-} \frac{١}{\frac{ص^{٣}-٣}{٣}+٢} \left(\frac{١+ص}{ص}\right)$

$\text{نها}_{ص \to ١-} \frac{١}{\frac{ص^{٣}-٣+٦}{٣}} \left(\frac{١+ص}{ص}\right)$

$\text{نها}_{ص \to ١-} \frac{٣}{ص^{٣}+١} \left(\frac{١+ص}{ص}\right)$

$= \text{نها}_{ص \to ١-} \frac{٣}{(ص+١)(ص^{٢}-ص+١)} \left(\frac{١+ص}{ص}\right)$

$= \left(\frac{٣}{(١+١+١)} \times \frac{١}{١}\right)$

$= \frac{٣}{٣}$

كل ضرب مراقبة تعيين

④ $\text{نها}_{س \to ٨-} \frac{\sqrt[٣]{س+٢}}{٣- \sqrt{١-س}}$

$= \text{نها}_{س \to ٨-} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}}+٢}{٣- \sqrt{١-س}} \times \frac{(\sqrt[٣]{س^{٢}}-٢\sqrt[٣]{س}+٤)}{(\sqrt[٣]{س^{٢}}-٢\sqrt[٣]{س}+٤)} \times \frac{٣+\sqrt{١-س}}{٣+\sqrt{١-س}}$

$= \text{نها}_{س \to ٨-} \frac{(س+٨)(٣+\sqrt{١-س})}{(١-س-٩)(\sqrt[٣]{س^{٢}}-٢\sqrt[٣]{س}+٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٨-} \frac{(س+٨)(٣+\sqrt{١-س})}{(-س-٨)(\sqrt[٣]{س^{٢}}-٢\sqrt[٣]{س}+٤)}$

$= \frac{٦}{-١٢} = -\frac{١}{٢}$

⑤ $\text{نها}_{س \to ٠} س\sqrt{\frac{١}{س^{٢}}+١}$

الكل

$\text{نها}_{س \to ٠} س\sqrt{\frac{١+س^{٢}}{س^{٢}}}$

$\text{نها}_{س \to ٠} س\frac{\sqrt{١+س^{٢}}}{\sqrt{س^{٢}}} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س\sqrt{١+س^{٢}}}{|س|}$

$|س| = س$ عندما $س \to ٠+$

$\text{نها}_{س \to ٠+} \frac{س\sqrt{١+س^{٢}}}{س} = ١$

$|س| = -س$ عندما $س \to ٠-$

$\text{نها}_{س \to ٠-} \frac{س\sqrt{١+س^{٢}}}{-س} = -١$

$\text{نها}_{س \to ٠} س\sqrt{\frac{١}{س^{٢}}+١}$ غير موجودة

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

⑥ هـ $\frac{\sqrt{ب س}-١}{\sqrt{ب س-٤}-١}$ س ← ١+

الحل

هـ $\frac{\sqrt{ب س}-١}{\sqrt{ب س-٤}-١} \times \frac{\sqrt{ب س}+١}{\sqrt{ب س}+١}$ س ← ١+

هـ $\frac{س-١}{(\sqrt{ب س-٤}-١)(٢)}$ س ← ١+

= هـ $\frac{\sqrt{ب}(س-١)}{\sqrt{ب}(س-١)(\sqrt{س+١}+١)} \times \frac{١}{٢}$ س ← ١+

لأن ١+ ∈ المجال

= هـ $\frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب}+١} \times \frac{١}{٢}$ س ← ١+

= $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{١+١}$ = صفر

---

⑦ هـ $(\frac{٣}{س}-\frac{٣}{٥})(\frac{١}{س^{٤}-٥س^{٣}})$ س ← ٥

الحل توحيد مقامات

$\frac{١٥-٣س}{٥س}(\frac{١}{(٥+س)(س-٥)})$

هـ $\frac{-٣(٥-س)}{٥س}(\frac{١}{(٥+س)(س-٥)})$ س ← ٥

$= \frac{-٣}{١٠ \times ٢٥} = \frac{-٣}{٢٥٠}$

---

⑧ هـ $\frac{١}{س}(\frac{١}{(٢+٣س)^{٢}}-\frac{١}{٨})$ س ← ٠

= هـ $\frac{١}{س}(\frac{٨-(٢+٣س)^{٢}}{٨(٢+٣س)^{٢}})$ توحيد مقام س ← ٠

= هـ $\frac{(-٣س)(٤+٣س)}{س \times ٨(٢+٣س)^{٢}}$ س ← ٠

= هـ $\frac{-٣(٤+٣س)}{٨(٢+٣س)^{٢}}$

$= \frac{-٣ \times ٤}{٨ \times ٤} = \frac{-٣}{٨} = \frac{-٣}{١٦}$

---

⑨ هـ $\frac{(س-١)^{٣}-٢}{س^{٢}-٤}$ س ← ٢

توحيد مقامات

هـ $\frac{(٣س-٤)(س-١)^{٣}-٢}{(٣س-٤)}$ س ← ٢ $\times \frac{١}{س-٢}$

هـ $\frac{(٣س-٤)(س^{٣}-٣س^{٢}+٣س-١)-٢}{(٣س-٤)(س-٢)}$ س ← ٢

هـ $\frac{٣س^{٤}-٩س^{٣}+٩س^{٢}-٣س-٤س^{٣}+١٢س^{٢}-١٢س+٤-٢}{(٣س-٤)(س-٢)}$ س ← ٢

يتبع الحل

مكتبة الأستاذ ناجح الجمزاوي
ALJOMZAWI

نهـا $\frac{٣س^{٤} - ١٣س^{٣} + ٢١س^{٢} - ١٥س + ٢}{(٣س - ٤)(س - ٢)^{٢}}$
س ← ٢

	س	س²	س³	س⁴
٢	٢	٣	-١٣	٢١	-١٥
-٢		٦	-١٤	١٤
	٠	١-	٧	٧-	٣

$= نهـا \frac{(س - ٢)(٣س^{٣} - ٧س^{٢} + ٧س - ١)}{(٣س - ٤)(س - ٢)^{٢}}$
س ← ٢

$= \frac{٣ \times ٨ - ٧ \times ٤ + ٧ \times ٢ - ١}{٦ - ٤}$

$= \frac{٢٤ - ٥٦ + ١٤ - ١}{٢} = \frac{٩}{٢}$

(١٠) نهـا $\frac{س^{٦} - ٩س^{٣} + ٨}{٣س^{٣} - ١٢س}$
س ← ٢

	س	س²	س³	س⁴	س⁵	س⁶
٨	١	٠	٠	-٩	٠	٠
-٨		٢	٤	-٨	-٢	-٤
	١	٢	٤	-١	-٢	-٤

$= نهـا \frac{(س - ٢)(س^{٥} + ٢س^{٤} + ٤س^{٣} - س^{٢} - ٢س - ٤)}{٣س(س^{٢} - ٤)}$
س ← ٢

$= نهـا \frac{(س - ٢)(س^{٥} + ٢س^{٤} + ٤س^{٣} - س^{٢} - ٢س - ٤)}{٣س(س - ٢)(س + ٢)}$
س ← ٢

$= \frac{٨٤}{٦} = ١٤$

(١١) نهـا $\frac{س^{٦} - ١}{\frac{١}{(٣س - ٢)^{٢}} - ١}$
س ← ١

توحيد مقامات

نهـا $\frac{س^{٦} - ١}{\frac{١ - (٣س - ٢)^{٢}}{(٣س - ٢)^{٢}}}$
س ← ١

$= نهـا \frac{(س^{٦} - ١)(٣س - ٢)^{٢}}{١ - (٣س - ٢)^{٢}}$
س ← ١

$= نهـا \frac{(س^{٦} - ١)(٣س - ٢)^{٢}}{(١ + ٣س - ٢)(١ - ٣س + ٢)}$
س ← ١

$= نهـا \frac{(س - ١)(س^{٥} + س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} + س + ١)(٣س - ٢)^{٢}}{(٣ - ٣س)(٣س - ١)}$
س ← ١

$= \frac{٦ \times (٣ - ٢)^{٢}}{(١ - ٣) \times ٣} = \frac{٦}{-٦} = -١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٢)

$$\text{هـا}_{س\to ٣}\frac{٥(س-٣)^{٤}+ج(س^{٢}-٩)}{س-٣}$$

اكل

$$\text{هـا}_{س\to ٣}\frac{٥(س-٣)^{٤}+ج(س^{٢}-٩)}{س-٣}$$

كل واحد في كس

$$\text{هـا}_{س\to ٣}\frac{\cancel{(س-٣)}\left(٥(س-٣)^{٣}+ج(س+٣)\right)}{\cancel{س-٣}}$$

$$=\left(٥(٢-٣)^{٢}+ج(٣+٣)\right)$$

$$=١٢$$

(١٣)

$$\text{هـا}_{س\to ٨}\frac{(س^{\frac{١}{٣}}-ج)(س^{\frac{٢}{٣}}+ج س^{\frac{١}{٣}}+٤)}{س^{٢}-٦٤}$$

ضلعين الأول − ضلعين الثاني

$$\text{هـا}_{س\to ٨}\frac{(س^{\frac{١}{٣}})^{٣}-ج^{٣}}{س^{٢}-٦٤}$$

$$=\text{هـا}_{س\to ٨}\frac{\cancel{س-٨}}{\cancel{(س-٨)}(س+٨)}$$

$$=\frac{١}{١٦}$$

(١٤)

$$\text{هـا}_{س\to ١}\frac{(ج س+١)^{٣}-٢٧}{٣س^{٢}+ج س-٥}$$

$$=\text{هـا}_{س\to ١}\frac{(ج+١+ج س-١-٣)\left((ج+١)^{٢}+٣(ج+١+ج س)+٩\right)}{(س-١)(٣س+٥)}$$

$$=\text{هـا}_{س\to ١}\frac{ج\cancel{(س-١)}(٩+٩+٩)}{\cancel{(س-١)}(٣س+٥)}$$

$$=\frac{٢٧ج}{٨}=\frac{٢٧}{٤}$$

(١٥)

$$\text{هـا}_{س\to ٠}\frac{٣٦^{س+١}-٦^{س}+٥}{١-٣٦^{س}}$$

$$\text{هـا}_{س\to ٠}\frac{٦\times٦^{س}-(٦^{س})^{٢}+٥}{١-(٦^{س})^{٢}}$$

ص = $٦^{س}$ ، س ← ٠ ، ص ← ١

$$=\text{هـا}_{ص\to ١}\frac{ص^{٢}-٦ص+٥}{١-ص^{٢}}$$

$$=\text{هـا}_{ص\to ١}\frac{(ص-٥)\cancel{(ص-١)}}{\cancel{(١-ص)}(١+ص)}$$

$$=\frac{١-٥}{١+١}=\frac{-٤}{٢}=-٢$$

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع حل السؤال الخامس

فرع (٦)

$$\text{هـا}_{س\to ١} \frac{\sqrt[٤]{س-١}-١}{\sqrt[٣]{س-١}-\sqrt{س-١}}$$

الحل

نفرض $س-١ = ص^{١٢}$

$س \to ٢ \quad ص \to ١$

$$\text{هـا}_{ص\to ١} \frac{\sqrt[٤]{ص^{١٢}}-١}{\sqrt[٣]{ص^{١٢}}-\sqrt{ص^{١٢}}}$$

$$= \text{هـا}_{ص\to ١} \frac{ص^{٣}-١}{ص^{٤}-ص^{٦}}$$

$$= \text{هـا}_{ص\to ١} \frac{(ص-١)(ص^{٢}+ص+١)}{ص^{٤}(١-ص^{٢})}$$

$$= \text{هـا}_{ص\to ١} \frac{(ص-١)(ص^{٢}+ص+١)}{ص^{٤}(١-ص)(١+ص)}$$

$$= \frac{-٣}{٢}$$

السؤال الـ دس

(١)

$$\text{هـا}_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢}-٤}+\sqrt{س}-٣}{\sqrt{س-٣}+\sqrt{س-٣}}$$

$$= \text{هـا}_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س}-٣}{\sqrt{س-٣}} + \frac{\sqrt{س^{٢}-٩}}{\sqrt{س-٣}}$$

$س \to ٣^{+}$ من اليمين

$$= \text{هـا}_{س\to ٣} \sqrt{\frac{(س-٣)(س+٣)}{س-٣}} + \text{هـا}_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س}-٣}{\sqrt{س-٣}}$$

$$= \sqrt{٦} + \text{هـا}_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س}-٣}{\sqrt{س-٣}} \times \frac{\sqrt{س}+٣}{\sqrt{س}+٣}$$

$$= \sqrt{٦} + \text{هـا}_{س\to ٣} \frac{س-٩}{\sqrt{س-٣}(\sqrt{س}+٣)}$$

$$= \sqrt{٦} + \text{هـا}_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س-٣}\times\sqrt{س-٣}}{\sqrt{س-٣}(\sqrt{س}+٣)}$$

$$= \sqrt{٦} + \frac{\sqrt{٦}}{٦} = \frac{٧\sqrt{٦}}{٦}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٢) $\text{هـ} = \dfrac{\sqrt{٢+\sqrt{س+٤}} - ٢}{س - ٤}$ ، $س \to ٤$

نفرض $ص = \sqrt[٣]{س+٤} \Leftarrow ص^{٣} = س+٤ \Leftarrow س = ص^{٣}-٤$

$س \to ٤ \Leftarrow ص \to \sqrt[٣]{٤+٤} = ٢$

$$\text{هـ} = \frac{\sqrt{٢+ص} - ٢}{ص^{٣}-٨} \times \frac{\sqrt{٢+ص}+٢}{\sqrt{٢+ص}+٢}$$

$ص \to ٢$

$$\text{هـ} = \frac{ص-٢}{(ص^{٣}-٨)(\sqrt{٢+ص}+٢)}$$

$ص \to ٢$

$$\text{هـ} = \frac{ص-٢}{(ص-٢)(ص^{٢}+٢ص+٤)(\sqrt{٢+ص}+٢)}$$

$ص \to ٢$

$$= \frac{١}{(٤+٤+٤)\times ٤}$$

$$= \frac{١}{٤\times ١٢} = \frac{١}{٤٨}$$

طريقة أخرى مرافقه تربيعي ثم مرافقه تكعيبي

(٣) $\text{هـ} = \dfrac{(س+١)^{٤} - ٥(س+١)^{٢} - ٣٦}{س^{٣}-٨}$ ، $س \to ٢$

نفرض $ص = س+١ \Leftarrow س = ص-١$

$س \to ٢ \Leftarrow$ فإن $ص \to ٣$

$$\text{هـ} = \frac{ص^{٤} - ٥ص^{٢} - ٣٦}{(ص-١)^{٣}-٨}$$

$ص \to ٣$

[٣]

	$ص^{٤}$	$ص^{٣}$	$ص^{٢}$	$ص$	
	١	٠	-٥	٠	-٣٦
		٣	٩	١٢	٣٦
	١	٣	٤	١٢	٠

$$\text{هـ} = \frac{(ص-٣)(ص^{٣}+٣ص^{٢}+٤ص+١٢)}{(ص-٣)((ص-١)^{٢}+٢(ص-١)+٤)}$$

$ص \to ٣$

$$= \frac{(٢٧+٢٧+١٢+١٢)}{٤+٣+٤}$$

$$= \frac{٧٨}{١٢} = \frac{١٣}{٢}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{١٦} - ٤س + ٨}{٤ - س^{٢}}$

الحل
$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{١٦} - ٤(س-٢)}{(٢-س)(٢+س)}$
$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{١٥} - ٤}{-(س+٢)}$
$= \frac{-١ \times ٤}{٤} = -١$

⑤ $\text{نها}_{س \to -١} \frac{(٣س+١)^{٢} - ١٢٥}{س^{٣} + ٤(س-٢) + ٢}$

الحل
$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(٣س+١)^{٢} - ١٢٥}{(س-٢)(س+١)}$
$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(٣س+١)^{٢} - ١٢٥}{(س-٢)(س+١)} \times \frac{(٣س+١)^{٢} + ١٢٥}{(٣س+١)^{٢} + ١٢٥}$
$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(٣س+١)^{٤} - ١٢٥^{٢}}{(س-٢)(س+١)((٣س+١)^{٢} + ١٢٥)}$
$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(٣س+١)^{٢} - ١٢٥}{(س-٢)((٣س+١)^{٢} + ١٢٥)}$
$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(٣س-٤)(٩س^{٢}+٥٠س+٢٥)}{(س-٢)(٣٤)}$
$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{٣(س+١)(٩س^{٢}+٥٠س+٢٥)}{(س-٢)(٣٤)}$
$= \frac{٣ \times ٢٥}{٣٤} = \frac{١٥}{١٧}$

⑥ $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س-٢}{\sqrt[٣]{(س^{٢}-س-٢)^{٢}}}$

الحل
$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س-٢}{\sqrt[٣]{(س-٢)^{٢}(س+١)^{٢}}}$
$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)}{\sqrt[٣]{(س-٢)^{٢}} \times \sqrt[٣]{(س+١)^{٢}}}$
$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{\frac{٣}{٣}}}{(س-٢)^{\frac{٢}{٣}} \times (س+١)^{\frac{٢}{٣}}}$
$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{\frac{١}{٣}}}{(س+١)^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{٠}{٣} = ٠$

(٧)

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(١+س)^{٣} - (١-س)^{٣}}{(١+س)^{٢} - (١-س)^{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{((١+س)-(١-س))\left((١+س)^{٢} + (١+س)(١-س) + (١-س)^{٢}\right)}{س^{٢}+٣س+٢ - (١-٣س+س^{٢})}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(٢)(٣+س^{٢})}{٤س}$$

$$= \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

السؤال الرابع

(أ) اثبت أن

$$\text{نهـا}_{س \to ٩} \frac{٩ - س}{\sqrt{٣} - \sqrt{س}} = ٦\sqrt{٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٩} \frac{٩ - س}{٣ - \sqrt{س}} \times \frac{٣ + \sqrt{س}}{٣ + \sqrt{س}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٩} \frac{(٩ - س)(٣ + \sqrt{س})}{٩ - س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٩} (٣ + \sqrt{س})$$

$$= ٣ + \sqrt{٩} = ٦$$

$$= \frac{٣}{\sqrt{٦}} = \frac{٣}{\sqrt{٦}} \times \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٦}} = \frac{٣\sqrt{٦}}{٦} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س^٣ + ٥س + ٢} - ٢}{س - ٢} = \frac{٩}{٣٢}$

الحل

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{(س^٣ + ٥س + ٢)^٢} - ٤}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{(س^٣ + ٥س + ٢)^٢} - ٤}{س - ٢} \times \frac{\sqrt[٣]{(س^٣ + ٥س + ٢)} + ٢}{\sqrt[٣]{(س^٣ + ٥س + ٢)} + ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س^٣ + ٥س + ٢) - ٤}{(س - ٢)(\sqrt[٣]{(س^٣ + ٥س + ٢)^٢} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٥س - ٢}{(س - ٢)(س + ٣)(\sqrt[٣]{(س^٣ + ٥س + ٢)^٢} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س + ٣)(\sqrt[٣]{(س^٣ + ٥س + ٢)^٢} + ٢)}$$

$$= \frac{١٢}{٤ \times ٨} = \frac{٩}{٣٢}$$

(٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ + ٥س - ١٤}{٤(س - ٢)^٣ \times ٨}$

$س \to ٢$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٧)(س - ٢)}{٣٢(س - ٤)}$$

$$= \frac{٩}{٣٢}$$

(٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^٣ + ٧س - ٣٠}{٢س^٣ - ٣س^٢ - ٤٠}$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(٢س^٢ + ٨س + ٥)}{(س - ٤)(٢س^٢ + ٥س + ١٠)}$$

$$= \frac{٤ + ٨ + ٥}{٤ + ٥ + ١٠} = \frac{١٧}{١٩}$$

(٤) $\lim_{س \to ١} \frac{(س^ن - ١)(س^{ن+١} + ١)}{س - ١}$

$س \to ١$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^{ن-١} + س^{ن-٢} + \dots + ١)(س^{ن+١} + ١)}{س - ١}$$

عندما $ن$ عدد صحيح موجب ← عدد الحدود = $ن$

$(١)^ن - ١ = ٠$

$(-١)^ن - ١ = ٠$

$ن = ٢ك$

$ن = ١١$

$ن$ عدد زوجي

$(-١)^ن - ١ = ٠$ ← صفر مرفوض

نهايات الاقترانات المثلثية

الجزء الأول

نظرية

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{حاس}}{س} = ١$ ، حيث س بالتقدير الدائري

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س}{\text{حاس}} = ١$ ، حيث س بالتقدير الدائري

نتيجة

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظاس}}{س} = ١$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س}{\text{ظاس}} = ١$

نتائج النظرية

① $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{حا}أس}{\text{ب س}} = \frac{أ}{ب}$

② $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{أ س}{\text{حا}ب س} = \frac{أ}{ب}$

③ $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}أس}{\text{ب س}} = \frac{أ}{ب}$

④ $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{أ س}{\text{ظا}ب س} = \frac{أ}{ب}$

ملاحظة

$\text{قتا}س = \frac{١}{\text{حتا}س}$

$\text{ختا}س = \frac{١}{\text{حا}س}$

$\text{ظتا}س = \frac{١}{\text{ظا}س} = \frac{\text{حتا}س}{\text{حا}س}$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①
جد قيمة النهايات التالية

① $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س \times \text{ظا} 7س}{3س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{3س} \times \lim_{س \to 0} \text{ظا} 7س$

$= \frac{5}{3} \times 1 = \frac{5}{3}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{3س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{3س} \times \lim_{س \to 0} \text{جا} س$

$= \frac{5}{3} \times 0 = \text{صفر}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س \times \text{ظا} س}{س^2}$

الحل:

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س} \times \lim_{س \to 0} \text{ظا} س$

$= 2 \times 5 = 10$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س - \text{جا} س}{س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س}$

$= 2 - 1 = 1$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س - \text{جا} س + \text{ظا}^2 س}{س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س}{س}$

$= 3 - 5 + 2 = \text{صفر}$

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{2س + \text{ظا} 3س}{\text{جا}^2 س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2س}{\text{جا}^2 س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} 3س}{\text{جا}^2 س}$

$= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{س - \text{جا} 3س + \text{ظا}^2 س}{2س - \text{ظا}^2 س}$

بقسمة كل من البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \frac{\text{جا} 3س}{س} + \frac{\text{ظا}^2 س}{س}}{2 - \frac{\text{ظا}^2 س}{س}}$ ينتج الحل

$= \frac{٣}{٤} = \frac{٥+٣-١}{٠×١-٤}$

⑧ هـ $\frac{س}{س \to ٠}$ $\frac{}{جاءس + ظاه س}$

لقسمة البسط والمقام على س

$= \frac{\text{هـ } س}{س \to ٠}$ $\frac{}{\frac{\text{جا}٢س}{س} + \frac{\text{ظا}٥س}{س}}$ $\frac{}{\text{هـ}}$

$= \frac{١}{٥+٢} = \frac{١}{٧}$

⑨ هـ $\frac{س \text{ جا} س}{س \to ٠}$ $\frac{}{٣س^{٢} - ظا٢س}$

لقسمة كل من البسط والمقام على س

$= \text{هـ}$ $\frac{}{س \to ٠}$ $\frac{س \times \text{جا}س}{س}$ $\frac{}{\text{هـ } ٣س - \frac{\text{ظا}٢س}{س}}$ $\frac{}{\text{هـ}}$

$= \text{هـ}$ $\frac{}{س \to ٠}$ $\frac{\text{جا}س}{س}$ $\frac{}{٣ - \left(\frac{\text{ظا}٢س}{٢س} \times ٢\right)}$ $\frac{}{\text{هـ}}$

$= \frac{١}{١-٣} = \frac{١}{٢}$

ملاحظة هامة

$\frac{ب}{جـ} \times أ = \frac{ب}{جـ} \times ب$ أو $\frac{أ \times ب}{جـ}$

$\frac{ب}{جـ} + \frac{أ}{جـ} = \frac{ب+أ}{جـ}$

$\frac{أ}{ب+جـ} \neq \frac{أ}{ب} + \frac{أ}{جـ}$ لا يجوز

توزيع المقام على البسط

ملاحظة مهمة جدا جدا

في توزيع البسط على المقام أو قسمة البسط والمقام على مقدار معين يشترط هنا أن تكون نهاية كل مقدار موجودة وغير ذلك لا يجوز

مثال: هـ $\frac{١ - \text{جتا}س}{س \to ٠}$ $\frac{}{س^{٢}}$

هنا لا نستطيع توزيع البسط على المقام لأن هـ $\frac{١}{س \to ٠}$ $\frac{}{س}$ غير موجودة

ولا يجوز قسمة البسط والمقام على س لأن نهاية $\frac{١}{س}$ غير موجودة

مكتبة الوفاء
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ②
اوجد النهايات التاليه

① $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 ظتاس قتاس}{}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} س^2 \times \frac{1}{ظاس} \times \frac{1}{جاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{ظاس} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{جاس}$

$= 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{1 - ظتاس}{قتاس}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{1 - \frac{جتاس}{جاس}}{\frac{1}{جاس}}$ بتوحيد المقام

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس - جتاس}{جاس} \times \frac{جاس}{1}$

$= 0 - 1 = -1$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{جتا٢س + س^2 - جتاس}{س^2}$

الحل $جتا٢س = ٢جتا^2 س - 1$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢جتا^2 س - 1 + س^2 - جتاس}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢جتا^2 س - 1 + س^2}{س^2}$

لكن $جا^2 س + جتا^2 س = 1$

$\Leftarrow جتا^2 س - 1 = -جا^2 س$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جا^2 س + س^2}{س^2}$

$= -\lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س}{س^2} + \lim_{س \to 0} \frac{س^2}{س^2}$

$= -\frac{1}{2}(\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س})^2 + \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} =$ صفر

④ $\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥ جتا٣س}{س ظا٢س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٥(1 - جتا٣س)}{س ظا٢س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٥ جا^2 ٣س}{س ظا٢س}$

$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{ظا٢س}$

$= ٥ \times ٣ \times \frac{٣}{2} = \frac{٤٥}{2}$

الجزء الثاني

نهـا $\frac{\text{حا}\,\text{هـ}(س)}{\text{هـ}(س)}$ ، نهـا $\frac{\text{ظا}\,\text{هـ}(س)}{\text{هـ}(س)}$

طريقة اكل

① نفرض ص = هـ(س)

② في حالة نهـا $\frac{\text{حا}\,\text{هـ}(س)}{\text{ل}(س)}$

نضرب البسط والمقام في الزاوية هـ(س) بشرط ان هـ(س) ← ٠

$\Leftarrow$ نهـا $\frac{\text{حا}\,\text{هـ}(س) \times \text{هـ}(س)}{\text{ل}(س) \times \text{هـ}(س)}$ ، س ← ٠

$= \text{نهـا} \frac{\text{حا}\,\text{هـ}(س)}{\text{هـ}(س)} \times \text{نهـا} \frac{\text{هـ}(س)}{\text{ل}(س)}$

مثال ①

جد قيمة النهايات التالية

① نهـا $\frac{\text{حا}(س-٢)}{س^٢-٤}$ ، س ← ٢

$= \text{نهـا} \frac{\text{حا}(س-٢)}{(س-٢)} \times \frac{١}{(س+٢)}$ ، س ← ٢

$= \frac{١}{٤}$

② نهـا $\frac{\text{حا}(س^٢-٤)}{س-٢}$ ، س ← ٢

اكل

نهـا $\frac{\text{حا}(س^٢-٤)}{(س-٢)(س+٢)} \times (س+٢)$ ، س ← ٢

$= \text{نهـا} \frac{\text{حا}(س^٢-٤)}{س^٢-٤}$ نهـا (س+٢) ، س ← ٠

ص = $س^٢-٤$

س ← ٢ فان ص ← ٠

$= \text{نهـا} \frac{\text{حا}\,ص}{ص} \times ٤ = ١ \times ٤ = ٤$ ، ص ← ٠

③ نهـا $\frac{\text{حا}(س-١)}{س^٢+س-٢}$ ، س ← ١

اكل

نهـا $\frac{\text{حا}(س-١)}{(س-١)(س+٢)}$ ، س ← ١

$\Leftarrow$ نتبع اكل

$= \text{نهـا} \frac{\text{حا}(س-٢)}{(س-٢)} \times \frac{١}{٤}$ ، س ← ٢

نفرض ص = س - ٢

س ← ٢ ص ← ٠

$= \text{نهـا} \frac{\text{حا}\,ص}{ص} \times \frac{١}{٤} = ١ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$ ، ص ← ٠

مكتبة الجمزاوي ALWGEM
العلم مع الجمزاوي

$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{\text{حا}(س-1)}{(س-1)} \times \frac{1}{(س+2)}$

ص = س − 1

س → 1 فإن ص → 0

$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا ص}}{ص} \times \frac{1}{ص+2}$

$= 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

---

④ $\text{نها}_{س \to 2} \frac{\text{حا}(س^2-4)}{\text{ظا}(س^2-8)}$

$= \text{نها}_{س \to 2} \frac{\text{حا}(س^2-4)}{س^2-4} \times \frac{س^2-4}{\text{ظا}(س^2-8)} \times \frac{س^2-8}{س^2-8}$

نفرض ص = $س^2 - 4$

س → 2 ⇐ ص → 0

نفرض ع = $س^2 - 8$

س → 2 فإن ع → 0

$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا ص}}{ص} \times \frac{س^2-4}{س^2-8}$

$= \frac{1}{1} \times \text{نها}_{س \to 2} \frac{س^2-4}{س^2-8}$

$= \text{نها}_{س \to 2} \frac{(س-2)(س+2)}{(س-2)(س^2+2س+4)}$

$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

---

⑤ $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}(\text{ظا}3س)}{س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا}(\text{ظا}3س)}{\text{ظا}3س} \times \frac{\text{ظا}3س}{س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا}(\text{ظا}3س)}{\text{ظا}3س} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}3س}{س}$

ص = ظا 3س ، س → 0 ⇐ ص → 0

$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا ص}}{ص} \times 3$

$= 1 \times 2 \times 3$

---

⑥ $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}3س}{\sqrt{1+5س}-1}$

الحل الضرب بالمرافق

$\text{نها} \frac{\text{ظا}3س}{\sqrt{1+5س}-1} \times \frac{\sqrt{1+5س}+1}{\sqrt{1+5س}+1}$

يتبع ←

= نهـا $\frac{\text{ظا}^{-1}(\text{ظا}^{-1}س \times \sqrt{س+1}+1)}{\sqrt{س+5}-1}$ ، س ← ٠

= نهـا $\frac{\text{ظا}^{-1}(\text{ظا}^{-1}س \times \sqrt{س+1}+1)}{\text{ظا}^{-1}س} \times \frac{\text{ظا}^{-1}س}{س}$ ، س ← ٠

= $\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$

---

⑧ نهـا $\frac{(\sqrt{س+4}-2)\,\text{جا}^{2}س}{س^{3}}$ ، س ← ٠

= نهـا $\frac{\text{جا}^{2}س}{س^{2}} \times$ نهـا $\frac{\sqrt{س+4}-2}{س}$ ، س ← ٠

= (نهـا $\frac{\text{جا}^{2}س}{س^{2}}$ ، س ← ٠) × نهـا $\frac{\sqrt{س+4}-2}{س}$ ، س ← ٠

= $2^{2} \times$ نهـا $\frac{\sqrt{س+4}-2}{س} \times \frac{\sqrt{س+4}+2}{\sqrt{س+4}+2}$ ، س ← ٠

= $4 \times$ نهـا $\frac{س+4-4}{س(\sqrt{س+4}+2)}$ ، س ← ٠

= $4 \times \frac{1}{2+2} = 1$

---

⑧ نهـا $\frac{س-1}{\text{جا}(س^{3}-1)}$ ، س ← ١

الحل

نهـا $\frac{س-1}{\frac{\text{جا}(س^{3}-1)}{س^{3}-1} \times (س^{2}-1)}$ ، س ← ١

= نهـا $\frac{(س^{3}-1)}{\text{جا}(س^{3}-1)} \times$ نهـا $\frac{س-1}{(س-1)(س^{2}+س+1)}$ ، س ← ١ ، س ← ١

ص = $س^{3}-1$

عندما س ← ١ ، ص ← ٠

= نهـا $\frac{ص}{\text{جا}ص} \times$ نهـا $\frac{1}{س^{2}+س+1}$ ، ص ← ٠ ، س ← ١

= $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

---

⑨ نهـا $\frac{س^{2}-س-\text{جا}(س-1)}{س-1}$ ، س ← ١

الحل

نهـا $\frac{س^{2}-س}{س-1} - \frac{\text{جا}(س-1)}{س-1}$ ، س ← ١

= نهـا $\frac{س(س-1)}{س-1} + \frac{\text{جا}(س-1)}{(س-1)(س+1)}$ ، س ← ١

= $1 - \frac{1}{1+1}$

= $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

مكتبة نجاح العلم
ANAJEH.COM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٠)

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\text{حا}(\sqrt{س} - ١)}{س^{٢} - ١}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\text{حا}(\sqrt{س} - ١)}{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\text{حا}(\sqrt{س} - ١)}{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)(س^{٢} + س + ١)}$$

ص = $\sqrt{س} - ١$

س ← ١ ⇒ ص ← ٠

$$= \text{نهـا}_{ص \to ٠} \frac{\text{حا ص}}{ص} \times \frac{١}{(ص + ١)(س^{٢} + س + ١)}$$

$$= ١ \times \frac{١}{ج(٢)}$$

$$= \frac{١}{٦}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

الجزء الثالث

متطابقات وقوانين مثلثية

المتطابقات

١- $\text{حا}^2 س + \text{حتا}^2 س = ١$

ومنها $\text{حا}^2 س = ١ - \text{حتا}^2 س$ ، $\text{حتا}^2 س = ١ - \text{حا}^2 س$

٢- $١ + \text{ظا}^2 س = \text{قا}^2 س$

ومنها $\text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س = ١$

٣- $١ + \text{ظتا}^2 س = \text{قتا}^2 س$

٤- $\text{حا}٢س = ٢ \text{حا} س \text{حتا} س$

ضعفها

مثال $\text{حا}٤س = ٢ \text{حا}٢س \text{حتا}٢س$

٥- $\text{حتا}٢س = \text{حتا}^2 س - \text{حا}^2 س$

$= ٢\text{حتا}^2 س - ١$

$= ١ - ٢\text{حا}^2 س$

قوانين مثلثية

١- $\text{حا}أ - \text{حا}ب = ٢ \text{حتا}\left(\frac{أ+ب}{٢}\right) \text{حا}\left(\frac{أ-ب}{٢}\right)$

٢- $\text{حتا}أ - \text{حتا}ب = -٢ \text{حا}\left(\frac{أ+ب}{٢}\right) \text{حا}\left(\frac{أ-ب}{٢}\right)$

٣- $\text{حا}(-أ) = -\text{حا}أ$

$\text{حتا}(-أ) = \text{حتا}أ$

٤- $\text{حا}(أ \pm ب) = \text{حا}أ \text{حتا}ب \pm \text{حتا}أ \text{حا}ب$

٥- $\text{حتا}(أ \pm ب) = \text{حتا}أ \text{حتا}ب \mp \text{حا}أ \text{حا}ب$

مثال ①

اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{حتا}٣س - \text{حتا}س}{س^2}$

الحل

الزوايا مختلفه لذلك نستخدم

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ \text{حا}\left(\frac{٣س+س}{٢}\right) \text{حا}\left(\frac{٣س-س}{٢}\right)}{س^2}$

$= \lim_{س \to ٠} -٢ \frac{\text{حا}٢س}{س} \frac{\text{حا}س}{س}$

$= -٢ \times ٢ \times ١ = -٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ②

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س \text{ جتا}٢س - س \text{ جتا}٤س}{س^٣}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}٢س - \text{جتا}٤س}{٣س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{-٢ \text{ جا}\frac{٢س+٤س}{٢} \text{ جا}\frac{٢س-٤س}{٢}}{٣س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{-٢ \text{ جا}٣س \text{ جا}(-س)}{٣س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{٢ \text{ جا}٣س \text{ جا}س}{٣س^٢}$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا}٣س}{س} \times \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times ٣ \times ١ = ٢$$

مثال ③

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} + ٣س)}{س}$$

نستخدم جتا(أ+ب)

$$= \text{جتا}\frac{\pi}{٢} \text{ جتا}٣س - \text{جا}\frac{\pi}{٢} \text{ جا}٣س$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢} \text{ جتا}٣س - \text{جا}\frac{\pi}{٢} \text{ جا}٣س}{س}$$

$$= \frac{٠ - ١ \times \text{جا}٣س}{س} = -٣$$

ملاحظة هامة

$$\text{جتا}س = ١ - ٢ \text{ جا}^٢\frac{١}{٢}س$$

مثال ④

$$\text{بفرض هـا} = \frac{١ - \text{جا}٢س - \text{جتا}٢س}{٤س}$$

الحل

$$\text{هـا} = \frac{(١ - \text{جتا}٢س) - \text{جا}٢س}{٤س}$$

$$= \text{هـا} \frac{\text{جا}^٢س - \text{جا}٢س}{٤س}$$

$$= \text{هـا} \frac{\text{جا}^٢س}{٤س} - \frac{\text{جا}٢س}{٤س}$$

$$= \text{هـا} \frac{\text{جا}س}{٤س} \times \text{هـا} \text{ جا}س - \text{هـا} \frac{\text{جا}٢س}{٤س}$$

$$= \frac{١}{٤} \times ٠ - \frac{٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

$$\text{جد نهـا}_{س \to 0} \frac{٥ - ٥ \text{ جتا}^{٢} س}{س^{٢} - س^{٣}}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{٥(١ - \text{جتا}^{٢} س)}{س^{٢}(١ - س)} =$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} ٥ \left(\frac{\text{جا}^{٢} س}{س^{٢}}\right)^{٢} \times \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{١}{١ - س}$$

$$= ٥ \times ١^{٢} \times \frac{١}{١ - ٠} = ٥$$

مثال ⑥

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}٢س}{س \text{ ظا} س}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢} س)}{س \text{ ظا} س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{٢\text{جا}^{٢} س}{س \text{ ظا} س}$$

$$= ٢ \times \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \frac{\text{جا} س}{\text{ظا} س}$$

$$= ٢ \times ١ \times ١ = ٢$$

مثال ⑦

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\text{جا} س - ١}{٤ \text{ جتا} س - ٣}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\text{جا} س - ١}{٤(١ - \text{جا}^{٢} س) - ٣}$$

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\text{جا} س - ١}{٤ - ٤\text{جا}^{٢} س - ٣} = \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\text{جا} س - ١}{١ - ٤\text{جا}^{٢} س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{-(١ - ٢\text{جا} س)}{(١ - ٢\text{جا} س)(١ + ٢\text{جا} س)}$$

$$= \frac{-١}{١ + ٢\text{جا}^{٢} \frac{\pi}{٦}} = \frac{-١}{١ + ٢ \times \frac{١}{٤}} = \frac{-١}{٢}$$

مثال ⑧

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}٦س}{\text{جتا}٨س - ١}$$

الحل

$$\text{جتا}٢س = ١ - ٢\text{جا}^{٢} س$$

$$\text{جتا}٦س = ١ - ٢\text{جا}^{٢} ٣س$$

$$\text{جتا}٨س = ١ - ٢\text{جا}^{٢} ٤س$$

يتبع الحل ←

مكتبة الوسام ALWESSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{١ - (١ - ٢ \text{جا}^{٢} س)}{٢ - ٢ \text{جتا}^{٤} س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{٢ \text{جا}^{٢} س}{٣ - ٢ \text{جتا}^{٤} س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \left(\frac{\text{جا}^{٢} س}{\text{جتا}^{٤} س} \right)$

$= - \left(\frac{\text{نها}_{س \to 0} \text{جا} ٣س}{\text{جا}^{٤} س} \right)^{٢} = - \left(\frac{٩}{١٦} \right)$

مثال ⑨

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{١ - ٣ س \text{جا} س - \text{جتا} س}{س \text{ظا}^{٢} س}$

الحل

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{١ - ٣ س \text{جا} س - (١ - ٢ \text{جا}^{٢} \frac{س}{٢})}{س \text{ظا}^{٢} س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{٢ - ٣ س \text{جا} س + ١ - ٢ \text{جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{س \cdot \text{ظا}^{٢} س}$

$= -٣ \text{نها}_{س \to 0} \frac{س \text{جا} س}{\text{ظا}^{٢} س} + \text{نها}_{س \to 0} \frac{٢ \text{جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{س \text{ظا}^{٢} س}$

$= -\frac{٣}{٢} \times ٢ + \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \frac{\text{جا} س}{\text{ظا} س}$

$-\frac{٣}{٢} + ٢ \times ١ \times \frac{١}{٢} = -\frac{٣}{٢} + ١ = -\frac{١}{٢}$

مثال ⑩

اوجد $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا}^{٢} س}}{\sqrt{٢} س}$

الحل

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - (١ - ٢ \text{جا}^{٢} س)}}{\sqrt{٢} س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\sqrt{٢ \text{جا}^{٢} س}}{\sqrt{٢} س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\sqrt{٢} \text{جا} س}{\sqrt{٢} س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{|\text{جا} س|}{س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{|\text{جا} س|}{س}$

نعيد تعريف $|\text{جا} س|$

$\text{جا} س = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، \pi$

س	$-\pi$		٠		π
جا س		+	٠	−	

$\text{نها}_{س \to ٠^{+}} \frac{\text{جا} س}{س} = ١$ ، $\text{نها}_{س \to ٠^{-}} \frac{-\text{جا} س}{س} = -١$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا} س}}{\sqrt{٢} س}$ غير موجودة

مثال (١٢)

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{٤ - ٤ \text{ جتا}^{٣} س}{س \text{ جا}^{٢} س}$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{٤(١ - \text{جتا}^{٣} س)}{س \text{ جا}^{٢} س}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{٤(١ - \text{جتا} س)(١ + \text{جتا} س + \text{جتا}^{٢} س)}{س \text{ جا}^{٢} س}$$

لكن $\text{جتا} س = ١ - ٢ \text{ جا}^{٢} \frac{١}{٢} س$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{٤(١ - (١ - ٢ \text{ جا}^{٢} \frac{١}{٢} س))}{س \text{ جا}^{٢} س} \times ٣$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{٤(٢ \text{ جا}^{٢} \frac{١}{٢} س + ٢ \text{ جا}^{٢} \frac{١}{٢} س)}{س \text{ جا}^{٢} س} \times ٣$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{٤ \times ٢ \text{ جا}^{٢} \frac{١}{٢} س}{س \text{ جا}^{٢} س} \times ٣$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} ٤ \times ٢ \left(\frac{\text{جا} \frac{١}{٢} س}{س}\right)^{٢} \times ٣$$

$$٤ \times ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times ٣ = ٢$$

مثال (١٣)

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{٣ \text{ جتا} س - \text{جتا} ٣س - ٢}{س^{٢}}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{٣(١ - ٢ \text{ جا}^{٢} \frac{٣}{٢} س) - (١ - ٢ \text{ جا}^{٢} س) - ٢}{س^{٢}}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{٣ - ٦ \text{ جا}^{٢} \frac{٣}{٢} س - ١ + ٢ \text{ جا}^{٢} س - ٢}{س^{٢}}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{-٦ \text{ جا}^{٢} \frac{٣}{٢} س}{س^{٢}} + \frac{٢ \text{ جا}^{٢} س}{س^{٢}} =$$

$$\text{نها}_{س \to 0} -٦ \left(\frac{\text{جا} \frac{٣}{٢} س}{\frac{٣}{٢} س}\right)^{٢} \times \frac{٩}{٤} + ٢ \times ١$$

$$= -٦ \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} - ٢ \times ١$$

$$-٦ \times \frac{١}{٤} - ٢$$

$$-\frac{٣}{٢} - ٢ = -\frac{٣}{٢} - \frac{٤}{٢} = -\frac{٧}{٢}$$

مثال (١٤) صـ٣

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \text{ظا}^{٢} س}{\text{ظتا} س - \text{ظا} س}$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا}^{٢} س - \text{جا}^{٢} س}{\text{ظتا} س - \text{ظا} س \text{ جتا} س}$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا} ٢س}{\text{ظتا} س - \text{جا} س}$$

← يتبع الحل

هـا $\frac{(\text{حتا}س - \text{حا}س)(\text{حتا}س + \text{حا}س)}{\text{حتا}س - \text{حا}س}$

$س \leftarrow \frac{\pi}{4}$

$= \text{حتا}\frac{\pi}{4} + \text{حا}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}$

مثال (١٤)

نهـا $\frac{\text{حتا}^2 3س - \text{حتا}^2 س}{س^2}$

$س \leftarrow 0$

الحل

$= $ نهـا $\frac{1 - \text{حا}^2 3س - (1 - 2\text{حا}^2 س)}{س^2}$

$س \leftarrow 0$

$= $ نهـا $\frac{1 - \text{حا}^2 3س - 1 + 2\text{حا}^2 س}{س^2}$

$س \leftarrow 0$

$= $ نهـا $\frac{-\text{حا}^2 3س}{س^2} + $ نهـا $2\left(\frac{\text{حا}س}{س}\right)^2$

$س \leftarrow 0$ — $س \leftarrow 0$

$= -\left(\text{نهـا}\frac{\text{حا}3س}{س}\right)^2 + 2\left(\text{نهـا}\frac{\text{حا}س}{س}\right)^2$

$= -(3)^2 + 2(1)^2$

$= -9 + 2 = -7$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

إستخدام المرافق

نستخدم المرافق عندما يكون احد الاشكال التالية

$1 \pm$ حا ، $1 \pm$ حتا (فردي)

$1 \pm$ قا ، حا $\pm$ حتا

حتا $\pm$ حا ، حا ± 1

$\sqrt{\text{حتا س}} \pm 1$ ---------- !؟

مثال ①

اوجد $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا س}}{س^2}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا س}}{س^2} \times \frac{1 + \text{حتا س}}{1 + \text{حتا س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا}^2 س}{س^2 (1 + \text{حتا س})}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^2 س}{س^2} \times \frac{1}{1 + 1} = 1 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

مثال ② فردية / مرافقه

اوجد $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا س}}{\text{حتا}^4 س - 1}$

زوجية مضاعفة

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا س}}{\text{حتا}^4 س - 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا س}}{-2 \text{حا}^2 س \times 1} \times \frac{1 + \text{حتا س}}{1 + \text{حتا س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا}^2 س}{-2 \text{حا}^2 س} \times \frac{1}{1 + \text{حتا س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^2 س}{-2 \text{حا}^2 س} \times \frac{1}{1 + 1}$

$= -\frac{1}{2} \left(\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا س}}{\text{حا س}}\right)^2 \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{-5}{16}$

مكتبة الوسام AWSAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣)

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جا}س - \sqrt{٣}\,\text{جتا}س}{١ - ٢\,\text{جتا}س}$$

الحل

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جا}س - \sqrt{٣}\,\text{جتا}س}{١ - ٢\,\text{جتا}س} \times \frac{\text{جا}س + \sqrt{٣}\,\text{جتا}س}{\text{جا}س + \sqrt{٣}\,\text{جتا}س}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جا}^{٢}س - ٣\,\text{جتا}^{٢}س}{(١ - ٢\,\text{جتا}س)(\text{جا}س + \sqrt{٣}\,\text{جتا}س)}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جا}^{٢}س - ٣\,\text{جتا}^{٢}س}{(١ - ٢\,\text{جتا}س)(\text{جا}س + \sqrt{٣}\,\text{جتا}س)} \times \frac{١ + ٢\,\text{جتا}س}{١ + ٢\,\text{جتا}س}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ - \text{جتا}^{٢}س - ٣\,\text{جتا}^{٢}س}{(١ - ٤\,\text{جتا}^{٢}س)(\text{جا}س + \sqrt{٣}\,\text{جتا}س)} \times (١ + ٢\,\text{جتا}س)$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ - ٤\,\text{جتا}^{٢}س}{(١ - ٤\,\text{جتا}^{٢}س)(\text{جا}س + \sqrt{٣}\,\text{جتا}س)} \times (١ + ٢\,\text{جتا}س)$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ + ٢\,\text{جتا}س}{\text{جا}س + \sqrt{٣}\,\text{جتا}س} = \frac{١ + ٢ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \sqrt{٣} \times \frac{١}{٢}} = \frac{٢}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}} \times ١$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٣}}$$

مثال (٤)

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٢}^{+}} \frac{\sqrt{١ + \text{جتا}س}}{\text{جا}س}$$

الحل

$$\text{نها} = \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٢}^{+}} \frac{\sqrt{١ + \text{جتا}س}}{\text{جا}س} \times \frac{\sqrt{١ - \text{جتا}س}}{\sqrt{١ - \text{جتا}س}}$$

$$= \text{نها}_{س \to \pi^{+}} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}س}}{\text{جا}س(\sqrt{١ - \text{جتا}س})}$$

$$= \text{نها}_{س \to \pi^{+}} \frac{\sqrt{\text{جا}^{٢}س}}{\text{جا}س(\sqrt{١ - \text{جتا}س})}$$

$$= \text{نها}_{س \to \pi^{+}} \frac{|\text{جا}س|}{\text{جا}س\sqrt{٢}}$$

س	π^{-}		π^{+}
جا س	−	0	+
|جا س|	−	0	+

$$= \text{نها}_{س \to \pi^{+}} \frac{-\text{جا}س}{\text{جا}س} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$= -١ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

اوجد $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س}{\text{قا}س - 1}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س}{\text{قا}س - 1} \times \frac{\text{قا}س + 1}{\text{قا}س + 1}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س}{\text{قا}^2 س - 1} \times (\text{قا}س + 1)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س}{\text{ظا}^2 س} \times \text{نهـا}_{س \to 0} (\text{قا}س + 1)$$

$$= 1 \times (\frac{1}{\text{جتا}_{0}} + 1)$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

مثال ⑥

اوجد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}س}{\text{جتا}2س}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}}{\text{جتا}2س}$$ (توحيد مقام)

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\text{جتا}س - \text{جا}س}{\text{جتا}س}}{\text{جتا}2س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س - \text{جا}س}{\text{جتا}س \, \text{جتا}2س} \times \frac{\text{جتا}س + \text{جا}س}{\text{جتا}س + \text{جا}س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{\text{جتا}س \, \text{جتا}2س} \times \frac{1}{\text{جتا}س + \text{جا}س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}2س}{\text{جتا}س \, \text{جتا}2س} \times \frac{1}{\text{جتا}س + \text{جا}س}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

أوجد $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \text{جا}٢س}{\text{ظتا}س - \text{ظا}س}$

الحل

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \text{جا}٢س}{\text{ظتا}س - \text{ظا}س} \times \frac{١ + \text{جا}٢س}{١ + \text{جا}٢س} \times \frac{\text{ظتا}س + \text{ظا}س}{\text{ظتا}س + \text{ظا}س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \text{جا}^{٢}٢س}{\text{ظتا}^{٢}س - \text{ظا}^{٢}س} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{ظتا}س + \text{ظا}س}{١ + \text{جا}٢س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا}^{٢}٢س}{\text{جتا}٢س} \times \left(\frac{\frac{١}{٢}}{١ + ١}\right)$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \text{جتا}٢س \times \frac{\frac{١}{٢}}{٢}$

$= \text{جتا}\frac{\pi}{٢} \times \frac{١}{٤}$

$= \text{صفر} \times \frac{١}{٤} = \text{صفر}$

مثال (٨)

أوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٣س - ١}{س^{٢}}$

الحل

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٣س - ١}{س^{٢}} \times \frac{\text{جتا}٣س + ١}{\text{جتا}٣س + ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}^{٢}٣س - ١}{س^{٢}(\text{جتا}٠ + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-\text{جا}^{٢}٣س}{س^{٢} \times ٢}$

$= -\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س \times \text{جا}٣س \times ٣ \times ٣}{٢ \times س^{٢}}$

$= -\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣ \times ٠ \times ٠$

$= \text{صفر}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الزوايا المتممه والزوايا المكملة
"طريقه الفرض"

① المتممة يكون مجموع الزاويتين = ٩٠°

المتممة = $\frac{\pi}{2}$ − الزاويه

مثال :-
متممة س هي $\frac{\pi}{2}$ − س
متممة ٣س هي $\frac{\pi}{2}$ − ٣س

جا الزاويه = حتا المتممة

جاس = حتا($\frac{\pi}{2}$ − س)
حتاس = جا($\frac{\pi}{2}$ − س)
ظاس = ظتا($\frac{\pi}{2}$ − س)
ظتاس = ظا($\frac{\pi}{2}$ − س)

② المكملة يكون مجموع الزاويتين = ١٨٠°

المكمله = π − س
مكملة س = π − س
مكملة ٦س = π − ٦س

جاس = جا(π − س)
جتاس = − جتا(π − س)
ظاس = − ظا(π − س)
ظتاس = − ظتا(π − س)

وهي قوانين الربع الثاني

مثال ①

جد $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حتا}(\frac{\pi}{2} - 2س)}{س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}2س}{س} = 2$

مثال ②

جد $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حتا}(\frac{\pi}{2} - 5س)}{\text{ظتا}(\frac{\pi}{2} - 3س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}5س}{\text{ظا}3س} = \frac{5}{3}$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{حا}(\pi - 3س)}{4س}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{حا}3س}{4س} = \frac{3}{4}$$

مثال ④

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظا}(\pi - 5س)}{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - 3س)}$$ ← مكملة ← متممة

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{-\text{ظا}5س}{\text{حا}3س} = \frac{-5}{3}$$

ملاحظة هامة جداً

عندما يكون حا، جتا، ظا، ظتا حد وحيد نستخدم الفرض

نفرض ان ص الأقتران الاخر وليس الاقتران الداخلي بشرط

① الزاوية اقتران خطي
② الأقتران الاخر خطي

طريقة الفرض

مثال ①

اوجد $\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}3س}{\pi - 6س}$

الحل

التعويض = ÷

نفرض ان ص = $\pi - 6س$

عندما $س \to \frac{\pi}{6}$ ، $ص \to 0$

وايضاً $س = \frac{\pi - ص}{6}$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}3(\frac{\pi - ص}{6})}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \frac{ص}{2})}{ص}$$ متممة

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{حا}\frac{ص}{2}}{ص}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

مثال ②

$$\text{نهـا}_{س \to \pi} \frac{\text{جا}س}{س^2 - \pi^2}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to \pi} \frac{\text{جا}س}{س - \pi} \times \frac{1}{س + \pi}$$

$ص = س - \pi \Leftarrow س = ص + \pi$

$س \to \pi$ ، $ص \to 0$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}(ص + \pi)}{ص} \times \frac{1}{2\pi}$$

نستخدم $\text{جا}(أ + ب)$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}ص \text{جتا}\pi + \text{جتا}ص \text{جا}\pi}{ص} \times \frac{1}{2\pi}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{-\text{جا}ص + 0}{ص} \times \frac{1}{2\pi}$$

$$= -1 \times \frac{1}{2\pi} = \frac{-1}{2\pi}$$

مثال ③

$$\text{نهـا}_{س \to -2} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{4}س}{س + 2}$$

الحل

$ص = س + 2 \Leftarrow س = ص - 2$

$س \to -2$ ، $ص \to 0$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{4}(ص - 2)}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{4}ص - \frac{\pi}{4} \times 2)}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{4}ص - \frac{\pi}{2})}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}ص)}{ص}$$ وتجزئه

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{4}ص}{ص} = \frac{\pi}{4}$$

مثال ④

$$\text{فإذا} \quad \frac{\text{جا}\pi س}{س + 1}$$

$س \to -1$

الحل

$ص = س + 1 \Leftarrow س = ص - 1$

$س \to -1$ ، $ص \to 0$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}\pi(ص - 1)}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}(\pi ص - \pi)}{ص} = \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{-\text{جا}(\pi - \pi ص)}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{-\text{جا}\pi ص}{ص} = -\pi$$

مكتبة الإسلام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

اوجد $\lim_{س \to 3\pi} \frac{\text{جا } س}{\frac{س}{3} - \pi}$

الحل

$ص = \frac{س}{3} - \pi \Leftarrow ص = س - 3\pi$

$س \to 3\pi \Leftarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}(3ص + 3\pi)}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا } 3ص \text{ جتا } 3\pi + \text{جتا } 3ص \text{ جا } 3\pi}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا } 3ص \times -1 + \text{جتا } 3ص \times 0}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-\text{جا } 3ص}{ص} = -3$

مثال ⑥

اوجد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا } س - \text{جتا } س}{س - \frac{\pi}{4}}$

الحل

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا } س - \text{جتا } س}{س - \frac{\pi}{4}} \times \frac{\text{جا } س + \text{جتا } س}{\text{جا } س + \text{جتا } س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}^2 س - \text{جتا}^2 س}{س - \frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\text{جا } س + \text{جتا } س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\text{جتا } 2س}{س - \frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\text{جا } س + \text{جتا } س}$

$ص = س - \frac{\pi}{4} \Leftarrow س = ص + \frac{\pi}{4}$

$س \to \frac{\pi}{4} \Leftarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-\text{جتا}(2ص + \frac{\pi}{2})}{ص} \times \frac{1}{\text{جا}(ص + \frac{\pi}{4}) + \text{جتا}(ص + \frac{\pi}{4})}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-\text{جتا } 2ص \text{ جتا } \frac{\pi}{2} + \text{جا } 2ص \text{ جا } \frac{\pi}{2}}{ص} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\text{جا } ص + \text{جتا } ص) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{جتا } ص - \text{جا } ص)}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا } 2ص}{ص} \times \frac{1}{\sqrt{2}\,\text{جتا } ص}$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

مثال ⑦

اذا كانت $\lim_{س \to 1} \frac{\text{ظا } \pi س}{\text{جا } \pi س} = \lim_{س \to 2} \frac{أ س^2 - 2}{س - 1}$

فجد قيمة الثابت أ

يتبع الحل ⟵

الحل

① $\lim_{س \to 1} \frac{ظا \pi س}{1 - س}$

$ص = 1 - س \Leftarrow س = 1 - ص$

$س \to 1 \Leftarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{ظا \pi (1 - ص)}{ص} = \lim_{ص \to 0} \frac{ظا(\pi - \pi ص)}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{- ظا \pi ص}{ص} = - \pi$

② $\lim_{س \to 2} \frac{ب س - ب 2}{جا \pi س} = \lim_{س \to 2} \frac{ب(س - 2)}{جا \pi س}$

$ص = س - 2 \Leftarrow س = ص + 2$

$س \to 2 \Leftarrow ص \to 0$

$= ب \lim_{ص \to 0} \frac{ص}{جا \pi (ص + 2)}$

$= ب \lim_{ص \to 0} \frac{ص}{جا(\pi ص + 2\pi)}$

$= ب \lim_{ص \to 0} \frac{ص}{جا \pi ص \, جتا 2\pi + جتا \pi ص \, جا 2\pi}$

$= ب \lim_{ص \to 0} \frac{ص}{جا \pi ص \times 1 + 0}$

$= \frac{ب}{\pi} = \frac{1}{\pi} \times ب$

$① = ②$

$\frac{ب}{\pi} = -1 \Leftarrow ب = -\pi$

ملاحظة

عندما تكون الزاوية ليست اقتران خطي نستخدم القرض مرتين حيث نفرض الزاوية أولاً .

مثال ⑧

اوجد $\lim_{س \to 2} \frac{جتا \frac{\pi}{3} س}{س - 2}$

الحل

$ص = \frac{\pi}{3} س \Leftarrow س = \frac{3 ص}{\pi}$

$س \to 2 \Leftarrow ص \to \frac{2\pi}{3}$

$= \lim_{ص \to \frac{2\pi}{3}} \frac{جتا ص}{\frac{3\pi}{3} - 2}$

$= \lim_{ص \to \frac{2\pi}{3}} \frac{جتا ص}{\frac{3\pi - 6ص}{3}} = \lim_{ص \to \frac{2\pi}{3}} \frac{3 \, ص \, جتا ص}{3\pi - 6ص}$

$ع = \frac{2\pi}{3} - ص \Leftarrow ص = \frac{2\pi}{3} - ع$

$ص \to \frac{2\pi}{3} \Leftarrow ع \to 0$

$= \lim_{ع \to 0} \frac{\frac{2\pi}{3} جتا(\frac{2\pi}{3} - ع)}{ع}$

$= \lim_{ع \to 0} \frac{\frac{2\pi}{3} جتا \frac{2\pi}{3} جتا ع + جا \frac{2\pi}{3} جا ع}{ع}$

$= \frac{2\pi}{3} \lim_{ع \to 0} \frac{-\frac{1}{2} \times جتا ع + \frac{\sqrt{3}}{2} \times جا ع}{ع}$

$= \frac{2\pi}{3} \times \lim_{ع \to 0} \frac{جا ع}{ع} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-2\pi}{4}$

ملاحظه

اذا كانت جتاس منفردة
نضع جتاس = حا(π/٢ ± س)

مثال ⑨

اوجد نها جتاس / (π/٢ − س)
س ← π/٢

الحل

= نها حا(π/٢ − س) / (π/٢ − س)
س ← π/٢
= ١ × ١/١ = ١

أو بطريقة المرض

مثال ⑩

اوجد نها س حا(π/س) / (س − ١)
س ← ١

الحل

= نها س حا(π − π/س) / (س − ١)
س ← ١
= نها س حا(π/س) / (س − ١)
= π

حل المثال السابق بطريقة المرض مرتين

مثال ⑪

نها (π − ٢س) ظاس
س ← π/٢

الحل

= نها (π − ٢س) × جاس / جتاس
س ← π/٢

= نها ٢(π/٢ − س) × جتا(π/٢ − س) / حا(π/٢ − س)
س ← π/٢

= نها ٢ × (π/٢ − س)/حا(π/٢ − س) × نها جتا(π/٢ − س)
س ← π/٢

= ٢ × ١ × ١ = ٢

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

اذا كانت $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{P - \text{جتا}٢س}{س^٢} = ١٨$

اوجد P ، ن ؟

الحل

نهاية المقام = صفر ⇐ البسط = ٠

$P - \text{جتا}٠ \times ن = ٠$

$P - \text{جتا}٠ = ٠ \quad P - ١ = ٠$

$P = ١ \Leftarrow$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢س}{س^٢} \times \frac{١ + \text{جتا}٢س}{١ + \text{جتا}٢س}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^٢٢س}{س^٢} \times \frac{١}{١ + \text{جتا}٢س}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \left(\frac{\text{جا}٢س}{س}\right)^٢ \times \frac{١}{٢} = ١٨$

$ن^٢ \times \frac{١}{٢} = ١٨$

$ن^٢ = ٣٦$

$ن = \pm ٦ \Leftarrow$

مثال ⑩

اذا كانت $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢س}{س^ن}$ موجودة

حيث ن عدد صحيح ≥ ٠ اوجد قيمة ن

الحل

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢س}{س^ن} \times \frac{١ + \text{جتا}٢س}{١ + \text{جتا}٢س}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^٢٢س}{س^ن} \times \frac{١}{١ + ١}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}^٢٢س}{س^ن} \times \frac{١}{٢}$

عندما $ن = ١ \Leftarrow ١ \times ٠ \times \frac{١}{٢} = ٠$

عندما $ن = ٢ \Leftarrow ١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

عندما $ن = ٣ \quad ١ \times \frac{١}{٠}$ غير موجودة

$ن = ١ ، ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١١)

$$\text{نها}_{س \to -١} \frac{\text{حا} \frac{\pi}{س}}{١ + س}$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to -١} \frac{\text{حا}(\pi + \frac{\pi}{س})}{١ + س}$$

$$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{\text{حا} \pi (١ + \frac{١}{س})}{س (\frac{١}{س} + س)}$$

$$= \frac{\pi}{-١} = -\pi$$

حل بطريقة الفرض مرسيد كما مثال (٨)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ① ص٤٣

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٧س}{٣س} =$

نفرض ص = ٧س ⇐ س = $\frac{ص}{٧}$

س ← ٠ ، ص ← ٠

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٧س}{٣س} = \lim_{ص \to 0} \frac{ظا ص}{\frac{٣ص}{٧}} =$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{٧}{٣} \frac{ظا ص}{ص} = \frac{٧}{٣} \lim_{ص \to 0} \frac{ظا ص}{ص}$

$= \frac{٧}{٣} \times ١ = \frac{٧}{٣}$

② $\lim_{س \to \pi} \frac{ظا(س - \pi)}{(س - \pi)}$

الحل

ص = س − π ، س = ص + π

س ← π ⇐ ص ← ٠

$= \lim_{ص \to 0} \frac{ظا ص}{ص} = ١$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{٩س}{ظا س} = \frac{٩}{١} = ٩$

④ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا|س|}{س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}$

لكنه لو كان السؤال

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا|س|}{س}$

س	٠	٠
|س|	س	−س

$\lim_{س \to 0^+} \frac{ظا س}{س} = ١$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{ظا -س}{-س} = -١$

⇐ $\lim_{س \to 0} \frac{ظا|س|}{س}$ غير موجود ٥

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ② صـ٤٤

جد $\lim_{س \to 0} \frac{س - \text{حا}٣س + \text{ظا}٥س}{٣س - \text{ظا}٤س}$

الحل

بقسمة حدود المقدار على س

$$= \frac{\lim_{س \to 0} \frac{س}{س} - \frac{\text{حا}٣س}{س} + \frac{\text{ظا}٥س}{س}}{\lim_{س \to 0} \frac{٣س}{س} - \frac{\text{ظا}٤س}{س}}$$

$$= \frac{١ - \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}٣س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}٥س}{س}}{٣ - \lim_{س \to 0} \text{ظا}٥س \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}٤س}{س}}$$

$$= \frac{١ - ٣ + ٥}{٣ - ٠ \times ١} = \frac{٣}{٣} = ١$$

تدريب ③ صـ٤٥

جد للاً مما يأتي

① $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{حتا}س}{س^{٢}}$

الحل

$$\text{هـا} = \lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{حتا}س}{س^{٢}} \times \frac{١ + \text{حتا}س}{١ + \text{حتا}س}$$

$$= \text{هـا}_{س \to 0} \frac{١ - \text{حتا}^{٢}س}{س^{٢}} \times \frac{١}{١ + \text{حتا}س}$$

$$= \text{هـا}_{س \to 0} \frac{\text{حا}^{٢}س}{س^{٢}} \times \text{هـا}_{س \to 0} \frac{١}{١ + \text{حتا}س}$$

$$= \left(\text{هـا}_{س \to 0} \frac{\text{حا}س}{س}\right)^{٢} \times \frac{١}{١ + ١}$$

$$= ١^{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

② $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}٨س + \text{حا}٤س}{س}$

الحل

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}٨س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}٤س}{س}$$

$$= ٨ + ٤ = ١٢$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ④ ص٤٦

جد كلاً مما يأتي

① $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} س}{س - \frac{\pi}{2}}$

الحل

$ص = س - \frac{\pi}{2}$ ، $س = ص + \frac{\pi}{2}$

$س \to \frac{\pi}{2}$ ، $ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}(ص + \frac{\pi}{2})}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جتا} ص \text{جتا} \frac{\pi}{2} - \text{جا} ص \text{جا} \frac{\pi}{2}}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جتا} ص \times 0 - \text{جا} ص}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-\text{جا} ص}{ص}$

$= -1$

② $\lim_{س \to 1} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{2} س}{س - 1}$

الحل

$ص = س - 1$ ، $س = ص + 1$

$س \to 1$ ، $ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} ص + \frac{\pi}{2})}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{2} ص \text{جتا} \frac{\pi}{2} - \text{جا} \frac{\pi}{2} ص \text{جا} \frac{\pi}{2}}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{2} ص \times 0 - \text{جا} \frac{\pi}{2} ص \times 1}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-\text{جا} \frac{\pi}{2} ص}{ص}$

$= -\frac{\pi}{2}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

صفحه (٤٧)

جد النهاية المطلوبه في كل من التمارين من (١) إلى (٢١)

① $\lim_{س \to 0} \frac{حا٨س}{٦س} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{س + ظا٢س - حاس}{س}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا٢س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{حاس}{س}$

$١ + ٢ - ١ = ٢$

③ $\lim_{س \to 0} (قاس + ظاس)$

الحل

$\lim_{س \to 0} (\frac{١}{جتاس} + \frac{ظاس}{س} \times س)$

$\lim_{س \to 0} \frac{١}{جتاس} + \lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} \times \lim_{س \to 0} س$

$= ١ \times ٠ + ١ = ١$

④ $\lim_{س \to 0} (٧س^٣ ظتا^٢٢س \, قتاس)$

$\lim_{س \to 0} (٧س^٣ \times \frac{جتا^٢٢س}{جا^٢٢س} \times \frac{١}{جاس})$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٧س}{جا^٢٢س} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{جا^٢٢س} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{جاس} \times \lim_{س \to 0} جتا^٢٢س$

$= \frac{٧}{٤} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} \times ١$

$= \frac{٧}{٤٠}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{1 + \text{جتا}^4 س - 2\,\text{جتا}^2 س}{س^2}$

الحل

$1 - 2\,\text{جتا}^2 س = -\,\text{جتا}\,2س$ وبطاقة

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}\,4س - \text{جتا}\,2س}{س^2}$

$\text{جتا}\,أ - \text{جتا}\,ب = -2\,\text{جا}\frac{أ+ب}{2}\,\text{جا}\frac{أ-ب}{2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-2\,\text{جا}\,3س\,\text{جا}\,س}{س^2}$

$= -2 \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\,3س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\,س}{س}$

$= -2 \times 3 \times 1 = -6$

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,س}{س\,\text{جا}\,س}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,س}{س\,\text{جا}\,س} \times \frac{1 + \text{جتا}\,س}{1 + \text{جتا}\,س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س\,\text{جا}\,س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا}\,س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س\,\text{جا}\,س} \times \frac{1}{1+1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\,س}{س} \times \frac{\text{جا}\,س}{\text{جا}\,س} \times \frac{1}{2}$

$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

⑦ $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جتا}\,س}{2س - \pi}$

نعوض مباشر

$\frac{\text{جتا}\,\pi}{2\pi - \pi} = \frac{-1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$

مكتبة الوسام ALWESAM
تصميم: ناجح الجمزاوي

⑧ $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س - حا س}{س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{حا س}{س}$

$= ١ - ١ = صفر$

⑨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{١ - حا س}{(\pi - ٢س)^٢}$

الحل

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{١ - حا س}{(\pi - ٢س)^٢} \times \frac{١ + حا س}{١ + حا س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{١ - حا^٢ س}{(\pi - ٢س)^٢} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{١}{١ + حا س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{حتا^٢ س}{٤(\frac{\pi}{2} - س)^٢} \times \frac{١}{١ + ١}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{حتا س}{\frac{\pi}{2} - س}\right)^٢ \times \frac{١}{٢}$

$= \left(\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{حتا س}{\frac{\pi}{2} - س}\right)^٢ \times \frac{١}{٢}$

نفرض ص $= \frac{\pi}{2} - س$

$س = \frac{\pi}{2} - ص \leftarrow ص = \frac{\pi}{2} - س$

$س \to \frac{\pi}{2}$ فان ص $\to$ صفر

$= \left(\lim_{ص \to 0} \frac{حتا(\frac{\pi}{2} - ص)}{ص}\right)^٢ \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢}\left(\lim_{ص \to 0} \frac{حا ص}{ص}\right)^٢ = \frac{١}{٢}(١)^٢ \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٨}$

⑩ $\lim_{س \to 0} \frac{قا(٢س) - ١}{س^٢}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{قا ٢س - ١}{س^٢} \times \frac{قا ٢س + ١}{قا ٢س + ١}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^٢ ٢س - ١}{س^٢} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{قا ٢س + ١}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^٢ ٢س}{س^٢} \times \frac{١}{١ + ١}$

$= \left(\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٢س}{س}\right)^٢ \times \frac{١}{٢}$

$= (٢)^٢ \times \frac{١}{٢} = ٤ \times \frac{١}{٢} = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١١) $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 + س \, ظا س}{جا^2 س}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{س^2}{جا^2 س} + \frac{س \, ظا س}{جا^2 س} \right)$

$= \left(\lim_{س \to 0} \frac{س}{جا س} \right)^2 + \lim_{س \to 0} \frac{س}{جا س} \times \lim_{س \to 0} \frac{ظا س}{جا س}$

$= 2 \times (1)^2 + 1 \times 2 = 4$

(١٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا^2 س - جا^2 س}{س - \frac{\pi}{4}}$

الحل

$جتا^2 س - جا^2 س = جتا 2س$ متطابقة

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} جتا 2س$

$ص = س - \frac{\pi}{4}$ ، $س = ص + \frac{\pi}{4}$

$س \to \frac{\pi}{4}$ ، $ص \to$ صفر

$\lim_{ص \to 0} جتا 2(ص + \frac{\pi}{4})$

$\lim_{ص \to 0} \frac{جتا(2ص + \frac{\pi}{2})}{ص}$

$\lim_{ص \to 0} \frac{جتا 2ص \, جتا \frac{\pi}{2} - جا 2ص \, جا \frac{\pi}{2}}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{صفر - جا 2ص}{ص}$

$= - \lim_{ص \to 0} \frac{جا 2ص}{ص} = -2$

حل آخر

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا^2 س - جا^2 س}{س - \frac{\pi}{4}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - 2س) \, جا(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$

$= 2$

(١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2 س}{جتا 8س - 1}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2 س}{جتا 8س - 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - (1 - 2جا^2 3س)}{1 - 2جا^2 4س - 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2جا^2 3س}{-2جا^2 4س}$

$= - \lim_{س \to 0} \left(\frac{جا 3س}{4س} \right)^2 = - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = - \frac{9}{16}$

مكتبة الهوسام HOSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا٣س + قتا٣س}{س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{1}{ظا٣س} + \frac{1}{حا٣س} \right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٣س}{ظا٣س} + \lim_{س \to 0} \frac{٣س}{حا٣س}$

$= \frac{٣}{٣} + \frac{٣}{٣} = ١ + ١ = ٢$

هنا $\lim_{س \to 0} \frac{حتا(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{س \times حا(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}$

قوانين الزوايا المتممة.

هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{حا ٢ص}{ص \times حتا ٢ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{حا ٢ص}{ص} \times \lim_{ص \to 0} \frac{١}{حتا ٢ص}$

$= ٢ \times ١ = ٢$

(١٥) هنا $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{ظتاس}{س - \pi}$

الحل

هنا $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\frac{حتاس}{حاس}}{س - \pi}$

هنا $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{حتاس}{حاس (س - \pi)}$

ص = س − π ، س = ص + π/٢

س → π/٢ ، ص → ٠

(١٦) هنا $\lim_{س \to ١} \frac{س حا\frac{\pi}{س}}{س - ١}$

الحل

هنا $\lim_{س \to ١} \frac{س حا(\pi - \frac{\pi}{س})}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س حا\pi (١ - \frac{١}{س})}{س (١ - \frac{١}{س})}$

$= \pi$

حل بطريقة العرض مرسبة

فرع (١٥) يمكن حل بطريقة المتممة

ظتاس = ظا(π/٢ − س)

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(١٧) $\lim_{س \to -٤} \frac{ظا(س+٤)}{س^٢ - ١٦}$

الحل

$= \lim_{س \to -٤} \frac{ظا(س+٤)}{(س+٤)} \times \lim_{س \to -٤} \frac{١}{س-٤}$

$= ١ \times \frac{١}{-٤-٤} = \frac{١}{-٨}$

(١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ظاس}{\sqrt{١ - جتا٢س}}$

الحل

$\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ظاس}{\sqrt{١ - (١ - ٢جا^٢س)}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ظاس}{\sqrt{١ - ١ + ٢جا^٢س}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ظاس}{\sqrt{٢}\, جاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ظاس}{\sqrt{٢}\, جاس \times جتاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{\sqrt{٢}\, جاس جتاس} - \lim_{س \to ٠} \frac{ظاس}{\sqrt{٢}\, جاس جتاس}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{٢س - ظاس}{\sqrt{٢}\, جاس جتاس}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{٢س}{\sqrt{٢}\, جاس جتاس} - \lim_{س \to ٠^+} \frac{ظاس}{\sqrt{٢}\, جاس جتاس}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\lim_{س \to ٠^-} \frac{٢س - ظاس}{-\sqrt{٢}\, جاس جتاس}$

$= \lim_{س \to ٠^-} \frac{-٢س}{\sqrt{٢}\, جاس جتاس} - \lim_{س \to ٠^-} \frac{ظاس}{-\sqrt{٢}\, جاس جتاس}$

$= \frac{-٢}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ظاس}{\sqrt{٢}\, جاس جتاس}$ غير موجودة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٩) هنا $\lim_{س \to \pi٣} \frac{\text{جا}س}{\frac{س}{٣} - \pi}$

الحل

$ص = \frac{س}{٣} - \pi$ ، $س = ٣ص + \pi٣$

$س \to \pi٣$ ، $ص \to$ صفر

هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}(٣ص + \pi٣)}{ص}$

هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}٣ص \text{جتا}\pi٢ + \text{جا}\pi٣ \text{جتا}٣ص}{ص}$

هنا $= \lim_{ص \to 0} \frac{-\text{جا}٣ص + \text{صفر}}{ص} = -٣$

(حل آخر)

هنا $= \lim_{س \to ٣\pi} \left(\frac{(\pi٣ - س)}{\frac{١}{٣}(س - \pi٣)}\right)$

$= ٣$ هنا $\frac{(\pi٣ - س)}{س - \pi٣} = -٣$

---

(٢٠) هنا $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\text{ظا}\pi س}$

الحل

هنا $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{-\text{ظا}(\pi ٢ - \pi س)}$

$= $ هنا $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{-\text{ظا}(\pi(٢ - س))}$

$ص = ٢ - س$ ، $س \to ٢$ ، $ص \to 0$

هنا $= \lim_{ص \to 0} \frac{-ص}{-\text{ظا}\pi ص} = \frac{١}{\pi}$

حل آخر

نفرض $ص = س - ٢$

$\Leftarrow س = ص + ٢$

$س \to ٢$ فان $ص \to 0$

هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{ص}{\text{ظا}\pi(ص + ٢)}$

$= $ هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{ص}{\frac{\text{جا}(\pi ص + \pi ٢)}{\text{جتا}(\pi ص + \pi ٢)}}$

$= $ هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{ص}{\text{جا}(\pi ص + \pi ٢)} \times \text{جتا}(\pi ص + \pi ٢)$

$= $ هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{ص}{-\text{جا}\pi ص} \times ١$

$= $ هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{ص}{-\text{جا}\pi ص \text{جتا}\pi ٢ + \text{جتا}\pi ص \text{جا}\pi ٢}$

$= $ هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{ص}{\text{جا}\pi ص}$

$= $ هنا $\lim_{ص \to 0} \frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{\text{جا}\pi ص}{ص}}$

$= \frac{١}{\pi}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(٢١) $\lim_{س \to -٢} \frac{\text{جا}(س+٢)}{س^٢ + س - ٢}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{\text{جا}(س+٢)}{(س+٢)(س-١)}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{١}{س-١} \times \lim_{س \to -٢} \frac{\text{جا}(س+٢)}{(س+٢)}$

$= \frac{١}{-٢-١} \times ١ = -\frac{١}{٣}$

---

(٢٢) إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{ل س} = ٦$

حيث $ل \neq ٠$

① $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{س^٢} = ٦$

$\frac{٣}{ل} = ٦ \Leftarrow ل = ١٢$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{س(١-ل)} = ٦$

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{س} \times \frac{١}{١-ل} = ٦$

$\frac{٣}{١-ل} = ٦ \Leftarrow ٦ل = ٩$

$ل = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

---

(٢٣) إذا كان

$ق(س) = \frac{\text{جا}(\pi - ٢س)}{-٥س}$

أوجد $\lim_{س \to ٠} ق(س)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}(\pi - ٢س)}{-٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}\pi \text{تا}س - \text{تا}\pi \text{جا}س}{-٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٠ \times \text{تا}س - ١ \times \text{جا}س}{-٥س}$

$= -\frac{١}{٥} \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س} = -\frac{١}{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{1 + \text{جتا}٤س - ٢\text{جتا}^٢س}{س}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{٢\text{جتا}(٢س) - ٢\text{جتا}^٢س}{س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{٢(1 - \text{حا}^٢٢س) - ٢(1 - \text{حا}^٢س)}{س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{٢ - ٢\text{حا}^٢٢س + ٢ - ٢\text{حا}^٢س}{س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \left(\frac{\text{حا}٢س}{س}\right)^٢ + \text{نهـا}_{س \to 0} ٢\left(\frac{\text{حا}س}{س}\right)^٢$$

$$= -٢ \times ٤ + ٢ \times ١$$

$$= -٨ + ٢$$

$$= -٦$$

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

① نهـا $\dfrac{1 - \text{جتا}٢س}{س^٢}$ ، س ← ٠ ، $٦س^٢$

الحل

نهـا $\dfrac{1 - (1 - ٢\text{حا}^٢س)}{٦س^٢}$ ، س ← ٠

$= \text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{٢\text{حا}^٢س}{٦س^٢}$

$= \dfrac{١}{٣}$

② نهـا $\dfrac{1 - \text{جتا}٨س - ٢\text{حا}^٢س}{١٠س^٢}$ ، س ← ٠

الحل

$= \text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{\text{جتا}٢س - \text{جتا}٨س}{١٠س^٢}$

$= \text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{-٢\text{حا}\frac{٦س}{٢}\text{حا}\frac{-٨س}{٢}}{١٠س^٢}$

$= \text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{\text{حا}٣س \times \text{حا}٥س}{١٠س^٢}$

$= \dfrac{١}{٥} \text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{\text{حا}٥س}{س} \times \dfrac{\text{حا}٣س}{س}$

$= \dfrac{١}{٥} \times ٥ \times ٣ = ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٢٠١٩) شتوية

① $\lim_{س \to 0} \frac{س + \text{جا}٤س}{٣س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{٣س} + \frac{\text{جا}٤س}{٣س}$

$= \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٣}{٣} = ١$

---

② $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٤س (س + \text{جا}٨س - \text{جا}٤س)}{س^{٢} \text{ظا}٣س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢(س + \text{جا}٨س - \text{جا}٤س)}{س \text{ ظا}٣س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٤س}{س} \left(\frac{س}{س} + \frac{\text{جا}٨س}{س} - \frac{\text{جا}٤س}{س} \right)$

$= \frac{٤}{\text{ظا}٣٠} (١ + ٨ - ٤)$

$= ٢(١ + ٨ - ٤)$

$= ٢(٥) = ١٠$

④ وزارة (٢٠١٩) صيفية

① $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{س}$ بتعويض مباشر

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}س}{س} = ١$

② $\lim_{س \to 0} (٧ س^{٣} \text{ظتا}^{٢}(٤س) \text{قتا}٥س)$

الحل

$= \lim_{س \to 0} (٧ س^{٣} \times \frac{١}{\text{ظا}^{٢}٤س} \times \frac{١}{\text{جا}٥س})$

$= \lim_{س \to 0} ٧ \times \frac{س^{٢}}{\text{ظا}^{٢}٤س} \times \frac{س}{\text{جا}٥س}$

$= ٧ \left(\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}٤س}{٤س} \right)^{٢} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{جا}٥س}$

$= ٧ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٨٠}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{ظا س - جا س}{س^3}$$

الحل

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{جتا س} - جا س}{س^3}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{جا س - جا س جتا س}{جتا س \quad س^3}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{جا س (1 - جتا س)}{س^3 جتا س} \times \frac{1 + جتا س}{1 + جتا س}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{جا س (1 - جتا^2 س)}{س^3 جتا س (1 + جتا س)}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{جا س \times جا^2 س}{س^2} \times \frac{1}{1(1+1)}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{جا^3 س}{س^3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{جتا 2س - 1}{س^2}$$

الحل

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - 1}{س^2 جتا 2س}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - جتا 2س}{س^2 جتا 2س}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - (1 - 2جا^2 س)}{س^2 جتا 2س}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - 1 + 2جا^2 س}{س^2 جتا 2س}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} 2 \left(\frac{جا س}{س}\right)^2 \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{جتا 2س}$$

$$= 2 \times 1^2 \times 1 = 2$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

نهـا $\frac{\text{ظتا}س - \text{جتا}س}{س - \frac{\pi}{4}}$ ، $س \to \frac{\pi}{4}$

الحل

$= \text{نهـا} \frac{\text{ظتا}س - \text{جتا}(س - \frac{\pi}{2})}{س - \frac{\pi}{4}}$ ، $س \to \frac{\pi}{4}$

نستخدم جتا م - جتا ب

$= \text{نهـا} - ٢ \frac{\text{جا}(\frac{س + س - \frac{\pi}{2}}{2}) \text{جا}(\frac{س - س + \frac{\pi}{2}}{2})}{س - \frac{\pi}{4}}$ ، $س \to \frac{\pi}{4}$

$= -٢ \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{4}) \text{جا}\frac{\pi}{4}}{س - \frac{\pi}{4}}$

$= \text{نهـا} - ٢ \times \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{4})}{س - \frac{\pi}{4}}$

$= -\frac{2}{\sqrt{2}} \times ١ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل السؤال السابق بالطرق المرافقة

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

نهـا $٣س \left(\text{ظتا}٢س + \text{قتا}٣س \right)$ ، $س \to ٠$

الحل

$= \text{نهـا} ٣س \times \left(\frac{1}{\text{ظتا}٢س} + \frac{1}{\text{جا}٣س} \right)$ ، $س \to ٠$

$= \text{نهـا} \frac{٣س}{\text{ظتا}٢س} + \text{نهـا} \frac{٣س}{\text{جا}٣س}$ ، $س \to ٠$ ، $س \to ٠$

$= \frac{٣}{٢} + ٢ = \frac{٧}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظتا } س}{\pi - 2س}$$

الحل

$ص = 2س - \pi \Leftarrow س = \frac{ص + \pi}{2}$

$س \to \frac{\pi}{2}$ ، $ص \to$.

$$= \text{نهـا}_{ص \to} \frac{\text{ظتا}(\frac{ص}{2} + \frac{\pi}{2})}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to} \frac{\text{ظتا}\frac{ص}{2} \text{ظتا}\frac{\pi}{2} - \text{حا}\frac{ص}{2} \text{حا}\frac{\pi}{2}}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to} \frac{\text{صفر} - \text{حا}\frac{ص}{2} \times ١}{ص}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to} - \frac{\text{حا}\frac{ص}{2}}{ص}$$

$$= -\frac{١}{2}$$

⑩ وزارة (٢٠١٢) صيفية

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا } س}{س \text{ حا } س}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - (١ - ٢\text{حا}^2\frac{١}{2}س)}{س \text{ حا } س}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - ١ + ٢\text{حا}^2\frac{١}{2}س}{س \text{ حا } س}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٢\text{حا}^2\frac{١}{2}س}{س \text{ حا } س}$$

$$= ٢ \text{ نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{حا}\frac{١}{2}س}{س} \times \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{حا}\frac{١}{2}س}{\text{حا } س}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{2} \times \frac{١}{2} = \frac{١}{2}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٣) صيفية

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{حا}^2 س}{س^2 - \frac{\pi}{2} س}$$

الحل

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{حا}^2 س}{س(س - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{حا}^2 س}{س - \frac{\pi}{2}} \times \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{س}$$

$ص = س - \frac{\pi}{2}$ ⇐ $س = ص + \frac{\pi}{2}$

$س \to \frac{\pi}{2}$ ⇐ $ص \to 0$

$$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا}^2(ص + \frac{\pi}{2})}{ص} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا}^2(\pi + ص)}{ص} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا}^2 ص \text{ جتا}^2 \pi + \text{جتا}^2 ص \text{ حا}^2 \pi}{ص} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا}^2 ص + \text{صفر}}{ص} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= - \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا}^2 ص}{ص} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= - \text{نها} \times \frac{2}{\pi} = \frac{-2}{\pi}$$

(١٢) وزارة (٢٠١٣) شتوية

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{2} س}{س - 1}$$

الحل

$ص = س - 1$ ⇐ $س = ص + 1$

$س \to 1$ ⇐ $ص \to 0$

$$\text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{2}(ص + 1)}{ص}$$

$$\text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} ص + \frac{\pi}{2})}{ص}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{2} ص \text{ جتا} \frac{\pi}{2} - \text{حا} \frac{\pi}{2} ص \text{ حا} \frac{\pi}{2}}{ص}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{صفر} - \text{حا} \frac{\pi}{2} ص}{ص}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 0} - \frac{\text{حا} \frac{\pi}{2} ص}{ص}$$

$$= - \frac{\pi}{2}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\text{ظا}\, \pi س}$$

الحل

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\text{ظا}(\pi ٢ - \pi س)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{- \text{ظا}(\pi ٢ - \pi س)}$$

ص = ٢ - س س ← ٢ ص ← ٠

$$= \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{- ص}{- \text{ظا}\, \pi ص} = \frac{١}{\pi}$$

---

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

① $$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}\, ٣س - \text{جتا}\, ٥س}{٢ س^{٢}}$$

الحل

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}^{٢} ٣س + \text{جا}^{٢} ٥س - ١ + ١}{٢ س^{٢}}$$

$$= - \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}^{٢} ٤س}{س^{٢}} \times \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}^{٢} س}{س}$$

$$= ٤ \times ١ \times ١ = ٤$$

② اذا كانت

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\, ٢س}{\text{ا}س^{٥}} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}\, ٦س}{\text{ا}س^{٥} \times س} = ٢$$

اوجد قيمة ا، ب ؟

الحل

① $$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\, ٢س}{\text{ا}س^{٥}} = ٢ \Leftarrow \frac{٢}{\text{ا}} = ٢$$

$$\Leftarrow ٢ = ١٠ \text{ا}$$

② $$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}\, ٦س}{س(\text{ب} - ١)} = ٢$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٦س}{س} \times \frac{١}{\text{ب} - ١} = ٢$$

$$\frac{٦}{\text{ب} - ١} = ٢$$

$$٦ = ٢\text{ب} - ٢$$

$$٢\text{ب} = ٨$$

$$\text{ب} = ٤$$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

$$\text{نها}_{س \to \pi} \frac{1 + \text{جتا س}}{(س - \pi)^2}$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to \pi} \frac{1 + \text{جتا س}}{(س - \pi)^2} \times \frac{1 - \text{جتا س}}{1 - \text{جتا س}}$$

$$= \text{نها}_{س \to \pi} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{(س - \pi)^2 \times (1 - \text{جتا س})}$$

$$= \text{نها}_{س \to \pi} \frac{\text{جا}^2 س}{(س - \pi)^2} \times \frac{1}{(1 - \text{جتا س})}$$

$$= \text{نها}_{س \to \pi} \left(\frac{\text{جا س}}{س - \pi}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

ص = س − π ⇐ س = ص + π

س → π فإن ص → ٠.

$$= \text{نها}_{ص \to ٠} \left(\frac{\text{جا}(ص + \pi)}{ص}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٠} \left(\frac{-\text{جا ص}}{ص}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= (-1)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(١٦) وزارة (٢٠١٥) صيفية

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا س} - \sqrt{3}\,\text{جا س}}{\pi - 6س}$$

الحل

ص = π − 6س ⇐ س = (π + ص)/6

س → π/6 ، ص → ٠.

$$\text{نها}_{ص \to ٠} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{ص}{2}\right) - \sqrt{3}\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{ص}{2}\right)}{ص}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{\text{جتا}\frac{ص}{2}\,\text{جتا}\frac{\pi}{6} - \text{جا}\frac{ص}{2}\,\text{جا}\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\left(\text{جا}\frac{ص}{2}\,\text{جتا}\frac{\pi}{6} + \text{جتا}\frac{ص}{2}\,\text{جا}\frac{\pi}{6}\right)}{ص}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{\frac{1}{2}\text{جتا}\frac{ص}{2} - \frac{1}{2}\text{جا}\frac{ص}{2} - \frac{3}{2}\text{جا}\frac{ص}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتا}\frac{ص}{2}}{ص}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{-2\,\text{جا}\frac{ص}{2} - \sqrt{3}\,\text{جتا}\frac{ص}{2}}{ص}$$

$$= -2 \times \frac{1}{2} - \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوية

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع س} - \text{حا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا ع س}}}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع س} - \text{حا س}}{\sqrt{١ - (١ - \text{ح}^{٢}\text{ا ع س})}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع س} - \text{حا س}}{\sqrt{\text{ح}^{٢}\text{ا ع س}}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع س} - \text{حا س}}{\text{ح ا ع س}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{حا س}}{\text{ح ا ع س}} - \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{حا س}}{\text{ح ا ع س}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع س} - \text{حا س}}{\text{ح ا ع س}} = \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع س} - \text{حا س}}{\text{ح ا س}} \times \frac{\text{ح ا س}}{\text{ح ا ع س}}$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{ع}^{٢}} - \frac{١}{\text{ع}^{٢}} = \frac{١}{\text{ع}^{٢}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع س} - \text{حا س}}{\text{ح ا س}} = \frac{١}{\text{ع}^{٢}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع س} - \text{حا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا ع س}}}$$ غير موجودة

(١٨) وزارة (٢٠١٦) صيفية

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع} - \text{ظا س} - \text{ع جتا س}}{\text{س حا ع س}}$$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع} - \text{ع جتا س}}{\text{س حا ع س}} - \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا س}}{\text{س حا ع س}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع}(١ - \text{جتا س})}{\text{س حا ع س}} - \frac{١}{\text{ع}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع}(١ - \text{جتا س})}{\text{س حا ع س}} \times \frac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}} - \frac{١}{\text{ع}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع}(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{س حا ع س}(١ + \text{جتا س})} - \frac{١}{\text{ع}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع ح}^{٢}\text{ا س}}{\text{س حا ع س}(١ + \text{جتا س})} - \frac{١}{\text{ع}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ع ح ا س}}{\text{س}} \times \frac{\text{حا س}}{\text{ع س}} - \frac{١}{\text{ع}}$$

$$= ٢ \times ١ \times \frac{١}{\text{ع}} - \frac{١}{\text{ع}}$$

$$= \frac{٢}{\text{ع}} - \frac{١}{\text{ع}} = \frac{١}{\text{ع}}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س - \text{جا}^4 س}{س^3}$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س - \text{جا}^2 س \cdot \text{جتا}^2 س}{س^3}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س (1 - \text{جتا}^2 س)}{س^3}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س (1 + \text{جتا} س)(1 - \text{جتا} س)}{س^3}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س}$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times 2 = 8$$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س - \text{جتا} س}{س^2}$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جتا} س}{س^2} \times \frac{\text{جتا} س + \text{جتا} س}{\text{جتا} س + \text{جتا} س}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جتا} س}{2 س^2}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا} س (\text{جتا} س - 1)}{2 س^2}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \text{جتا} س \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا} س - 1}{2 س^2}$$

$$1 \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{-2 \text{جا}^2 \frac{س}{2}}{2 س^2}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{-2 \text{جا}^2 \frac{س}{2}}{2 س^2}$$

$$= -\left(\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} \frac{س}{2}}{\frac{س}{2}}\right)^2 = -1$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية

جد $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{\sqrt{س^3 + س^2}}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{\sqrt{س^2(س+1)}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{\sqrt{س^2}} \times \frac{1}{\sqrt{س+1}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{|س|} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{\sqrt{س+1}}$

$س$	$-$	0	$+$
$|س|$	$-س$	0	$س$

$\lim_{س \to 0^+} \frac{\text{جا}س}{س} \times 1 = 1$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{\text{جا}س}{-س} \times 1 = -1$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{\sqrt{س^3 + س^2}}$ غير موجودة

وزارة (٢٠١٨) صيفية

جد $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٤س - \text{جا}٢س}{س^3}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{٤\text{جا}س - ٢\text{جا}٢س \text{ جتا}س}{س^3}$

$\lim_{س \to 0} \frac{٤\text{جا}س - ٤\text{جا}س \text{ جتا}س(١ - ٢\text{جا}^2س)}{س^3}$

$\lim_{س \to 0} \frac{٤\text{جا}س - ٤\text{جا}س \text{ جتا}س(١ - ٢\text{جا}^2س)}{س^3}$

$\lim_{س \to 0} \frac{٤\text{جا}س(١ - \text{جتا}س(١ - ٢\text{جا}^2س))}{س^3}$

$\lim_{س \to 0} \frac{٤\text{جا}س(١ - \text{جتا}س + ٢\text{جا}^2س \text{ جتا}س)}{س^3}$

$\lim_{س \to 0} \frac{٤\text{جا}س}{س} \left(\frac{٢\text{جا}^2س}{س^2} + \frac{٢\text{جا}^2س \text{ جتا}س}{س^2}\right)$

$٤ \times (٢ \times (\frac{١}{٢})^2 + ٢ \times ١ \times ١)$

$٤ (\frac{١}{٤} \times ٢ + ٢)$

$٤ (\frac{١}{٢} + ٢) = ٤ \times \frac{٥}{٢}$

$= \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

نهاية الأقترانات الدائرية

السؤال الأول

(أ) اثبت ان
$\text{نها}_{ص \to س} \frac{\text{جتا}ص - \text{جتا}س}{ص - س} = -\text{حا}س$

(ب) اذا كانت
$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ق} - \text{جتا}٢س}{س^٢} = ١٨$
اوجد ق ؟

(ج) اوجد $\text{نها}_{س \to 0} \frac{٣س^٢ + \text{ظا}٤س}{٤س^٣ + س - ٣\text{ظا}س}$

(د) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}٢س + س^٢ - \text{جتا}س}{س^٢}$

(هـ) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{(\sqrt{س+١} - ١)\text{حا}س}{س^٢}$

(و) اوجد $\text{نها}_{س \to 0} \frac{(\sqrt{٤+س} - ٢)\text{حا}٢س}{س^٣}$

(ز) $\text{نها}_{س \to 0} \text{حا}س \times \left|\frac{١}{س^٢}\right| - ١$

(ح) اثبت ان
$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{\text{حا}٢س - ١}{٤\text{جتا}^٢س - ٣} = -\frac{١}{٢}$

(ط) اذا كانت
$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ق} - \text{جتا}٣س}{س^٢} = \frac{١}{٦}$
جد ق ، ق ؟

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

اوجد قيمة النهايات التاليه

(١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{حاس - \sqrt{٣}\, حتاس}{١ - ٢ حتاس}$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{حتا٣س - ١}{\sqrt{٢}\, س^{٢}}$

(٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ + حتا٢س}{١ - حاس}$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{س + حا(\pi - ٢س)}{س}$

(٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{حا^{٢}٣س - حا^{٢}س}{س - \frac{\pi}{٤}}$

(٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{حاس - حتاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{حا٥س}$

(٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ - ظاس} - \sqrt{١ + ظاس}}{٢س}$

(٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{حتاس - حاس}{حا٢س - حتا٢س - ١}$

(١٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}\, حتاس - ١}{ظتا^{٢}س - ١}$

(١١) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{\sqrt{١ + ٥س} - ١}$

(١٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س\, حا\frac{\pi}{س}}{س - ١}$

(١٣) $\lim_{س \to -١} \frac{حا\frac{\pi}{س}}{١ + س}$

(١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + س\, حا٣س - حتا٢س}{س^{٢}}$

(١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + حتا٦س - ٢\, حتا^{٢}٣س}{س^{٢}}$

مكتبة الهمام ALHAMAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{قا^{2} س - ١}{س^{2}}$

(١٧) $\lim_{س \to 0} \frac{حا(١ - جتا س)}{س^{2}}$

(١٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{٤ جتا^{2} س - ٣}{٢ حا س - ١}$

(١٩) $\lim_{س \to 0} \frac{جتا^{2} ٣س - جتا ٨س}{س^{2}}$

(٢٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{حا ٢س + ١} - جتا س}{س}$

(٢١) $\lim_{س \to 0} \frac{قا^{4} س - ١٢ + ٧ جتا س}{حا^{2} س}$

(٢٢) $\lim_{س \to 0} \frac{٢ - جتا س - جتا ٤س}{س^{2}}$

(٢٣) $\lim_{س \to 0} \frac{(ظا س + ٣س)^{2}}{١ - جتا ٤س}$

(٢٤) $\lim_{س \to 0} \frac{جتا س + ٢س - ١}{٣س}$

(٢٥) $\lim_{س \to ١} \frac{حا \pi س}{س^{2} - ٢س + ١}$

(٢٦) $\lim_{س \to 0} \left(\frac{٢}{حا س حا ٢س} - \frac{١}{حا^{2} س} \right)$

(٢٧) $\lim_{س \to 0} \frac{جتا س جتا ٣س - ١}{س^{2}}$

(٢٨) $\lim_{س \to 0} \frac{٣ جتا س - جتا ٤س - ٢}{س^{2}}$

(٢٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{ظا(\frac{\pi}{3} - ٣س)}{ظا^{2}(\pi - ٥س)}$

(٣٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{حا س}{س - \frac{\pi}{3}}$

مكتبة الوطن ALWATAN
المعلم: ناجح الجمزاوي

حلول ورقة عمل نهاية الاقترانات الدائرية

السؤال الأول

(أ) $\text{هـا} \frac{\text{ظا}ص - \text{ظا}س}{ص - س}$ $ص \leftarrow س$

$= \text{هـا} \frac{\text{ظا}(ص+س) \times \text{ظا}(ص-س)}{ص-س}$

$= \text{هـا} \frac{\text{ظا}(س+ص) \times \text{ظا}(س-ص)}{(ص-س)}$

$= \text{هـا} \frac{1}{2} \times \text{ظا}(س+ص)$

$= \text{ظا}2س = \text{ظا}س$

(ب) $\text{هـا} \frac{\text{ظا}س - \text{ظا}ب}{س - ب}$ $س \leftarrow ب$

نهاية البسط $= 0$

$\text{ظا}ب - \text{ظا}ب \times 0 = 0$

$\text{ظا}ب - \text{ظا}ب = 0 \Leftarrow 1 - \rho = 0$

$\rho = 1 \Leftarrow$

$\text{هـا} \frac{1 - \text{ظا}ب \text{ظا}س}{س - ب} \times \frac{1 + \text{ظا}ب \text{ظا}س}{1 + \text{ظا}ب \text{ظا}س}$ المراجعة

$س \leftarrow ب$

$\text{هـا} \frac{1 - \text{ظا}^2 س}{س (1+1)}$

$س \leftarrow ب$

$= \text{هـا} \frac{\text{ظا}^2 س}{2 س^2}$

$س \leftarrow ب$

$= \frac{1}{2} \text{هـا} \left(\frac{\text{ظا}س}{س}\right)^2 = 1^2$

$\frac{1}{2} \times 4 ن^2 = 18$

$ن^2 = 18$

$ن^2 = 9 \Leftarrow ن = \pm 3$

(ج) $\text{هـا} \frac{3س^2 + \text{ظا}4س}{س^2 + 3س - \text{ظا}3س}$

$س \leftarrow 0$

$= \text{هـا} \frac{\frac{3س^2}{س^2} + \frac{\text{ظا}4س}{س^2}}{\frac{س^2}{س^2} + \frac{\text{ظا}3س}{س^2}}$

$س \leftarrow 0$

$= \frac{\text{هـا} 3 + \left(\text{هـا} \frac{\text{ظا}4س}{س}\right)^2}{\text{هـا} س + \text{هـا} \frac{\text{ظا}3س}{س}}$

$س \leftarrow 0$ $س \leftarrow 0$

$= \frac{3 + 4^2}{1 + 3} = \frac{3 + 16}{3}$

$= \frac{19}{3}$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(ه)
$$\text{نها}_{س\to 0}\frac{(\sqrt{1+س}-1)\,\text{جا}\,س}{س^2}$$
$$=\text{نها}_{س\to 0}\frac{\sqrt{1+س}-1}{س}\times\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جا}\,س}{س}$$
$$=\text{نها}_{س\to 0}\frac{1+س-1}{س(\sqrt{1+س}+1)}\times 1$$
$$=\text{نها}_{س\to 0}\frac{س}{س(\sqrt{1+س}+1)}$$
$$=\text{نها}_{س\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+س}+1}=\frac{1}{2}=0.5$$

(و)
$$\text{نها}_{س\to 0}\frac{(\sqrt{4+س}-2)\,\text{جا}^2 س}{س^3}$$
$$=\text{نها}_{س\to 0}\frac{\sqrt{4+س}-2}{س}\times\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جا}^2 س}{س^2}$$
$$=\text{نها}_{س\to 0}\frac{4+س-4}{س(\sqrt{4+س}+2)}\times\left(\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جا}\,س}{س}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\,\text{نها}_{س\to 0}\frac{س}{\sqrt{4+س}+2}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{0}{\sqrt{4}+2}=0$$

$$=\frac{1}{4}\,\text{نها}_{س\to 0}\frac{4+س-4}{(\sqrt{4+س}+2)}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

(ز)
$$\text{نها}_{س\to 0}\text{جا}\,س\times\sqrt{\frac{1}{س^2}-1}$$
$$=\text{نها}_{س\to 0}\text{جا}\,س\times\sqrt{\frac{1-س^2}{س^2}}$$
$$=\text{نها}_{س\to 0}\text{جا}\,س\times\frac{\sqrt{1-س^2}}{|س|}$$

س	-1		0		1
$-س$	+	+	+	−	−
$\sqrt{1-س^2}$	+	+	+	+	+

$$=\text{نها}_{س\to 0^-}\frac{\text{جا}\,س}{س}\times\sqrt{1-س^2}$$
$$=1\times\sqrt{1}=1$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٤)

$$\text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,\text{حا}س - 1}{4\,\text{حتا}^2 س - 3} = -\frac{1}{2}$$

$$= \text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,\text{حا}س - 1}{4(1 - \text{حا}^2 س) - 3}$$

$$= \text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,\text{حا}س - 1}{1 - 4\,\text{حا}^2 س}$$

$$= \text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,\text{حا}س - 1}{(1 - 2\,\text{حا}س)(1 + 2\,\text{حا}س)} = \text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{-1}{1 + 2\,\text{حا}س}$$

$$= \frac{-1}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}$$

(ب)

$$\text{هـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}س - \text{جا}س}{3\,س^3} = \frac{1}{2}$$

كفاية إيجاد = صفر

$$\text{ظا}س - \text{جا}س = 0 \Leftarrow \text{ظا}س = \text{جا}س$$

$$\Leftarrow \text{جتا}س = 1$$

$$\text{هـا}_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}س}{3\,س^2} \times \frac{1 + \text{جتا}س}{1 + \text{جتا}س}$$

$$\text{هـا}_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{3\,س^2 (1 + \text{جتا}س)}$$

$$\text{هـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{6\,س^2}$$

$$\frac{1}{6}\left(\text{هـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س}\right)^2 = \frac{1}{6} \times ن^2 = \frac{1}{2}$$

$$ن^2 = 1 \Leftarrow ن = \pm 1$$

السؤال الثاني

(أ)

$$\text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{حا}س - \sqrt{3}\,\text{جتا}س}{1 - 2\,\text{جتا}س}$$

$$\text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{حا}س - \sqrt{3}\,\text{جتا}س}{1 - 2\,\text{جتا}س} \times \frac{\text{حا}س + \sqrt{3}\,\text{جتا}س}{\text{حا}س + \sqrt{3}\,\text{جتا}س}$$

$$= \text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{حا}^2 س - 3\,\text{جتا}^2 س}{(1 - 2\,\text{جتا}س)(\text{حا}س + \sqrt{3}\,\text{جتا}س)}$$

$$= \text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \text{جتا}^2 س - 3\,\text{جتا}^2 س}{(1 - 2\,\text{جتا}س)(\text{حا}س + \sqrt{3}\,\text{جتا}س)}$$

$$= \text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 4\,\text{جتا}^2 س}{(1 - 2\,\text{جتا}س)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$= \text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{(1 - 2\,\text{جتا}س)(1 + 2\,\text{جتا}س)}{(1 - 2\,\text{جتا}س) \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 + 2\,\text{جتا}\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1 + 2 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

② $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}٣س - ١}{\sqrt{س}}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}٣س - ١}{\sqrt{س}} \times \frac{\text{جتا}٣س + ١}{\text{جتا}٣س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^{٢}٣س - ١}{\sqrt{س}^{٣} \times (\text{جتا}٣س + ١)}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{-\text{جا}^{٢}٣س}{\sqrt{س}^{٣} \times (\text{جتا}٣س + ١)}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{-٩س^{٢}}{\sqrt{س}^{٣} \times (\text{جتا}٣س + ١)}$

$= ١ \times ١ \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{-٩}{\text{جتا}٣س + ١} \times س^{\frac{٢}{٣} - ٣}$

$= ١ \times \frac{-٩}{٢} \times س^{-\frac{٧}{٣}}$

$= ١ \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{-٩}{٢} س^{-\frac{٧}{٣}} = \text{صفر}$

③ $\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + \text{جتا}٢س}{١ - \text{جا}س}$

$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢ + ٢\text{جتا}^{٢}س - ١}{١ - \text{جا}س} \times \frac{١ + \text{جا}س}{١ + \text{جا}س}$

$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢\text{جتا}^{٢}س}{١ - \text{جا}^{٢}س} \times (١ + \text{جا}س)$

$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢\text{جتا}^{٢}س}{\text{جتا}^{٢}س} \times (١ + \text{جا}س)$

$= ٢ \times ٢ = ٤$

④ $\text{نها}_{س \to 0} \frac{س + \text{جا}(\pi - ٢س)}{س}$

الحل

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{س}{س} + \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}(\pi - ٢س)}{س}$

$١ + \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}٢س}{س}$

$= ١ + ٢ = ٣$

⑤ $\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}^{٢}٣س - \text{جا}^{٢}س}{٢س - \frac{\pi}{٢}}$

الحل

$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{(\text{جا}٣س - \text{جا}س)(\text{جا}٣س + \text{جا}س)}{٢س - \frac{\pi}{٢}}$

$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\text{جتا}\frac{٣س + س}{٢}\text{جا}\frac{٣س - س}{٢}}{٢س - \frac{\pi}{٢}} \times (\text{جا}\frac{٣\pi}{٤} + \text{جا}\frac{\pi}{٤})$

$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\text{جتا}٢س \text{جا}س}{٢(س - \frac{\pi}{٤})} \times (\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}})$

← يتبع

$$\text{نهـا} = \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{ظا} س} \times \text{جا} س \times \frac{\pi}{4}$$
$$س \to \frac{\pi}{4}$$

$$ص = س - \frac{\pi}{4} \Leftarrow س = ص + \frac{\pi}{4}$$
$$س \to \frac{\pi}{4} \Leftarrow ص \to \text{صفر}$$

$$\text{نهـا} = \text{جتا}^2 (ص + \frac{\pi}{4}) \times \text{جا} \frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$ص \to \text{صفر}$$

$$\text{نهـا} = \frac{\text{جتا}^2 (ص + \frac{\pi}{4})}{ص} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$ص \to \text{صفر}$$

$$\text{نهـا} = \frac{\text{جتا}^2 ص \text{جتا}^2 \frac{\pi}{4} - \text{جا}^2 ص \text{جا}^2 \frac{\pi}{4}}{ص} \times \frac{1}{2}$$

$$= \text{نهـا} \times \frac{\text{صفر} - \text{جا}^2 ص}{ص} \times 1$$
$$ص \to \text{صفر}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

---

(٦) $$\text{نهـا} \frac{\text{جا} س - \text{جتا} س}{س - \frac{\pi}{4}}$$
$$س \to \frac{\pi}{4}$$

$$ص = س - \frac{\pi}{4} \Leftarrow س = ص + \frac{\pi}{4}$$

$$س \to \frac{\pi}{4} \text{ ، } ص \to \text{صفر}$$

$$\text{نهـا} = \frac{\text{جا}(ص + \frac{\pi}{4}) - \text{جتا}(ص + \frac{\pi}{4})}{ص}$$
$$ص \to \text{صفر}$$

$$= \text{نهـا} \frac{\text{جا} ص \text{جتا} \frac{\pi}{4} + \text{جتا} ص \text{جا} \frac{\pi}{4} - (\text{جتا} ص \text{جتا} \frac{\pi}{4} - \text{جا} ص \text{جا} \frac{\pi}{4})}{ص}$$
$$ص \to \text{صفر}$$

$$= \text{نهـا} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \text{جا} ص + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{جتا} ص - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{جتا} ص + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{جا} ص}{ص}$$

$$= \text{نهـا} \frac{\sqrt{2} \text{جا} ص}{ص}$$
$$ص \to \text{صفر}$$

$$= \sqrt{2}$$

---

(٧) $$\text{نهـا} \frac{\sqrt{س+3} - 2}{\text{جا} س} \times \frac{\sqrt{س+3} + 2}{\sqrt{س+3} + 2}$$
$$س \to 0$$

$$\text{نهـا} \frac{س + 3 - 4}{\text{جا} س \times (\sqrt{س+3} + 2)}$$

$$= \text{نهـا} \frac{س}{\text{جا} س} \times \frac{1}{4}$$
$$س \to 0$$

$$= 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٨)

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\sqrt{1-\text{ظا}س} - \sqrt{1+\text{ظا}س}}{\text{جـ}س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\sqrt{1-\text{ظا}س} - \sqrt{1+\text{ظا}س}}{\text{جـ}س} \times \frac{\sqrt{1-\text{ظا}س} + \sqrt{1+\text{ظا}س}}{\sqrt{1-\text{ظا}س} + \sqrt{1+\text{ظا}س}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{1-\text{ظا}س - 1 - \text{ظا}س}{\text{جـ}س} \times \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{-2\text{ظا}س}{\text{جـ}س} \times \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

---

(٩)

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظتا}س - \text{ظا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س - \text{جا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س - \text{جا}س}{\text{جا}س\text{جتا}س - \text{جتا}س + \text{جا}س - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س - \text{جا}س}{\text{جتا}س(\text{جا}س - 1) + (\text{جا}س - 1)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\text{جتا}س + 1} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}$$

(١٠)

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\,\text{جتا}س - 1}{\text{ظتا}س - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\,\text{جتا}س - 1}{\text{ظتا}س - 1} \times \frac{\sqrt{2}\,\text{جتا}س + 1}{\sqrt{2}\,\text{جتا}س + 1}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\,\text{جتا}س - 1}{\text{ظتا}س - 1} \times \frac{1}{(\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س}{\frac{1}{\text{ظا}س} - 1} \times \frac{1}{2}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س}{\frac{1-\text{ظا}س}{\text{ظا}س}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س\,\text{ظا}س}{1-\text{ظا}س} \times \frac{1}{2}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س \times \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}}{1-\text{ظا}س} \times \frac{1}{2}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}س}{1-\text{ظا}س} \times \frac{1}{2}$$

$$= \text{جا}\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}^{\frac{١}{٣}} ٣س}{\sqrt{١+٥س} - ١}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}^{\frac{١}{٣}} ٣س}{\sqrt{١+٥س} - ١} \times \frac{\sqrt{١+٥س} + ١}{\sqrt{١+٥س} + ١}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}^{\frac{١}{٣}} ٣س}{٥س} \times \frac{١}{\sqrt{١+٥س} + ١}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}^{\frac{١}{٣}} ٣س}{٥س} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{٣}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{١٠}$

(١٢) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{س \text{ جا}(\frac{\pi}{س})}{س - ١}$

الحل

$\text{نها}_{س \to ١} \frac{س \text{ جا}(\pi - \frac{\pi}{س})}{س(١ - \frac{١}{س})}$

$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{س \text{ جا}\pi(١ - \frac{١}{س})}{س(١ - \frac{١}{س})}$

$= \pi$

(١٣) $\text{نها}_{س \to -١} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{س}}{س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{\text{جا}(\pi + \frac{\pi}{س})}{س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{\text{جا}\pi(١ + \frac{١}{س})}{س(١ + \frac{١}{س})}$

$= \frac{\pi}{-١} = -\pi$

(١٤) $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ + س \text{ جا}٣س - \text{جتا}٢س}{س^{٢}}$

الحل

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢س + س \text{ جا}٣س}{س^{٢}}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢}س) + س \text{ جا}٣س}{س^{٢}}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٢\text{جا}^{٢}س + س \text{ جا}٣س}{س^{٢}}$

$٢(\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س})^{٢} + \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{س}$

$٢ \times ١^{٢} + ٣$

$٥ = ٢ + ٣$

مكتبة البوسام
AL-BOSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٥) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ا} - \text{جتا}٦س - ٢\,\text{جتا}٤س}{س^٢}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ا} - ٢\,\text{جتا}٤س - \text{جتا}٦س}{س^٢}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}٤س - \text{جتا}٦س}{س^٢}$

$= \text{نها}_{س \to 0} -٢ \frac{\text{حا}(\frac{٤س+٦س}{٢}) \text{حا}(\frac{٤س-٦س}{٢})}{س^٢}$

$= \text{نها}_{س \to 0} -٢ \frac{\text{حا}٥س}{س} \times \frac{\text{حا}-س}{س}$

$= -٢ \times ٥ \times -١ = ١٠$

---

(١٦) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^٢س - ١}{س^٢}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}س - ١}{س} \times \frac{\text{ظا}س + ١}{\text{ظا}س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^٢س - ١}{س^٢} \times \frac{١}{\text{ظا}س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^٢س}{س^٢} \times \frac{١}{١+١}$

$= (\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}س}{س})^٢ \times \frac{١}{٢} = ١^٢ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

(١٧) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا}(١ - \text{جتا}س)}{س^٢}$

الحل

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا}(١ - \text{جتا}س)}{١ - \text{جتا}س} \times \frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢}$

$= ١ \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{١ - (١ - ٢\,\text{حا}^٢\frac{١}{٢}س)}{س^٢}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{٢\,\text{حا}^٢\frac{١}{٢}س}{س^٢}$

$= ٢ (\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا}\frac{١}{٢}س}{س})^٢$

$= ٢ \times (\frac{١}{٢})^٢ = ٢ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٨) $\text{هـ} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٤ \text{ جتا}^{٢} س - ٣}{٢ \text{ جا} س - ١}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٤ (١ - \text{جا}^{٢} س) - ٣}{٢ \text{ جا} س - ١}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٤ - ٤ \text{ جا}^{٢} س - ٢}{٢ \text{ جا} س - ١}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{١ - ٤ \text{ جا}^{٢} س}{٢ \text{ جا} س - ١}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{(١ - ٢ \text{ جا} س)(١ + ٢ \text{ جا} س)}{٢ \text{ جا} س - ١}$

$= -(١ + ٢ \times \text{جا} \frac{\pi}{٦}) = -(١ + ٢ \times \frac{١}{٢})$

$= -٢$

---

(١٩) $\text{هـ} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا} ٣س - \text{جتا} ٨س}{س^{٢}}$

اكل

$\text{هـ} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^{٢} ٣س - (١ - \text{جتا}^{٢} ٨س)}{س^{٢}}$

$\text{هـ} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}^{٢} ٨س - \text{جتا}^{٢} ٣س}{س^{٢}}$

$\text{هـ} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}^{٢} ٨س - ١ + ١ - \text{جتا}^{٢} ٣س}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-\text{جا}^{٢} ٨س + \text{جا}^{٢} ٣س}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \left(\frac{\text{جا} ٣س}{س}\right)^{٢} + \left(\frac{\text{جا} ٨س}{س}\right)^{٢}$

$= ٩ + ٦٤ = ٩ + ١٦ \times ٤ = ٣٤$

$= ٣ ٤$

---

(٢٠) $\text{هـ} = \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{\text{جا} ٢س + ١} - \text{جتا} س}{س}$

اكل

$\text{هـ} = \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{\text{جا} ٢س + ١} - \text{جتا} س}{س} \times \frac{\sqrt{\text{جا} ٢س + ١} + \text{جتا} س}{\sqrt{\text{جا} ٢س + ١} + \text{جتا} س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ٢س + ١ - \text{جتا}^{٢} س}{س} \times \frac{١}{١ + ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ٢س + ١ - (١ - \text{جا}^{٢} س)}{س} \times \frac{١}{٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ٢س + \text{جا}^{٢} س}{س} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \left(\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ٢س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \text{جا} س\right)$

$= \frac{١}{٢} (١ \times ٢ + ١ \times ٠) = \frac{١}{٢}$

مكتبة الوسام AlwesAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٢١) هنا $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٢ - جتا س} - \sqrt{١ + جتا س}}{ظا^٢ س}$

هنا $\lim \frac{\sqrt{٢ - جتا س} - \sqrt{١ + جتا س}}{ظا^٢ س} \times \frac{\sqrt{٢ + جتا س} + \sqrt{١ + جتا س}}{\sqrt{٢ + جتا س} + \sqrt{١ + جتا س}}$

هنا $\lim \frac{٢ - ١ - جتا س}{ظا^٢ س} \times \frac{١}{\sqrt{٢ + جتا س} + \sqrt{١ + جتا س}}$

هنا $\lim \frac{١ - جتا س}{ظا^٢ س} \times \frac{١}{\sqrt{٢ + جتا س} + \sqrt{١ + جتا س}}$

هنا $\lim \frac{١ - جتا س}{ظا^٢ س} \times \frac{١ + جتا س}{١ + جتا س} \times \frac{١}{\sqrt{٢ + جتا س} + \sqrt{١ + جتا س}}$

هنا $\lim \frac{١ - جتا^٢ س}{ظا^٢ س} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢ + جتا س} + \sqrt{١ + جتا س}}$

هنا $\lim \frac{جا^٢ س}{ظا^٢ س} \times \frac{١}{\sqrt{٢ + جتا س} + \sqrt{١ + جتا س}}$

$= ١ \times \frac{١}{\sqrt{٢ + ١} + \sqrt{١ + ١}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

---

(٢٢) هنا $\lim_{س \to 0} \frac{٢ - جتا س - جتا ٢س}{س^٢}$

الحل

هنا $\lim \frac{٢ - (١ - ٢جا^٢ س) - (١ - ٢جا^٢ ٢س)}{س^٢}$

هنا $\lim \frac{٢ - ١ + ٢جا^٢ س - ١ + ٢جا^٢ ٢س}{س^٢}$

هنا $\lim \frac{٢جا^٢ س}{س^٢} + \lim \frac{٢جا^٢ ٢س}{س^٢}$

$= ٢ \times ١ \times ٢ + ٤ \times ٢ = ٨ + ٢$

$= ١٠$

---

(٢٣) هنا $\lim_{س \to 0} \frac{(ظا س + ٣س)^٢}{١ - جتا ٤س}$

هنا $\lim \frac{ظا^٢ س + ٦س ظا س + ٩س^٢}{(١ - ١ + ٢جا^٢ ٢س)}$

هنا $\lim \frac{ظا^٢ س + ٦س ظا س + ٩س^٢}{٢جا^٢ ٢س}$

$= \frac{١}{٢} \lim \frac{ظا^٢ س}{جا^٢ ٢س} + \frac{٦س ظا س}{جا^٢ ٢س} + \frac{٩س^٢}{جا^٢ ٢س}$

$= \frac{١}{٢} \left(\frac{ظا س}{جا ٢س}\right)^٢ + \frac{٦س}{جا ٢س} \cdot ظا س + ٩ \left(\frac{س}{جا ٢س}\right)^٢$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} + ٦ \times ٠ + ٩ \times \frac{١}{٤}$

$= \frac{١}{٨} + \frac{٩}{٤} = \frac{١}{٨} + \frac{١٨}{٨} = \frac{١٩}{٨}$

---

(٢٤) هنا $\lim_{س \to 0} \frac{٢ - جتا ٢س - جتا ٤س}{س^٢}$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٤) $\text{هـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظتا}س + ٤س - ١}{٣س}$

$= \text{هـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظتا}س - ١}{٣س} + \frac{٤س}{٣س}$

$\text{هـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظتا}س - ١}{٣س} \times \frac{\text{ظتا}س + ١}{\text{ظتا}س + ١} + \frac{٤}{٣}$

$= \text{هـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظا}^٢س - ١}{٣س^٢} \times \frac{١}{\text{ظتا}س + ١} + \frac{٤}{٣}$

$= \text{هـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظا}^٢س}{٣س^٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{٤}{٣}$

$\text{هـا}_{س\to 0} \text{ظا}س \times \text{هـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظا}س}{٣س} \times \frac{١}{٢} + \frac{٤}{٣}$

$١ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٥}{٦}$

---

(٥) $\text{هـا}_{س\to ١} \frac{\text{ظا}^٢\pi س}{س^٤ - ٤س + ٣}$

الحل

$\text{هـا}_{س\to ١} \frac{\text{ظا}^٢\pi س}{(س-١)^٢} = \text{هـا}_{س\to ١} \left(\frac{\text{ظا}\pi س}{س-١}\right)^٢$

$ص = س - ١ \quad س = ص + ١$

$س \to ١ \quad ص \to ٠$

$\left(\text{هـا}_{ص\to 0} \frac{\text{ظا}\pi(ص+١)}{ص}\right)^٢$

$\left(\text{هـا}_{ص\to 0} \frac{\text{ظا}\pi ص \text{ظتا}\pi + \text{ظتا}\pi ص \text{ظا}\pi}{ص}\right)^٢$

$= \left(\text{هـا}_{ص\to 0} \frac{-\text{ظا}\pi ص}{ص} + ٠\right)^٢$

$= \left(-\text{هـا}_{ص\to 0} \frac{\text{ظا}\pi ص}{ص}\right)^٢ = \pi^٢$

---

(٦) $\text{هـا}_{س\to 0} \left(\frac{٢}{\text{ظا}س \text{ظا}٢س} - \frac{١}{\text{ظا}^٢س}\right)$

$\text{هـا}_{س\to 0} \left(\frac{٢}{\text{ظا}س \times ٢\text{ظا}س \text{ظتا}س} - \frac{١}{\text{ظا}^٢س}\right)$

$= \text{هـا}_{س\to 0} \left(\frac{٢}{٢\text{ظا}^٢س \text{ظتا}س} - \frac{١}{\text{ظا}^٢س}\right)$ توحيد المقام

$= \text{هـا}_{س\to 0} \frac{٢ - ٢\text{ظتا}س}{٢\text{ظا}^٢س \text{ظتا}س}$

$\text{هـا}_{س\to 0} \frac{٢(١ - \text{ظتا}س)}{٢\text{ظا}^٢س \text{ظتا}س}$

$\text{هـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{ظتا}س}{\text{ظا}^٢س \text{ظتا}س} = \text{هـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{ظتا}س}{\text{ظا}^٢س} \times \frac{١}{\text{ظتا}س}$

$\text{هـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{ظتا}س}{\text{ظا}^٢س} \times \text{هـا}_{س\to 0} \frac{١}{\text{ظتا}س}$

$\text{هـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{ظتا}س}{\text{ظا}^٢س} \times ١$

$\text{هـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{ظتا}س}{\text{ظا}^٢س} = \text{هـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{ظتا}س}{١ - \text{ظتا}^٢س}$

$= \text{هـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{ظتا}س}{(١ - \text{ظتا}س)(١ + \text{ظتا}س)}$

$= \text{هـا}_{س\to 0} \frac{١}{١ + \text{ظتا}س} = \frac{١}{٢}$

تابع حل

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^{٢}س}{\text{ظا}^{٢}س} \times \frac{١}{١+١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}^{٢}س}{\text{ظا}^{٢}س} \times \frac{١}{٢}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

---

(٢٧)

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جتاس جتا٣س} - ١}{س^{٢}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{(١ - ٢\text{جا}^{٢}\frac{١}{٢}س)\text{جتا٣س} - ١}{س^{٢}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جتا٣س} - ٢\text{جا}^{٢}\frac{١}{٢}س\,\text{جتا٣س} - ١}{س^{٢}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{-٢\text{جا}^{٢}\frac{٣}{٢}س - ٢\text{جا}^{٢}\frac{١}{٢}س\,\text{جتا٣س}}{س^{٢}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} -٢\left(\frac{\text{جا}\frac{٣}{٢}س}{س}\right)^{٢} - ٢\,\text{نها}_{س \to ٠}\left(\frac{\text{جا}\frac{١}{٢}س}{س}\right)^{٢} \times \text{جتا}٣س$$

$$-٢ \times \frac{٩}{٤} - ٢ \times \frac{١}{٤} \times ١ = \frac{-١٨}{٤} - \frac{٢}{٤}$$

$$= \frac{-٢٠}{٤} = -٥$$

(٢٨)

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣\text{جتاس} - \text{جتا}٣س - ٢}{س^{٢}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣\text{جتاس} - ١ + ٢\text{جا}^{٢}س - ٢}{س^{٢}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣\text{جتاس} - ٣}{س^{٢}} + \frac{٢\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} ٣\left(\frac{\text{جتاس} - ١}{س^{٢}}\right) + ٢\left(\text{نها}_{س \to ٠}\frac{\text{جاس}}{س}\right)^{٢}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} ٣\left(\frac{\text{جتاس} - ١}{س^{٢}} \times \frac{\text{جتاس} + ١}{\text{جتاس} + ١}\right) + ٢$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} ٣\left(\frac{\text{جتا}^{٢}س - ١}{س^{٢}(\text{جتاس} + ١)}\right) + ٢$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} ٣\left(\frac{-\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}} \times \frac{١}{\text{جتاس} + ١}\right) + ٢$$

$$= ٣ \times -١ \times \frac{١}{٢} + ٢$$

$$= -\frac{٣}{٢} + ٢ = \frac{١}{٢}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

(٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{ظا(\frac{\pi}{2} - ٣س)}{ظا(\pi - ٥س)}$

الحل

$حا(\frac{\pi}{2} - س) = ضتا\frac{\pi}{2}$

$ضتا(\frac{\pi}{2} - س) = حا\frac{\pi}{2}$

$ظتا(\frac{\pi}{2} - ٣س) = \frac{ضتا(\frac{\pi}{2} - ٣س)}{حا(\frac{\pi}{2} - ٣س)}$

$= \frac{ضتا ٣س}{حا ٣س} = ظا ٣س$

$ظا(\pi - ٥س) =$ عاكس بالربع الثاني

$= - ظا ٥س$

$\lim_{س \to 0} \frac{ظتا ٣س}{ظا(\pi - ٥س)} = \lim_{س \to 0} \frac{ظا ٣س}{- ظا ٥س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا ٣س}{س} \times ٣}{- \frac{ظا ٥س}{٥س} \times ٥}$

$= \frac{١ \times ٣}{-١ \times ٥} = \frac{-٣}{٥}$

(٣) $\lim_{س \to \pi ٣} \frac{حا س}{\frac{س}{٣} - \pi}$

الحل

$ص = \frac{س}{٣} - \pi$

$\Leftarrow س = ٣(ص + \pi) = ٣ص + ٣\pi$

$س \to ٣\pi$ فان $ص \to ٠$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{حا(٣ص + ٣\pi)}{ص}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{حا ٣ص ضتا ٣\pi + ضتا ٣ص حا ٣\pi}{ص}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{- حا ٣ص + ضتا ٣ص \times ٠}{ص}$

$= - \lim_{ص \to ٠} \frac{حا ٣ص}{ص}$

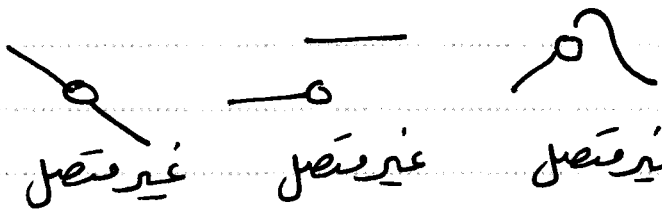
$= -٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الأتصال عند نقطة

مقدمة

يكون الأقتران متصل اذا لم يوجد فيه أي قطع (فجوة) عند الرسم حيث يمكن رسم الأقتران المتصل دون رفع رأس القلم عن الورقه



ملاحظة

اذا لم يتحقق اي شرط من هذة الشروط يكون الأقتران غير متصل أو منفصل عند س = م

تعريف

يكون الأقتران ق(س) متصل عند س = م اذا كان

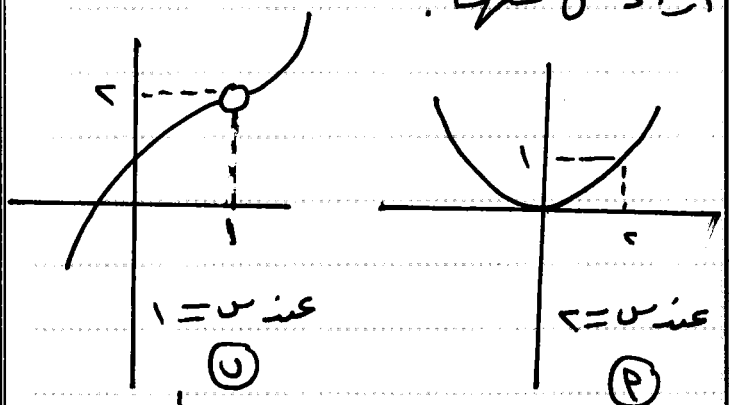
① ق(م) معرفة

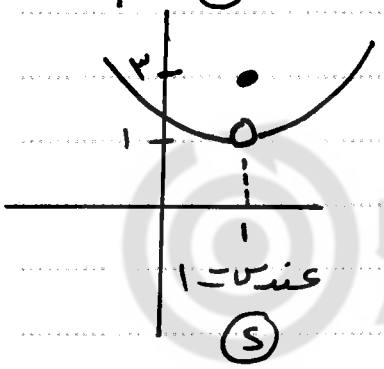
② $\lim_{س \to م}$ ق(س) موجودة

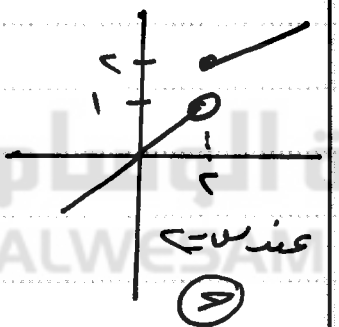
③ $\lim_{س \to م}$ ق(س) = ق(م)

مثال ①

بالاعتماد على الاشكال التاليه ادرس الاتصال عند النقطه المبينة ازاء كل منها ؟







يتبع الكل ⇐

مكتبة العلم ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

الحل

الشكل ④

$د(٢) = ١$ ، $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ١$

$\leftarrow \lim_{س \to ٢} هـ(س) = د(٢) = ١$

$\leftarrow$ متصل عند $س = ٢$

الشكل ①

$د(١)$ غير معرفة $\leftarrow د(س)$ غير متصل

الشكل ②

$د(٢) = ٢$

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ١$

$\leftarrow \lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة

$\leftarrow د(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

الشكل ⑤

$د(١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = \lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) = ١$

$\leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) \neq د(١)$

$\leftarrow د(س)$ غير متصل عند $س = ١$

مثال ②

ابحث في اتصال الأقترانات التاليه عند كل نقطه انتماء لكل منها

① $د(س) = س^٢ - ٣س + ٧$ $\quad س = ٢$

الحل

$د(٢) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢} (س^٢ - ٣س + ٧) = ٥$

متصل عند $س = ٢$

② $د(س) = \frac{٣س + ١}{س - ٢}$ $\quad س = ٥$

الحل

$د(٥) = \frac{١ + ٥ \times ٣}{٥ - ٢} = \frac{١٦}{٣}$

$\lim_{س \to ٥} \frac{٣س + ١}{س - ٢} = \frac{١٦}{٣}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٥} هـ(س) = د(٥) = \frac{١٦}{٣}$

$\leftarrow د$ متصل عند $س = ٥$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة هامة

اقتران كثير الحدود معرف على ح دائماً ونهايته دائماً موجودة لكل س ∈ ح والنهاية تساوي الصورة وبذلك يحقق اقتران كثير الحدود شرط الاتصال دائماً لكل س ∈ ح

كثيرات الحدود دائماً متصلة

أما الأقترانات النسبية فيه وقاقة كثير حدود فهو يكون متصل ماعدا اصفار المقام

نظرية

اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود فانه يكون متصل لكل س ∈ ح

نتيجة

اذا كان ق اقتران نسبي معرف عند س = p فان ق متصل عند س = p

مثال ③

اجب في اتصال الأقترانات التاليه

① ق(س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ عند س = 1

الحل

ق(1) = $\frac{0}{0}$ غير معرف

← ق(س) غير متصل عند س = 1

② ق(س) = $\begin{cases} س^2 & س \geq 2 \\ 2س & س < 2 \end{cases}$

عند س = 2 ، عند س = -4 ، عند س = 2

الحل

① عند س = 3

ق(س) = $س^2$ متصل لأنه كثير حدود

② عند س = -4

ق(س) = 2س متصل لأنه كثير حدود

③ عند س = 2 نقطة تحقيب

ق(2) = 4

نهاية ق(س) = 4 ، نهاية ق(س) = 2 × 2 = 4

س ← 2⁺ ، س ← 2⁻

← نهاية ق(س) = 4 = ق(2)

س ← 2

متصل عند س = 2

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④

اجب عن اتصال

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س-١}{س^{٢}-١} & س \neq ١ \\ ٢ & س = ١ \end{cases}$$

عند $س = ١$

الحل

$$\text{نها}_{س \to ١} د(س) = \text{نها}_{س \to ١} \frac{س-١}{(س-١)(س+١)}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

$د(١) = ٢$

$\text{نها}_{س \to ١} د(س) \neq د(١)$ غير متصل عند $س = ١$

مثال ⑤

اجب عن اتصال

$$د(س) = \begin{cases} ٤ & س = ص \\ ٦ & س \neq ص \end{cases}$$

عند $س = ١$ ، عند $س = ١٫٥$

الحل

① عند $س = ١$

$\text{نها}_{س \to ١} د(س) = ٦$ لأن $س \to ١$ ، $س \neq ١$ (كل)

$د(١) = ٤$

$\leftarrow \text{نها}_{س \to ١} د(س) \neq د(١)$

غير متصل عند $س = ١$

② عند $س = ١٫٥$

$د(١٫٥) = ٦$

$\text{نها}_{س \to ١٫٥} د(س) = ٦$

$\leftarrow \text{نها}_{س \to ١٫٥} د(س) = د(١٫٥) = ٦$

$س \to ١$ و ٥

متصل عند $س = ١$ و ٥

مثال ⑥

اجب عن اتصال

$$د(س) = \begin{cases} \frac{\text{حا} س^{٢}}{س} & س \neq ٠ \\ ١ & س = ٠ \end{cases}$$

عند $س = ٠$

الحل

$د(٠) = ١$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{حا} س^{٢}}{س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{حا} س \times س}{س}$

$س \to ٠$ ، $س \neq ٠$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{حا} س}{س} = ١$ ، $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س}{١} = ٠$

$\leftarrow \text{نها}_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة

$\leftarrow د(س)$ غير متصل عند $س = ٠$

مكتبة السام AL WESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

ابحث في الاتصال

$$د(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & س \neq 0 \\ 1 - 2جتا س & س = 0 \end{cases}$$

عند $س = 0$

الحل

$د(0) = 1 - 2جتا 0 = 1 - 2 = -1$

$\lim_{س \to 0^+} 1 - 2جتا س = -1$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{ظا س}{س} = -1$

$\lim_{س \to 0^+} د(س) = \lim_{س \to 0^-} د(س) = د(0)$

$\Rightarrow د(س)$ متصل عند $س = 0$

مثال ⑧

ابحث في الاتصال

$$د(س) = \begin{cases} 2س - 3 & س \leq 2 \\ |س^2 - 4| & س > 2 \end{cases}$$

عند $س = 0$ ، عند $س = 2$

الحل

① عند $س = 0$

$د(0) =$ صفر

$\lim_{س \to 0^+} (س^2 - 4) = -4 < 0$

$\lim_{س \to 0^-} (2س - 3) = -3 < 0$

$\lim_{س \to 0} د(س) = د(0)$ صفر

$\Rightarrow د(س)$ متصل عند $س = 0$

② عند $س = 2$

$د(2) = |2 \times 2 - 4| =$ صفر

$س$	$-\infty$		2		$+\infty$
$س - 2$		−	٠	+	
$|س - 2|$		+	٠	+	

$\lim_{س \to 2^+} |س - 2| = 0$

$\lim_{س \to 2^-} |س^2 - 4| =$ صفر

$\lim_{س \to 2} د(س) = د(2) =$ صفر

$\Rightarrow د(س)$ متصل عند $س = 2$

مثال ⑨

ابحث في الاتصال

$$د(س) = \begin{cases} \frac{|س^2 - 6|}{3 - س} & س \neq 3 \\ 2 & س = 3 \end{cases}$$

عند $س = 3$

يتبع الحل ⇐

مكتبة نوسام NAWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل

$$|٦-٤س| = \frac{|٤س-٦|}{٣}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{٦-٤س}{٣-س} & س < ٣ \\ \frac{٤س-٦}{٣-س} & س > ٣ \\ ٢ & س = ٣ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{٤(٣-س)}{٣-س} & س < ٣ \\ \frac{٤(س-٣)}{٣-س} & س > ٣ \\ ٢ & س = ٣ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢ & س \leq ٣ \\ -٢ & س > ٣ \end{cases}$$

$هـ(٣) = ٢$

$\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = ٢$ ما $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة

$هـ(س)$ غير متصل عند $س = ٣$

مثال ⑩

ابحث في اتصال

$هـ(س) = [٤س - ٣]$

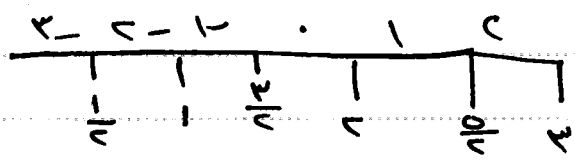
عند $س = ١$ عند $س = ٧/٤$

الحل

اعادة التعريف

طول المدرج $= \frac{١}{٤}$

$٤س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = \frac{٣}{٤}$



$$هـ(س) = \begin{cases} -٢ & -٢ \leq س < -١ \\ -١ & -١ \leq س < \frac{٣}{٤} \\ ٠ & \frac{٣}{٤} \leq س < ٢ \\ ١ & ٢ \leq س < \frac{٥}{٤} \\ ٢ & \frac{٥}{٤} \leq س < ٣ \end{cases}$$

① عند $س = ١$

$هـ(١) = -١$ ، $\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = -١$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = -٢$ $\lim_{س \to ١} هـ(س)$ غير موجودة

غير متصل عند $س = ١$

② عند $س = ٧/٤$

متصل عند $س = ٧/٤$ لأنه كثير حدود

مكتبة السام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظه

الاقتران $ق(س) = [\![أ س + ب]\!]$
يكون متصل عند جميع النقاط ماعدا نقاط التشعب فيكون منفصل عندها

مثال (١١)

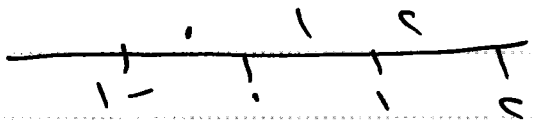
اثبت ان الاقتران
$ق(س) = (س-١)[\![س+١]\!]$
متصل عند $س = ١$

الحل

اعادة تعريف $[\![س+١]\!]$

صفر المقدار $= ١$ $\quad س+١ = ٠$

$\Leftarrow س = -١$



$$ق(س) = (س-١) \begin{cases} ١ & ، س \in]-\infty, ١[\\ ٠ & ، س = ١ \\ ١ & ، س \in]١, ٢[\\ ٢ & ، س \in [٢, \infty[\end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} س-١ & ، س \in]-\infty, ١[\\ ٠ & ، س = ١ \\ (س-١)^{٢} & ، س \in]١, \infty[\end{cases}$$

$ق(١) = ١ - ١ = $ صفر

$\lim_{س \to ١^{+}} ق(س) = (١-١)^{٢} = $ صفر

$\lim_{س \to ١^{-}} ق(س) = ١ - ١ = $ صفر

$\lim_{س \to ١} ق(س) = ق(١)$ متصل عند $س = ١$

مثال (١٢)

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ س - ب & س \le ١ \\ ٣ س & ١ < س < ٢ \\ ب س^{٢} - أ & س \ge ٢ \end{cases}$

اقتران متصل عند $س \in ح$ (على ح)
فجد قيم $أ$ ، $ب$ ؟

الحل

متصل على ح $\Leftarrow$ متصل عند $س = ١ ، ٢$

$\lim_{س \to ١^{+}} ٣ س = \lim_{س \to ١^{-}} (أ س - ب)$

$\Leftarrow ٣ \times ١ = أ - ب \Leftarrow أ - ب = ٣$ ---- ①

$\lim_{س \to ٢^{+}} ب س^{٢} - أ = \lim_{س \to ٢^{-}} ٣ س$

$٤ ب - أ = ٦$ ---- ②

معادلة ① + معادلة ②

$٣ ب = ٩ \Leftarrow ب = ٣$

وبالتعويض في ① $\Leftarrow أ - ٣ = ٣$

$أ = ٦$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ب س & س < ٢ \\ ٣ب & س = ٢ \\ ٣س + ب + ١٢ & س > ٢ \end{cases}$$

متصل عند $س = ٢$ فما قيمة $ب$ ؟

الحل

$\text{ق}(٢) = ٣ب$

بما أن $\text{ق}(س)$ متصل عند $س = ٢$

$\therefore$ نهاية $\text{ق}(س)$ عندما $س \to ٢^{+}$ = $\text{ق}(٢)$

$٣ب = ٢ب + ٤ + ١٢$

$ب - ١٦ = ٠$ ... (١)

نهاية $\text{ق}(س)$ عندما $س \to ٢^{-}$ = $\text{ق}(٢)$

$٣ب = ٨ + ٢ب$

$ب - ٨ = ٠$ ... (٢)

(١) − (٢)

$٨ = ٠$ ⇐ $٣ب - ٢٤ = ٠$

$ب = ٨$ تحقق في (٢)

$٨ - ٨ = ٠$

$ب = ٨$

مثال (١٤)

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٣} - (٣ - ٢ح)س - ٦ح}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ٤س - ١ & س = ٣ \end{cases}$$

متصلاً عند $س = ٣$ فما قيمة $ح$ ؟

الحل

$\text{ق}(٣) = ٤ \times ٣ - ١ = ١١$

نهاية $\dfrac{س^{٣} - (٣ - ٢ح)س - ٦ح}{س - ٣} = ١١$ عندما $س \to ٣$

قسمة تركيبية

	$س^{٣}$	$س$	صادي
٣	١	$-٣ + ٢ح$	$-٦ح$
		٣	$٦ح$
	١	$ح٢$	٠

نهاية $\dfrac{(س - ٣)(س + ح٢)}{س - ٣} = ١١$ عندما $س \to ٣$

$٣ + ح٢ = ١١$

$ح٢ = ١١ - ٣ = ٨$

$ح = ٤$

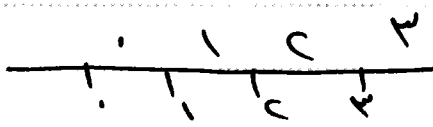
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٥)

$$ل(س) = \begin{cases} [س] + ٢ & س \geq ٢ \\ ٢ س & س < ٢ \end{cases}$$

متصل عند $س = ٢$ جد ثابت ٢ ؟

الحل



$$\text{نها}_{س \to ٢^+} [س] + ٢ = \text{نها}_{س \to ٢^-} ٢ س$$

$$٢ + ٢ = ٢ ٢$$

$$٢ = ٢$$

مثال (١٦)

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^٢ س - س^٢}{س \text{ جا} ٢ س} & س < ٠ \\ ٢ & س = ٠ \\ \dfrac{س^٢ + (١ - ٢)س}{٢ س} & س > ٠ \end{cases}$$

متصل عند $س = ٠$ أوجد ٢ ، $ن$ ؟

الحل

$$ق(٠) = ٢$$

$$\text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{س^٢ + (١ - ٢)س}{٢ س} = ٢$$

$$\text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{س + (١ - ٢)}{٢} = ٢$$

$$\frac{٠ + ١ - ٢}{٢} = ٢$$

$$١ - ٢ = ٤ \Leftarrow$$

$$٣ ٢ = ١ \quad ٢ = \frac{١}{٣}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠^-} \frac{\text{جا}^٢ س - س^٢}{س \text{ جا} ٢ س} = ٢$$

بقسمة البسط والمقام على $س^٢$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\frac{\text{جا}^٢ س}{س^٢} - \frac{س^٢}{س^٢}}{\frac{س \text{ جا} ٢ س}{س^٢}} = ٢$$

$$\frac{ن^٢ - ١}{٢} = ٢ \Leftarrow ن^٢ - ١ = ٤$$

$$ن^٢ = ٥$$

$$ن = \pm \sqrt{٥} \Leftarrow$$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (١٧)

اذا كانت نها $\left(\frac{\text{أ}}{\text{س}-٢} - \frac{\text{ب}}{\text{س}^٢-٤}\right) = \frac{١}{٤}$
فاوجد قيمة أ ، ب ؟

الحل

توحيد المقام

نها $\left(\frac{\text{أ}(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} - \frac{\text{ب}}{\text{س}^٢-٤}\right) = \frac{١}{٤}$

س ← ٢

= نها $\left(\frac{\text{أ}(\text{س}+٢) - \text{ب}}{\text{س}^٢-٤}\right) = \frac{١}{٤}$

س ← ٢

بما المقام = ٠ ⇐ البسط = ٠

$\text{أ}(٢+٢) - \text{ب} = ٠$

$٤\text{أ} - \text{ب} = ٠$ ---- (١)

القسمة التركيبية

$\text{أ}\,\text{س}^٢ + ٢\text{أ} - \text{ب}$ على $(\text{س}-٢)$

	أ		
٢		٢أ	ب - ٢أ
	أ	٤أ	ب - ٤أ = ٠

نها $\frac{\text{أ}(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} = \frac{١}{٤}$

س ← ٢

$\frac{\text{أ}}{٤} = \frac{١}{٤}$ ⇐ أ = ١

$٤\text{أ} - \text{ب} = ٠$

$٤ \times ١ - \text{ب} = ٠$ ⇐ ب = ٤

مثال (١٨)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

نظريات في الأتصال

نظرية

اذا كان ق ، هـ أقترانين متصلين عند س = م فإن

① ق ± هـ متصل عند س = م

② ق × هـ متصل عند س = م

③ $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = م بشرط هـ(م) ≠ ٠

أي أن

متصل ± متصل = متصل

متصل × متصل = متصل

$\frac{\text{متصل}}{\text{متصل} \neq ٠}$ = متصل

اذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند س = م فاثبت أن ق + هـ متصل عند س = م

البرهان

ق(م) معرفه ، هـ(م) معرفه

لها ق(س) موجوده ، لها هـ(س) موجودة
س ← م س ← م

لها ق(س) = ق(م) لأن ق متصل
س ← م

لها هـ(س) = هـ(م) هـ متصل
س ← م

نفرض ان ل(س) = ق(س) + هـ(س)

ل(م) = ق(م) + هـ(م) معرفه

لها ل(س) = لها (ق(س) + هـ(س))
س ← م س ← م

= لها ق(س) + لها هـ(س)
س ← م س ← م

⇐ لها ل(س) = ل(م)
س ← م

⇐ ل(س) متصل

وبنفس الطريقه نثبت الطرح والضرب والقسمه

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

إذا كان $ق(س) = س^2 + 5س$
$هـ(س) = 3س - 1$ اجب في اتصال
$ق(س) \times هـ(س)$ عند $س = 2$

الحل

$ق(س)$ متصل عند $س = 2$ كثير حدود
$هـ(س)$ متصل عند $س = 2$ كثير حدود

$\Leftarrow ق(س) \times هـ(س)$ متصل عند $س = 2$
حسب نظريات في الاتصال

ملاحظه

اذا تحققت شروط النظريه نطبق نظريات في الاتصال ، واذا لم تتحقق الشروط ندرس الأقترانين معًا

يعني انه
اذا كان احد الأقترانين أو كلاهما غير متصل يجب دراسة الأقترانين

مثال ②

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 & س < 2 \\ 3س - 2 & س \geq 2 \end{cases}$$

$هـ(س) = س^3 - 1$

بين ان $ق(س) \times هـ(س)$ متصل عند $س = 2$

$ق(2) = 3 \times 2 - 2 = 4$
$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = 3 \times 2 - 2 = 4$
$س \to 2^+$

$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = 2^2 = 4$
$س \to 2^-$

$\lim_{س \to 2} ق(س) = ق(2)$ $\Leftarrow$ $ق$ متصل عند $س = 2$

$هـ(س)$ متصل لأنه كثير حدود

$\Leftarrow ق(س) \times هـ(س)$ متصل عند $س = 2$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ③

$$م(س) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{8}س^3+1}{س+2} & س \neq -2 \\ \frac{3}{4} & س = -2 \end{cases}$$

$$هـ(س) = \frac{ظا\frac{\pi}{4}س}{س}$$

اثبت ان $م+هـ$ متصل عند $س=-2$

الحل

$$م(-2) = \frac{3}{4}$$

$$\text{نها}_{س \to -2^+} \frac{\frac{1}{8}س^3+1}{س+2} = \text{نها}_{س \to -2^+} \frac{\frac{1}{8}(س^3+8)}{س+2}$$

$$= \text{نها}_{س \to -2^+} \frac{\frac{1}{8}(س+2)(س^2-2س+4)}{س+2}$$

$$= \frac{1}{8}(4+4+4) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{نها}_{س \to -2^-} م(س) = \frac{3}{4}$$

$م(س)$ متصل عند $س=-2$

$$هـ(-2) = \frac{ظا(-\frac{\pi}{2})}{-2} = \frac{-ظا\frac{\pi}{2}}{-2} = \text{صفر}$$

$$\text{نها}_{س \to -2} \frac{ظا\frac{\pi}{4}س}{س} = \frac{\text{صفر}}{-2} = \text{صفر}$$

$هـ(س)$ متصل

$\Leftarrow م+هـ$ متصل عند $س=-2$

مثال ④

$$هـ(س) = \begin{cases} 2-3س & س \leq 1 \\ س^2-2 & س > 1 \end{cases}$$

$هـ(س) = 10-2هـ(س)$ اثبت في اتصال $هـ(س)$ عند $س=1$

الحل

10 متصل كـ دالة ثابتة

نبحث في اتصال $هـ$

$$هـ(1) = 2-3 \times 1 = -1$$

$$\text{نها}_{س \to 1^+} هـ(س) = 1^2-2 = -1$$

$$\text{نها}_{س \to 1^-} هـ(س) = 2-3 \times 1 = -1$$

$\Leftarrow هـ$ متصل عند $س=1$

$\Leftarrow 2هـ$ متصل

$\Leftarrow 10-2هـ(س)$ متصل عند $س=1$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

$$ق(س) = \begin{cases} س^3 + ٤ & س < ٢ \\ ٥س & س \geq ٢ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^2 & س < ٢ \\ س^2 + ٢ & س \geq ٢ \end{cases}$$

وكان $ل(س) = ق(س) + هـ(س)$

ابحث في اتصال $ل(س)$ عند $س = ٢$

الحل

بما ان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ غير متصلين عند $س = ٢$ لذلك تقوم بجمع الاقترانين.

$$ل(س) = \begin{cases} س^3 + س^2 + ٤ & س < ٢ \\ ٥س + س^2 + ٢ & س \geq ٢ \end{cases}$$

$ل(٢) = ٥ \times ٢ + ٤ + ٢ = ١٦$

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = ٨ + ٤ + ٤ = ١٦$

$\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = ١٠ + ٤ + ٢ = ١٦$

$\lim_{س \to ٢} ل(س) = ١٦ = ل(٢)$

$ل(س)$ متصل عند $س = ٢$

مثال ⑥

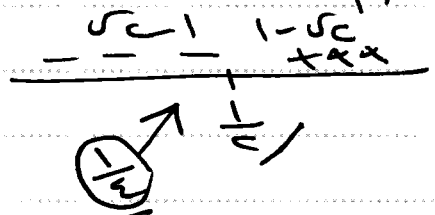
$ق(س) = ٣س + |س - ١| + [س]$

ابحث في اتصال $ق(س)$ عند $س = \frac{١}{٤}$

الحل

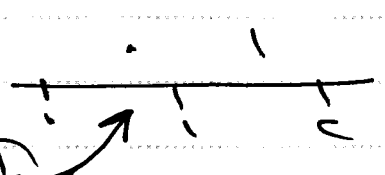
① $٣س$ متصل عند $س = \frac{١}{٤}$ لكثير حدود

② $|س - ١|$



$(س - ١)$ و $(١ - س)$ متصل كثير حدود

③ $[س]$



= صفر $\quad ٠ \leq س < ١$

متصل كثير حدود

$\Rightarrow ق(س)$ متصل عند $س = \frac{١}{٤}$

حسب نظريات في الاتصال

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

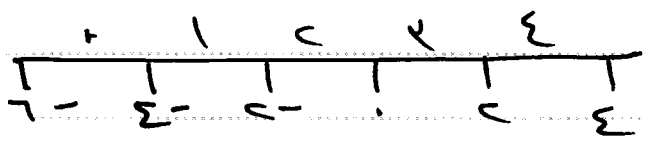
اذا كان
$$ه(س) = (س-٢)^{٣} [\frac{١}{٢}س + ٣]$$
ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٢$

الحل

اعادة تعريف $[\frac{١}{٢}س + ٣]$

طول الدرجة $= \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

$\frac{١}{٢}س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٦$



$$ه(س) = (س-٢)^{٣} \begin{cases} ٣ & ٠ \le س < ٢ \\ ٤ & ٢ \le س < ٤ \end{cases}$$

$$ه(س) = \begin{cases} ٣(س-٢)^{٢} & ٠ \le س < ٢ \\ ٤(س-٢)^{٢} & ٢ \le س < ٤ \end{cases}$$

$ه(٢) = ٤(٢-٢)^{٢} = صفر$

نهـ $٤(س-٢)^{٢} = ٠$
$س \to ٢^{+}$

نهـ $٣(س-٢)^{٢} = صفر$
$س \to ٢^{-}$

نهـ $ه(س) = ه(٢)$ $\Leftarrow$ $ه(س)$ متصل
$س \to ٢$

مثال (٨)

$$ه(س) = \begin{cases} س^{٢} & س \le ١ \\ ٣س + ٢ & س > ١ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢س & س \le ١ \\ -٢ & س > ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال $ه + هـ$ عند $س = ١$

نلاحظ ان كل من $ه$ و $هـ$ غير متصلين لذلك نجد قاعدة $ه + هـ$

لتكن $ل(س) = ه(س) + هـ(س)$

$$ل(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢س & س \le ١ \\ ١ + ٢س & س > ١ \end{cases}$$

$ل(١) = ١^{٢} + ٢ \times ١ = ٣$

نهـ $ل(س) = ١ + ٢س = ٣$
$س \to ١^{+}$

نهـ $ل(س) = ١^{٢} + ٢ \times ١ = ٢$
$س \to ١^{-}$

نهـ $ل(س) = ٣ = ل(١)$
$س \to ١$

$ل(س)$ متصل عند $س = ١$

مثال ⑨

$د(س) = [س+٢] - [س-١]$

ابحث في اتصال $د(س)$ عند $س = ١$

الحل

$د(س) = [س+٢] - [س] + ١$

$= ٣$ متصل كثير حدود

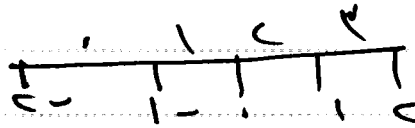
مثال ⑩

$د(س) = [س+٢] - [٤س-١]$

ابحث في اتصال $د(س)$ عند $س = ١$

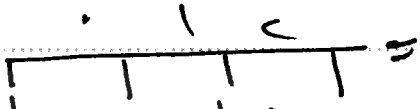
الحل

$[س+٢]$



غير متصل

$[٤س-١]$



غير متصل

$د(س) = [س+٢] - [٤س-١]$

$= \begin{cases} ٢ & \\ ٢ & \end{cases}$

$س \geq \frac{١}{٤}$

$س < ١,٥$

نطبق شروط الاتصال على $د(س)$

$د(١) = [١+٢] - [٤\times١-١]$

$= ٣ - ١ = ٢$

$\lim_{س \to ١^+} د(س) = ٣ - ١ = ٢$

$\lim_{س \to ١^-} د(س) = ٢ - ٠ = ٢$

$\lim_{س \to ١} د(س) = ٢ = د(١)$

$د(س)$ متصل عند $س = ١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ① ص٥٢

اذا كان $ه(س) = \frac{|س-٤|}{س+٤}$ $س \neq -٤$

احث في اتصال ه عند $س = ٤$

الحل

$ه(٤) = \frac{|٤-٤|}{٤+٤} = \frac{٠}{٨} = ٠$

ه معرفة عند $س = ٤$

$\frac{|س-٤|}{٤}$ $\quad \frac{س-٤}{+} \quad \frac{٤-س}{}$

$نها_{س \to ٤^+} ه(س) = نها \frac{س-٤}{س+٤} = صفر$

$نها_{س \to ٤^-} ه(س) = نها \frac{٤-س}{س+٤} = \frac{٠}{٨} = صفر$

$نها_{س \to ٤} ه(س) = ه(٤) = صفر$

متصل عند $س = ٤$

تدريب ② ص٥٣

① اذا كان $ه(س) = [س]$ حيث مجموعة ميم س الى يكون عندها ه اقترانا غير متصل

الحل

$س \in ص$

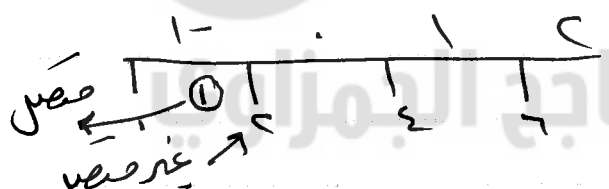
② اقترح قاعدة لأقل ثلاث أكبر عدد صحيح بحيث يكون متصلا عند $س = ١$ وغير متصل عند $س = ٢$

الحل

$ه(س) = [\frac{١}{٢}س - ١]$

$ه(س)$ متصل عند $س = ١$

$ه(س)$ غير متصل عند $س = ٢$



مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ③ ص٥٣

اذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب & س < ٣ \\ ٦ & س = ٣ \\ أ س - ب & س > ٣ \end{cases}$$

متصلاً عند س = ٣ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

الحل

هـ متصل عند س = ٣

① $\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = هـ(٣)$

$٣أ - ب = ٦$ ... ①

② $\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = هـ(٣)$

$٩أ + ب = ٦$ ②

طريقة الحذف

$٣أ - ب = ٦$

$٩أ + ب = ٦$ × ٢

$\overline{\quad}$

$١٢أ = ١٢$ ← بالجمع

$أ = \frac{١٢}{١٢} = ١$

بالتعويض $أ = \frac{٦}{٧}$ في ①

$٣ \times \frac{٦}{٧} - ب = ٦$

$\frac{١٨}{٧} - ب = ٦$

$ب = \frac{١٨}{٧} - ٦ = \frac{١٨}{٧} - \frac{٤٢}{٧}$

$ب = \frac{-٢٤}{٧}$

$أ = \frac{-٢٤}{١٤} = \frac{-١٢}{٧}$

تدريب ④ ص٥٥

برهان الفرع ⑤

هـ ، ل متصلتين عند س = أ البرهان أن هـ - ل متصل عند س = أ

البرهان:

نفرض أن هـ = هـ - ل

هـ(أ) = هـ(أ) - ل(أ)

وحيث أن هـ ، ل اقترانان متصلان عند س = أ فإن

$\lim_{س \to أ} هـ(س) = \lim_{س \to أ} هـ(س) - \lim_{س \to أ} ل(س)$

$= هـ(أ) - ل(أ)$

⇐ هـ متصل عند س = أ

نفس الطريقة ③ ما ④ في نظريات الاتصال

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ⊙ ص٥٦

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & س > ١ \\ ٣س^{٢} & س \leq ١ \end{cases}$

$ع(س) = \begin{cases} س^{٢} & س > ١ \\ |س| & س \leq ١ \end{cases}$

فاحث في اتصال $هـ \times ع$ عند $س = ١$ بطريقتين.

الحل

$هـ(١) = ٣(١)^{٢} = ٣$

$\lim_{س \to ١^{+}} هـ(س) = ٣$

$\lim_{س \to ١^{-}} هـ(س) = ٢ \times ١ + ١ = ٣$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = ١$

$|س| = \begin{cases} س & س \geq ١ \\ -س & س < ١ \end{cases}$

$ع(س) = \begin{cases} س^{٢} & س > ١ \\ س & س \leq ١ \end{cases}$

$ع(١) = ١$

$\lim_{س \to ١^{+}} ع(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ١^{-}} ع(س) = ١$

$\therefore ع(س)$ متصل عند $س = ١$

$\therefore هـ \times ع$ متصل عند $س = ١$

طريقة ① الدمج

$هـ \times ع = \begin{cases} (٢س + ١)س^{٢} & س > ١ \\ ٣س^{٢} \times س & س \leq ١ \end{cases}$

نفرض $هـ \times ع = ل$

$ل(١) = ٣ \times ١^{٢} \times ١ = ٣$

$\lim_{س \to ١^{+}} ل(س) = ٣$

$\lim_{س \to ١^{-}} ل(س) = (٢ + ١) \times ١ = ٣$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = ١$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

تدريب ⑥ ص٥٧

اذا كان $د(س) = (س - ٥)^{٣}$

$هـ(س) = [س + ٢]$

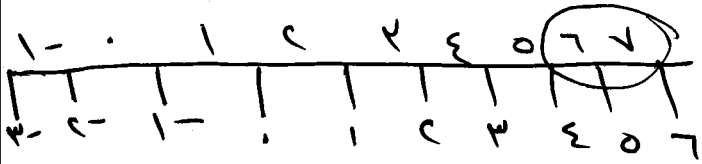
فابحث في اتصال الاقتران $د \times هـ$ عند كل من $س = -٢$

$س = ٥$

الحل

$[س + ٢]$ طول الدرجة $= ١$

$س + ٢ = ٠ \leftarrow س = -٢$



$$هـ(س) = \begin{cases} -١ & -٣ \leq س < -٢ \\ ٠ & -٢ \leq س < -١ \end{cases}$$

$$د \times هـ = \begin{cases} -(س-٥)^{٣} & -٣ \leq س < -٢ \\ ٠ & -٢ \leq س < -١ \end{cases}$$

$(د \times هـ)(-٢) =$ صفر

هنا $(د \times هـ)(س) =$ صفر

$س \to -٢^{+}$

هنا $(د \times هـ)(س) = -(-٢-٥)^{٣}$

$س \to -٢^{-}$ $= -(-٧)^{٣}$

$= +٣٤٣$

$\Rightarrow (د \times هـ)(س)$ غير متصل عند $س = -٢$

② عند $س = ٥$

$(د \times هـ)(س)$

$$\begin{cases} ٦(س-٥)^{٣} & ٤ \leq س < ٥ \\ ٧(س-٥)^{٣} & ٥ \leq س < ٦ \end{cases}$$

$(د \times هـ)(٥) = ٧(٥-٥)^{٣} =$ صفر

هنا $(د \times هـ)(س) = ٧(٥-٥)^{٣}$

$س \to ٥^{+}$ $=$ صفر

هنا $(د \times هـ)(س) = ٦(٥-٥)^{٣}$

$س \to ٥^{-}$ $=$ صفر

$\Rightarrow (د \times هـ)(س)$ متصل عند

$س = ٥$

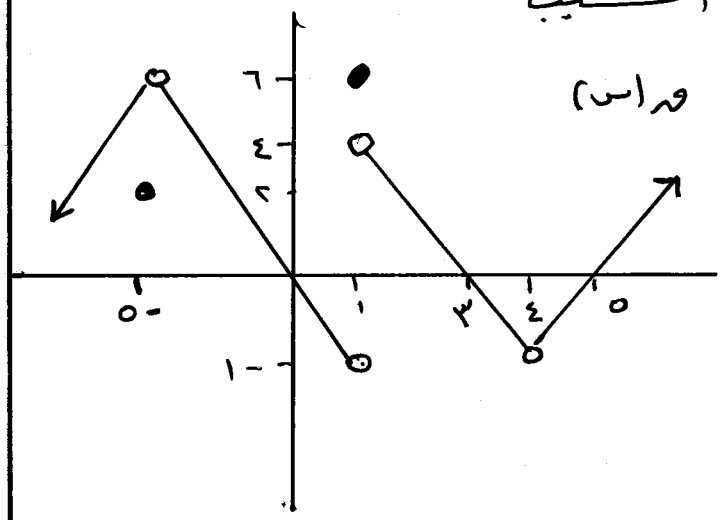
مكتبة المعلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

صفحة (٥٨)

السؤال الأول

معتمداً الشكل المقابل الذي يمثل منحنى الأقتران هـ ، ما قيم س التي يكون عندها هـ غير متصل مع ذكر السبب



الحل

عند $\boxed{س = -٥}$

هـ(-٥) = ٢

هنا $\lim_{س \to -٥}$ هـ(س) = ٦

$\lim_{س \to -٥}$ هـ(س) ≠ هـ(-٥)

$\therefore$ هـ غير متصل عند س = -٥

عند $\boxed{س = ١}$

هـ(١) = ٦

هنا $\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) = ٤ ، هنا $\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) = -١

$\because$ هنا $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) غير موجودة

$\therefore$ هـ(س) غير متصل عند س = ١

عند $\boxed{س = ٤}$

هـ(٤) غير معرفة

$\therefore$ هـ(س) غير متصل عند س = ٤

قيم س = {-٥ ، ١ ، ٤}

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

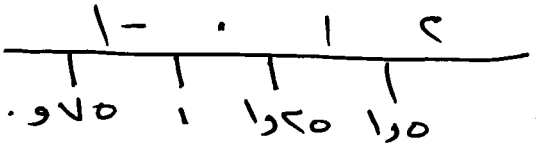
السؤال الثاني

د(س) = [٤س - ٤] ابحث في اتصال الأقتران د عند س = ١٫٢٥

الحل

[٤س - ٤] طول الدرجة = ٠٫٢٥

٤س - ٤ = ٠ ⇐ س = ١



د(١٫٢٥) = ١

$\lim_{س \to ١٫٢٥^+}$ د(س) = ١

$\lim_{س \to ١٫٢٥^-}$ د(س) = صفر

$\lim_{س \to ١٫٢٥}$ د(س) غير موجودة

⇐ د(س) غير متصل عند س = ١٫٢٥

السؤال الثالث ص٥٨

ابحث في اتصال

د(س) = $\frac{١ - س^{٢}}{س - ١}$ عند س = ١

الحل

د(١) = $\frac{صفر}{صفر}$ غير معرفة

د(س) غير متصل عند س = ١

السؤال الرابع

ابحث في اتصال هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ عند س = ٢

هـ(٢) غير معرفة

هـ(س) غير متصل عند س = ٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس ص٥٨

اذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & س < 0 \\ 1 - جتا س & س \geq 0 \end{cases}$

احسب في اتصال د عند $س = 0$

الحل

$د(س) = \begin{cases} -\frac{ظا س}{س} & س < 0 \\ 1 - جتا س & س \geq 0 \end{cases}$

$د(0) = 1 - جتا 0 = 1 - 1 = صفر$

$\lim_{س \to 0^+} د(س) = 1 - جتا 0 = صفر$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{-ظا س}{س} = -1$

$\lim_{س \to 0}$ د(س) غير موجودة

د(س) غير متصل عند $س = 0$

السؤال السادس ص٥٨

اذا كان $ل(س) = \begin{cases} \sqrt{س - 3} & س > 3 \\ أ س^2 - 19 & س \leq 3 \end{cases}$

احسب في اتصال ل إذا كان ل عند $س = 3$

الحل

$أ س^2 - 19$: $س^2 - 9$ ، $س - 9$

	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$س^2 - 9$	+	+	0	−	0	+	+
$س - 9$	−	−	−	−	0	+	+

$أ = +1$ ، -3

$ل(س) = \begin{cases} \sqrt{س - 3} & س > 3 \\ 9 - س^2 & س \leq 3 \end{cases}$

$ل(3) = 9 - 9 = صفر$

$\lim_{س \to 3^+} \sqrt{س - 3} = صفر$ لأن

	3		$+\infty$
$س - 3$	0	+	+

$\lim_{س \to 3^-} 9 - س^2 = صفر$

$\lim_{س \to 3}$ ل(س) = ل(3) = صفر

ل متصل عند $س = 3$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السابع ص٥٩

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{|س-١|-٢}{س-٢} & س \neq ٢ \\ ٥ & س = ٢ \end{cases}$$

اثبت أن هـ متصل عند س = ٢

الحل

$$|س-١| = \begin{cases} س-١ & س \geq ١ \\ -(س-١) & س < ١ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س-١-٢}{س-٢} = ١ & س > ٢ \\ \frac{-(س-١)-٢}{س-٢} = -١ & س < ٢ \\ ٥ & س = ٢ \end{cases}$$

$\therefore$ هـ(س) = ١ عندما س $\to$ ٢

هـ(٢) = ٥

$\therefore$ هـ(س) $\neq$ هـ(٢) عندما س $\to$ ٢

$\therefore$ هـ(س) غير متصل عند س = ٢

السؤال الثامن ص٥٩

$$ك(س) = \begin{cases} ٦+س & س \leq -٢ \\ ٢-س & -٢ < س \leq ٢ \\ ٢س-١ & س > ٢ \end{cases}$$

اثبت أن ك متصل عند س = ٢

الحل

ك(٢) = ٢×٢ − ١ = ٣

هنا ك(س) = ٢×٢ − ١ = ٣

س $\to$ ٢+

هنا ك(س) = ٢ − ٢ = صفر

س $\to$ ٢−

هنا ك(س) غير موجود

س $\to$ ٢

$\therefore$ ك(س) غير متصل عند س = ٢

السؤال التاسع ص٥٩

$$ع(س) = \begin{cases} \frac{٩}{س} + س^٢ & ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٣ & ٢ < س < ٣ \\ ٧ & س = ٣ \end{cases}$$

متصلاً عند س = ٢ مجموعة ؟

الحل [س]

تابع الحل ←

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{أ}{س} + س^2 & ٠ < س \leq ٢ \\ ٣ + ٢ & ٢ < س < ٣ \\ ٧ & س = ٣ \end{cases}$$

متصل عند $س = ٢$ النهاية موجودة

$$\text{نها } ق(س) = \text{نها } ق(س)$$
$$س \to ٢^+ \qquad س \to ٢^-$$

$$٥ = \frac{أ}{٢} + ٤$$

$$\frac{أ}{٢} = ٥ - ٤ = ١$$

$$\boxed{أ = ٢}$$

السؤال الهامش ص ٥٩

$$ل(س) = \begin{cases} \frac{س^3 + س^2 + ٢س - ٤}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٥س - ١ & س = ١ \end{cases}$$

اكتب في اتصال ل عند $س = ١$

الحل

$$ل(١) = ٥ \times ١ - ١ = ٤$$

$$\text{نها } ق(س) = \text{نها } \frac{س^3 + س^2 + ٢س - ٤}{س - ١}$$
$$س \to ١ \qquad س \to ١$$

قسمة تركيبية

	$س^3$	$س^2$	$س$	حد
١	١	١	٢	-٤
		١	٢	٤
	١	٢	٤	

$$= \text{نها } \frac{(س - ١)(س^2 + ٢س + ٤)}{س - ١}$$
$$س \to ١$$

$$= (١ + ٢ \times ١ + ٤) = ٧$$

$$\text{نها } ل(س) \neq ل(١)$$
$$س \to ١$$

$ل(س)$ غير متصل عند $س = ١$

السؤال الحادي عشر

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + س & س < ٢ \\ [س + ٤] & س = ٢ \\ \sqrt{س + ٥} + \frac{٦}{س} & س > ٢ \end{cases}$$

اكتب في اتصال ق عند $س = ٢$

الحل

$$ق(٢) = [٢ + ٤] = ٦$$

← يتبع الحل

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$\text{هـا}\ س^2+س = 4+2 = 6$
$س \to -2$

$\text{هـا} \sqrt{س^2+5} + \frac{6}{س}$
$س \to 2^+$

$= \sqrt{4+5} + \frac{6}{2}$
$= \sqrt{9} + 3 = 3+3 = 6$

$\text{هـا}\ ق(س) = 6 = ق(2)$
$س \to 2$
متصل عند $س = 2$

السؤال الثاني عشر ص ٦٠

$ل(س) = \begin{cases} س^2+ب & 0 \le س < 2 \\ |س-1|-5 & 2 \le س \le 3 \end{cases}$

جد قيمة الثابت ب التي تجعل ل متصلاً عند $س = 2$

الحل

$|س-1| = \begin{cases} س-1 & س \ge 1 \\ -(س-1) & س < 1 \end{cases}$

$ل(س) = \begin{cases} س^2+ب & 0 \le س < 2 \\ س-5 & 2 \le س \le 3 \end{cases}$

متصل عند $س = 2$

$\text{هـا}\ ل(س) = \text{هـا}\ ل(س)$
$س \to 2^+ \qquad س \to 2^-$

$ب+4 = 2-5$
$ب+4 = -3$
$ب = -7$

السؤال الثالث عشر

$ق(س) = \begin{cases} 3س+5 & س \in ص \\ س^2-4 & س \notin ص \end{cases}$

اختبر في اتصال ق عند $س = 3$

الحل

$ق(3) = 3 \times 3 + 5$
$= 9+5 = 14$

$\text{هـا}\ ق(س) = (3)^2 - 4$
$س \to 3$
$= 18-4 = 14$

$\text{هـا}\ ق(س) = ق(3)$
$س \to 3$

ق متصل عند $س = 3$

مكتبة السلام ALWSAM
الوعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) صيفية

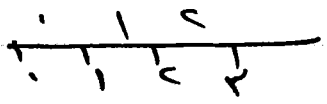
اذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س] + ب & س \le ٢ \\ \frac{١٠}{س} & ٢ < س \le ٣ \end{cases}$

مجموعة الثابت ب التي تجعل ق متصلاً عند س = ٢

الحل

$\lim_{س \to ٢^-} [س] + ب = \lim_{س \to ٢^+} \frac{١٠}{س}$

$١ + ب = \frac{١٠}{٢} = ٥$



$ب = ٤$

---

② وزارة (٢٠١٩) شتوية

اذا كان ق، ك قترانان متصلاً عند س = ٤، وكان ٣ ق(٤) = ٦ وكانت $\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٤ ب$ واحد فقط ب

الحل

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = \lim_{س \to ٤^+} ك(س)$

$\Rightarrow ق(٤) = \frac{٦}{٣} = ٢$

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٢ = ٤ ب$

$ب = \frac{١}{٢}$

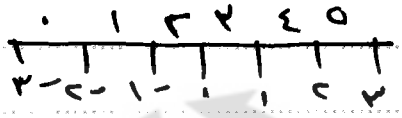
---

③ وزارة (٢٠١٣) صيفية

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س \le ٢ \\ [س + ٣] & س > ٢ \end{cases}$

اجب في اتصال ق(س) عند س = ٢

الحل



$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٢^٢ + ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٥$

$ق(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢) = ٥$

متصل عند س = ٢

مكتبة الإسلام ALISLAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ وزارة (٢٠١٤) شتوية

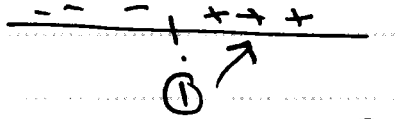
اذا كان
$$هـ(س) = \begin{cases} س^2 + 2 & س < 1 \\ 3س^2 & س \geq 1 \end{cases}$$

$$و(س) = \begin{cases} س^2 & س < 1 \\ |س| & س \geq 1 \end{cases}$$

اثبت اتصال $هـ + و$ عند $س = 1$

الحل

$|س|$: $-س$ (س < 0)، $س$ (س ≥ 0)



$$و(س) = \begin{cases} س^2 & س < 1 \\ س & س \geq 1 \end{cases}$$

نلاحظ ان $هـ$ ، $و$ غير متصلين عند $س = 1$

نجد قاعدة $(هـ + و)$ (دوما لا تكتب اشارة)

$$ل = هـ(س) + و(س) = \begin{cases} س^2 + س + 2 & س < 1 \\ 3س^2 + س & س \geq 1 \end{cases}$$

$ل(1) = 3 + 2 = 5$

$$\text{نها}_{س \to 1^+} ل(س) = 3(1)^2 + 1 + 2 = 5$$

نها $ل(س)$ $س \to 1$ $= 5$

نها $ل(س)$ $س \to 1$ $= هـ(1) = 5$

$\Leftarrow$ $ل(س) = هـ(س) + و(س)$ متصل عند $س = 1$

---

⑤ وزارة (٢٠١٤) صيفية

اذا كان
$$هـ(س) = \begin{cases} |س^2 - 1| - 1 & س \leq 3 \\ [\frac{1}{2}س + 3] & 2 \leq س < 4 \end{cases}$$

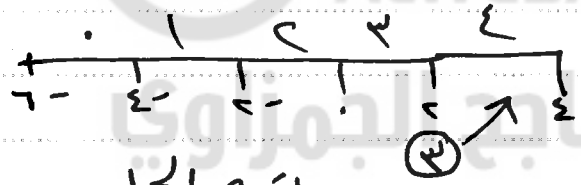
اكتب مجال انصال $هـ(س)$ عند $س = 3$

الحل

$|س^2 - 1|$: $س^2 - 1$ ($س \leq -1$ أو $س \geq 1$)، $-(س^2 - 1)$ ($-1 < س < 1$)

$[\frac{1}{2}س + 3]$ صورة المدرج $= 2$

$\frac{1}{2}س + 3 = 0 \Leftarrow \frac{1}{2}س = -3 \Leftarrow س = -6$



$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س}{ج} - ١ & -١ \le س < ٣ \\ ٤ & ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \frac{٣}{ج} - ١ = \frac{١}{ج}$

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) غير موجود

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند س = ٣

⑥ دالة $د(س، ص)$ متصلة

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٤س + ٢ & ٠ < س < ٢ \\ \frac{(٢س+١)^{١٠} - ٥^{٢}}{س - ٢} & ٢ < س \le ٤ \end{cases}$

أثبت أن ق(س) متصل عند س = ٢

الحل

$ق(٢) = ١٠$

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{(٢س+١)^{٢} - ٥^{٢}}{س - ٢} =$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{(٢س+١+٥)(٢س+١-٥)}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{(٢س+٦)(٢س-٤)}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} ٢(س+٣)(٢س-٤) = ٢(٥)(٠) = ٠$

$\lim_{س \to ٢^-} ٤س + ٢ = ٤ \times ٢ + ٢ = ١٠$

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) غير موجود

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند س = ٢

⑦ دالة $د(س، ص)$ متصلة

إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \frac{ح(س) - ٩ق^{٢}}{س \, ظا س} & -\frac{\pi}{٩} < س < ٠ \\ ١١ & س = ٠ \\ \frac{س^{٢} + (٩-ق)س}{٩ س} & ٠ < س < \frac{\pi}{ج} \end{cases}$

أوجد قيمة ق التي تجعل ل متصل عند س = ٠

الحل

$ل(٠) = ١١$

يتبع الحل

$$\text{نهـا}_{س\to 0}\frac{\text{حا}^2(\text{ا}س)-9س^2}{س\,\text{حا}^2 س}=\text{م}(1)=11$$

بالقسمة كل مع البسط والمقام على $س^2$

$$=\text{نهـا}_{س\to 0}\frac{\frac{\text{حا}^2(\text{ا}س)}{س^2}-\frac{9س^2}{س^2}}{\frac{س\,\text{حا}^2 س}{س^2}}=11$$

$$=\frac{\text{ا}^2-9}{5}=11$$

$$\Leftarrow \text{ا}^2-9=55 \Leftarrow \text{ا}^2=64$$

$$\text{ا}=\pm 6$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0^+}\frac{س^2+(ب-ج)س}{\text{م}س}=11$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0^+}\frac{(س+ب-ج)س}{\text{م}س}=1$$

$$\frac{ب-ج+0}{\text{م}}=11$$

$$ب-ج=11\text{م} \Leftarrow ج=11\text{م}$$

$$\text{م}=\frac{1}{2}$$

⑧ وزارة (٢٠١٦) شتوية

اذا كان

$$\text{م}(س)=\begin{cases}\dfrac{9س^2-1}{\sqrt{1-6س+9س^2}} & -\frac{1}{3}\le س<\frac{1}{3}\\ -2 & س=\frac{1}{3}\\ -6س-[س] & \frac{1}{3}<س\le\frac{4}{3}\end{cases}$$

اجب في اتصال $\text{م}(س)$ عند $س=\frac{1}{3}$

الحل

$$\text{م}(\tfrac{1}{3})=-2$$

$$\text{نهـا}_{س\to \frac{1}{3}^-}\frac{9س^2-1}{\sqrt{1-6س+9س^2}}=$$

$$\text{نهـا}_{س\to \frac{1}{3}^-}\frac{(3س-1)(3س+1)}{\sqrt{(1-3س)^2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{|1-3س|}$$

$$س=\frac{\sqrt{3}+1}{3}\quad س=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\quad\frac{\sqrt{3}-1}{3}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to \frac{1}{3}^-}\frac{(3س-1)(3س+1)}{1-3س}$$

$$=-1(3\times\tfrac{1}{3}+1)$$

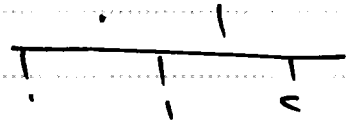
$$=-2$$

← يتبع الحل

مكتبة السمات ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

← تابع الكل

[س]



هـا ـ ٦س ـ [س] = هـا ـ ٦س ـ ٠
س ← ١/٣+ ، س ← ١/٣+

= ـ ٦ × ١/٣ = ـ ٢

⇐ هـا ق(س) = ـ ٢ = ق(١/٣)
س ← ١/٣

ق(س) متصل عند س = ١/٣

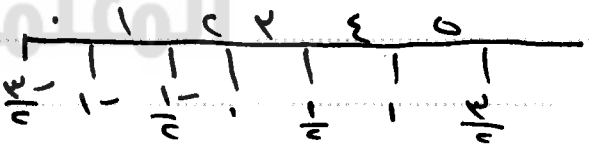
وإذا كان (٢٠١٦) صيغة

اذا كان
ق(س) = { (٥ ـ س٢ ـ [٣+٢س]) / (١ ـ س) ، ٠ ≤ س < ١
{ ٤س ـ |١ ـ س٢| ، ١ ≤ س < ٢

اكتب في أبسط صورة ق(س) عند س = ١

الكل

[٣+٢س] طول المدرج = ١/٢



| ١ ـ س٢ |

١ ـ س٢ = ٠ ⇐ س٢ = ١ ⇐ س = ±١

س٢ ـ ١	١ ـ س٢	س٢ ـ ١
ـ ـ ـ	+ + + +	ـ ـ ـ

١ ـ ١+

هـا ق(س) = هـا ٢س ـ (س٢ ـ ١)
س ← ١+ ، س ← ١+

= ٢ × ١ ـ (١ ـ ١)
= ٢

هـا ق(س) = هـا (٥ ـ س٢ ـ ٤) / (١ ـ س)
س ← ١ـ ، س ← ١ـ

= هـا (١ ـ س٢) / (١ ـ س)
س ← ١ـ

= هـا (١ ـ س)(١ + س) / (١ ـ س)
س ← ١ـ

= ٢

ق(١) = ٢ × ١ ـ ٠ = ٢

هـا ق(س) = ٢ = ق(١)
س ← ١

⇐ ق(س) متصل عند س = ١

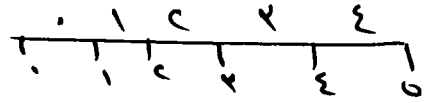
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

$$هـ(س) = \begin{cases} (س-٣)^{٢} & س \leq ٤ \\ \dfrac{[\![س]\!] - |س-٣| + [س-٤]}{س-٤} & س > ٤ \end{cases}$$

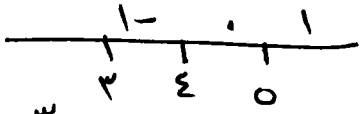
اثبت ان الاقتران هـ متصل عند $س = ٤$

$[\![س]\!]$

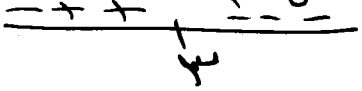


$|٣ - س| + ١-$ لأن

$[\![س-٤]\!]$



$|٣ - س|$



$$هـ(س) = \begin{cases} (س-٣)^{٢} & س \leq ٤ \\ \dfrac{س-٣-١}{س-٤} = ١ & س > ٤ \end{cases}$$

$هـ(٤) = (٤-٣)^{٢} = ١$

$\text{نهـا}_{س \to ٤^+} هـ(س) = (٤-٣)^{٢} = ١$

$\text{نهـا}_{س \to ٤^-} هـ(س) = ١$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٤} هـ(س) = هـ(٤)$

هـ متصل عند $س = ٤$

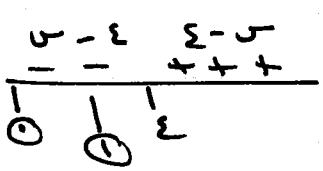
وزارة (٢٠١٧) صيفية

$$هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{\frac{١}{٣} - |\frac{١}{س-٤}|}{١-س} & ؛ س < ١ \\ \dfrac{[\![\frac{١}{٢}س + ١]\!]}{-٩س} & ؛ ١ \leq س < ٢ \end{cases}$$

اثبت اتصال الاقتران هـ عند $س = ١$

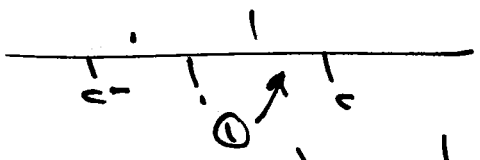
لكل

$|س-٤| \Leftarrow س = ٤$



$[\![\frac{١}{٢}س + ١]\!]$ طول الدرجة $= ٢$

$\frac{١}{٢}س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -٢$



$$هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤-س}}{١-س} & ؛ س < ١ \\ \dfrac{-١}{٩س} & ؛ ١ \leq س < ٢ \end{cases}$$

$هـ(١) = \frac{-١}{٩}$

$\text{نهـا}_{س \to ١^+} = \frac{-١}{٩س} = \frac{-١}{١ \times ٩} = \frac{-١}{٩}$

$\text{نهـا}_{س \to ١^-} = \dfrac{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤-س}}{١-س} = \dfrac{\frac{-١+٤-س}{٣(٤-س)}}{١-س} = \dfrac{-١}{٣(٤-س)} = \dfrac{-١}{٣(٣)} = \dfrac{-١}{٩}$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١)$

متصل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية

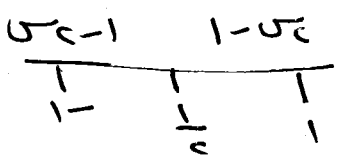
اذا كان

$$د(س)=\begin{cases} |س-١|-س^{٢}+٣ & س\le ١ \\ \dfrac{[س]-س}{ظا(س-١)} & ١<س<\dfrac{٣}{٢} \end{cases}$$

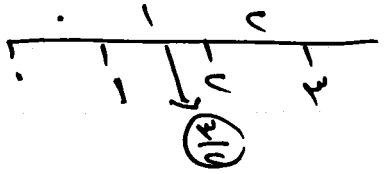
ابحث في اتصال $د(س)$ عند $س=١$

الحل

$|س-١|$



$[س]$



$$د(س)=\begin{cases} ١-س-س^{٢} & س<\dfrac{١}{٢} \\ س^{٢}-١-س & \dfrac{١}{٢}\le س<١ \\ \dfrac{١-س}{ظا(س-١)} & ١\le س<\dfrac{٣}{٢} \end{cases}$$

$$د(١)=١\times٢-١-\frac{١}{٢}=$$

$$=٢-١-\frac{١}{٢}=١-\frac{١}{٢}=\frac{١}{٢}$$

$$\text{نها}_{س\to١^{+}} د(س)=\text{نها}_{س\to١^{+}}\frac{(١-س)}{ظا(س-١)}$$

$$=\text{نها}_{س\to١}\frac{(س-١)}{ظا(س-١)}\times\frac{١-س}{(س-١)^{٢}}$$

$$=١\times\text{نها}_{س\to١}\frac{(-(س-١))}{(س-١)(س+١)}$$

$$=١+١=\frac{-١}{٢}=\frac{-١}{٢}$$

$$\text{نها}_{س\to١^{-}} د(س)=٢\times١-١-\frac{١}{٢}$$

$$=٢-١-\frac{١}{٢}=٢-\frac{١}{٢}$$

$$=\frac{١}{٢}$$

$$\text{نها}_{س\to١^{+}} د(س)\neq\text{نها}_{س\to١^{-}} د(س)$$

$\therefore$ نها $د(س)$ غير موجودة

$\therefore$ $د(س)$ غير متصل عند $س=١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفية

① اذا كان $ق(س) = \frac{١-س}{\sqrt{١-س^{٢}}}$ فان

ق(س) متصل في الفترة

أ) $[-١، ١]$ ب) $(-١، ١)$

ج) $(-\infty، -١)$ د) $[١، \infty)$

الحل

$١-س^{٢} = ٠$

$س^{٢} = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

	-١		$+١$	
$١-س^{٢}$	$-$	٠	$+$	٠
$\sqrt{١-س^{٢}}$	$+$	٠	$+$	
$\frac{١-س}{\sqrt{١-س^{٢}}}$	$-$	غ م	$+$	

متصل عند $س = -١$ ب

② اكتب في ابسط

$ق(س) = (س-٢)^{٣}[\frac{١}{٢}س + ٣]$

عند $س = ٢$

صفر الاقتران

طول المدرج $= ٢$ $\quad س = -٦$

	٤	٢	١	٠	
	٤	٠	-٢	-٤	-٦

$ق(س) = \begin{cases} ٣(س-٢) & ٠ \le س < ٢ \\ ٤(س-٢) & ٢ \le س < ٤ \end{cases}$

① $ق(٢) = ٤(٢-٢) = ٠$

② نها $ق(س) = ٤(٢-٢) = ٠$
$س \to ٢^{+}$

نها $ق(س) = ٣(٢-٢) = ٠$
$س \to ٢^{-}$

$\Leftarrow$ نها $ق(س) = ٠$
$س \to ٢$

③ نها $ق(س) = ق(٢) = ٠$
$س \to ٢$

$\Leftarrow$ ق(س) متصل عند $س = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

دائرة $(c, 1)$ صعبة
مرجع قديم

اذا كان $f(س) = [c - س]$

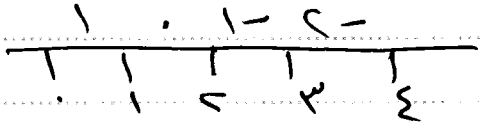
$$هـ(س) = \begin{cases} س+1 & ك < 3 \\ \sqrt{10 - ك^2} & ك \geq 3 \end{cases}$$

اختبر في اتصال $\frac{f(س)}{هـ(س)}$ عند $س = 2$

الحل

$c - س = 0 \Leftarrow س = c$

طول المدى $= 1$



$$\frac{f}{هـ}(س) = \begin{cases} \frac{-2}{س+1} & 3 \leq ك < 4 \\ \frac{-1}{\sqrt{10 - ك^2}} & 3 \leq ك < 4 \end{cases}$$

$(\frac{f}{هـ})(3) = ل(3)$

$ل(3) = \frac{-1}{\sqrt{4}} = \frac{-1}{2}$

$نها_{ك \to 3^+} ل(س) = \frac{-2}{3+1} = \frac{-2}{4}$

$= \frac{-1}{2}$

$نها_{ك \to 3^-} ل(س) = \frac{-1}{\sqrt{10 - ك^2}}$

$= \frac{-1}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{2}$

$= \frac{-1}{2}$

$نها_{ك \to 3^+} ل(س) = نها_{ك \to 3^-} ل(س) = \frac{-1}{2}$

$نها_{ك \to 3} ل(س) = ل(3)$

$\Leftarrow ل(س)$ متصل عند $س = 2$

$\frac{f}{هـ}(س)$ متصل عند $س = 3$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الاتصال على فترة

تعريف :-

يكون الاقتران $ق(س)$ متصل على $[أ، ب]$ اذا كانت

① $ق$ متصل عند كل من $س \in (أ، ب)$

② $ق$ متصل عند $س = أ$ من اليمين
اي ان $\lim_{س \to أ^+} ق(س) = ق(أ)$

③ $ق$ متصل عند $س = ب$ من اليسار
أي ان $\lim_{س \to ب^-} ق(س) = ق(ب)$

لبحث اتصال $ق(س)$ على فترة

① نبحث الاتصال عند كل فترة جزئية

② نبحث الاتصال عند نقط التشعب

③ نبحث الاتصال على عين بداية الفترة ، وعلى يسار نهاية الفترة

مثال ①

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س - ١ & س = ١ \\ س^٢ + ٢ & ١ < س < ٢ \\ ٣س & س = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال $ق$ في الفترة $[١، ٢]$

الحل

① $ق(س)$ متصل على $(١، ٢)$
لأنه كثير حدود .

② نبحث الاتصال عند بداية الفترة
$س = ١$ من اليمين
$ق(١) = ٤ \times ١ - ١ = ٣$
$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ١^٢ + ٢ = ٣$
$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ق(١) = ٣$
$ق$ متصل عند $س = ١$

③ نبحث الاتصال عند نهاية الفترة
$س = ٢$ من اليسار
$ق(٢) = ٣ \times ٢ = ٦$
$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٢^٢ + ٢ = ٦$
$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ق(٢)$ متصل عند $س = ٢$

$\therefore ق(س)$ متصل على $[١، ٢]$

مكتبة السام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ②

اذا كان $ه(س) = |٤س - ٥|$ ابحث في اتصال الاقتران $ه(س)$ على الفترة $[٠، ٣]$

الحل

$|٤س - ٥|$

$٤س - ٥$	$٥ - ٤س$
$س = \frac{٥}{٤}$	

$$ه(س) = \begin{cases} ٥ - ٤س & ٠ \le س < \frac{٥}{٤} \\ ٤س - ٥ & \frac{٥}{٤} \le س < ٣ \end{cases}$$

① $ه(س)$ متصل عل $(٠، \frac{٥}{٤})$ كثير حدود

$ه(س)$ متصل عل $(\frac{٥}{٤}، ٣)$ كثير حدود

② نقطة التشعب $س = \frac{٥}{٤}$

$ه(\frac{٥}{٤}) = ٤ \times \frac{٥}{٤} - ٥ = ٠$ صفر

$\lim_{س \to \frac{٥}{٤}^+} ه(س) = ٤ \times \frac{٥}{٤} - ٥ = ٠$

$\lim_{س \to \frac{٥}{٤}^-} ه(س) = ٥ - ٤ \times \frac{٥}{٤} = ٠$ صفر

$\lim_{س \to \frac{٥}{٤}} ه(س) = ه(\frac{٥}{٤})$

متصل عند $س = \frac{٥}{٤}$

③ الأطراف

$س = ٠^+$

$ه(٠) = ٥ - ٤ \times ٠ = ٥$

$\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = ٥ - ٤ \times ٠ = ٥$

$\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = ه(٠) = ٥$

متصل عند $س = ٠^+$

عند $س = ٣^-$

$ه(٣) = ٤ \times ٢ - ٥ = ١$

$\lim_{س \to ٣^-} ه(س) = ٤ \times ٢ - ٥ = ١$

$\lim_{س \to ٣^-} ه(س) = ه(٣) = ١$

متصل عند $س = ٣^-$

الجواب

$ه$ متصل على $[٠، ٣]$

مثال ③

$$ه(س) = \begin{cases} س^٢ + ٧ - س & -١ \le س < ٠ \\ [س] + ٥س - ٢ & ٠ \le س < ١ \end{cases}$$

ابحث اتصال $ه$ على الفترة $[-١، ١]$

لتعيد تعريف $[س]$

$س$	-١	٠	١	٢
$[س]$	-١	٠	١	٢

$$ه(س) = \begin{cases} س^٢ + ٧ - س & -١ \le س < ٠ \\ ٠ + ٥س - ٢ & ٠ \le س < ١ \\ ١ + ٥س - ٢ & س = ١ \end{cases}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

① $س^2+\sqrt{-س}$ متصل على $(-1، 0]$

اكبر مجال معرف عليه $\in$ اعمال

$\sqrt{س-2}$ متصل على $(0، \infty)$

كثير حدود

② عند $س = 0$ نقطة تشعب

$ق(0) = 0 \times 5 - 2 = -2$

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) = 0 \times 5 - 2 = -2$

$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 0^-} ق(س)$

$\lim_{س \to 0^-} ق(س)$ غير موجود

$ق(س)$ غير متصل عند $س = 0$

③ الأطراف

عند $س = -1^+$

$ق(-1) = (-1)^2 + \sqrt{-1-2} = 1+1 = 2$

$\lim_{س \to -1^+} ق(س) = (-1)^2 + \sqrt{-1-2} = 2$

$\lim_{س \to -1^+} ق(س) = ق(-1)$ متصل عند $س = -1^+$

عند $س = 1^-$

$ق(1) = 1+1 \times 5 - 2 = 4$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = 1 \times 5 - 2 = 3$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) \neq ق(1)$ غير متصل عند $س = 1^-$

$ق(س)$ متصل على $[-1، 1) - \{0\}$

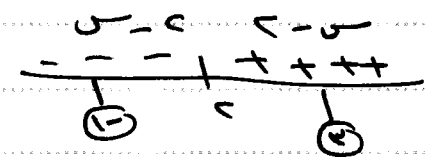
مثال ④

$ق(س) = \begin{cases} |س-2| & -1 \leq س < 3 \\ [س-2] & 2 \leq س \leq 5 \end{cases}$

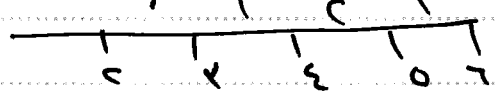
اثبت اتصال $ق$ على الفترة $[-1، 5]$

الحل

$|س-2|$



$[س-2]$



$ق(س) = \begin{cases} 2-س & -1 \leq س < 2 \\ س-2 & 2 \leq س < 3 \\ 1 & 3 \leq س < 4 \\ 2 & 4 \leq س < 5 \\ 3 & س = 5 \end{cases}$

⑤ $ق(س)$ متصل على الفترات

$(-1، 2)$ و $(2، 3)$ و $(3، 4)$ $(4، 5)$

كثيرات حدود

⑥ نقط التشعب

① عند $س = 2$

$ق(2) = 2-2 = 0$

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = 2-2 = 0$ و $\lim_{س \to 2^-} ق(س) = 2-2 = 0$

$ق$ متصل عند $س = 2$

② عند $س = 3$

$ق(3) = 1$

← يتبع الحل

مكتبة السلام ALWESAM
الحلم: ناجح الجمزاوي

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٢-٢ = ١$

ق(س) متصل عند س = ٣

③ عند س = ٤

ق(٤) = ٢

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = ١$

غير متصل عند س = ٤

⑤ الأطراف

عند $س = -١^+$

ق(-١) = ٢ - -١ = ٣

$\lim_{س \to -١^+} ق(س) = ٢ - -١ = ٣$

متصل عند $س = -١^+$

عند $س = ٥^-$

ق(٥) = ٣

$\lim_{س \to ٥^-} ق(س) = ٢$

غير متصل عند $س = ٥^-$

الجواب

ق(س) متصل على

$[-١ ، ٥) - \{٤\}$

مثال ⑥

$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ك & س = ١ \\ س^٢ - ٢س & ١ < س < ٣ \\ ك س - ك & س = ٣ \end{cases}$

جد قيمة الثابتين ك ، ل حتى يكون الأقتران متصلاً على $[١ ، ٣]$

الحل

بما أن ق(س) متصل على $[١ ، ٣]$

← ق(س) متصل عن يمين بداية الفترة

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ق(١)$

$١^٢ - ٢ \times ١ = ٢ \times ١ + ك$

$\Leftarrow -١ = ٢ + ك \Leftarrow ك = -٣$

ق(س) متصل عن يسار نهاية الفترة

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ق(٣)$

$\Leftarrow ٣^٢ - ٢ \times ٣ = ٣ ك - ل$

$٩ - ٦ = -٣ ك - ل$

$٣ = -٩ - ل$

$\Leftarrow ل = -١٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢ + \frac{حا ٣س}{٣س} & -٢ \le س < ٠ \\ ٤ & س = ٠ \\ ب + س & ٠ < س \le ٢ \end{cases}$$

وكان هـ اقتران متصل على الفترة $[-٢، ٢]$
فجد قيمة الثابتين أ ، ب ؟

الحل

بما ان هـ اقتران متصل على $[-٢، ٢]$
هذا يعني ان هـ متصلاً عند اي عدد
يقع داخل الفترة .

$\Leftarrow$ هـ(س) متصل عند س = ٠

$$\text{نها}_{س \to ٠^+} هـ(س) = هـ(٠)$$

$$ب + ٠ = ٤ \Leftarrow ب = ٤$$

$$\text{نها}_{س \to ٠^-} هـ(س) = هـ(٠)$$

$$٢ + \text{نها}_{س \to ٠^-} \frac{حا ٣س}{٣س} = ٤$$

$$٢ + \frac{أ}{٣} = ٤$$

$$\frac{أ}{٣} = ٢ \Leftarrow أ = ٦$$

مثال ⑦

$$هـ(س) = \begin{cases} أ - ب ظاس & ، س \le \frac{\pi}{٤} \\ ٣ & س = \frac{\pi}{٤} \\ ب + \frac{٤}{\pi}|س| & ، \frac{\pi}{٤} < س \le \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

وكان هـ اقتران متصل على $[٠، \frac{\pi}{٢}]$
اوجد قيمة أ ، ب ؟

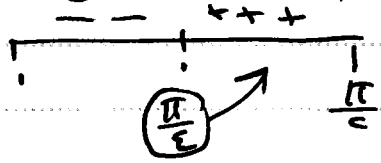
الحل

هـ متصل على $[٠، \frac{\pi}{٢}] \Leftarrow$ هـ متصل
عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}^-} أ - ب ظاس = هـ(\frac{\pi}{٤}) = ٣$$

$$أ - ب = ٣ \text{ ---- } ①$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٤}^+} ب + \frac{٤}{\pi}س = ٣$$



$$ب + \frac{٤}{\pi} \times \frac{\pi}{٤} = ٣ \Leftarrow ب = ٢$$

$$أ + ١ = ٣$$

نعوض ب = ٢ في معادلة ①

$$أ - ٢ = ٣$$

$$أ = ٥$$

مكتبة النجاح
NEW SAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

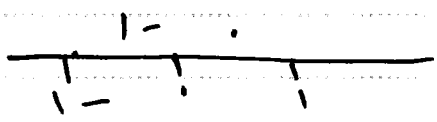
مثال ⑧

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{س+1} & -2 \le س < -1 \\ س[س] + 1 & -1 \le س < 1 \end{cases}$$

ابحث في اتصال د(س) على $[-2, 1)$

الحل

$[س]$



$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{س+1} & -2 \le س < -1 \\ -س+1 & -1 \le س < 0 \\ 1 & 0 \le س < 1 \end{cases}$$

① د(س) متصل على $(-2, -1)$ لأنه كثير حدود معرف على مجاله

$-س+1$ متصل على $(-1, 0)$ كثير حدود

1 متصل على $(0, 1)$ كثير حدود

② عند نقط التجزيء

$س = -1$

$د(-1) = -(-1)+1 = 2$

$\lim_{س \to -1^+} د(س) = -(-1)+1 = 2$

$\lim_{س \to -1^-} د(س) = \lim_{س \to -1^-} \frac{(س-1)(س+1)}{س+1} = -1-1 = -2$

د(س) غير متصل عند $س = -1$

عند $س = 0$

$د(0) = 1$

$\lim_{س \to 0^+} د(س) = 1$

$\lim_{س \to 0^-} د(س) = 1$

د متصل عند $س = 0$

③ الأطراف

عند $س = -2 \Leftarrow د(-2) = \frac{-4}{-1} = 4$

$\lim_{س \to -2^+} د(س) = -3$

د متصل عند $س = -2$

عند $س = 1$ لا نبحث لأنه نقطة وقوعه

د(س) متصل على $[-2, 0) - \{-1\}$

مثال ⑨

$$د(س) = \begin{cases} س^2+1 & |س| \le 3 \\ س^3 & |س| > 3 \end{cases}$$

ابحث في اتصال د(س) على مجاله

الحل

$|س| \le 3 \Leftarrow -3 \le س \le 3$

$|س| > 3 \Leftarrow س > 3$ أو $س < -3$

يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$$ه(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & -3 \le س \le 3 \\ س^3 & س > 3 \\ س^2 & س < -3 \end{cases}$$

ه(س) متصل على $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

$س < -3$

أي أنه كثير حدود

ج) نقط التحقيق.

① $س = -3$

$ه(-3) = 9 + 1 = 10$

$\lim_{س \to -3^+} ه(س) = (-3)^2 + 1 = 10$

$\lim_{س \to -3^-} ه(س) = (-3)^2 = 9$

$\lim_{س \to -3}$ ه(س) غير موجود

ه(س) غير متصل عند $س = -3$

② $س = 3$

$ه(3) = 3^2 + 1 = 10$

$\lim_{س \to 3^+} ه(س) = 3^2 = 9$

$\lim_{س \to 3^-} ه(س) = 3^2 + 1 = 10$

$\lim_{س \to 3}$ ه(س) غير موجود

ه(س) غير متصل عند $س = 3$

الجواب ه(س) متصل على $ح - \{-3, 3\}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ① ص٦٤

$$د(س) = \begin{cases} س^2 & ٣ \geq س > ٥ \\ س + ٢٠ & ٥ \geq س > ٧ \\ ٩ & س = ٧ \end{cases}$$

اختبر اتصال الاقتران د على الفترة $[٣ ، ٧]$ و الفترة $[٣ ، ٧)$

الحل

① $(٥ ، ٣)$ متصل لأنه كثير حدود

$(٧ ، ٥)$ متصل لأنه كثير حدود

عند $س = ٥$ نقطة تشعب

$د(٥) = ٥^2$

$\text{نها}_{س \to ٥^+} د(س) = ٥^2$

$\text{نها}_{س \to ٥^-} د(س) = ٥^2 = ٢٥$

$\text{نها}_{س \to ٥} د(س) = ٢٥$

متصل عند $س = ٥$

عند $س = ٣^+$

$د(٣) = ٩$

$\text{نها}_{س \to ٣^+} د(س) = ٩$ متصل عند $س = ٣^+$

$د(س)$ متصل $[٣ ، ٧)$

② على الفترة $[٣ ، ٧]$

نقس الحل

لكنه

$س = ٧^-$

$د(٧) = ٩$

$\text{نها}_{س \to ٧^-} د(س) = ٧ + ٢٠ = ٢٧$

$س \to ٧^-$

غير متصل عند $س = ٧^-$

الجواب

$د(س)$ متصل $[٣ ، ٧)$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ② ص٦٥

$$ل(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - ٢٥}{س - ٥} & س \neq ٥ \\ ٥ + س & س = ٥ \end{cases}$$

اكتب مع اتصال ل على مجاله

الحل

$ه(٥) = ٥ + ٥ = ١٠$

$$\text{نهـا}_{س \to ٥} ه(س) = \text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{س^2 - ٢٥}{س - ٥}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س - ٥}$$

$= ١٠$

متصل عند $س = ٥$

ومتصل على ح

تدريب ③ ص٦٦

اذا كان $ه(س) = |١٠ - س|$

اكتب مع اتصال الاقتران ه على الفترة $[١٠٫١ ، ٩٫٠]$

الحل

$س - ١٠$: $١٠ - س$

$+ + +$ | $- - -$

$١٠٫١$ — ١٠ — $٩٫٠$

$$\begin{cases} ١٠ - س & ١٠٫١ \geq س \geq ١٠ \\ س - ١٠ & ١٠ \geq س \geq ٩٫٠ \end{cases}$$

(١٠٫١ ، ١٠) متصل كثير حدود

(١٠ ، ٩٫٠) متصل كثير حدود

عند $س = ١٠$

$ه(١٠) = ١٠ - ١٠ =$ صفر

$$\text{نهـا}_{س \to ١٠^+} ه(س) = \text{صفر}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١٠^-} ه(س) = \text{صفر}$$

متصل عند $س = ١٠$

الأطراف

عند $س = ١٠٫١^+$

$ه(١٠٫١) = ١٠ - ١٠٫١ = -٠٫١$

$$\text{نهـا}_{س \to ١٠٫١^+} ه(س) = ٠٫٩ \text{ متصل}$$

عند $س = ٩٫٠^-$

$ه(٩٫٠) = ٩٫٠ - ١٠ = -٠٫٨$

$$\text{نهـا}_{س \to ٩٫٠^-} ه(س) = ٠٫٨ -$$

متصل عند $س = ٩٫٠$

$ه(س)$ متصل $[٩٫٠ ، ١٠٫١]$

تدريب ④ ص ٦٧

$$ع(س) = \begin{cases} \frac{حا ٢س}{٥س} & -\pi \leq س < ٠ \\ ٢ & س = ٠ \\ ب(٢+س) & ٠ < س \leq \pi \end{cases}$$

متصلاً على الفترة $[-\pi ، \pi]$
اوجد $ا$ ، $ب$ ؟

الحل
متصل على $[-\pi ، \pi]$
متصل عند $س = ٠$

① $\because ه(س) = ه(٠)$ عندما $س \to ٠^+$
$\therefore ب(٢+س) = ٢$ عندما $س \to ٠$
$\therefore ٢ب = ٢ \Leftarrow ب = ١$

② $\because ه(س) = ه(٠)$ عندما $س \to ٠^-$
$\therefore \frac{٢ا حا ٢س}{٥س} = ٢$ عندما $س \to ٠^-$
$\therefore \frac{٢ا}{٥} = ٢$
$\therefore ا = ١٠$

تمارين ومسائل

صفحة (٦٨)

السؤال الأول

$$ه(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ٥ & -٢ \leq س < ١ \\ ٨س & ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ه على $[-٢ ، ٢]$

الحل

$(-٢ ، ١)$ متصل لأنه كثير حدود

$(١ ، ٢)$ متصل لأنه كثير حدود

عند $س = ١$
$ه(١) = ٨ \times ١ = ٨$
$\because$ نها $ه(س) = ٨$ عندما $س \to ١^+$
نها $ه(س) = ٨$ عندما $س \to ١^-$
$\therefore$ متصل عند $س = ١$

عند -٢
$ه(-٢) = ٣(-٢)^٢ + ٥ = ١٧$
$\because$ نها $ه(س) = ١٧$ عندما $س \to -٢^+$
$\therefore$ متصل عند $س = -٢$

$ه(٢) = ١٦$
$\because$ نها $ه(س) = ١٦$ عندما $س \to ٢^-$
$\therefore$ متصل على $[-٢ ، ٢]$

مكتبة الشام ALSHAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

ل(س) = |٢س - ١٠| اكتب قي اتصال ل على الفترة $[-١٠، ٨]$

الحل

$$ل(س) = \begin{cases} ٢س - ١٠ & -١٠ \le س \le ٥ \\ -٢س + ١٠ & ٥ < س < ٨ \end{cases}$$

① ق متصل ع $[٥، ٨]$ ، $[-١٠، ٥]$ كثيرحدود

② عند س = ٥

ق(٥) = صفر

نهـ ق(س) = صفر ، نهـ ق(س) = صفر
س ← ٥⁺ ، س ← ٥⁻

متصل عند س = ٥

عند س = -١٠⁺

ق(-١٠) = -٢٠ - ١٠ = -٣٠

نهـ ق(س) = ٣٠ متصل
س ← -١٠⁺

عند س = ٨⁻

ق(٨) = ١٦ - ١٠ = ٦

نهـ ق(س) = ٦ متصل
س ← ٨⁻

⇐ ل(س) متصل $[-١٠، ٨]$

السؤال الثالث

$$ع(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ٢٧}{٣ - س} & س < ٣ \\ س + ٥ & س \ge ٣ \end{cases}$$

اكتب قي اتصال ع على ح

① ع متصل ع الفترة $(-∞، ٣)$ على صورة اقتران نسبي وهو قي مجاله

ع متصل ع $[٣، ∞)$ كثيرحدود

② عند س = ٣ ← ع(٣) = ٥ + ٣ = ٨

نهـ ع(س) = ٨
س ← ٣⁺

نهـ ع(س) = نهـ $\frac{س^٣ - ٢٧}{٣ - س}$
س ← ٣⁻ ، س ← ٣⁻

= نهـ $\frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{(٣ - س)}$ (-١)
س ← ٣⁻

= -(٩ + ٩ + ٩) = -٢٧

نهـ ع(س) غير موجود

س ← ٣

متصل ع ح - {٣}

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع ص٦٨

$$ل(س) = \begin{cases} \sqrt{٤ - س} & س < ٤ \\ |س^٢ - ١٦| & س \geq ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ل على مجاله

$|س^٢ - ١٦|$ $\quad س = \pm ٤$

	$س^٢ - ١٦$	$١٦ - س^٢$	$س^٢ - ١٦$
	+ + +	− − −	+ + +

-٤ $\quad +٤$

$$ل(س) = \begin{cases} \sqrt{٤ - س} & س < ٤ \\ س^٢ - ١٦ & س \geq ٤ \end{cases}$$

① ل متصل لكل $(-\infty, ٤)$ ضرورة يكفي نعرف ل متصل عند $(٤, ٤)$ متصل في مطلقه عند نقطة التعيين $س = ٤$

② $ل(٤) = ١٦ - ١٦ =$ صفر

$\lim_{س \to ٤^+} ل(س) = ١٦ - ١٦ =$ صفر

$\lim_{س \to ٤^-} ل(س) =$ صفر $\in$ المجال

$\lim_{س \to ٤^-} ل(س) = ل(٤)$

ل(س) متصل عند $س = ٤$

ل(س) متصل على ح

السؤال الخامس

$$ع = \begin{cases} ٥ & س = ٣ \\ [س] + ٥ & ٣ < س < ٤ \\ ٤ & س = ٤ \end{cases}$$

ابحث اتصال ع على $[٣, ٤]$

[س] ١ ١ ٢ ٢ ٣ ٣ ٤

١٠ ١ ٢ ٣ ٤

① عند $س = ٣^+$

$ع(٣) = ٥$

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٤ + ٥ = ٩$

ع(س) غير متصل عند $س = ٣^+$

② عند $س = ٤^-$

$ع(٤) = ٤$

$\lim_{س \to ٤^-} ع(س) = ٤ + ٥ = ٩$

ع(س) غير متصل عند $س = ٤^-$

③ ع متصل لكل $(٣, ٤)$ في صورة كثير حدود من الدرجة الصفرية ما فقط بعد تعريف أي عدد حقيقي $٤ + ٥ = ٩$ في الفترة $(٣, ٤)$

ع(س) متصل لكل $(٣, ٤)$

مكتبة السلام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

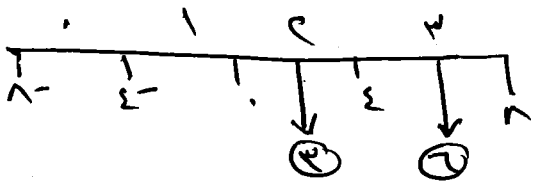
السؤال السادس

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س+1} & ٠ \le س < ٣ \\ [\![٢س+٥]\!] & ٣ \le س < ٦ \\ |س-٩| & س = ٦ \end{cases}$$

اثبت ان اتصال ق ع $[٠، ٦]$

الحل نجد تعريف $[\![٢س+٥]\!]$

طول الدرجة $= \frac{١}{٤} = ٢$



$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س+1} & ٠ \le س < ٣ \\ ٢ & ٣ \le س < ٤ \\ ٣ & ٤ \le س < ٦ \\ |س-٩| & س = ٦ \end{cases}$$

متصل ع $(٠، ٣)$ متصل $(٤، ٦)$

متصل $(٣، ٤)$

عند $س = ٤$ $\quad$ هـا $ق(س) = ٢$ $\quad س \to ٤^+$

هـا $ق(س) = ٢$ $\quad س \to ٤^-$ $\Leftarrow$ غير متصل عند $س = ٤$

عند $س = ٣$ $\quad$ هـا $ق(س) = ٢$ $\quad س \to ٣^+$

هـا $ق(س) = \sqrt{س+١} = ٢$ $\quad س \to ٣^-$ $\Leftarrow$ متصل عند $س = ٣$

عند $س = ٠^+$

$ق(٠) = \sqrt{٠+١} = ١$

هـا $ق(س) = \sqrt{٠+١} = ١$ $\quad س \to ٠^+$

متصل عند $س = ٠^+$

عند $س = ٦^-$

$ق(٦) = |٦-٩| = ٣$

هـا $ق(س) = ٣$ $\quad س \to ٦^-$

متصل عند $س = ٦^-$

$\Leftarrow$ الجواب

متصل $[٠، ٦] - \{٤\}$

السؤال السابع ص٦٩

$$ع(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ}{س-٢} & س \neq ٢ \\ ٥ + س & س = ٢ \end{cases}$$

متصلاً على ح جد قيمة هـ

الحل

ع $(س)$ متصل على ح

$\Leftarrow$ ع $(س)$ متصل عند $س = ٢$

$\Leftarrow$ ع (٢) = هـا ع $(س)$ $\quad س \to ٢$

$\Leftarrow$ نتبع الكل

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ}{س-٢} = ٥+٢$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢هـ)}{س-٢} = ٧$ هنا

$٢+٢هـ = ٧ \Leftarrow$ $هـ = \frac{٥}{٢}$

من الممكن استخدام القسمة التركيبية في تحليل البسط

	$س^٢$	$س$	ح ثابت
[٤]	١	$٢هـ-٢$	$-٤هـ$
		٢	$٤هـ$
	١	$٢هـ$	٠

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢هـ)}{س-٢} = ٧$ هنا

$هـ = \frac{٥}{٢}$

السؤال الثامن ص٦٩

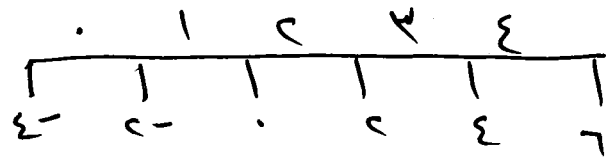
$ع(س) = \begin{cases} ٢س & س < ٢ \\ [٥س+٢] & ٢ \le س < ٤ \\ \frac{٥س}{س^٢-٣٦} & س \ge ٤ \end{cases}$

اثبت في اتصال ع(س) لجميع س الحقيقية (ح)

الحل

$[٥س+٢]$ طول الدرجة = ٢

$٥س+٢ = ٠ \leftarrow س = -٤$



$\Leftarrow$

$ع(س) = \begin{cases} ٢س & س < ٢ \\ ٣ & ٢ \le س < ٤ \\ \frac{٥س}{س^٢-٣٦} & س \ge ٤ \end{cases}$

$س < ٢$ متصل لأنه كثير حدود

$(٢،٤)$ متصل كثير حدود

$س > ٤$ متصل ما عدا أصفار المقام $س^٢-٣٦ = ٠$

$س = \pm ٦$

عند $س = ٢$ نقطة تشعب

$ع(٢) = ٣$

هنا $\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٤$ ، هنا $\lim_{س \to ٢^-} ع(س)$ غير موجودة

غير متصل عند $س = ٢$ $\leftarrow$ تتبع الحل

مكتبة الوسام ALWSAM المعلم ناجح الجمزاوي

تابع الكل

عند س = ٤

هـ(س) = (س-١٦)/(س-٣٦) = ٥٤/٢٠ = ١-

س ← ٤+

هـ(س) = ٣

س ← ٤-

⇐ هـ(س) غير متصل عند س = ٤

⇐ هـ(س) متصل على

ح - {٤، ٦، ٦٤}

السؤال التاسع ص٦٩

هـ(س) = { [س] + س ; -١ ≤ س < ٠
{ ٣س٢/٥ + √(٧س) ; ٠ ≤ س ≤ ٢

ادرس اتصال هـ(س) على [-١، ٢]

الحل

[س]

⇐

هـ(س) = { -١ + س ; -١ ≤ س < ٠
{ ٣س٢/٥ + √(٧س) ; ٠ ≤ س ≤ ٢

(-١، ٠) متصل لأنه كثير حدود

(٠، ٢) متصل لأنه في مجال الجذر وكثير حدود

مجال √(٧س): + + + + [٠ ← ، ١ ←] — — —

عند س = ٠ نقطة تشعب

هـ(٠) = ٣(٠)٢/٥ + √٠ = صفر

هـ(س) = صفر

س ← ٠+

هـ(س) = -١ + ٠ = -١

س ← ٠-

غير متصل عند س = ٠

عند س = -١+

هـ(-١) = -٢

هـ(س) = -١ + -١ = -٢

س ← -١+ متصل عند س = -١+

عند س = ٢-

هـ(٢) = ٣(٢)٢/٥ + √٢ = ١٢/٥ + √٢

هـ(س) = ١٢/٥ + √٢

س ← ٢- متصل عند س = ٢-

هـ(س) متصل على [-١، ٢] - {٠}

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الهامش ص٦٩

اذا كان ل(س) = $\frac{س^{٢}+٥س+٢}{م س^{٢}+س+٣}$

مما قيم م التي تجعل الاقتران ل متصلاً على مجموعة الاعداد الحقيقية ؟

الحل

الاقتران السابق متصل ماعدا اصفار المقام

لذلك المقام يجب ان يكون لا حل

المميز < ٠

$ب^{٢}-٤أحـ$ < ٠

$١-٤\times م\times ٣$ < ٠

$١-١٢م$ < ٠

$١<١٢م \Leftarrow م>\frac{١}{١٢}$

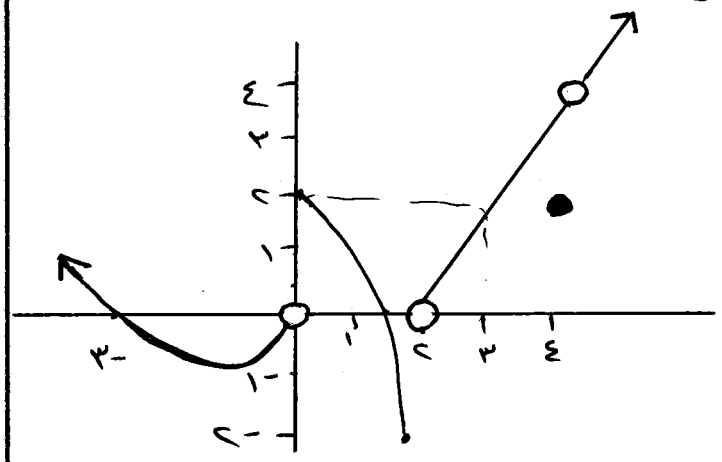
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

أسئلة الوحدة

صفحة (٧٠)

السؤال الأول ص٧٠

معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ع ، جد كلاً مما يأتي :



أ) $\lim_{س \to ٠^+} ع(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to -٢} ع(س) = -٢$

ج) $\lim_{س \to ٣} ع(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٤} ع(س) = ٤$

هـ) مجموعة قيم م حيث $\lim_{س \to م} ع(س)$ غير موجودة

م = {٠ ، ٢ ، ٤}

و) مجموعة قيم ن حيث ع غير متصل عند س = ن

ن = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦}

السؤال الثاني ص٧٠

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$ ، هـ(٣) = ٦

فجد قيمة $\lim_{س \to ١} (هـ(٤س + ١) - س^٢ + ٢)$

الحل

ص = ٤س + ١ ، س → ١ ⇒ ص → ٣

$= (\lim_{ص \to ٣} هـ(ص))^٢ + \lim_{س \to ١} (-س^٢ + ٢)$

$= ٤^٢ - ١ + ٢ = ١٦ + ١ = ١٧$

السؤال الثالث ص٧٠

$$و(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{|س - ١٢|} & س < ٣ \\ جـ س^٢ - ٤ & س \geq ٣ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ٣} و(س)$ موجودة

فما قيمة الثابت جـ ؟

← يتبع الحل

مكتبة الهناء ALWFAA
العلم : ناجح الجمزاوي

الحل

نهـا $ه(س)$ موجود $\Leftarrow$
$س \to ٣$

نهـا $ه(س)$ = نهـا $ه(س)$
$س \to ٣^+$ — $س \to ٣^-$

$$\frac{س-٣}{|س-٣|} \quad \frac{٣-س}{|س-٣|}$$

$$ه(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{س-٣} = -١ & س < ٣ \\ ح س^٢ - ٤ & س > ٣ \end{cases}$$

نهـا -١ = نهـا $ح س^٢ - ٤$
$س \to ٣^+$ — $س \to ٣^-$

$-١ = ٩ ح - ٤$

$\Leftarrow ٩ ح = ٣ \Leftarrow ح = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

السؤال الخامس ص١١

$$ه(س) = \begin{cases} \frac{|س^٢ - ٤س - ١٥|}{|س - ١٥|} & س < ٥ \\ ٩ جتا \frac{\pi}{٥} س + ٥ & س > ٥ \end{cases}$$

وكانت نهـا $ه(س)$ موجود ، $س \to ٥$
، جد قيمة الثابت ٩ ؟

الحل

$|س^٢ - ٤س - ١٥|$
$ص^٢ - ٤ص - ٥ = ٠$
$(س - ٥)(س + ١) = ٠$

	-١		٥	
$س^٢ - ٤س - ٥$	+	٠	−	٠	+

$$\frac{|س-٥| \quad س-٥ \quad ٥-س}{|س-١٥|}$$

$$\frac{|س-٥|}{٥}$$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

السؤال الرابع ص١٠

اذا كان $ه(س) = \frac{س^٢ + (١٣+٩)س + ٩}{س - ٢}$

جد قيمة الثابت ٩ التي تجعل
نهـا $ه(س)$ موجود
$س \to ٢$

الحل

نهـا $ه(س)$ موجود ٥
$س \to ٢$

نهـا بسط = ٠ $\Leftarrow$ نهـا مقام = ٠

$٤ + ٢(١٣+٩) + ٩ = ٠$
$٤ + ٢٦ + ٢٩ = ٠$
$٣٠ + ٩٣ = ٠$
$\Leftarrow ٩ = \frac{-٣٠}{٣} = -١٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

$$ق(س)=\begin{cases}\frac{س^{٢}-٤س-٥}{س-٥} & س<٥\\ ٩\,جتا\frac{\pi}{٥}س+٥ & س>٥\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{(س-٥)(س+١)}{س-٥} & س<٥\\ ٩\,جتا\frac{\pi}{٥}س+٥ & س>٥\end{cases}$$

$$=\begin{cases}س+١ & س<٥\\ ٩\,جتا\frac{\pi}{٥}س+٥ & س>٥\end{cases}$$

$$\text{نها}_{س\to٥^{+}} ق(س) = \text{نها}_{س\to٥^{-}} ق(س)$$

$$٥+١ = ٩\,جتا\frac{\pi}{٥}\times٥+٥$$

$$٦ = ٩\,جتا\pi+٥$$

$$٦ = -٩+٥$$

$$\Leftarrow ٩=-١$$

السؤال السادس ص١١٤

جد كلاً من النهايات الآتية

(أ) $\text{نها}_{س\to٠}\frac{س-ظاس}{\sqrt{١-جتا٢س}}$

الحل

$$=\text{نها}_{س\to٠}\frac{س-ظاس}{\sqrt{١-(٢جتا^{٢}س-١)}}$$

$$=\text{نها}_{س\to٠}\frac{س-ظاس}{\sqrt{٢جا^{٢}س}}$$

$$=\text{نها}_{س\to٠}\frac{س-ظاس}{\sqrt{٢}\,|جاس|}$$

$$|جاس| \quad \begin{cases}جاس & س>٠\\ -جاس & س<٠\end{cases}$$

① $$\text{نها}_{س\to٠^{+}}\frac{س-ظاس}{\sqrt{٢}\,جاس}=\text{نها}_{س\to٠^{+}}\frac{س}{\sqrt{٢}\,جاس}-\text{نها}_{س\to٠^{+}}\frac{ظاس}{\sqrt{٢}\,جاس}$$

$$=\text{نها}_{س\to٠^{+}}\frac{س}{\sqrt{٢}\,جاس}-\text{نها}_{س\to٠^{+}}\frac{١}{\sqrt{٢}\,جتاس}$$

$$=\frac{١}{\sqrt{٢}}-\frac{١}{\sqrt{٢}}=\text{صفر}$$

② $$\text{نها}_{س\to٠^{-}}\frac{س-ظاس}{-\sqrt{٢}\,جاس}$$

$$=\text{نها}_{س\to٠^{-}}\frac{س}{-\sqrt{٢}\,جاس}+\text{نها}_{س\to٠^{-}}\frac{ظاس}{\sqrt{٢}\,جاس}$$

$$=\frac{١}{-\sqrt{٢}}+\frac{١}{\sqrt{٢}}=\text{صفر}$$

$$\Leftarrow \text{نها}_{س\to٠}\frac{س-ظاس}{\sqrt{١-جتا٢س}}=\text{صفر}$$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

① $\lim_{س \to 0} \frac{س + \text{جا} س}{٣س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{٣س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{٣س}$

$= \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٣}{٣} = ١$

---

④ $\lim_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{١}{\sqrt{س}} - ١ \right)$

الحل

$\lim_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{١ - \sqrt{س}}{\sqrt{س}} \right)$ نوحد المقام

$= \lim_{س \to ١} \frac{١}{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)} \left(\frac{-(\sqrt{س} - ١)}{\sqrt{س}} \right)$

$= \lim_{س \to ١} \frac{-١}{(\sqrt{س} + ١)\sqrt{س}}$

$= \frac{-١}{(١ + ١)\sqrt{١}}$

$= \frac{-١}{٢}$

محلة حل السؤال بالضرب بالمرافق

⑤ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

الحل

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{(س - ١) - \sqrt{س + ١}}$

الضرب بالمرافق

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{(س - ١) - \sqrt{س + ١}} \times \frac{(س - ١) + \sqrt{س + ١}}{(س - ١) + \sqrt{س + ١}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٣س)((س - ١) + \sqrt{س + ١})}{(س - ١)^٢ - (س + ١)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٣س)((س - ١) + \sqrt{س + ١})}{س^٢ - ٣س}$

$= \lim_{س \to ٣} ((س - ١) + \sqrt{س + ١})$

$= (٣ - ١) + \sqrt{٣ + ١}$

$= ٢ + ٢ = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(ه) $\text{نها}_{س \to -٣} \dfrac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

الحل

بالتعويض = ÷ توحيد مقامان

$= \text{نها}_{س \to -٣} \dfrac{\frac{٣ + س}{٣س}}{(س + ٣)(س - ١)}$

$= \text{نها}_{س \to -٣} \dfrac{١}{٣س} \times \dfrac{١}{(س - ١)}$

$= \dfrac{١}{-٩} \times \dfrac{١}{-٤} = \dfrac{١}{٣٦}$

(و) $\text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س^{٣}} - ٢|س|}{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}$

الحل

$|س| = س$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س^{٣}} - ٢س}{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س^{٣}} - ٢س}{(٢س^{٢} - ٥س - ١٢)} \times \dfrac{\sqrt{س^{٣}} + ٢س}{\sqrt{س^{٣}} + ٢س}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{س^{٣} - ٤س^{٢}}{(٢س^{٢} - ٥س - ١٢)(\sqrt{س^{٣}} + ٢س)}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{س^{٢}(س - ٤)}{(٢س + ٣)(س - ٤)(\sqrt{س^{٣}} + ٢س)}$

$= \dfrac{١٦}{(٤ + ٨) \times ١١}$

$= \dfrac{\cancel{١٦}^{٤}}{\cancel{٣} \times ١١} = \dfrac{٤}{٣٣}$

(ز) $\text{نها}_{س \to ٠} \dfrac{س^{٢} + \text{جا}٤س}{٣س}$

الحل

$= \text{نها}_{س \to ٠} \dfrac{\cancel{س}^{٢}}{٣\cancel{س}} + \text{نها}_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا}٤س}{٣س}$

$= \dfrac{٠}{٣} + \dfrac{٤}{٣} = \dfrac{٤}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(ج) $\text{هـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\text{جتا}س - \sqrt{3}\,\text{جا}س}{6س - \pi}$ وزـ (٢،١٥)

الحل

$ص = 6س - \pi \Leftarrow س = \dfrac{ص}{6} + \dfrac{\pi}{6}$

$س \to \dfrac{\pi}{6}$ فان $ص \to 0$

$= \text{هـا}_{ص \to 0} \dfrac{\text{جتا}(\frac{ص}{6} + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}\,\text{جا}(\frac{ص}{6} + \frac{\pi}{6})}{ص}$

$= \text{هـا}_{ص \to 0} \dfrac{\text{جتا}\frac{ص}{6}\text{جتا}\frac{\pi}{6} - \text{جا}\frac{ص}{6}\text{جا}\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}(\text{جا}\frac{ص}{6}\text{جتا}\frac{\pi}{6} + \text{جتا}\frac{ص}{6}\text{جا}\frac{\pi}{6})}{ص}$

$= \text{هـا}_{ص \to 0} \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتا}\frac{ص}{6} - \frac{1}{2}\text{جا}\frac{ص}{6} - \frac{3}{2}\text{جا}\frac{ص}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتا}\frac{ص}{6}}{ص}$

$= \text{هـا}_{ص \to 0} \dfrac{-2\,\text{جا}\frac{ص}{6}}{ص} =$

$= -2\ \text{هـا}_{ص \to 0} \dfrac{\text{جا}\frac{ص}{6}}{ص} = -2 \times \dfrac{1}{6}$

$= -\dfrac{1}{3}$

(ط) هـا $\dfrac{\text{ظا}س - 1}{س - \frac{\pi}{4}}$

$س \to \frac{\pi}{4}$

الحل

$\text{هـا} \dfrac{\text{ظا}س - 1}{س - \frac{\pi}{4}} \times \dfrac{\text{ظا}س + 1}{\text{ظا}س + 1}$

$س \to \frac{\pi}{4}$

$= \text{هـا} \dfrac{\text{ظا}^2 س - 1}{(س - \frac{\pi}{4})(\text{ظا}س + 1)}$

$= \text{هـا} \dfrac{\text{ظا}^2 س}{(س - \frac{\pi}{4})(\text{ظا}س + 1)}$

$= \text{هـا} \dfrac{\text{ظا}^2 س}{س - \frac{\pi}{4}} \times \text{هـا} \dfrac{1}{\text{ظا}س + 1}$

$= \left(\text{هـا} \dfrac{\text{ظا}س}{س}\right)^2 \times \dfrac{1}{1+1}$

$= 1^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

(ي) $\text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} - \text{جتا}(\frac{\pi}{4} + هـ)}{هـ}$

الحل

$\text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} - (\text{جتا}\frac{\pi}{4}\text{جتا}هـ - \text{جا}\frac{\pi}{4}\text{جا}هـ)}{هـ}$

$= \text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2}\text{جتا}هـ - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{جا}هـ)}{هـ}$

$= \text{نها}_{هـ \to 0} \left(\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}هـ}{هـ} + \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{جا}هـ}{هـ}\right)$

$= \text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}هـ}{هـ} + \text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{جا}هـ}{هـ}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}هـ}{هـ}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}هـ}{هـ} \times \dfrac{1 + \text{جتا}هـ}{1 + \text{جتا}هـ}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}^2 هـ}{هـ(1 + \text{جتا}هـ)}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{\text{جا}^2 هـ}{هـ^2 (1 + \text{جتا}هـ)}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1}{2}\,\text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{\text{جا}هـ}{هـ} \times \text{نها}_{هـ \to 0} \dfrac{\text{جا}هـ}{1 + \text{جتا}هـ} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

صفر $+ \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ك) $\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{\text{جتا}3س - \text{جتا}س}{س^2}$

$\text{جتا}س - \text{جتا}ص = -2\,\text{جا}(\frac{س+ص}{2})\,\text{جا}(\frac{س-ص}{2})$

$= \text{نها}_{س \to 0} \dfrac{-2\,\text{جا}2س\,\text{جا}(-س)}{س^2}$

$= -\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}2س}{س} \times -\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}س}{س}$

$= 2 \times 1 \times 2 = 4$

السؤال السابع ص١١

اذا كانت $\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{4س^2 - \text{جا}ب س}{ب س - \text{ظا}4س} = \dfrac{1}{4}$

حيث $س \neq 0$

جد قيمة الثابت ب ؟

الحل

بقسمة كل من البسط والمقام على س

$= \text{نها}_{س \to 0} \dfrac{4س - \frac{\text{جا}ب س}{س}}{ب - \frac{\text{ظا}4س}{س}}$

$= \dfrac{4 - ب}{ب - 4}$

$\dfrac{4 - ب}{ب - 4} = \dfrac{1}{4}$

مكتبة الإمام ALIMESAM العلم ناجح الجمزاوي

$$= \frac{\text{ها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}٤س}{س} - \text{ها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}ب س}{س}}{ل - \text{ظا}٤س}$$

$$= \frac{٠ - ل}{ل - ٤} = \frac{١}{٤}$$

$\Leftarrow \frac{-ل}{ل-٤} = \frac{١}{٤}$ ضرب بتبادلي

$-٤ل = ل - ٤$

$-٥ل = -٤ \Leftarrow ل = \frac{٤}{٥}$

السؤال الثامن ص٧٢

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \frac{|س^٢ - ١٤|}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٢ + س & س = ٢ \end{cases}$$

اجب في اتصال الاقتران ق عند $س = ٢$

$|س^٢ - ١٤|$

$س^٢ - ١٤$	+	٠	−	٠	+
$س$		$-\sqrt{١٤}$		$\sqrt{١٤}$	

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١٤}{س - ٢} & س > ٢ \\ \frac{١٤ - س^٢}{س - ٢} & س < ٢ \\ ٢ + س & س = ٢ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ٢ + س & س > ٢ \\ -(٢ + س) & س < ٢ \\ ٢ + س & س = ٢ \end{cases}$$

ق(٢) = ٤

ها ق(س) = ٤
$س \to ٢^+$

ها ق(س) = −٤
$س \to ٢^-$

ها ق(س) غير موجود
$س \to ٢$

$\Leftarrow$ ق(س) غير متصل عند $س = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

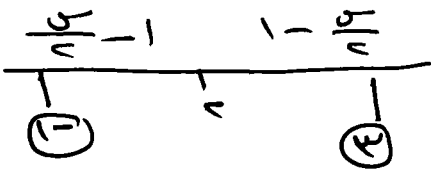
السؤال التاسع ص٧٢

اذا كان $ع(س) = \begin{cases} |\frac{س}{٢} - ١| & -١ \le س < ٣ \\ [٥ و ٠ س + ٣] & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$

اثبت ان $ع$ متصلة عند $س = ٣$

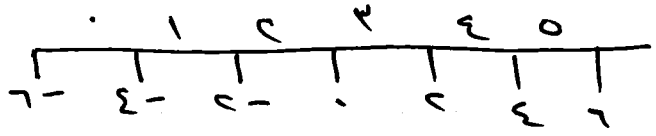
$|\frac{س}{٢} - ١|$

$\frac{س}{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow س = ٢$



$[٥ و ٠ س + ٣]$ طول الدرجة $= ١$

$٥ و ٠ س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٦$



$ع(س) = \begin{cases} ١ - \frac{س}{٢} & -١ \le س < ٢ \\ ١ - \frac{س}{٢} & ٢ \le س < ٣ \\ ٤ & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$

$ع(٣) = ٤$

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٣^-} ع(س) = ١ - \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to ٣^-} ع(س) \neq \lim_{س \to ٣^+} ع(س)$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ع(س)$ غير موجودة

$\therefore ع(س)$ غير متصلة عند $س = ٣$

السؤال العاشر ص٧٢

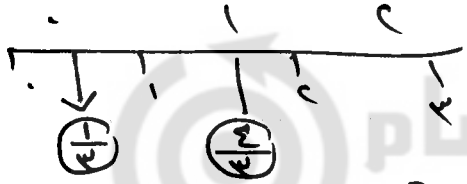
$ل(س) = \begin{cases} \frac{٩ س^٢ - ١}{-١٧ + ٩ س + ٦ س^٢} & \frac{١}{٣} < س < ٤ \\ -٢ & س = \frac{١}{٣} \\ -٦ س - [س] & \frac{١}{٣} > س > ٤ \end{cases}$

اثبت ان $ل(س)$ متصلة عند $س = \frac{١}{٣}$

الحل

$ل(\frac{١}{٣}) = -٢$

$[س] = $



$ل(س) = \begin{cases} \frac{٩ س^٢ - ١}{٧(١ - ٣ س)^٢} & \frac{١}{٣} < س < ٢ \\ -٢ & س = ٢ \\ -٦ س - [س] & \frac{١}{٣} > س > ٢ \end{cases}$

تابع ←

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$$= \begin{cases} \frac{٩س^{٤}-١}{|١-٣س|} & \frac{١}{٣}\,د س \\ -٢ & س = \frac{١}{٣} \\ -٦س-[س] & \frac{١}{٣}\,د س \end{cases}$$

$|١-٣س|$: $\frac{١}{٣}$ ($-$) ، $\frac{١}{٣}$ ($+$)

$$= \begin{cases} \frac{(١+\sqrt{٣})(١-\sqrt{٣})}{٣س-٢} & \frac{١}{٣}\,د س \\ -٢ & س = ٣ \\ -٦س-٥ & \frac{١}{٣}\,د س \\ -٦س-١ & ١\,د س \end{cases}$$

$$ل(\tfrac{١}{٣}) = -٢$$

$$هـ\,ل(س) = -٦ \times \tfrac{١}{٣} = -٢ \quad (س \to \tfrac{١}{٣}^{+})$$

$$هـ\,ل(س) = -(٣ \times \tfrac{١}{٣} + ١) \quad (س \to \tfrac{١}{٣}^{-})$$
$$= -(١+١)$$
$$= -٢$$

$ل(س)$ متصل عند $س = \frac{١}{٣}$

السؤال الحادي عشر ص٧٤

اجب في اتصال الاقتران

$ع(س) = \sqrt{[س] + س}$ على الفترة $(١ ، ٢]$

$[س] = \begin{cases} ١ & ١ \le س < ٢ \\ ٢ & ٢ \le س < ٣ \end{cases}$

$$ع(س) = \begin{cases} \sqrt{١+س} & ١ < س < ٢ \\ \sqrt{٢+٢} = ٢ & س = ٢ \end{cases}$$

$$ع(س) = \begin{cases} \sqrt{١+س} & ١ < س < ٢ \\ ٢ & س = ٢ \end{cases}$$

$ع(س)$ متصل $(١ ، ٢)$

لأنه داخل المجال

عند $س = ٢^{-}$

$ع(٢) = ٢$

$هـ\,ع(س) = \sqrt{٢+١} = \sqrt{٣}$

$س \to ٢^{-}$ غير متصل عند $س = ٢$

$ع(س)$ متصل على $(١ ، ٢]$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني عشر ص٧٤

$$هـ(س) = \begin{cases} س^{٣} & س \leq ١ \\ ٢س\sqrt{س} - ١ & س > ١ \end{cases}$$

اثبت ان الاتصال لاقتران هـ هو مجموعة قيم س الحقيقية

① نبحث الاتصال عند س = ١

$هـ(١) = ٢ \times ١\sqrt{١} - ١$
$= ٢ - ١ = ١$

$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ٢ \times ١\sqrt{١} - ١ = ١$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ١^{٣} = ١$

$\lim_{س \to ١} هـ(س)$ متصل عند س = ١

② $هـ(س)$ متصل $س > ١$ لأنه كثير حدود

③ $هـ(س)$ متصل $س < ١$ لأنه داخل إحدى الكثيرات

∴ $هـ(س)$ متصل على ح

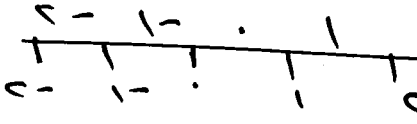
السؤال الثالث عشر ص٧٤

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س + ١} & -٣ \leq س < -١ \\ س[س] & -١ \leq س < ١ \end{cases}$$

اثبت ان اتصال الاقتران هـ على الفترة $[-٣ ، ١)$

الحل

$[س]$



$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س + ١} & -٢ \leq س < -١ \\ -س & -١ \leq س < ٠ \\ صفر & ٠ \leq س < ١ \end{cases}$$

عند س = -١

$هـ(-١) = ١$

$\lim_{س \to -١^+} هـ(س) = ١$

$\lim_{س \to -١^-} \frac{س^{٢} - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} \frac{(س-١)(س+١)}{س+١}$

$= -٢$

∴ $هـ(س)$ غير متصل عند س = -١

يتبع الحل

تابع الحل

عند س = ٠

$هـ(٠) =$ صفر

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) =$ صفر

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) =$ صفر

متصل عند س = ٠

عند س = -٢^+

$هـ(-٢) = \frac{-٢^٢ - ١}{-٢ + ٢} = \frac{٣}{-١} = -٣$

$\lim_{س \to -٢^+} هـ(س) = -٣$

متصل عند $س = -٢^+$

$هـ(س)$ متصل

$(-٢، -١)$ اضطر - لكن لا تنتمي إليها

$(-١، ٠)$ كثير حدود

$(١، ٠)$ كثير حدود

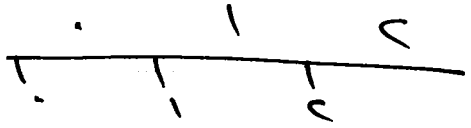
$هـ(س)$ متصل $[-٢، ١) - \{-١\}$

السؤال الرابع عشر

إذا كان $ل(س) = \frac{س^٢ - ١}{س + ٢}$

$هـ(س) = [س]$ فأبحث في اتصال الاقتران $ل \times هـ$ على الفترة $[٠، ٢]$

الحل



$ل \times هـ =$

- صفر $\times \frac{س^٢ - ١}{س + ٢}$; $٠ \le س < ١$
- $١ \times \frac{س^٢ - ١}{س + ٢}$; $١ \le س < ٢$
- $٢ \times (\frac{س^٢ - ١}{س + ٢})$; $س = ٢$

$ل \times هـ =$

- صفر ; $٠ \le س < ١$
- $\frac{س^٢ - ١}{س + ٢}$; $١ \le س < ٢$
- $٢ (\frac{س^٢ - ١}{س + ٢})$; $س = ٢$

نبحث عند س = ١ نقطة تشعب

$(ل \times هـ)(١) = \frac{١ - ١}{٢ + ١} =$ صفر

$\lim_{س \to ١^+} ل(س) \times هـ(س) = \frac{١^٢ - ١}{٢ + ١} =$ صفر

$\lim_{س \to ١^-} ل(س) \times هـ(س) =$ صفر

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

⇐ ل × هـ متصل عند س = ١

عند س = ٠+

(ل × هـ) (٠) = صفر

∵ ل(س) × هـ(س) = صفر
س ← ٠+

∴ متصل عند س = ٠+

عند س = ٢

(ل × هـ) (٢) = ٢(٤-١)/(٤+٢) = ٦/٤ = ٣/٢

∵ ل(س) × هـ(س) = (٢-١)/(٢+٢) = ٣/٤
س ← ٢

∴ ل × هـ غير متصل عند س = ٢

⇐ ل × هـ متصل على [٠ ، ٢)

السؤال الخاص عشر ص ٧٣

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة

① اذا كانت هـ(س) = ٤
س ← ٣

هـ(٣) = ٦ ، مضاعفات

∴ هـ(٢ج + ١) - س + ٧)
س ← ١

الحل

ص = ٢ج + ١ ، س ← ١ ، ص ← ٣

= (هـ(ص)
ص ← ٣) + هـ(-س + ٧)
س ← ١

= ١٦ - ١ + ٧ = ٢٢

الجواب (ج)

② اذا كان هـ متصلاً عند س = ٤
وكان ٣ هـ(٤) = ٦ وكانت
هـ(س) = ٤ ن مضاعفات
س ← ٤+

الحل

هـ(٤) = ٦/٣ = ٢ ولأنه متصل

هـ(س) = هـ(س) = ٢
س ← ٤+ ، س ← ٤-

٤ ب = ٢ ، ب = ١/٢ (ب)

مكتبة الهمام ALHAMM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ اذا كان $هـ$ اقترانًا كثير حدود وكانت $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س)}{س} = ٣$

فان $\lim_{س \to ٢} هـ'(س)$ =

الحل

$$\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س)}{س} = ٣$$

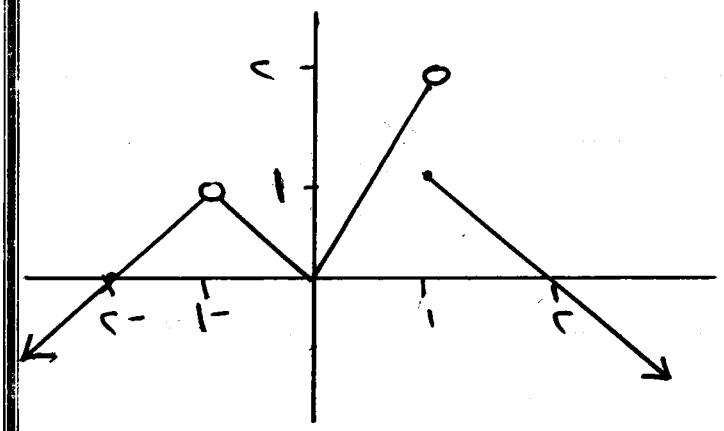
$$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = \lim_{س \to ٢} س \times ٣$$

$$= ٢ \times ٣ = ٦$$

$$\lim_{س \to ٢} هـ'(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{(هـ(س))'}{٢}$$

$$= \frac{٣ \times ٦}{٢} = ١٨$$ (ب)

④ معتمدًا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران $هـ$ اعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية فان مجموعة قيم $أ$ التي $\lim_{س \to أ} هـ(س)$ =



$أ = \{-٢، ٢\}$ (ج)

⑤ $\lim_{س \to -٢} \frac{٤ - س^٢}{٢ - س}$ =

الحل

$$\frac{٤ - (-٢)^٢}{٢ - (-٢)} = \frac{٠}{٤}$$ = صفر (أ)

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{٦س^٤ + ١٨س^٢}{٢س^٢ - ٣س^٣}$ =

الحل

$$\lim_{س \to ٠} \frac{٦س^٢(س^٢ + ٣)}{س^٢(٢ - ٣س)}$$

$$= \frac{٦(٠ + ٣)}{٢ - ٠} = \frac{١٨}{٢} = ٩$$ (د)

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٧) اذا كان هـ اقترانًا متصلا عند س = ١ ، وكان هـ(١) = ٤ فان

$$\text{نها}_{س \to ١} \left(\frac{|س-١١|}{س-١} \right) + هـ(س)$$

س	١	١+س
|س-١|	س-١	١-س

$$\text{نها}_{س \to ١^+} \frac{س-١}{س-١} + \text{نها}_{س \to ١^+} هـ(س)$$

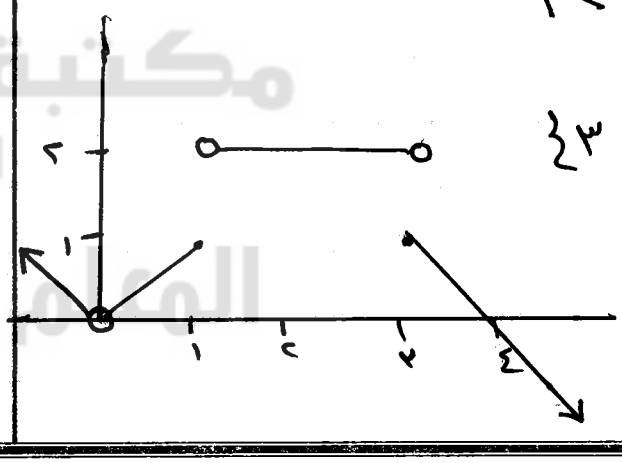
ولأن هـ متصل عند س = ١

$$\text{نها}_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١) = ٤$$

١ + ٤ = ٥

(ج)

(٨) معتمدًا الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران هـ اعرف على ح ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\text{نها}_{س \to أ} هـ(س)$ غير موجودة



{١ ، ٣}

(د)

(٩)

$$ل(س) = \begin{cases} ٢ جتا س & س < \frac{\pi}{٢} \\ ٢ أ س^٢ + \pi^٢ & س \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

فان قيمة أ التي تجعل ل متصلاً عند س = $\frac{\pi}{٢}$ هي :

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٢}^-} ٢ جتا س = \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{٢}^+} أ س^٢ + \pi^٢$$

$$٢ جتا \frac{\pi}{٢} = أ (\frac{\pi}{٢})^٢ + \pi^٢$$

$$صفر = \frac{٤ \pi^٢ أ}{٤} + \pi^٢$$

$$\pi^٢ أ = -\pi^٢$$

(٩٠)

$$أ = \frac{-\pi^٢}{\frac{\pi^٢}{٤}} = -٤$$

(١٠)

$$هـ(س) = \begin{cases} ٣ & س = ١ \\ [س] + ٥ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & س = ٢ \end{cases}$$

هـ متصل في الفترة ٥

$$هـ(س) = \begin{cases} ٣ & س = ١ \\ ٦ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & س = ٢ \end{cases}$$

عند س = ١$^+$ نها$_{س \to ١^+}$ هـ(س) = ٦ ≠ هـ(١) = ٣

غير متصل

عند س = ٢ هـ(٢) = ٤ نها$_{س \to ٢^-}$ هـ(س) = ٦

غير متصل

متصل في (١ ، ٢) (ب)

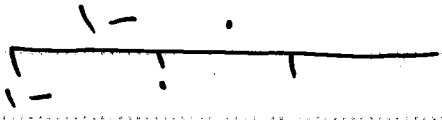
أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س] + س - ١ & ، س < ٠ \\ ١ - س + \frac{٣}{٥} س^{٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق على $[-١، ٢]$

الحل



$ق(س) = \begin{cases} س - ١ & ، -١ \leq س < ٠ \\ ١ - س + \frac{٣}{٥} س^{٢} & ، ٠ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

ق(س) متصل على $(-١، ٠)$ لكثيرة حدود
ق(س) متصل على $(٠، ٢)$
وهنا على إعمال

نبحث عند $س = ٠$ نقطة تعيب

$ق(٠) = ١ - \frac{٣}{٥}(٠)^{٢} = ١$

$\lim_{س \to ٠^{+}} ق(س) = ١ - \frac{٣}{٥} \times ٠^{٢}$

$= ١$

$\lim_{س \to ٠^{-}} ق(س) = ٠ - ١ = -١$

بما أن $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ غير موجودة

$س \to ٠$

ق غير متصل عند $س = ٠$

الأطراف

$س = -١$

$ق(-١) = -١ - ١ = -٢$

$\lim_{س \to -١^{+}} ق(س) = -١ - ١ = -٢$

$س \to -١^{+}$

متصل عند $س = -١$

$س = ٢$

$ق(٢) = ١ - \frac{٣}{٥}(٢)^{٢}$

$= \frac{-١٢}{٥}$

$\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = \frac{-١٢}{٥}$ متصل

$س \to ٢$

الجواب

متصل $[-١، ٢] - \{٠\}$

مكتبة السلام ALWESAM

③ وزارة (٢٠١٩) شتوية

$$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ب س - ١ & ، س < ٠ \\ [س] + ٥س - ٢ & ، ٠ \le س < ١ \\ ٥س - ١ & ، س = ١ \end{cases}$$

اجب في اتصال الاقتران هـ على الفترة $[-١ ، ١]$

$[س]$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ب س - ١ & ، س < ٠ \\ ٠ + ٥س - ٢ & ، ٠ \le س < ١ \\ ٥س - ١ & ، س = ١ \end{cases}$$

هـ(س) متصل على $(-١ ، ٠)$
وهو على المجال
هـ(س) متصل على $(٠ ، ١)$
كثير حدود

عند $س = ٠$

$هـ(٠) = -٢$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = ٥ \times ٠ - ٢ = -٢$

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = ٠ + ٥ \times ٠ - ٢ = -٢$

عند $س = ٠$ متصل

الأطراف

$س = -١$

$هـ(-١) = (-١)^{٢} + ب(-١) - ١$

$= ١ + ١ = ٢$

$\lim_{س \to -١^+} هـ(س) = (-١)^{٢} + ب(-١) - ١$

$س \to -١^+ \quad ٢ = ٢$

متصل عند $س = -١$

عند $س = ١$

$هـ(١) = ٤$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٥ \times ١ - ٢$

$س \to ١^- \quad ٣ = ٣$

غير متصل

الجواب

هـ متصل $[-١ ، ١) - \{٠\}$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

② وزارة (٢٠١٩) صيفية

$$د(س) = \begin{cases} \sqrt[3]{س} + |س| - ٢ & ، س < ٠ \\ \frac{٤}{س+١} & ، ٠ \le س < ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$$

اختبر في اتصال د على $[-٢، ٣]$

الحل

$|س| = \begin{cases} س & ، س \ge ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

س	$-\infty$		٠		$+\infty$
س	−	−	٠	+	+

$$د(س) = \begin{cases} \sqrt[3]{س} - س - ٢ & ، س < ٠ \\ \frac{٤}{س+١} & ، ٠ \le س < ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$$

① د(س) متصل $(-٢، ٠)$
لأنه متصل − متصل = متصل

د(س) متصل على $(٠، ٣)$
متصل ع م في له

② عند س = ٠ نقطة تعب
$د(٠) = \frac{٤}{١+٠} = ٤$
$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = \frac{٤}{١+٠} = ٤$

$\lim_{س \to ٠^-} د(س) = \sqrt[3]{٠} - ٠ - ٢ = -٢ \neq ٤$

د(س) غير متصل عند س = ٠

③ الأطراف

س = −٢

$د(-٢) = \sqrt[3]{-٢} + ٢ + ٢$

$\lim_{س \to -٢^+} د(س) = \sqrt[3]{-٢} + ٢ + ٢$

متصل عند $س = -٢^+$

س = ٣

د(٣) = ٦

$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = \frac{٤}{١+٢} = \frac{٤}{٤} = ١ \neq ٦$

غير متصل عند س = ٣

الجواب

متصل على $[-٢، ٣) - \{٠\}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} \frac{أ}{س} + س^{٢} & ، س < ٢ \\ [س] + ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

$س = ٣$

وكان ه متصل عند $س = ٢$

① جد قيمة أ

② اكتب مجال ه على $[٠ ، ٣]$

الحل

① $[س] =$

ه متصل عند $س = ٢$

$\therefore$ ه(س) $=$ ه(٢)

$\therefore$ $س \to ٢^{+}$ $\lim$

$\therefore$ $\frac{أ}{٢} + ٢^{٢} = ٣ + ٢$

$\therefore$ $س \to ٢^{+}$ $\lim$

$\therefore \frac{أ}{٢} + ٤ = ٥$

$\therefore \frac{أ}{٢} = ١ \Leftarrow أ = ٢$

③ نبحث

عند $س = ٣$

ه(٣) $= ٧$

$\therefore$ $س \to ٣^{-}$ $\lim$ ه(س) $= ٢ + ٣ = ٥$

$\therefore$ ه غير متصل عند $س = ٣$

④ ه(س) متصل $(٢ ، ٠]$

وهي احدى النسب من مجموع

$\therefore$ ه(س) متصل $(٣ ، ٢]$ لكل عدد

$\Leftarrow$ ه متصل $(٣ ، ٠]$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⊙ وزارة (٢٠١٠) صيفية

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{س+1} & ؛ س \neq -1 \\ س[س]+1 & ؛ س \geq -1 \end{cases}$$

اثبت اتصال هـ على $[-2، 1]$

الحل

$[س] = \begin{cases} -1 & ؛ -1 \leq س < 0 \\ 0 & ؛ 0 \leq س < 1 \end{cases}$

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{س+1} & ؛ -2 \leq س < -1 \\ -س+1 & ؛ -1 \leq س < 0 \\ 1 & ؛ 0 \leq س < 1 \end{cases}$$

① هـ(س) متصل عم $(-2، -1)$
وهو على مجاله .
هـ(س) متصل $(-1، 0)$ كثير حدود
هـ(س) متصل $(0، 1)$ كثير حدود

② عند $س = -1$
$هـ(-1) = -(-1)+1 = 2$
$\lim_{س \to -1^+} هـ(س) = -(-1)+1 = 2$
$\lim_{س \to -1^-} هـ(س) = \frac{(س-1)(س+1)}{س+1} = -2$
غير متصل

عند $س = 0$
$هـ(0) = 1$
$\lim_{س \to 0^+} هـ(س) = 1$
$\lim_{س \to 0^-} هـ(س) = 0+1 = 1$
متصل عند $س = 0$

③ الأطراف
$س = -2^+$ $هـ(-2) = \frac{4-1}{-2+1} = -3$
$\lim_{س \to -2^+} هـ(س) = \frac{4-1}{-2+1} = -3$
متصل

هـ متصل على $[-2، 1] - \{-1\}$

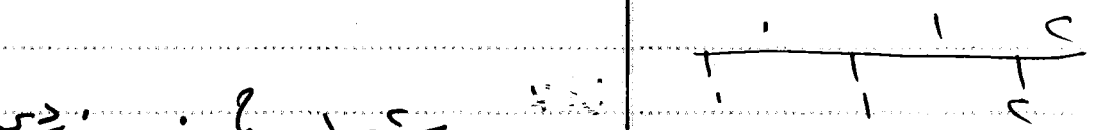
مصطفى الهسام AL WESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

⑥ وزارة (٢٠١١) شتوية

ادرس اتصال د حيث

$د(س) = \sqrt{[س] + س}$ في الفترة $[-١، ٢]$

الحل



$$د(س) = \begin{cases} \sqrt{س+١} & ، -١ \le س < ٢ \\ \sqrt{٢+س} & ، س = ٢ \end{cases}$$

$\sqrt{س+١}$ $\quad س+١ = ٠ \Leftarrow س = -١$

$د(٢) = \sqrt{٢+٢} = \sqrt{٤} = ٢$

$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = \sqrt{١+٢} = \sqrt{٣}$

$\lim_{س \to ٢^-} د(س) \neq د(٢)$

د غير متصل عند $س = ٢$

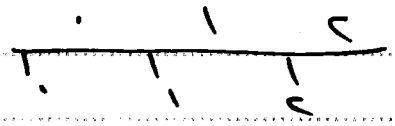
د متصل على $(-١، ٢)$

⑦ وزارة (٢٠١١) صيفية

$ل(س) = \frac{س^٢ - ١}{س+٢}$ ، $ه(س) = [س]$

ادرس اتصال كل من الاقترانين

$د(س) = ل(س) \times ه(س)$ على $[-١، ٢]$



$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س+٢} & ، -١ \le س < ١ \\ ٠ & ، ١ \le س < ٢ \\ ٠ & ، س = ٢ \end{cases}$$

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س+٢} & ، -١ < س < ١ \\ ٠ & ، ١ \le س < ٢ \\ ٢\left(\frac{٤-١}{٤+٢}\right) & ، س = ٢ \end{cases}$$

د متصل على $(-١، ٠) \cup (١، ٢)$ كثير حدود

د متصل على $[-١، ٢)$ وعرف بـ $+$ لبقاء

عند $س = ١ \Leftarrow د(١) = \frac{١-١}{١+٢} =$ صفر

$\lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س-١)}{س+١} =$ صفر

$\lim_{س \to ١} د(س) =$ صفر $\Leftarrow$ د متصل عند $س = ١$

عند $س = ٠ \Leftarrow د(٠) = ٠ \Leftarrow \lim_{س \to ٠} د(س) = ٠$

د متصل

عند $س = ٢ \Leftarrow د(٢) = \frac{٦}{٤} = ١$

$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = \frac{٤-١}{٢+٢} = ١$

$\lim_{س \to ٢} د(س) = د(٢)$ د متصل

الحوان متصل على $[-١، ٢]$

⑧ وزارة (٢٠١٢) شتوية

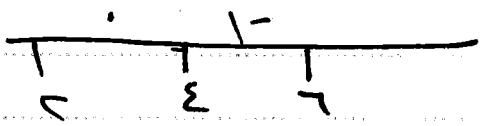
$$ه(س) = \begin{cases} ٥س - ٩ & س \leq ٢ \\ [٣ - \frac{١}{٢}س] & ٢ < س \leq ٤ \\ |س - ٤| & س > ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ه على مجموعة الأعداد الحقيقية

اكل

$[٣ - \frac{١}{٢}س]$ طول المدرج = ١

$٣ - \frac{١}{٢}س = ٠ \Leftarrow س = ٤$



$|س - ٤|$ $س - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٤$

$س - ٤$	$٤ - س$
٤	

$$ه(س) = \begin{cases} ٥س - ٩ & س \leq ٢ \\ \text{صفر} & ٢ < س \leq ٤ \\ س - ٤ & س > ٤ \end{cases}$$

ه(س) متصل على $(-\infty, ٢)$ كثير حدود

ه(س) متصل على $س \leq ٢$ كثير حدود

ه(س) متصل على $س > ٤$ كثير حدود

عند $س = ٢$

$ه(٢) = ١٠ - ٩ = ١$

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = $ صفر

$\lim_{س \to ٢^-}$ ه(س) = ١ غير متصل

$س = ٤$

$ه(٤) = $ صفر

$\lim_{س \to ٤^+} ه(س) = ٤ - ٤ =$ صفر

$\lim_{س \to ٤^-}$ ه(س) = صفر متصل

ه(س) متصل على $\mathbb{R} - \{٤\}$

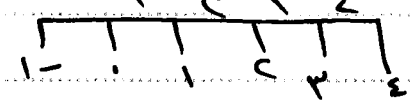
مكتبة الهدف
ALHADAF
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑨ وزارة (٢٠١٢) صيفي

$$ه(س) = \begin{cases} س^2 - 3س + 1 & س < 3 \\ [س + 1] & 3 \le س < 4 \\ 9 - 3س & س \ge 4 \end{cases}$$

اجب في اتصال ه(س) على مجموعة الاعداد الحقيقية

$[س + 1]$



$$ه(س) = \begin{cases} س^2 - 3س + 1 & س < 3 \\ 4 & 3 \le س < 4 \\ 9 - 3س & س \ge 4 \end{cases}$$

① ه متصل على $(3, 4)$ ، $(-3.5, 3)$ ، $(4, 4.5)$

كيف اتت حدود

② عند $س = 3$ ⇐ $ه(3) = 4$

لها $\lim_{س \to 3^+} ه(س) = 4$

لها $\lim_{س \to 3^-} ه(س) = 9 - 6 + 1 = 4$

$\lim_{س \to 3} ه(س) = 4$

متصل عند $س = 4$

عند $س = 4$

$ه(4) = 9 - 8 = 1$

لها $\lim_{س \to 4^+} ه(س) = 9 - 8 = 1$

لها $\lim_{س \to 4^-} ه(س) = 4$

$\lim_{س \to 4}$ غير موجود

غير متصل

ه(س) متصل على $ح - \{4\}$

---

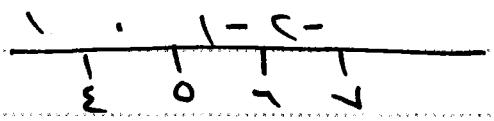
⑩ وزارة (٢٠١٥) صيفي

$ه(س) = س + 2$ ، $هـ(س) = [5 - س]$

اجب في اتصال $\frac{ه(س)}{هـ(س)}$ في $(4, 7)$

الحل

$[5 - س]$ $\quad س = 5$



$$ل(س) = \begin{cases} \frac{س+2}{1} & 4 < س \le 5 \\ \frac{س+2}{-1} & 5 < س \le 6 \\ \frac{س+2}{-2} & 6 < س < 7 \end{cases}$$

يتبع الحل

مكتب الوسام AlWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⇐ تابع اكل

ل(س) غير معرف عند النقطة ٥
[٤ ، ٥ ، ٦]

س = ٦ غير متصل

نهال(س) = -٤ ، نهال(س) = -٨
س ← ٦⁻ ، س ← ٦⁺

هـ(س) متصل (٧٠٥) - {٦}

مكتبة الهسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

الأتصال

السؤال الأول

(أ) اذا كان

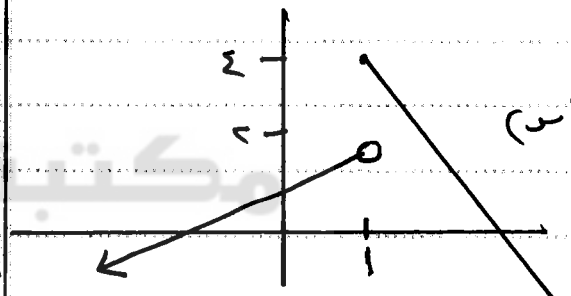
$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س\,جا(س-1)}{س-1} & س > 1 \\ ب & س = 1 \\ ٢س & س < 1 \end{cases}$$

وكان هـ(س) متصلاً عند س = ١
اوجد قيمة أ ، ب ؟

(ب) اذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣ & س > 1 \\ س + 1 & س \leq 1 \end{cases}$$

وكان هـ(س) ممثلاً بالشكل المجاور



اكتب في اتصال

ل(س) = هـ(س) × هـ(س)
عند س = ١

(ج) اكتب في اتصال

$$هـ(س) = \frac{٢س^{٢} + ١}{١ - جاس}$$

(د) اذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{١ - جتا٢س + جاس ظاس}{٥جا^{٢}س} & س \neq ٠ \\ \frac{٣}{٥} & س = ٠ \end{cases}$$

اكتب في اتصال هـ(س) عند س = ٠

(هـ) اذا كان هـ(س) = |س^٢ - ١|
هـ(س) = [٣ - س] اكتب في
اتصال $(\frac{هـ}{هـ})(س)$ عند س = ١

(و) اذا كان هـ متصلاً عند س = ١ ، هـ(١) = ٤
اوجد $\lim_{س \to 1^{+}} \frac{|س-1|}{س-1} + هـ(س)$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

(أ) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} 2س + 6 & س \le 1 \\ س^2 + 2 & 1 < س < 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على مجاله

(ب) ابحث في اتصال الاقتران

$$ق(س) = \sqrt{[س] + س} \text{ على } [1، 2]$$

(ج) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س + 2 & س \le 2 \\ س^2 & س > 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على مجاله

(د) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{3 ظا س}{س} & س \ne 0 \\ [س + 3] & س = 0 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على $\left(-\frac{\pi}{4}، \frac{\pi}{2}\right)$

(هـ) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} [س + 2] & س = 1 \\ 3س + جا\pi & س \ne 2 \\ |س - 3| & س = 2 \\ س^2 - 1 & س > 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على $[1، 5]$

(و) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + 2 & س \ne 0 \\ [س + 2] & 0 \le س < 2 \\ \sqrt{س + 7} + \frac{4}{س} & س \ge 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على كل $س$ عدد حقيقي

(ز) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - (\pi + 3)(\pi + 4)}{س - 2} & س \ne 2 \\ 1 - 3س & س = 2 \end{cases}$$

متصل على ح حيث ثابت م

مكتبة المعلم ناجح الجمزاوي ALWESAM

السؤال الثالث

(أ) $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{جا}\, ب(س-١)}{١-س^{٢}} + ٢ & س < ١ \\ ب^{٢}س & س \geq ١ \end{cases}$

$f(س)$ متصل عند $س = ١$ أوجد قيمة $ب$

(ب) $f(x) = \begin{cases} ٢ - [س]^{٢} + ٢ & س \leq ٢ \\ ٣س^{٢} + ٤ & س > ٢ \end{cases}$

اقترن متصل عند $س = ٢$
أوجد قيمة ٢ ؟

(ج) $f(x) = \begin{cases} \frac{٢س + ب}{[س]} & س < ٢ \\ ٦ & س = ٢ \\ \frac{س^{٢} - ٤}{١ - س^{٢}} & س > ٢ \end{cases}$

$f(س)$ متصل على ح وكانت
$\lim_{س \to ٠} f(٥س^{٢} + ٣) = ٨$
أوجد ٢ و $ب$ ؟

(د) $f(x) = \begin{cases} ٢س^{٣} - ب س + ١ & س < ١ \\ ٥ & س = ١ \\ س^{٢} - (٢ + ب)س + ٢ & س > ١ \end{cases}$

جد ٢ و $ب$ التي تجعل $f(س)$ متصل عند $س = ١$

(هـ) اذا كان f ، $د$ اقترانين متصلين عند $س = ٢$

اثبت ان $f \cdot د$ اقترانين متصل عند $س = ٢$

(و) $f(س) = (س - ٢)^{٢}$ ، $ه(س) = [س + ١]$

اكتب في ابسط صورة $f(س) \times ه(س)$ عند $س = ٢$

السؤال الرابع

اوجد نقط عدم الاتصال (الانفصال) للاقترانات التالية:

(١) $f(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{[س] - ١س١}$

(٢) $f(س) = \frac{س - ٢}{١س١ - ٢}$

(٣) $f(س) = [\frac{س}{٣} + ١]$

(٤) $f(س) = \sqrt{\frac{س^{٢} + ٤}{س^{٢} - ١}}$

(٥) $f(س) = \begin{cases} س^{٢} & س \neq ص \\ ٢س & س = ص \end{cases}$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(أ) $ق(س) = \begin{cases} س^2 - 4 & س \geq 1 \\ 3 - 3س^2 & س < 1 \end{cases}$

$ه(س) = 15 - 3ق(س)$

اثبت أن $ه(س)$ متصلة عند $س = 1$

(ب) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 9}{س - 3} & 1 \leq س < 3 \\ [س + 5] & 3 \leq س \leq 5 \end{cases}$

اثبت أن $ق(س)$ متصلة عند $س = 3$

(ج) $ق(س) = \begin{cases} 5 - 3س^2 & س \leq -1 \\ 4س + 1 & س > -1 \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} 4س + 3 & س \leq -1 \\ س^3 + 1 & س > -1 \end{cases}$

وكان $ل(س) = ق(س) + ه(س)$ فاثبت أن $ل(س)$ متصلة عند $س = -1$

(د) $ق(س) = \begin{cases} 1 & س \leq 1 \\ \text{صفر} & س = 1 \\ 1 & س > 1 \end{cases}$

$ه(س) = س^2$

$ل(س) = ق(س) \times ه(س)$ اثبت أن $ل(س)$ متصلة لجميع قيم $س$ الحقيقية

(هـ) $ق(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & س \leq 2 \\ 3س & س > 2 \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} 7 & س \leq 2 \\ س - 1 & س > 2 \end{cases}$

اثبت أن $ق \times ه$ متصلة عند $س = 2$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

حلول ورقة عمل الاتصال

السؤال الأول

(أ)

ه متصل عند س = ١

(١)

نهـا ه(س) = ه(١)
س ← ١+

نهـا (س^٣ − ١)/(س − ١) = ل
س ← ١

ص = ل س س = ص^٢

س ← ١ ص ← ١

نهـا (ص^٤ × ص − ١)/(ص^٢ − ١) = نهـا (ص^٣ − ١)/(ص^٢ − ١) = ل
ص ← ١

نهـا (ص − ١)(ص^٢ + ص + ١)/((ص − ١)(ص + ١)) = ٣/٢ = ل
ص ← ١

(٢)

نهـا ه(س) = ل = ٣/٢
س ← ١−

٣/٢ × ٢ = ٣ ⇐ ٣/٤ = أ

(ب) اجب اتصال ل = ه × هـ

ل(١) = ه(١) × هـ(١)
= ٢ × ٤ = ٨

هنا (ه × هـ)(س) = (س + ١) × ٤
س ← ١+ = ٨

هنا (ه × هـ)(س) = ٤ × ٢ = ٨
س ← ١−

⇐ ل(س) متصل عند س = ١

(ب) اجب اتصال

ه(س) = (٢ س^٢ + ١)/(١ − جا س)

متصل ماعدا اصفار المقام

١ − جا س = ٠

جا س = ١ س = ٢ن π + π/٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(د) $د(٠) = \frac{٣}{٥}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}س + \text{جا}س \text{ظا}س}{٥ \text{ظا}^٢ س}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - ١ + ٢\text{جا}^٢ \frac{س}{٢}}{٥ \text{ظا}^٢ س} + \frac{\text{جا}س \text{ظا}س}{٥ \text{ظا}^٢ س}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٢}{٥} \times \frac{\text{جا}^٢ \frac{س}{٢}}{\frac{س^٢}{٤}} + \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{٥ \text{ظا}س} \times \frac{\text{نها}_{س \to ٠} \text{ظا}س}{\text{جا}س}$

$= \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{٢}{١٠} + \frac{٢}{٥}$

$= \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore$ متصل عند $س = ٠$

(هـ)

$س$	$-\infty$	-١	١	$+\infty$
$س^٢ - ١$	+	٠	−	٠ +
$١ - س^٢$	−	٠	+	٠ −
$|س^٢ - ١|$	+	٠	−	٠ +

$[٣ = س]$

$س$	٠	١	٢	٣
$[٣ = س]$	٠	١	٢	٣

$(\frac{د}{هـ})(س) = \begin{cases} \frac{١ - س^٢}{٢} & ٠ \le س < ١ \\ ٠ & س = ١ \\ \frac{س^٢ - ١}{١} & ١ < س \le ٢ \end{cases}$

نها $(\frac{د}{هـ})(س)$ = صفر

$س \to ١^+$

نها $(\frac{د}{هـ})(س)$ = $\frac{١ - ١}{٢}$ = صفر

$س \to ١^-$

$(\frac{د}{هـ})(١)$ = صفر

متصل عند $س = ١$

(و) $د(س)$ متصل $\Leftarrow$ نها $د(س) = د(١) = ٤$

$س \to ١$

نها $\sqrt{\frac{س - ١}{س - ١} + د(س)}$

$س \to ١^+$

$= \sqrt{١ + ٣} = ١ + ٢ = ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

(أ)

$|س+١| \geq ٢$

$س+١ \leq -٢$ أو $س+١ \geq ٢$

$س \leq -٣$ أو $س \geq ١$

$|س+١| < ٢$ $\quad$ $-٢ < س+١ < ٢$

$-٣ < س < ١$

$س+١ < ٢ \Leftarrow س < ١$

$$د(س) = \begin{cases} ٦ + ٢س & -٣ \leq س \leq ١ \\ ٢ + س^{٢} & س < -٣ \text{ أو } س > ١ \end{cases}$$

$(-\infty, -٣) \cup (١, \infty)$ متصل كثير حدود

$س < -٣$ أو $س > ١$ متصل كثير حدود،

عند $س = ١$ نقطة تحقق

$د(١) = ٨$

$\lim_{س \to ١^{+}} د(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ١^{-}} د(س) = ٨$

عند $س = ١$ متصل

عند $س = -٣$

$د(-٣) = -٦ + ٦ = ٠$ صغ

$\lim_{س \to -٣^{+}} د(س) =$ صغ

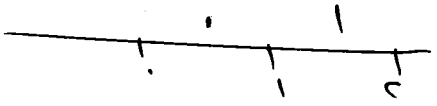
$\lim_{س \to -٣^{-}} د(س) = ٩ + ٢ = ١١$

عند $س = -٣$ متصل

$د$ متصل على $\mathbb{R} - \{-٣، ١\}$

(ب)

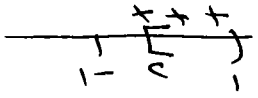
$[س]$



$د(س) = \sqrt{١ + [س]}$ $\quad$ $[١، ٢)$

نقاط حرجة

$١ + [س] = ٠ \Leftarrow [س] = -١$



$د(س)$ متصل على $[١، ٢)$ لأن

$د(س)$ متصل في $(١، ٢)$ $\subset$ أعمال

عند $س = ٢$

$د(٢) = \sqrt{٣}$

$\lim_{س \to ٢^{-}} \sqrt{١ + [س]} = \sqrt{٣}$ متصل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(ج)

$$\begin{cases} س + ٢ & -٢ \le س \le ٢ \\ س^٢ & س > ٢ \text{ أو } س < -٢ \end{cases}$$

$(-\infty, -٢)$ متصل كثير حدود

$(٢, \infty)$ متصل كثير حدود

$(-٢, ٢)$ متصل كثير حدود

عند $س = ٢$

$هـ(٢) = ٤$

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٤$

متصل عند $س = ٢$

عند $س = -٢$

$هـ(-٢) =$ صفر

$\lim_{س \to -٢^+} هـ(س) =$ صفر ، $\lim_{س \to -٢^-} هـ(س) = ٤$

غير متصل عند $س = -٢$

$هـ$ متصل على $ح - \{-٢\}$

(د)

متصل على $ح \Leftarrow$ متصل عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$

$س \to ٢$

بالتعويض المباشر = صفر

$م(٢)^٢ - (٤ + ٣م)(٢) + ٦م =$

$٨ - ٨ - ٢م + ٦م = ٠$

بالطريقة التركيبية

	$س^٢$	$س$	حد ثابت
٢	٢	$-٤ - ٣م$	$٦م$
		٤	$-٦م$
	٢	$-٣م$	٠

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ - ٣م)}{س - ٢} = هـ(٢)$

$= ١ \times ٢ - ٣م$

$= ٢ - ٣م$

$٢ - ٣م = ٥$

$-٣م = ٣$

$م = -١$

(هـ)

عند س = ٠

د(٠) = ٣

نهـ ٣ ظاس / س = ٣

س ← ٠

نهـ ٣ جتاس = ٣ جتا٠ = ٣

س ← ٠

متصل عند س = ٣

∴ د متصل ع $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

(و)

عند س = ٢

د(٢) = |٥ × ٢ − ٣| = ٧

نهـ س^{٣} − ١ = ٨ − ١ = ٧

س ← ٢

نهـ ٣س + ظا$\frac{\pi}{٤}$ س = ٦ + ١

س ← ٢

= ٧

متصل عند س = ٢

عند س = ١$^{+}$

د(١) = [١ + ٢] = ٣

نهـ ٣س + ظا$\frac{\pi}{٤}$ س / س = ٣ + ظا$\frac{\pi}{٤}$

س ← ١$^{+}$

= ٣ + ٠

= ٣

متصل عند س = ١$^{+}$

⇐ د(س) متصل ع [١ ، ٥]

(ز)

[س + ٢] : ٤ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ١$^{-}$ ، ٢$^{-}$

عند س = ٠

د(٠) = ٢

نهـ د(س) = ٢

س ← ٠$^{+}$

نهـ د(س) = ٠ + ٢ = ٢

س ← ٠$^{-}$

متصل عند س = ٠

عند س = ٢

د(٢) = ٩ − ٧ → نهـ = ٣ + ٢ = ٥

نهـ د(س) = ٩ − ٧ → نهـ = ٥

س ← ٢$^{+}$

نهـ د(س) = ٣

س ← ٢$^{-}$

∴ غير متصل عند س = ٢

متصل على ح − {٢}

مكتبة الوسام Alwesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(أ)

س	١	
ا ١ − س ا	+	−
س − ١	−	+

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}(س-١)}{١-س} + ٢ & س < ١ \\ ب س^{٢} & س > ١ \end{cases}$$

$$\text{نها}_{س \to ١^{+}} \dfrac{\text{حا}(س-١)}{١-س} + ٢ = \text{نها}_{س \to ١^{-}} ب س^{٢}$$

$$ب + ٢ = ب$$

$$ب^{٢} - ب - ٢ = ٠$$

$$(ب-٢)(ب+١) = ٠$$

$$ب = ٢ \quad \text{أو} \quad ب = -١$$

(ب)

س	١	٢	
ا س − ٢ ا	+	−	+
ا ١ − س ا	+	+	−

[س]

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٤ + أ^{٢} & ٢ \geq س \\ أ س + ٤ & س > ٢ \end{cases}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢^{+}} \text{ق}(س) = \text{نها}_{س \to ٢^{-}} \text{ق}(س)$$

$$٤ + أ^{٢} = ٢أ + ٤$$

$$أ^{٢} - ٢أ = ٠$$

$$أ(أ-٢) = ٠ \Leftarrow$$

$$أ = ٠$$

$$أ = ٢$$

(ج)

س	٢	
ا ٢ − س ا	+	−
س − ٢	−	+

[س]

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{أ س + ب}{٢} & ٢ \geq س \\ \dfrac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & س > ٢ \end{cases}$$

$$س = ٢$$

متصل

$$\text{نها}_{س \to ٢^{+}} \text{ق}(س) = \text{ق}(٢)$$

$$\dfrac{٢أ + ب}{٢} = ٥ \Leftarrow ٢أ + ب = ١٠ \quad (١)$$

$$\text{نها}_{س \to ٢^{-}} \text{ق}(س) = \text{ق}(٢)$$

$$\text{نها}_{س \to ٢^{-}} \dfrac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = ٥$$

$$\text{نها}_{س \to ٢^{-}} \dfrac{(س+٢)(س-٢)}{(س-٢)} \Leftarrow ٥ = ٤ + أ$$

$$أ = ١$$

$$\text{نها}_{ص \to ٠} \text{ق}(٥ص^{٣} + ٢) = ٨$$

$$ص = ٥س^{٣} + ٢ \quad س \to ٠ \quad ص \to ٢$$

$$\text{نها}_{ص \to ٢} \text{ق}(ص) = ٨$$

$$\Leftarrow \text{يتبع الحل}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$\text{هـا}\ \frac{\text{مـ}(ص)}{ص} = \frac{٣ب + ب}{٢} = ٨$

$ص \leftarrow ٣$

$\Leftarrow ٣ب + ب = ١٦ \quad \cdots ②$

نأخذ ① ، ②

$ب = ٨ \pm ٣ب$

$١٦ = ب + ٣ب$

$ب = ٤ \leftarrow$

بتعويضها في ①

$٨ - = ب + ٣ب$

$٨ - = ب + ٤٨$

$ب = -٨ - ٤٨ = -٥٦$

---

(5)

$\text{هـا}\ \frac{\text{مـ}(س)}{س} = \text{مـ}(١)$

$س \leftarrow ١$

$ب + ب + ١ = ٥$

$ب - ب = ٤ \quad \cdots ①$

$\text{هـا}\ \frac{\text{مـ}(س)}{س} = \text{مـ}(١)$

$س \leftarrow ١^+$

$١ - (ب + ب) + ٢ = ٥$

$١ - ب - ب + ٢ = ٥$

$-ب - ب = ٢ \quad \cdots ②$

حل ① ، ②

$ب - ب = ٤$

$-ب - ب = ٢$

$-٢ب = ٦$

$ب = -٣$

بتعويض $ب = -٣$ في ①

$ب - (-٣) = ٤$

$ب + ٣ = ٤ \Leftarrow ب = ١$

---

(6)

نفرض $ل = \frac{\text{مـ}}{\text{د}}(س)$

$ل(ب) = \frac{\text{مـ}(ب)}{\text{د}(ب)}$

$\text{هـا}\ ل(س) = \text{هـا}\ \frac{\text{مـ}(س)}{\text{د}(س)}$ لأن مـ متصل و د متصل

$س \leftarrow ب$ $\quad س \neq ب$

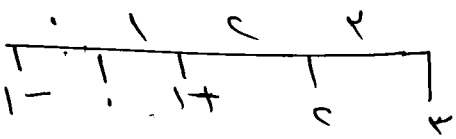
$= \frac{\text{هـا}\ \text{مـ}(س)}{\text{هـا}\ \text{د}(س)} = \frac{\text{مـ}(ب)}{\text{د}(ب)}$

$س \leftarrow ب$

$\Leftarrow ل(س)$ متصل عند $س = ب$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑨



$$ق \times ه = \begin{cases} ٢(س-٢)^{٢} & ١ \leq س < ٢ \\ ٣(س-٢)^{٢} & ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

$(ق \times ه)(٢) = ٣(٢-٢)^{٢} = ٠$

هـ $(ق \times ه)(س) = ٣(س-٢)^{٢} = ٠$ عند $س \to ٢^{+}$

هـ $(ق \times ه)(س) = ٢(س-٢)^{٢} = ٠$ عند $س \to ٢^{-}$

متصل عند $س = ٢$

السؤال الرابع

① المقام $= ٠$

$[س] - |س| = ٠$

$\Leftarrow |س| = [س]$

$س \in ص^{+}$

⑤ $|س| - ٢ = ٠$

$|س| = ٢$

$س = ٢$ أو $س = -٢$

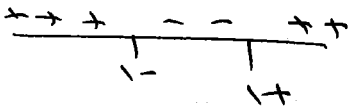
$\{٢، -٢\}$

③ $[\frac{س}{٣} + ١] = ٣[\frac{س}{٣}]$

يتحقق $\frac{س}{٣} \in ص$

$س \in ٣ص$

④ $ق(س) = \sqrt{\frac{س^{٢}+٤}{س^{٢}-١}}$



$س^{٢} - ١ = ٠$

$س \in [-١، ١]$

⑤ $ه(س) = \begin{cases} س^{٢} & س \notin ص \\ ٢س & س \in ص \end{cases}$

هـ $ه(س) \neq ه(٢)$ لكل $س \in ص$ عندما $س \to ٢$

إلا عندما $س^{٢} = ٢س$

$س(س-٢) = ٠$

$س = ٠$ أو $س = ٢$

ه غير متصل لكل $س \in ص - \{٠، ٢\}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

$هـ(١) = ٢ - ٣ = -١$

$هـ'(س) = ٢س - ٣$

هـ' غير معرفة عند $س = ١$

$هـ(س) = ٢س^{٢} - ٣س$

$هـ'(س) = ٤س - ٣$

هـ' غير معرفة عند $س = ٠$

متصل لـ $س = ١$

$هـ(س) = ١٥ - ٣هـ(س)$

متصل $= -٣ \times$ متصل

$=$ متصل

أو نجد قاعدة $هـ'(س)$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ١٥ - ٣س^{٢} + ٦ & س < ١ \\ ١٥ - ٦ + ٩س & س \geq ١ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ٢١ - ٣س^{٢} & س < ١ \\ ٩ + ٩س & س > ١ \end{cases}$$

①

$|س + ١| \geq ٥$

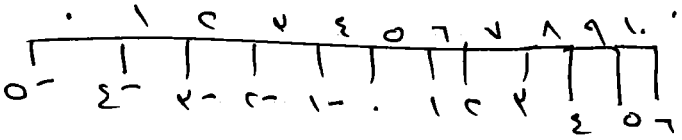
$-٥ \geq س + ١ \geq ٥$

$-١ \quad -١ \quad -١$

$-٦ \geq س \geq ٤$

$-٢ \geq س \geq ٢$

$[٥ + س]$



$$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & -٢ \leq س < ٢ \\ ٧ & ٢ < س < ٣ \\ ٨ & ٣ \leq س < ٤ \\ ٩ & ٤ \leq س < ٥ \\ ١٠ & س = ٥ \end{cases}$$

عند $س = ٢$

$هـ(٢) = \frac{٤ - ٩}{٣ - ٢} = \frac{-٥}{-١} = ٥$

$\lim_{س \to ٢^{+}} هـ'(س) = ٧$ ، $\lim_{س \to ٢^{-}} هـ'(س) =$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$

$=$ نهاية $(س + ٣)$

عند متصل لـ $س = ٢ = ٥$

عند $س = ٣$

$هـ(٣) = ٨$

$\lim_{س \to ٣^{+}} هـ'(س) = ٨$

$\lim_{س \to ٣^{-}} هـ'(س) = ٧$

عند متصل عند $س = ٣$

مكتبة الوسام
Alwesam
المعلم ناجح الجمزاوي

(٤)

$$(ه+و)(س) = \begin{cases} ٥-٣س^{٢}+٤س+٢ & س<-١ \\ ٤+١+٣س+١ & س\geq -١ \end{cases}$$

$$(ه+و)(س) = \begin{cases} ٨-٣س^{٢}+٤س & س<١ \\ ٤+س^{٢}+٣س & س\geq ١ \end{cases}$$

$$(ه+و)(-١) = ٤\times(-١)+(-١)^{٣}+٤$$
$$= -٤-١+٤ = -١$$

$$\text{نهـا}_{س\to -١^{+}} (ه+و)(س) = ٤(-١)+(-١)^{٢}+٤$$
$$= -٤+١+٤ = ١$$

$$\text{نهـا}_{س\to -١^{-}} (ه+و)(س) = ٨-٣(-١)^{٢}+٤\times ٣$$
$$= ٨-٣-٤ = ١$$

$(ه+و)(س)$ غير متصل عند $س=-١$

(٥)

$$ل(س) = \begin{cases} -س^{٢} & س<١ \\ \text{صفر} & س=١ \\ س^{٢} & س>١ \end{cases}$$

$ل(١) =$ صفر

$\text{نهـا}_{س\to ١^{+}} ل(س) = ١^{٢} = ١$

$\text{نهـا}_{س\to ١^{-}} ل(س) = -١$

غير متصل عند $س=١$

(٦)

$$ه\times ه(س) = \begin{cases} ٧-٢س^{٢} & س\leq ٢ \\ ٣س(س-١) & س>٢ \end{cases}$$

$(ه\times ه)(٢) = ٧-٢(٢)^{٢} = ٧-٨$
$= -١$

$\text{نهـا}_{س\to ٢^{+}} ه\times ه(س) = ٣\times ٢(٢-١)$
$= ٦$

$\text{نهـا}_{س\to ٢^{-}} ه\times ه(س) = ٧-٢(٢)^{٢}$
$= ٧-٨ = -١$

غير متصل عند $س=٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمت بحمد الله

امنياتي بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي