الرسام في الرياضيات

وحدة التفاضل (منهاج جديد)

للفرع الادبي

إعداد الأستاذ :أنس الرفاتي

0788587409

الفهرس

طلابي الرائعين :

أسأل الله أن تكون هذه الدوسية قد سهلت عليكم الأمر ، وأن تكون طريقكم الى العلامة الكاملة .

كما واعتذر عن أي خطأ - غير مقصود - قد يرد فيها .

لكم كل المحبة والاحترام

أ. أنس الرفاتي

مُعدَّل التغيُّر

♥ مقدار التغير في س :

الفرق بين قيمتي (س) عندما تتغير (س) من (س١) الى (س٢) ويعطى بالرمز (Δس) وتقرأ (دلتا س) وتكون :

Δس = س٢ − س١

حيث ⇐ س١ : القيمة الاولى للمتغير س

س٢ : القيمة الثانية للمتغير س

أمثلة :

[١] جد Δس في ما يأتي :

أ) س١ = −٢ ، س٢ = ٣

ب) س١ = ٦٫٥ ، س٢ = ٢٫٢

الحل

أ) Δس = س٢ − س١

= ٣ − (−٢)

= ٣ + ٢ = ٥

زيادة (+)

ب) Δس = س٢ − س١

= ٢٫٢ − ٦٫٥

= −٤٫٣

نقصان (−)

[٢] اذا كانت س١ = ٣ ، Δس = ٧ فجد س٢ .

الحل

Δس = س٢ − س١

٧ = س٢ − ٣

س٢ = ١٠

[٣] اذا كان ق(س) = ٦س + ٢ وتغيرت س من صفر إلى ٣ فما مقدار التغير في س ؟

الحل

Δس = س٢ − س١

= ٣ − ٠ = ٣

لاحظ في المثال السابق أنه :

• اذا كانت س١ = صفراً فإن :

ق(س١) = ق(٠) = ٦(٠) + ٢ = ٢

• واذا كانت س٢ = ٣ فإن :

ق(س٢) = ق(٣) = ٦(٣) + ٢ = ٢٠

أي أن التغير في س يرافقه تغير في ق(س)

حيث Δق(س) = ق(س٢) − ق(س١)

واذا كانت ص = ق(س) فإن :

Δص = ص٢ − ص١

٤ اذا كان ق(س) = ٤س + ٣
أوجد مقدار التغير في ق(س) عندما تتغير س من س١ = ٢ الى س٢ = ٥

الحل ق(س١) = ق(٢) = ٤(٢) + ٣ = ١١

ق(س٢) = ق(٥) = ٤(٥) + ٣ = ٢٣

⇐ Δق(س) = ق(س٢) − ق(س١)

= ٢٣ − ١١

= ١٢

٥ اذا كان ص = ق(س) = س٢ − ٣
وتغيرت س من س١ = ٣ الى س٢ = ٢
جد : أ) مقدار التغير في س
ب) مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س)
جـ) $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

الحل أ) Δس = س٢ − س١

= ٢ − ٣ = −١

ب) Δق(س) = ق(س٢) − ق(س١)

= (٤ − ٣) − (٩ − ٣)

= ١ − ٦ = −٥

جـ) Δص = Δق(س) لأن ص = ق(س)

$\therefore \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{-٥}{-١} = ٥$

تعريف معدل التغير في الاقتران ص = ق(س) هو :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

٦ اذا كان ق(س) = س٢ − ٥ ، جد معدل التغير في الاقتران ق اذا كانت تتغير س من س١ = ٢ الى س٢ = ٤

الحل

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{\text{ق(٤)} - \text{ق(٢)}}{٤ - ٢}$$

$$= \frac{١١ - (-١)}{٢} = ٦$$

٧ اذا كانت ق(س) = $\sqrt{٣\text{س} + ١}$ وكانت س١ = ٠ ، Δس = ٥ ، جد معدل التغير .

الحل أولاً ، نجد س٢

Δس = س٢ − س١

٥ = س٢ − ٠ ⇐ س٢ = ٥

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{\text{ق(٥)} - \text{ق(٠)}}{٥ - ٠} = \frac{٤ - ١}{٥} = \frac{٣}{٥}$$

[٨] اذا كان معدل التغير للاقتران ق يساوي (١٠) عندما تتغير س من (٦) الى (٤) فجد قيمة ق(٦) اذا علمت أن ق(٤) = -٤

الحل

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$١٠ = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٦)}{٤ - ٦}$$

$$١٠ = \frac{-٤ - \text{ق}(٦)}{-٢}$$

بالضرب التبادلي ⇐ $-٢٠ = -٤ - \text{ق}(٦)$

نجمع ٤ للطرفين ⇐ $-١٦ = -\text{ق}(٦)$

نضرب الطرفين بـ(-١) ⇐ ∴ $\text{ق}(٦) = ١٦$

[٩] اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} ، & \text{س} < ٠ \\ ٤ ، & \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

فجد قيمة معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من س = -١ الى س = ٥ .

الحل

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(-١)}{٥ - (-١)}$$

$$= \frac{٤ - (-٢)}{٦} = ١$$

[١٠] واجب: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٣ - ٥ ، & ١ \leq \text{س} \leq ٣ \\ ٦\text{س} + ٤ ، & ٣ < \text{س} \leq ٧ \end{cases}$

فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ٢ الى ٤

[١١] اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١٢}{\text{س}}$ ، فجد معدل التغير في ق عندما تتغير س من ٢ الى ٦

الحل

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{\text{ق}(٦) - \text{ق}(٢)}{٦ - ٢}$$

$$= \frac{\frac{١٢}{٦} - \frac{١٢}{٢}}{٤}$$

$$= \frac{٢ - ٦}{٤} = \frac{-٤}{٤} = -١$$

[١٢] اذا كان ق(س) = -٣ فجد معدل التغير في ق عندما تتغير س من ٢ الى ٧

الحل

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٧) - \text{ق}(٢)}{٧ - ٢} = \frac{-٣ - (-٣)}{٥}$$

$$= \text{صفر}$$

ملاحظة

معدل التغير للاقتران الثابت = صفر

Scanned by CamScanner

١٣ ما قيمة تغير الاقتران $ص = ٣س^٣$ عندما تتغير س من $س_١ = ٢$ بمقدار $\Delta س = -١$ ؟

الحل لاحظ أنه طالب منا قيمة التغير أو مقدار التغير وليس معدل التغير .

$\Leftarrow \Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١)$

" بجد $(س_٢)$ ثم نرجع للقانون "

$\Delta س = س_٢ - س_١$

$-١ = س_٢ - ٢ \Leftarrow س_٢ = ١$

$\therefore \Delta ص = ق(١) - ق(٢)$

$= ٣ - ٢٤$

$= -٢١$

١٤ مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغيّر طول ضلعه من (١) سم الى (٣) سم ، جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب .

الحل $ح = س^٣$ حيث ح : الحجم

س : طول الضلع

$\Delta ح = ح(٣) - ح(١)$

$= ٢٧ - ١$

$= ٢٦$

١٥ اذا كان $ق(س) = \frac{أ}{س+٢}$ وكان معدل تغير ق عندما تتغير س من صفر الى ٣ يساوي -٢ ، فجد أ .

الحل $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠}$

$$-٢ = \frac{\frac{أ}{٥} - \frac{أ}{٢}}{٣}$$

بالضرب التبادلي $\Leftarrow \frac{أ}{٥} - \frac{أ}{٢} = -٦$

$$\frac{٢أ - ٥أ}{٢ \times ٥} = -٦$$

$$\frac{-٣أ}{١٠} = -٦ \Leftarrow -٣أ = -٦٠$$

$\Leftarrow أ = ٢٠$

١٦ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & ، \ 1 \le \text{س} \le 3 \\ \text{أ}\,\text{س} & ، \ 3 < \text{س} \le 5 \end{cases}$

وكان معدل التغير في ق عندما تتغير س من (٢) الى (٥) يساوي (٤) ، فجد أ .

الحل

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$4 = \frac{\text{ق}(5) - \text{ق}(2)}{5 - 2}$$

$$4 = \frac{5\text{أ} - 4}{3}$$

$$12 = 5\text{أ} - 4$$

$$16 = 5\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{16}{5}$$

• اذا جاء في السؤال فترة مغلقة [أ ، ب] فهذا يعني أن $\text{س}_1 = \text{أ}$ ، $\text{س}_2 = \text{ب}$

١٧ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^2}$ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٢]

الحل معدل التغير $= \frac{\text{ق}(2) - \text{ق}(1)}{2 - 1}$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{1}}{1} = \frac{1}{4} - \frac{4}{4} = \frac{-3}{4}$$

١٨ اذا كان معدل تغير ق في الفترة [−٣ ، ١] يساوي (٢) ، وكان $\text{هـ}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) - \text{س}^2$ فجد معدل تغير هـ في الفترة [−٣ ، ١] .

الحل $\text{س}_1 = -3$ ، $\text{س}_2 = 1$

معدل تغير $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$$2 = \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(-3)}{1 - (-3)}$$

$$2 = \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(-3)}{4}$$

ومنه $\Leftarrow \boxed{\text{ق}(1) - \text{ق}(-3) = 8}$

معدل تغير $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س}_2) - \text{هـ}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$$= \frac{\text{هـ}(1) - \text{هـ}(-3)}{1 - (-3)}$$

$$= \frac{(\text{ق}(1) - (1)^2) - (\text{ق}(-3) - (-3)^2)}{4}$$

$$= \frac{\text{ق}(1) - 1 - \text{ق}(-3) + 9}{4}$$

$$= \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(-3) + 8}{4}$$

$$= \frac{8 + 8}{4} = 4$$

١٩ اذا كان معدل تغير ق في الفترة [-١، ٢] يساوي (-٣)، وكان هـ(س) = ٢ق(س) + ٥س فجد معدل التغير في هـ في الفترة [-١، ٢].

الحل

معدل تغير ق(س) $= \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$-٣ = \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١)}{٢ - (-١)} \Leftarrow -٣ = \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١)}{٣}$

ومنه $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١) = -٩}$

معدل تغير هـ(س) $= \frac{\text{هـ}(\text{س}_٢) - \text{هـ}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$= \frac{\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(-١)}{٢ - (-١)}$

$= \frac{(٢\text{ق}(٢) + ١٠) - (٢\text{ق}(-١) - ٥)}{٣}$

$= \frac{٢\text{ق}(٢) + ١٠ - ٢\text{ق}(-١) + ٥}{٣}$

$= \frac{٢\text{ق}(٢) - ٢\text{ق}(-١) + ١٥}{٣}$

$= \frac{٢(\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١)) + ١٥}{٣}$

$= \frac{٢ \times -٩ + ١٥}{٣}$

$= \frac{-٣}{٣} = -١$

٢٠ واجب

اذا كان معدل التغير للاقتران ق في الفترة [١، ٣] يساوي (٤) وكان هـ(س) = ق(س) − س، فجد معدل التغير للاقتران هـ في الفترة [١، ٣]

٢١ واجب

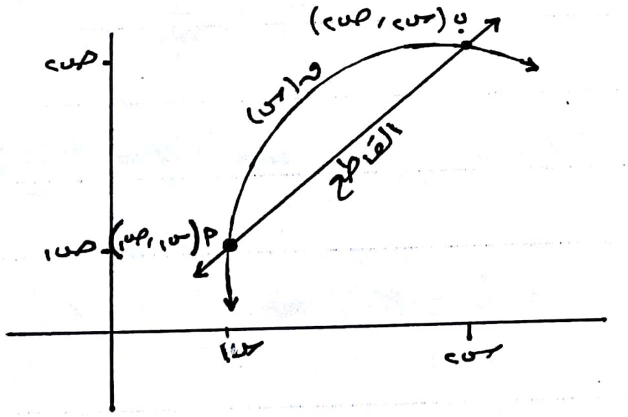
اذا كان معدل تغير ق(س) عندما تتغير س من (١) الى (٥) يساوي (١٢) وكان هـ(س) = ٢ق(س) + ٧، فجد معدل تغير هـ(س) عندما تتغير س من (١) الى (٥)

التفسير الهندسي لمعدل التغير

ميل القاطع المار بالنقطتين:

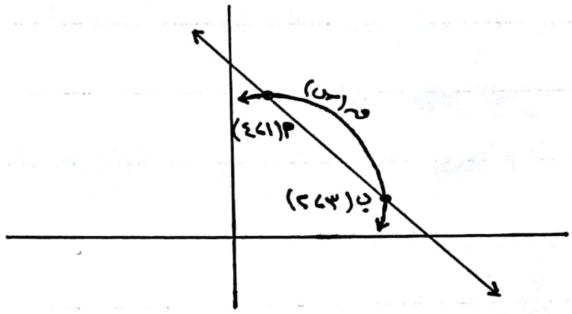
أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)

يساوي معدل التغير للاقتران عندما تتغير س من س١ الى س٢.



أمثلة :

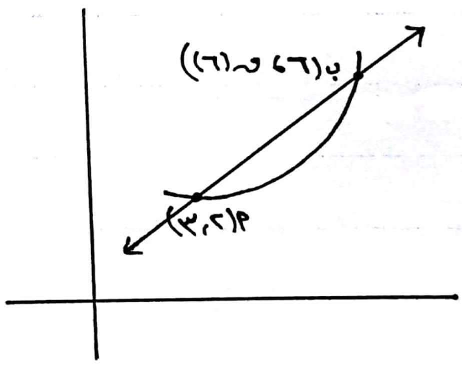
[١] من الشكل ، جد ميل القاطع لمنحنى ق(س)



الحل: ميل القاطع $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{٢ - ٤}{٣ - ١} = \frac{-٢}{٢} = -١$

[٢] اذا كان ميل القاطع لمنحنى ق(س) في الشكل يساوي $(\frac{١}{٢})$ جد قيمة ق(٦).



الحل: ميل القاطع $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$\frac{١}{٢} = \frac{ق(٦) - ٣}{٦ - ٢} \leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{ق(٦) - ٣}{٤}$

$٢ = ق(٦) - ٣ \leftarrow ق(٦) = ٥$

[٣] اذا كان منحنى ق يمر بالنقطتين: أ(-١،-٣) ب(٢،١٨) ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين أ، ب .

الحل: ميل القاطع $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١٨ - (-٣)}{٢ - (-١)}$

$= ٧$

[٤] . اذا كان ق(س) = ٨ س٣ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين أ(٠، ق(٠)) ، ب(٣، ق(٣))

الحل: ميل القاطع $= \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠}$

$= \frac{٧٢ - ٠}{٣} = ٢٤$

[٥] اذا كان منحنى ق يمر بـ أ(٣،٧) ، ب(-١، ل) وكان ميل القاطع $(\overleftrightarrow{أب})$ يساوي (-٣) جد قيمة ل .

الحل: ميل القاطع $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$-٣ = \frac{ل - ٧}{-١ - ٣} \leftarrow -٣ = \frac{ل - ٧}{-٤}$

$١٢ = ل - ٧ \leftarrow ل = ١٩$

Scanned by CamScanner

التفسير الفيزيائي لمعدل التغير

- السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية (ن١، ن٢)

رمزها ← (ع̄)

قانونها ← ع̄ = Δف / Δن = (ف(ن٢) − ف(ن١)) / (ن٢ − ن١)

أمثلة:

١ يتحرك جسيم حسب العلاقة:

ف(ن) = ن² + ٥ ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [٢، ٣]

الحل

ع̄ = (ف(ن٢) − ف(ن١)) / (ن٢ − ن١)

ع̄ = (ف(٣) − ف(٢)) / (٣ − ٢)

ع̄ = ((٣² + ٥) − (٢² + ٥)) / ١

ع̄ = ٩ + ~~٥~~ − ٤ − ~~٥~~

ع̄ = ٥ م/ث

٢ اذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم في اثناء سقوطه رأسياً الى أسفل تعطى بالعلاقة ف(ن) = ١٠ن − ٥ن² فاحسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٣] .

الحل

ع̄ = (ف(ن٢) − ف(ن١)) / (ن٢ − ن١)

ع̄ = (ف(٣) − ف(١)) / (٣ − ١)

ع̄ = ((٣٠ − ٤٥) − (١٠ − ٥)) / ٢

ع̄ = (−١٥ − ٥) / ٢ = −٢٠ / ٢ = −١٠ م/ث

٣ واجب

يتحرك جسيم حسب العلاقة

ف(ن) = ن² + ٤ن

احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٥] .

المشتقة الأولى

• المشتقة الأولى للاقتران $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ المعرّف على الفترة $[\text{أ}، \text{ب}]$ هي اقتران جديد نرمز اليه بالرموز: $\text{ق}'(\text{س})$، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$، $\text{ص}'$ حيث:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

أو

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

ملاحظة استخدام أي من القانونين يؤدي للنتيجة نفسها.

أمثلة

$\boxed{١}$ باستخدام تعريف المشتقة، جد مشتقة $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$.

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(٢(\text{س}+\text{هـ})+١) - (٢\text{س}+١)}{\text{هـ}}$$

يتبع....

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\cancel{٢\text{س}} + ٢\text{هـ} + \cancel{١} - \cancel{٢\text{س}} - \cancel{١}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٢\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}} = ٢$$

$\boxed{٢}$ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^٢ - ٣$ جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(٤\text{ع}^٢ - ٣) - (٤\text{س}^٢ - ٣)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{٤\text{ع}^٢ - \cancel{٣} - ٤\text{س}^٢ + \cancel{٣}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{٤(\text{ع}^٢ - \text{س}^٢)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{٤\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع} + \text{س})}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} ٤(\text{ع} + \text{س})$$

$$= ٤(\text{س} + \text{س})$$

$$= ٨\text{س}$$

$\boxed{٣}$ اذا كان ق(س) = $\text{س}^{٢}$ ، جد قَ(٣) باستخدام تعريف المشتقة .

الحل

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{قَ(٣)} = \underset{\text{ع}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٣)}}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} + ٣)\cancel{(\text{ع} - ٣)}}{\cancel{(\text{ع} - ٣)}} = ٦$$

$\boxed{٤}$ اذا كان ق(س) = $\text{س}^{٣}$

جد قَ(٤) باستخدام تعريف المشتقة .

الحل

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{قَ(٤)} = \underset{\text{ع}\leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٤)}}{\text{ع} - ٤}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^{٣} - ٦٤}{\text{ع} - ٤}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{ع} - ٤)}(\text{ع}^{٢} + ٤\text{ع} + ١٦)}{\cancel{(\text{ع} - ٤)}}$$

$$= ١٦ + ١٦ + ١٦$$

$$= ٤٨$$

$\boxed{٥}$ اذا كان ق(س) = $\sqrt{٢\text{س} - ٣}$

جد قَ(س) باستخدام التعريف ، ثم جد قَ(٢) .

الحل لاحظ هنا أنه اشترط علينا ايجاد قَ(س) أولاً ، ثم ايجاد قَ(٢) .

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢\text{ع} - ٣} - \sqrt{٢\text{س} - ٣}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢\text{ع} - ٣} - \sqrt{٢\text{س} - ٣}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{٢\text{ع} - ٣} + \sqrt{٢\text{س} - ٣}}{\sqrt{٢\text{ع} - ٣} + \sqrt{٢\text{س} - ٣}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}} \frac{٢\text{ع} - \cancel{٣} - ٢\text{س} + \cancel{٣}}{(\text{ع} - \text{س})(\sqrt{٢\text{ع} - ٣} + \sqrt{٢\text{س} - ٣})}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}} \frac{٢\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\sqrt{٢\text{ع} - ٣} + \sqrt{٢\text{س} - ٣})}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢\text{س} - ٣} + \sqrt{٢\text{س} - ٣}}$$

$$= \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢\text{س} - ٣}} = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س} - ٣}}$$

$$\therefore \text{قَ(٢)} = \frac{١}{\sqrt{٢\times٢ - ٣}} = \frac{١}{\sqrt{١}}$$

$$= ١$$

٦ واجب

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{٢س}}$ ، فجد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة ثم جد $\text{قَ}(\text{٨})$.

٧ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٣}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq \text{٠}$.

فجد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة ثم جد $\text{قَ}(\text{٣})$.

الحل

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{٣}}{\text{ع}} - \frac{\text{٣}}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{٣س} - \text{٣ع}}{\text{ع س}} \times \frac{\text{١}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{٣}\cancel{(\text{س} - \text{ع})}^{(-\text{١})}}{\text{ع س}} \times \frac{\text{١}}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{-\text{٣}}{\text{ع س}} = \frac{-\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$\therefore \text{قَ}(\text{٣}) = \frac{-\text{٣}}{\text{٩}} = \frac{-\text{١}}{\text{٣}}$$

٨ واجب

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{١} - \text{٣س}}$

فجد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام التعريف ، ثم جد $\text{قَ}(\frac{\text{١}}{\text{٢}})$.

٩ استخدم تعريف المشتقة الأولى في حساب مشتقة $\text{ق}(\text{س}) = \text{٢س}^{\text{٣}} - \text{٥س} + \text{٤}$ عند $\text{س} = \text{٠}$.

الحل المشتقة لـ $\text{ق}(\text{س})$ عندما $\text{س} = \text{٠}$

أي أن المطلوب هو $\text{قَ}(\text{٠})$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{٠}) = \underset{\text{ع}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{٠})}{\text{ع} - \text{٠}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{(\text{٢ع}^{\text{٣}} - \text{٥ع} + \text{٤}) - (\text{٠} - \text{٠} + \text{٤})}{\text{ع}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{٢ع}^{\text{٣}} - \text{٥ع} + \cancel{\text{٤}} - \cancel{\text{٤}}}{\text{ع}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{ع}}(\text{٢ع}^{\text{٢}} - \text{٥})}{\cancel{\text{ع}}}$$

$$= \text{٢}(\text{٠})^{\text{٢}} - \text{٥}$$

$$= -\text{٥}$$

١٠ واجب

استخدم تعريف المشتقة الأولى في حساب مشتقة $\text{ص} = \text{١} - \text{س}^{\text{٢}}$ عندما $\text{س} = \text{٤}$.

المطلوب بالرموز: $\text{صَ}\Big|_{\text{س}=\text{٤}}$ (وتقرأ ص فتحة عندما $\text{س} = \text{٤}$)

١١ اذا كان ص = ق(س) ، وكان معدل تغير الاقتران ق(س) هو (س²هـ − ٢س هـ²) فجد قَ(س).

الحل: المشتقة للاقتران ق تساوي نهاية معدل التغير للاقتران ق .

• معدل تغير ق = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{س}^2\text{هـ} - ٢\text{س هـ}^2$

$$\text{قَ(س)} = \text{نها}_{\text{هـ}\to ٠} (\text{س}^2\text{هـ} - ٢\text{س هـ}^2)$$

$$= ٠ - ٠$$

$$= ٠$$

١٢ اذا كان ص = ق(س) ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من (س١) الى (س١+هـ) هو :

Δص = ٤س هـ + ٢هـ² ، فجد قيمة قَ(س).

الحل:

$$\Delta \text{ص} = \text{ق(س}_١\text{+هـ)} - \text{ق(س}_١\text{)}$$

$$= ٤\text{س هـ} + ٢\text{هـ}^2$$

$$\text{قَ(س)} = \text{نها}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نها}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٤\text{س هـ} + ٢\text{هـ}^2}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نها}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\cancel{\text{هـ}}(٤\text{س} + ٢\text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}} = ٤\text{س} + ٠ = ٤\text{س}$$

١٣ اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من (س) الى (س+هـ) هو (٧س هـ + ٣هـ²) فجد قَ(س) ثم قَ(٥).

الحل:

$$\Delta \text{ص} = \text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}$$

$$= ٧\text{س هـ} + ٣\text{هـ}^2$$

$$\Leftarrow \text{قَ(س)} = \text{نها}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نها}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٧\text{س هـ} + ٣\text{هـ}^2}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نها}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\cancel{\text{هـ}}(٧\text{س} + ٣\text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= ٧\text{س} + ٠ = ٧\text{س}$$

ومنه $\Leftarrow$ قَ(٥) = ٧ × ٥ = ٣٥

١٤ اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من (٢) الى (ع) يساوي (ع³ − ٨) فجد قَ(٢).

الحل:

$$\Delta \text{ص} = \text{ق(ع)} - \text{ق(٢)} = \text{ع}^3 - ٨$$

$$\text{قَ(٢)} = \text{نها}_{\text{ع}\to ٢} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٢)}}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to ٢} \frac{\text{ع}^3 - ٨}{\text{ع} - ٢} = \text{نها}_{\text{ع}\to ٢} \frac{\cancel{(\text{ع} - ٢)}(\text{ع}^2 + ٢\text{ع} + ٤)}{\cancel{(\text{ع} - ٢)}}$$

$$= ١٢$$

قواعد الاشتقاق

القاعدة (١):

١) ق(س) = عدد ثابت ← قَ(س) = صفر

٢) ق(س) = $س^{ن}$ ← قَ(س) = ن $س^{ن-١}$

٣) ق(س) = أ × هـ(س) ← قَ(س) = أ × هـَ(س)

حيث أ: عدد ثابت

أمثلة: جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$\boxed{١}$ ق(س) = -١٣

$\boxed{٢}$ ص = $(٦)^{٤} + \sqrt{٥}$

$\boxed{٣}$ هـ(س) = $س^{٤}$

$\boxed{٤}$ ص = $س^{-٢}$

$\boxed{٥}$ ل(س) = $\sqrt[٥]{س^{٩}}$

$\boxed{٦}$ ص = $\frac{٥}{٣}$ $س^{-٦}$

$\boxed{٧}$ ص = ٥س

$\boxed{٨}$ ص = $\frac{٨}{\sqrt[٦]{س}}$

$\boxed{٩}$ ق(س) = $\frac{٨}{\sqrt[٣]{س}}$

$\boxed{١٠}$ هـ(س) = $\frac{١}{س^{٥}}$

$\boxed{١١}$ ل(س) = س

الحل

$\boxed{١}$ قَ(س) = صفر

$\boxed{٢}$ صَ = صفر

$\boxed{٣}$ هـَ(س) = ٤ $س^{٣}$

$\boxed{٤}$ صَ = -٢ $س^{-٣}$

$\boxed{٥}$ ل(س) = $س^{\frac{٩}{٥}}$ ⇐ لَ(س) = $\frac{٩}{٥}$ $س^{\frac{٤}{٥}}$

ملاحظة: $\frac{أ}{ب} - ١ = \frac{أ-ب}{ب}$

$\boxed{٦}$ صَ = $\frac{٥}{٣} \times -٦ \times$ $س^{-٧}$ = -١٠ $س^{-٧}$

$\boxed{٧}$ صَ = ٥

$\boxed{٨}$ ص = ٨ $س^{\frac{١}{٦}}$

⇐ صَ = ٨ × $\frac{١}{٦}$ × $س^{\frac{-٥}{٦}}$ = $\frac{٤}{٣}$ $س^{\frac{-٥}{٦}}$

$\boxed{٩}$ ق(س) = ٨ $س^{\frac{-١}{٣}}$

⇐ قَ(س) = ٨ × $\frac{-١}{٣}$ × $س^{\frac{-٤}{٣}}$ = $\frac{-٨}{٣}$ $س^{\frac{-٤}{٣}}$

$\boxed{١٠}$ هـ(س) = $س^{-٥}$ ⇐ هـَ(س) = -٥ $س^{-٦}$

$\boxed{١١}$ لَ(س) = ١

القاعدة (٢):

في الجمع أو الطرح نشتق كل حد لوحده.

فإذا كان $ل(س) = ق(س) \pm هـ(س)$

فإن: $ل'(س) = ق'(س) \pm هـ'(س)$

مثال: جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$\boxed{١}$ $ق(س) = ٥س^{٤} - ٢س^{٣} - س + ٢٤$

$\boxed{٢}$ $ص = س^{-٥} - ٣س$

$\boxed{٣}$ $هـ(س) = \sqrt{س} + س^{٣}$

الحل

$\boxed{١}$ $ق'(س) = ٢٠س^{٣} - ٦س^{٢} - ١$

$\boxed{٢}$ $\frac{دص}{دس} = -٥س^{-٦} - ٣$

$\boxed{٣}$ نجهز أولاً $\Leftarrow$ $هـ(س) = س^{\frac{١}{٢}} + س^{٣}$

$هـ'(س) = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} + ٣س^{٢}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٣س^{٢}$

مثال: اذا كان $ق(س) = ٥س^{٩} - ٤س^{٢} + ٦$

جد $ق'(١)$.

الحل: نشتق أولاً، ثم نعوض الـ(١).

$ق'(س) = ٤٥س^{٨} - ٨س$

$ق'(١) = ٤٥(١)^{٨} - ٨(١)$

$= ٤٥ - ٨ = ٣٧$

مثال: اذا كان $ص = ٢س - \frac{٢}{س}$

جد $\frac{دص}{دس}$.

الحل

$ص = ٢س - ٢س^{-١}$

$\frac{دص}{دس} = ٢ - ٢ \times -١ \times س^{-٢}$

$= ٢ + ٢س^{-٢}$

$= ٢ + \frac{٢}{س^{٢}}$

مثال: $ق(س) = \frac{٣}{٤}س^{٨} - \frac{٥}{٢}س^{٢} + \frac{٧}{٣}س^{٣} - \frac{١٥}{٤}$

جد $ق'(س)$.

الحل: $ق'(س) =$

$ق'(س) = \frac{٣}{٤} \times ٨س^{٧} - \frac{٥}{٢} \times ٢س + \frac{٧}{٣} \times ٣س^{٢}$

$= ٦س^{٧} - ٥س + ٧س^{٢}$

مثال اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = ٨\sqrt{\text{س}} - \frac{١٢}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$

جد $\text{هَ}(١)$.

الحل $\text{ه}(\text{س}) = ٨\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١٢\,\text{س}^{\frac{-١}{٣}}$

$\Leftarrow \text{هَ}(\text{س}) = ٨ \times \frac{١}{٢}\,\text{س}^{\frac{-١}{٢}} - ١٢ \times \frac{-١}{٣}\,\text{س}^{\frac{-٤}{٣}}$

$\Leftarrow \text{هَ}(\text{س}) = ٤\,\text{س}^{\frac{-١}{٢}} + ٤\,\text{س}^{\frac{-٤}{٣}}$

$= \frac{٤}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}} + \frac{٤}{\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}$

$\therefore \text{هَ}(١) = \frac{٤}{(١)^{\frac{١}{٢}}} + \frac{٤}{(١)^{\frac{٤}{٣}}}$

$= ٤ + ٤ = ٨$

مثال اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣\,\text{س}^{٣} - \frac{١٦}{\text{س}^{٢}}$

جد $\text{قَ}(٢)$.

الحل $\text{ق}(\text{س}) = ٣\,\text{س}^{٣} - ١٦\,\text{س}^{-٢}$

$\text{قَ}(\text{س}) = ٩\,\text{س}^{٢} + ٣٢\,\text{س}^{-٣}$

$= ٩\,\text{س}^{٢} + \frac{٣٢}{\text{س}^{٣}}$

ومنه $\Leftarrow \text{قَ}(٢) = ٩(٢)^{٢} + \frac{٣٢}{(٢)^{٣}}$

$= ٣٦ + ٤$

$= ٤٠$

القاعدة (٣):

اذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) \times \text{ه}(\text{س})$ فإن:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}(\text{س}) \times \text{هَ}(\text{س}) + \text{ه}(\text{س}) \times \text{قَ}(\text{س})$

أي أن: مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الاول

مثال جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$\boxed{١}$ $\text{ص} = (٢\text{س} - ٣)(\text{س}^{٣} + ٥)$ عندما $\text{س} = ٠$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢\text{س} - ٣) \times ٣\text{س}^{٢} + (\text{س}^{٣} + ٥) \times ٢$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=٠} = -٣ \times ٠ + ٥ \times ٢$

$= ٠ + ١٠ = ١٠$

$\boxed{٢}$ $\text{ص} = (٣\text{س}^{٢} + ٧) \times (\text{س}^{-٥} + ٣)$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٣\text{س}^{٢} + ٧) \times -٥\text{س}^{-٦} + (\text{س}^{-٥} + ٣) \times ٦\text{س}$

$= -١٥\,\text{س}^{-٤} - ٣٥\,\text{س}^{-٦} + ٦\,\text{س}^{-٤} + ١٨\,\text{س}$

٣ $\text{ق}(\text{س}) = (٥ - ٣\text{س})(٤\text{س}^٣ + ١)$ عندما س = ١

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = (٥ - ٣\text{س}) \times ١٢\text{س}^٢ + (٤\text{س}^٣ + ١) \times -٣$$

$$\Leftarrow \text{ق}'(١) = ٢ \times ١٢ + ٥ \times -٣$$

$$= ٢٤ + -١٥$$

$$= ٩$$

٤ واجب

$\text{ه}(\text{س}) = (٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤)(٢\text{س}^٣ - ٤\text{س} + ٣)$

عندما س = ١

٥ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣(٢\text{س}^٢ - ٣\text{س})(\text{س}^٢ + ١)$

عندما س = ١

الحل

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣(٢\text{س}^٢ - ٣\text{س})(\text{س}^٢ + ١)$$

$$= (٢\text{س}^٥ - ٣\text{س}^٤)(\text{س}^٢ + ١)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = (٢\text{س}^٥ - ٣\text{س}^٤) \times ٢\text{س}$$
$$+ (\text{س}^٢ + ١)(١٠\text{س}^٤ - ١٢\text{س}^٣)$$

$$\text{ومنه} \Leftarrow \text{ق}'(١) = -١ \times ٢ + ٢ \times -٢$$

$$= -٢ - ٤$$

$$= -٦$$

٦ واجب

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} \times (٣ - \text{س}^٢) + \frac{٢}{\text{س}}$

جد $\text{ق}'(١)$.

القاعدة (٤): مشتقة قسمة اقترانين

• اذا كان $\text{ص} = \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{ه}(\text{س})}$ فإن:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ه}(\text{س}) \times \text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) \times \text{ه}'(\text{س})}{(\text{ه}(\text{س}))^٢}$$

$$\text{بالكلمات} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^٢}$$

أمثلة:

١ اذا كان $\text{ص} = \frac{\text{س}^٣ - ٢}{٥\text{س} + ١}$ ، فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(٥\text{س} + ١) \times ٣\text{س}^٢ - (\text{س}^٣ - ٢) \times ٥}{(٥\text{س} + ١)^٢}$$

$$= \frac{١٥\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٥\text{س}^٣ + ١٠}{(٥\text{س} + ١)^٢}$$

$$= \frac{١٠\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ + ١٠}{(٥\text{س} + ١)^٢}$$

٢ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٥}{٢\text{س} - ٤}$ ، فجد $\text{ق}'(٣)$.

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(٢\text{س} - ٤) \times ٢\text{س} - (\text{س}^٢ - ٥) \times ٢}{(٢\text{س} - ٤)^٢}$$

$$\text{ق}'(٣) = \frac{٢ \times ٦ - ٤ \times ٢}{(٢)^٢}$$

$$= \frac{٤}{٤} = ١$$

$\boxed{\text{٣}}$ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}(\text{٣س}+\text{١})}{\text{٢س}+\text{١}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $\text{ص} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}(\text{٣س}+\text{١})}{\text{٢س}+\text{١}} = \frac{\text{٣س}^{\text{٣}}+\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢س}+\text{١}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{٢س}+\text{١})(\text{٩س}^{\text{٢}}+\text{٢س}) - (\text{٣س}^{\text{٣}}+\text{س}^{\text{٢}})\times\text{٢}}{(\text{٢س}+\text{١})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١٨س}^{\text{٣}}+\text{٤س}^{\text{٢}}+\text{٩س}^{\text{٢}}+\text{٢س}-\text{٦س}^{\text{٣}}-\text{٢س}^{\text{٢}}}{(\text{٢س}+\text{١})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١٢س}^{\text{٣}}+\text{١١س}^{\text{٢}}+\text{٢س}}{(\text{٢س}+\text{١})^{\text{٢}}}$$

$\boxed{\text{٤}}$ $\text{ص} = \frac{\text{٢س}}{\text{س}+\text{٥}} + \frac{\text{٤س}}{\text{٢س}+\text{٣}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: نشتق كل كسر لوحده لأنه بينهم (+)

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}+\text{٥})\times\text{٢}-\text{٢س}\times\text{١}}{(\text{س}+\text{٥})^{\text{٢}}} + \frac{(\text{٢س}+\text{٣})\times\text{٤}-\text{٤س}\times\text{٢}}{(\text{٢س}+\text{٣})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\cancel{\text{٢س}}+\text{١٠}-\cancel{\text{٢س}}}{(\text{س}+\text{٥})^{\text{٢}}} + \frac{\cancel{\text{٨س}}+\text{١٢}-\cancel{\text{٨س}}}{(\text{٢س}+\text{٣})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١٠}}{(\text{س}+\text{٥})^{\text{٢}}} + \frac{\text{١٢}}{(\text{٢س}+\text{٣})^{\text{٢}}}$$

• لكن ماذا لو كان الكسر $\left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right)$.

مثال

اذا كان $\text{ص} = \frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}$ ، فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥})\times\text{٠} - \text{٤}(\text{٢س})}{(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{-\text{٤}\times\text{٢س}}{(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥})^{\text{٢}}}$$

• لاحظ أن:

$$\text{مشتقة} \left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right) = \frac{-\text{الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{\text{٢}}}$$

أمثلة:

$\boxed{\text{١}}$ $\text{ق(س)} = \frac{-\text{٥}}{\text{٢س}^{\text{٢}}+\text{٦}}$ ، جد قَ(س) .

الحل: $$\text{قَ(س)} = \frac{-\text{١}(-\text{٥})\times\text{٤س}}{(\text{٢س}^{\text{٢}}+\text{٦})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٢٠س}}{(\text{٢س}^{\text{٢}}+\text{٦})^{\text{٢}}}$$

٢) $\text{ص} = \dfrac{\text{١٥}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧}}$ ، جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل: $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-\text{١٥} \times \text{٣س}^{\text{٢}}}{(\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧})^{\text{٢}}}$

$= \dfrac{-\text{٤٥س}^{\text{٢}}}{(\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧})^{\text{٢}}}$

٣) $\text{هـ(س)} = \dfrac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س}}$ ، جد هـَ(س)

الحل: $\text{هـَ(س)} = \dfrac{-\text{٣(٢س} - \text{٦)}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س})^{\text{٢}}}$

$= \dfrac{-\text{٦س} + \text{١٨}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س})^{\text{٢}}}$

٤) $\text{ص} = \dfrac{-\text{٣}}{\text{٢} - \text{س}}$ ، جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = -\text{٢}$

الحل: $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-(-\text{٣}) \times -\text{١}}{(\text{٢} - \text{س})^{\text{٢}}}$

$= \dfrac{-\text{٣}}{(\text{٢} - \text{س})^{\text{٢}}}$

ومنه $\Leftarrow \left.\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س} = -\text{٢}} = \dfrac{-\text{٣}}{(\text{٢} - (-\text{٢}))^{\text{٢}}}$

$= \dfrac{-\text{٣}}{\text{١٦}}$

ملاحظة: اذا كان الكسر $\left(\dfrac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}\right)$

فإن مشتقته هي : $\left(\dfrac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت نفسه}}\right)$.

٥) $\text{ص} = \dfrac{\text{٢س}^{\text{٣}} + \text{٣}}{\text{٧}}$ ، جد صَ .

الحل: $\text{صَ} = \dfrac{\text{٦س}^{\text{٢}}}{\text{٧}}$

٦) $\text{ص} = \dfrac{\text{١} - \text{٣س}}{\text{٢}}$ ، جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل: $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-\text{٣}}{\text{٢}}$

٧) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{٣}}{\text{٧} - \text{٢س}}$ ، جد قَ(٢)

واجب

٨) $\text{هـ(س)} = \dfrac{\text{٩س}^{\text{٢}} - \text{٥}}{\text{٦}}$ ، جد هـَ(١)

واجب

تذكر أنّ :

- $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{قَ}(\text{س})$
- $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}} = \text{قَ}(\text{أ})$
- $\lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{قَ}(\text{س})$
- $\lim\limits_{\text{ع}\to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}} = \text{قَ}(\text{أ})$

أمثلة :

$\boxed{1}$ اذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[5]{\text{س}}$

نجد $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

الحل

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[5]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{1}{5}}$

المطلوب $\leftarrow \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{قَ}(\text{س})$

$= \frac{1}{5}\,\text{س}^{\frac{-4}{5}}$

$\boxed{2}$ اذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^5 - 3\text{س}^2$

نجد $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(2+\text{هـ}) - \text{ق}(2)}{\text{هـ}}$.

الحل ○○○○○◁

الحل المطلوب $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(2+\text{هـ}) - \text{ق}(2)}{\text{هـ}} = \text{قَ}(2)$

$\text{قَ}(\text{س}) = 5\text{س}^4 - 6\text{س}$

$\text{قَ}(2) = 5(2)^4 - 6(2)$

$= 5 \times 16 - 12$

$= 80 - 12 = 68$

$\boxed{3}$ واجب

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = 4\text{س}^2 - 9\text{س} + 3$

نجد $\lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$\boxed{4}$ واجب

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^4 - 4\text{س}^2 + 8$

نجد $\lim\limits_{\text{ع}\to 1} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(1)}{\text{ع} - 1}$

$\boxed{5}$ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 - 12\text{س} + 7$

جد قيم س حيث $\text{قَ}(\text{س}) = 0$.

الحل

$\text{قَ}(\text{س}) = 0$

$3\text{س}^2 - 12 = 0$

$3\text{س}^2 = 12$

$\text{س}^2 = 4$

$\therefore \text{س} = 2 \text{ ، } \text{س} = -2$

٦) اذا كان ق(س) = ٣س² − ٥س + ٤
وكانت قَ(أ) = ١٣ ، فجد أ .

الحل
قَ(س) = ٦س − ٥
قَ(أ) = ٦أ − ٥
لكن قَ(أ) = ١٣
⇐ ٦أ − ٥ = ١٣
٦أ = ١٨
∴ أ = ٣

٧) اذا كان ق(١) = ٤ ، قَ(١) = −٢
هـ(١) = −٢ ، هـَ(١) = ١ فجد :

أ) (ق × هـ)َ(١)
ب) ((ق × هـ)(١))َ
جـ) (ق/هـ)َ(١)
د) (٣/هـ)َ(١)
هـ) (ق + هـ)َ(١)
و) (٣ق − ٢هـ)َ(١)

الحل

أ) (ق × هـ)َ(١) = ق(١) × هـَ(١) + هـ(١) × قَ(١)
= ٤ × ١ + −٢ × −٢
= ٤ + ٤ = ٨

ب) ((ق × هـ)(١))َ = (ق(١) × هـ(١))َ
= (٤ × −٢)َ
= صفر

جـ) (ق/هـ)َ(١) = [هـ(١) × قَ(١) − ق(١) × هـَ(١)] / (هـ(١))²
= [−٢ × −٢ − ٤ × ١] / (−٢)²
= (٤ − ٤)/٤ = صفر

د) (٣/هـ)َ(١) = [−٣ × هـَ(١)] / (هـ(١))²
= [−٣ × ١] / (−٢)² = −٣/٤

هـ) (ق + هـ)َ(١) = قَ(١) + هـَ(١)
= −٢ + ١ = −١

و) (٣ق − ٢هـ)َ(١) = ٣قَ(١) − ٢هـَ(١)
= ٣ × −٢ − ٢ × ١ = −٨

٨) اذا كان هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق عندما س = -٢ ، حيث هـ(-٢) = ١ ، هـَ(-٢) = ٢

نجد قَ(-٢) في كل مما يلي:

أ) ق(س) = س² × هـ(س)

ب) ق(س) = هـ(س) − $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{س}}$

الحل أ) قَ(س) = س² × هـَ(س) + هـ(س) × ٢س

⇐ قَ(-٢) = (-٢)² × هـَ(-٢) + هـ(-٢) × ٢ × (-٢)

= ٤ × ٢ + ١ × -٤

= ٨ + -٤ = ٤

ب) قَ(س) = هـَ(س) − $\frac{\text{س هـَ(س) − هـ(س) × ١}}{\text{س}^2}$

⇐ قَ(-٢) = هـَ(-٢) − $\frac{\text{-٢ × هـَ(-٢) − هـ(-٢)}}{\text{(-٢)}^2}$

= ٢ − $\frac{\text{-٢×٢ − ١}}{\text{٤}}$

= ٢ − $\frac{\text{-٥}}{\text{٤}}$

= $\frac{\text{٨}}{\text{٤}}$ + $\frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

= $\frac{\text{١٣}}{\text{٤}}$

قاعدة السلسلة

القاعدة (١): قاعدة السلسلة.

اذا كان ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)

أي أن ص $\xleftarrow{\text{بدلالة}}$ ع $\xleftarrow{\text{بدلالة}}$ س

فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

• ملاحظات:

١) نستخدم قاعدة السلسلة عندما يكون بالسؤال اقترانين وفيها ثلاث متغيرات مرتبطة ببعضها.

٢) عندما نحل أسئلة على قاعدة السلسلة استخدم المخطط ، فمثلاً في القاعدة بالأعلى ، المخطط كان:

ص ← ع ← س

٣) لمّا يطلب منا $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ مثلاً ، معناها لازم أبلّش بـ(دص) وانتهي بـ(دس) وبينهم بحط (دع) كالتالي ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

والجواب بدلالة المقام يعني بدلالة (س)

أمثلة :

$\boxed{١}$ اذا كان $\text{ص} = \text{م}^٣ + ٣\text{م}^٢ - ٥$ ، $\text{م} = ٣\text{س} + ٧$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل

$\text{ص} \leftarrow \text{م} \leftarrow \text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دس}}$$

$$= (٣\text{م}^٢ + ٦\text{م}) \times (٣)$$

$$= ٩\text{م}^٢ + ١٨\text{م}$$

$$= ٩(٣\text{س}+٧)^٢ + ١٨(٣\text{س}+٧)$$

$\boxed{٢}$ اذا كان $\text{ص} = \text{ع}^٣ + ١$ ، $\text{ع} = ٥\text{س} - ٢$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = ١$

الحل

$\text{ص} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= ٣\text{ع}^٢ \times ٥$$

$$= ١٥\,\text{ع}^٢$$

$$= ١٥(٥\text{س} - ٢)^٢$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = ١٥ \times ٩ = ١٣٥$$

$\boxed{٣}$ اذا كان $\text{ص} = \text{ع}^٢ + ٣\text{ع}$ ، $\text{ع} = ٣ - ٢\text{س}^٢$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١}$.

الحل

$\text{ص} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= (٢\text{ع} + ٣) \times (-٤\text{س})$$

$$= -٨\text{سع} - ١٢\text{س}$$

$$= -٨\text{س}(٣ - ٢\text{س}^٢) - ١٢\text{س}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = -٨ \times ١ \times ١ - ١٢$$

$$= -٨ - ١٢$$

$$= -٢٠$$

$\boxed{٤}$ $\text{ص} = \frac{٣}{\text{ع}}$ ، $\text{ع} = \frac{٢}{\text{س}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$\text{ص} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= \frac{-٣}{\text{ع}^٢} \times \frac{-٢}{\text{س}^٢}$$

$$= \frac{٦}{\left(\frac{٢}{\text{س}}\right)^٢ \times \text{س}^٢} = \frac{٦}{\frac{٤}{\cancel{\text{س}^٢}} \times \cancel{\text{س}^٢}}$$

$$= \frac{٦}{٤}$$

القاعدة (٢):

اذا كان $ص = (هـ(س))^{ن}$

فإن: $\frac{دص}{دس} = ن\,(هـ(س))^{ن-١} \times هـَ(س)$

أمثلة

١) $ص = (٧ - س^{٢})^{٤}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$.

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٤(٧ - س^{٢})^{٣} \times -٢س$

$= -٨س\,(٧ - س^{٢})^{٣}$

٢) $ص = (٥س^{٢} - ٣س + ٢)^{٥}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٠$.

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٥(٥س^{٢} - ٣س + ٢)^{٤} \times (١٠س - ٣)$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٠} = ٥ \times (٢)^{٤} \times -٣$

$= ٥ \times ١٦ \times -٣$

$= -٢٤٠$

٣) $ص = (س^{٣} - ٧)^{٤}$ ، جد $صَ$ عند $س = ٢$

الحل: $صَ = ٤(س^{٣} - ٧)^{٣} \times ٣س^{٢}$

$= ١٢س^{٢}\,(س^{٣} - ٧)^{٣}$

$صَ\Big|_{س=٢} = ١٢ \times ٤ \times (٨ - ٧)^{٣}$

$= ٤٨ \times ١ = ٤٨$

٤) $ص = (س^{٢} + ٤س + ٥)^{-٢}$ ، جد $صَ$.

الحل: $صَ = -٢(س^{٢} + ٤س + ٥)^{-٣} \times (٢س + ٤)$

$= (-٤س - ٨)(س^{٢} + ٤س + ٥)^{-٣}$

٥) $ص = -٥(١ - ٣س^{٣})^{-٢}$ ، جد $صَ$ عند $س = -١$

الحل: $صَ = -٥ \times -٢(١ - ٣س^{٣})^{-٣} \times -٩س^{٢}$

$= -٩٠س^{٢}\,(١ - ٣س^{٣})^{-٣}$

$صَ\Big|_{س=-١} = -٩٠(-١)^{٢}\,(١ - ٣(-١)^{٣})^{-٣}$

$= -٩٠ \times ١\,(٤)^{-٣}$

$= \frac{-٩٠}{٤^{٣}}$

$= \frac{-٩٠}{٦٤}$

٦ $\text{ص} = \left(\frac{٥\text{س}}{٢\text{س}+٧}\right)^{٦}$ ، جد صَ .

الحل

$\text{صَ} = ٦\left(\frac{٥\text{س}}{٢\text{س}+٧}\right)^{٥}\left(\frac{(٢\text{س}+٧)\times ٥ - ٥\text{س}\times ٢}{(٢\text{س}+٧)^{٢}}\right)$

$\text{صَ} = ٦\left(\frac{٥\text{س}}{٢\text{س}+٧}\right)^{٥}\left(\frac{١٠\text{س} + ٣٥ - ١٠\text{س}}{(٢\text{س}+٧)^{٢}}\right)$

$\text{صَ} = ٦\left(\frac{٥\text{س}}{٢\text{س}+٧}\right)^{٥}\left(\frac{٣٥}{(٢\text{س}+٧)^{٢}}\right)$

٧ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٥}{(٦\text{س}-٤)^{٣}}$ ، جد قَ(س)

الحل

$\text{ق}(\text{س}) = ٥(٦\text{س}-٤)^{-٣}$

$\Leftarrow \text{قَ}(\text{س}) = ٥\times -٣(٦\text{س}-٤)^{-٣}\times ٦$

$= -٩٠(٦\text{س}-٤)^{-٣}$

٨ $\text{ص} = (\text{س}^{٢} - ٣)(٢ - ٤\text{س}^{٣})^{٢}$

جد صَ عندما س = ١

الحل مشتقة ضرب

$\text{صَ} = (\text{س}^{٢} - ٣)\times ٢(٢-٤\text{س}^{٣})\times -١٢\text{س}^{٢}$

$+ (٢-٤\text{س}^{٣})^{٢}\times ٢\text{س}$

$\text{صَ}\Big|_{\text{س}=١} = -٢\times ٢\times -٢\times -١٢ + ٤\times ٢$

$= -٩٦ + ٨$

$= -٨٨$

٩ اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = (٥\text{س} - ١)^{٣}$

فجد $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(١+\text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}}$

الحل المطلوب هو قَ(١)

$\text{قَ}(\text{س}) = ٣(٥\text{س}-١)^{٢}\times ٥ = ١٥(٥\text{س}-١)^{٢}$

$\text{قَ}(١) = ١٥\times ١٦ = ٢٤٠$

١٠ $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ٣)^{٤}$ ، جد $\lim\limits_{\text{ع}\to ٢} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$

الحل المطلوب هو قَ(٢)

$\text{قَ}(\text{س}) = ٤(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}\times ٢\text{س}$

$\text{قَ}(٢) = ٤\times ١\times ٤ = ١٦$

١١ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢(٢\text{س} - ٣)^{٤}$

وكان قَ(أ) = ١٦ ، جد قيمة الثابت أ

الحل

$\text{قَ}(\text{س}) = ٢\times ٤(٢\text{س}-٣)^{٣}\times ٢$

$= ١٦(٢\text{س}-٣)^{٣}$

لكن $\text{قَ}(\text{أ}) = ١٦ \Leftarrow ١٦(٢\text{أ}-٣)^{٣} = ١٦$

$\Leftarrow (٢\text{أ}-٣)^{٣} = ١$

$\Leftarrow ٢\text{أ} - ٣ = ١$

$\Leftarrow ٢\text{أ} = ٤$

$\Leftarrow \text{أ} = ٢$

القاعدة (٣) : مشتقة الجذر التربيعي

اذا كان $ق(س) = \sqrt{ه(س)}$ ، فإن :

$$ق'(س) = \frac{ه'(س)}{٢\sqrt{ه(س)}} = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$$

ملاحظة: اذا كان الجذر ليس تربيعي ، نحوله الى أسس ثم نشتقه .

الأمثلة :

$\boxed{١}$ $ق(س) = \sqrt{٢س^٢ + ١}$ ، جد $ق'(س)$

الحل: $ق'(س) = \frac{٤س}{٢\sqrt{٢س^٢+١}} = \frac{٢س}{\sqrt{٢س^٢+١}}$

$\boxed{٢}$ $ق(س) = \sqrt{٥ + ٣س^٢}$ ، جد $ق'(٠)$

الحل: $ق'(س) = \frac{٦س}{٢\sqrt{٥+٣س^٢}}$

$ق'(٠) = \frac{٦ \times ٠}{٢ \times \sqrt{٥}} = $ صفر

$\boxed{٣}$ $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ٥س}$ ، جد $ق'(س)$

الحل: $ق'(س) = \frac{٢س + ٥}{٢\sqrt{س^٢+٥س}}$

$\boxed{٤}$ $ص = \sqrt{ع + ١}$ ، $ع = ٤س^٣ - ٩$ ، جد $\frac{دص}{دس}$.

الحل: ص ← ع ← س

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{ع+١}} \times ١٢س^٢$

$= \frac{١٢س^٢}{٢\sqrt{٤س^٣ - ٩ + ١}}$

$= \frac{٦س^٢}{\sqrt{٤س^٣ - ٨}}$

$\boxed{٥}$ واجب: $ق(س) = \sqrt{٣س^٢ + ٦س}$ جد $\lim_{ه \to ٠} \frac{ق(١+ه) - ق(١)}{ه}$

$\boxed{٦}$ واجب: $ص = ع^٢ + ٧$ ، $ع = \sqrt{س^٢ + ٣}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$

$\boxed{٧}$ واجب: $ق(س) = \sqrt{س^٣ + ٤س}$ ، جد $ق'(٢)$

مشتقة الاقترانات المثلثية

القاعدة (١) مشتقة الاقترانات المثلثية :

① $\text{ق(س)} = \text{جاس} \leftarrow \text{قَ(س)} = \text{جتاس}$

② $\text{ق(س)} = \text{جتاس} \leftarrow \text{قَ(س)} = -\text{جاس}$

③ $\text{ق(س)} = \text{ظاس} \leftarrow \text{قَ(س)} = \text{قا}^2\text{س}$

الأمثلة : جد صَ لكل مما يأتي :

[١] $\text{ص} = ٩\ \text{ظاس} - \text{جتاس}$

[٢] $\text{ص} = ٢\text{س} + \frac{\text{ظاس}}{٣} - ٦\text{جاس}$

[٣] $\text{ص} = ٦\ \text{جاس} + ٩\ \text{جتاس} - ٥\ \text{ظاس}$

[٤] $\text{ص} = \text{جتاس}\ \text{جاس}$

[٥] $\text{ص} = \text{س}^٤\ \text{جتاس}$

[٦] $\text{ص} = \frac{٧\text{س}}{\text{ظاس}}$

[٧] $\text{ص} = \frac{٥}{\text{جتاس}}$

[٨] $\text{ص} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس} + ١}$

[٩] $\text{ص} = ٥\text{س}^٢\ \text{جتاس} - \text{ظاس}$

[١٠] $\text{ص} = \text{س}\ \text{ظاس} + (\text{س}^٢ + ١)^٢$

[١١] $\text{ص} = \sqrt{٤ + ٣\text{جتاس}}$

الحل

الحل

[١] $\text{صَ} = ٩\ \text{قا}^2\text{س} + \text{جاس}$

[٢] $\text{صَ} = ٢ + \frac{\text{قا}^2\text{س}}{٣} - ٦\ \text{جتاس}$

[٣] $\text{صَ} = ٦\ \text{جتاس} - ٩\ \text{جاس} - ٥\ \text{قا}^2\text{س}$

[٤] $\text{صَ} = \text{جتاس}\ \text{جتاس} + \text{جاس} \times -\text{جاس}$

$= \text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}$

[٥] $\text{صَ} = \text{س}^٤ \times -\text{جاس} + \text{جتاس} \times ٤\text{س}^٣$

$= -\text{س}^٤\ \text{جاس} + ٤\ \text{س}^٣\ \text{جتاس}$

[٦] $\text{صَ} = \frac{\text{ظاس} \times ٧ - ٧\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا}^2\text{س}}$

[٧] $\text{صَ} = \frac{-٥ \times -\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{٥\ \text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

[٨] واجب ...

[٩] $\text{صَ} = (٥\text{س}^٢)(-\text{جاس}) + (\text{جتاس})(١٠\text{س}) - \text{قا}^2\text{س}$

$= -٥\text{س}^٢\ \text{جاس} + ١٠\text{س}\ \text{جتاس} - \text{قا}^2\text{س}$

[١٠] $\text{صَ} = \text{س}\ \text{قا}^2\text{س} + \text{ظاس} + ٢(\text{س}^٢ + ١) \times ٢\text{س}$

$= \text{س}\ \text{قا}^2\text{س} + \text{ظاس} + ٤\text{س}(\text{س}^٢ + ١)$

[١١] $\text{صَ} = \frac{-٣\ \text{جاس}}{٢\sqrt{٤ + ٣\ \text{جتاس}}}$

♥ تعلمنا اشتقاق جاس ، جتاس ، ظاس
لكن ماذا لو كانت س ليست لوحدها ؟

القاعدة (٢)

[١] ص = جا(هـ(س)) ⇐ صَ = هـَ(س) جتا(هـ(س))

"مشتقة الزاوية × مشتقة الجيب"

[٢] ص = جتا(هـ(س)) ⇐ صَ = −هـَ(س) جا(هـ(س))

[٣] ص = ظا(هـ(س)) ⇐ صَ = هـَ(س) قا^{2}(هـ(س))

الأمثلة: جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

[١] ق(س) = جا(س^{2} − ٤س + ٧)

⇐ قَ(س) = (٢س − ٤) جتا(س^{2} − ٤س + ٧)

[٢] ق(س) = جتا٤س + جا٩س

⇐ قَ(س) = −٤جا٤س + ٩جتا٩س

[٣] ص = جا٤س^{3}

⇐ دص/دس = ١٢س^{2} جتا٤س^{3}

[٤] هـ(س) = س^{2} ظا($\frac{1}{س}$)

⇐ هـَ(س) = س^{2} × $\frac{-1}{س^{2}}$ × قا^{2}($\frac{1}{س}$) + ظا($\frac{1}{س}$) × ٢س

= −قا^{2}($\frac{1}{س}$) + ٢س ظا($\frac{1}{س}$)

[٥] ص = ٢س جتا٧س

⇐ صَ = ٢س × ٧ × جا٧س + جتا(٧س) × ٢

= −١٤س جا٧س + ٢جتا٧س

[٦] ق(س) = جتا(س^{3} + ٤س)
واجب

[٧] هـ(س) = س ظا(س^{2} + ٤)
واجب

[٨] ص = س^{2} جا(٥ − س^{2})
واجب

ملاحظات

- جا^{2}س = (جاس)^{2}
- جا^{2}س تختلف عن جاس^{2}

فالأولى التربيع لِـ(جاس) كاملة
بينما الثانية ، التربيع فقط لـ(س).

* نصيحة :

اذا اجاك سؤال اشتقاق وفيه جا^{ن}س حوله لَـ(جاس)^{ن} .

٩ ق(س) = جا^{4}س

الحل: ق(س) = جا^{4}س = (جاس)^4

⇐ ق$'$(س) = ٤(جاس)^3 × جتاس

= ٤ جتاس جا^{3}س

١٠ ص = ظا^3(٥س^2)

الحل: ص = (ظا(٥س^2))^3

⇐ ص$'$ = ٣(ظا(٥س^2))^2 × ١٠س قا^2(٥س^2)

= ٣٠س قا^2(٥س^2) ظا^2(٥س^2)

١١ ص = ٢جتا٤س + جا^{2}س − ظا(٥س+١)

الحل: ص = ٢جتا٤س + (جاس)^2 − ظا(٥س+١)

ص$'$ = $\cancel{٢}$ × ٤ × −جا٤س + ٢جاس جتاس − ٥قا^2(٥س+١)

= −٨جا٤س + ٢جاس جتاس − ٥قا^2(٥س+١)

١٢ ق(س) = جا^{3}س + جاس^3

الحل: ق(س) = (جاس)^3 + جاس^3

ق$'$(س) = ٣(جاس)^2 جتاس + ٣س^2 جتاس^3

١٣ ص = ظاس^4 + ظا^{4}س
واجب

١٤ ص = س^2 جا^3 ٣س

الحل: ص = س^2 × (جا٣س)^3

ص$'$ = س^2 × ٣(جا٣س)^2 × ٣جتا٣س + (جا٣س)^3 × ٢س

= ٩س^2 جتا٣س جا^{2}٣س + ٢س جا^{3}٣س

١٥ ص = ٦س ظا^5 ٢س

الحل: ص = ٦س (ظا٢س)^5

ص$'$ = ٦س × ٥(ظا٢س)^4 × ٢قا^{2}٢س + (ظا٢س)^5 × ٦

= ٦٠س قا^{2}٢س ظا^{4}٢س + ٦ ظا^{5}٢س

١٦ ق(س) = (جتا٢س)^6
واجب

١٧ ص = ٣جا٤س − جتا^{3}س − ظا٢س^2
واجب

١٨ ص = (س^3 + جتاس)^6

الحل:

$\frac{دص}{دس}$ = ٦(س^3 + جتاس)^5 × (٣س^2 − جاس)

١٩ ص = (جاس + جتاس)^3

الحل:

ص$'$ = ٣(جاس + جتاس)^2 (جتاس − جاس)

٢٠ $\text{ص} = (\text{جاس} - \text{جتاس})^{-2}$

الحل: $\text{ص}' = -2(\text{جاس} - \text{جتاس})^{-3} \times (\text{جتاس} + \text{جاس})$

٢١ $\text{ص} = \text{جا}^2\text{س}\,(1 - \text{جتاس})$

الحل:

$\text{ص}' = (\text{جاس})^2 \times \text{جاس} + (1 - \text{جتاس})(2\,\text{جاس}\,\text{جتاس})$

$= \text{جا}^3\text{س} + (1 - \text{جتاس})(2\,\text{جاس}\,\text{جتاس})$

٢٢ $\text{ص} = (\text{س}\,\text{جاس})^3\,\text{ظاس}$

الحل:

$\text{ص}' = (\text{س}\,\text{جاس})^3 \times \text{قا}^2\text{س}$

$+\ \text{ظاس} \times 3(\text{س}\,\text{جاس})^2(\text{س}\,\text{جتاس} + \text{جاس})$

٢٣ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^3 + \text{جتا}2\text{س}}$

الحل: $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{3\text{س}^2 - 2\,\text{جا}2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^3 + \text{جتا}2\text{س}}}$

٢٤ $\text{ص} = \sqrt{5\text{س} + \text{ظا}3\text{س}}$

واجب

٢٥ $\text{ص} = \text{جتاع}$ ، $\text{ع} = 3\text{س}^2 + 5$

جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل: ص ← ع ← س

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \dfrac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$= -\text{جاع} \times 6\text{س}$

$= -\text{جا}(3\text{س}^2 + 5) \times 6\text{س}$

$= -6\text{س}\,\text{جا}(3\text{س}^2 + 5)$

٢٦ $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}\,5\text{س}^3$

جد $\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$.

الحل: المطلوب هو $\text{ق}'(\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = 15\text{س}^2\,\text{قا}^2\,5\text{س}^3$

وَصَلنا إلى خِتام الوحْدة

- بفضل الله -