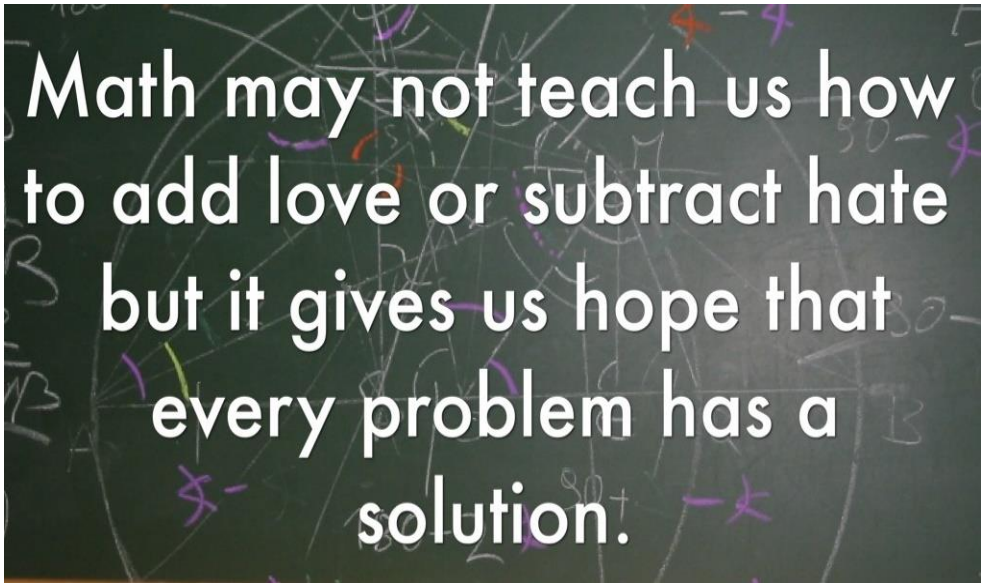
دوسية الإبداع
في الرياضيات (أدبي)

المنهاج الجديد - توجيهي (الفصل الأول)

(نسخة ٢٠١٧ / ٢٠١٨)



الأستاذ فيصل السعدون

اسم الطالب / الطالبة : .....

الفهرس

الوحدة	الموضوع	الصفحة
الوحدة الأولى	أولاً : مفهوم النهاية	٥ ـ ٧
	ثانياً : نظريات النهايات	٧ ـ ١٣
	ثالثاً : نهاية خارج قسمة اقترانين	١٣ ـ ٢٦
	رابعاً : نهاية اقتران الجذر النوني	٢٧ ـ ٣٠
	خامساً : الاتصال عند نقطة	٣٠ ـ ٣٥
	سادساً : نظريات الاتصال	٣٦ ـ ٤٠
الوحدة الثانية	أولاً : متوسط التغير	٤٢ ـ ٤٩
	ثانياً : المشتقة الأولى	٤٩ ـ ٥٣
	ثالثاً : قواعد الاشتقاق	٥٤ ـ ٦٠
	رابعاً : قاعدة السلسلة	٦١ـ ٦٥
	خامساً : مشتقة الاقترانات المثلثية	٦٥ ـ ٧٠
	سادساً : المشتقات العليا	٧١ ـ ٧٦
الوحدة الثالثة	أولاً : التفسير الهندسي للمشتقة	٧٨ ـ ٨٢
	ثانياً : التفسير الفيزيائي للمشتقة	٨٣ ـ ٨٦
	ثالثاً : التزايد و التناقص للاقتران	٨٧ ـ ٩١
	رابعاً : القيم القصوى للاقتران	٩١ ـ ١٠١
	خامساً : تطبيقات على القيم القصوى	١٠١ ـ ١١١
	سادساً : تطبيقات اقتصادية على التفاضل	١١٢ ـ ١١٨

*** ملاحظات مهمة :**

١) الملاحظات الموجودة في الدوسية (في الدروس) مهمة .
٢) تحتوي الدوسية على جميع الأفكار التي وردت في الكتاب .
٣) الدوسية شاملة المادة ١٠٠% (ليست ملخص) .
٤) مستوى الأسئلة متنوع .

بسم الله الرحمن الرحيم

الوحدة الأولى

(النهايات و الاتصال)

مراجعة عامة (مهم جداً)

*** التحليل الى العوامل :**

١) إخراج العامل المشترك :

٣س^{٢} - ١٢س = ٣س (س -٤) ، ٦س^{٣} + ١٨س^{٢} = ٦س^{٢} (س + ٣)

٢) الفرق بين مربعين : القاعدة : س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ) (س + أ)

س^{٢} - ٩ = (س - ٣) (س + ٣)

٣٦ - س^{٢} = (٦ - س) (٦ + س) ، س^{٢} - ١ = (س - ١) (س + ١)

٣) العبارة التربيعية : القاعدة : س^{٢} + ب س + جـ

ملاحظة : * اذا كانت إشارة الحد الأخير (+) تكون إشارة القوسين نفس إشارة الحد الأوسط .
* اذا كانت إشارة الحد الأخير (-) تكون إشارة القوسين عكس بعض .

س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٢) (س + ٣)

س^{٢} - ٥س + ٦ = (س - ٢) (س - ٣)

س^{٢} - ٣س - ١٠ = (س - ٥) (س + ٢)

س^{٢} + ٢س - ١٥ = (س - ٣) (س + ٥)

٤) فرق و جمع عددين مكعبين :

القاعدة : س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ) (س^{٢} + أس + أ^{٢})
س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ) (س^{٢} - أس + أ^{٢})

س^{٣} - ٦٤ = (س - ٤) (س^{٢} + ٤س + ١٦)

س^{٣} - ٢٧ = (س - ٣) (س^{٢} + ٣س + ٩)

س^{٣} + ١ = (س + ١) (س^{٢} - س + ١)

س^{٣} + ٨ = (س + ٢) (س^{٢} - ٢س + ٤)

أ. فيصل السعدون

الدرس الأول : مفهوم النهاية

* مفهوم نهاية الاقتران : وصف و دراسة سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير (س) من عدد محدد .

مثال (١) :

ق (س) = س + ٢ , كوّن جدولاً و ادرس ماذا يحدث لقيم ق (س) عندما س تقترب من ٢ (س ⟵ ٢)

س	٢,٢	٢,١	٢	١,٩	١,٨
ق (س)	٤,٢	٤,١	٤	٣,٩	٣,٨

جهة اليمين (+) ⟵ ⟶ جهة اليسار (-)

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) = ٤ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) = ٤ إذن $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ٤

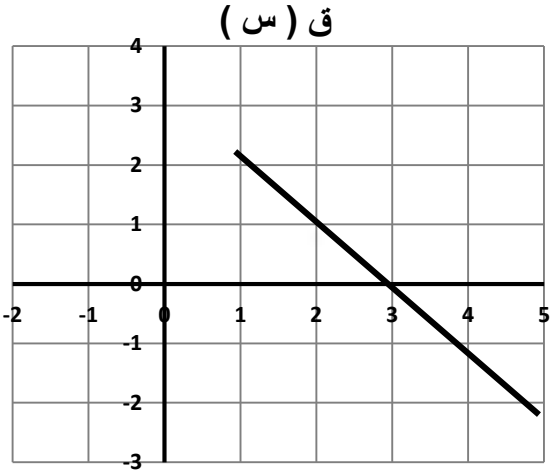
س ١ : ق (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣

كوّن جدولاً و ادرس ماذا يحدث لقيم ق (س) عندما س ⟵ ٣ ؟

فيصل السعدون

إيجاد النهاية عن طريق الرسم

مثال : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :



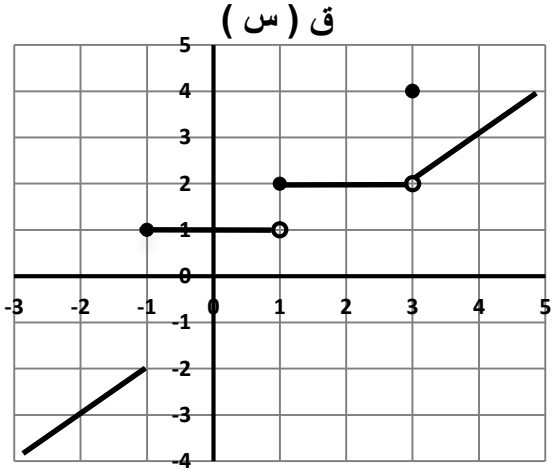
$\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) = ١

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) = ١

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ١

$\lim_{س \to ٣}$ ق (س) = صفر

س ٢ : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :



$\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ١}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٣^+}$ ق (س) =

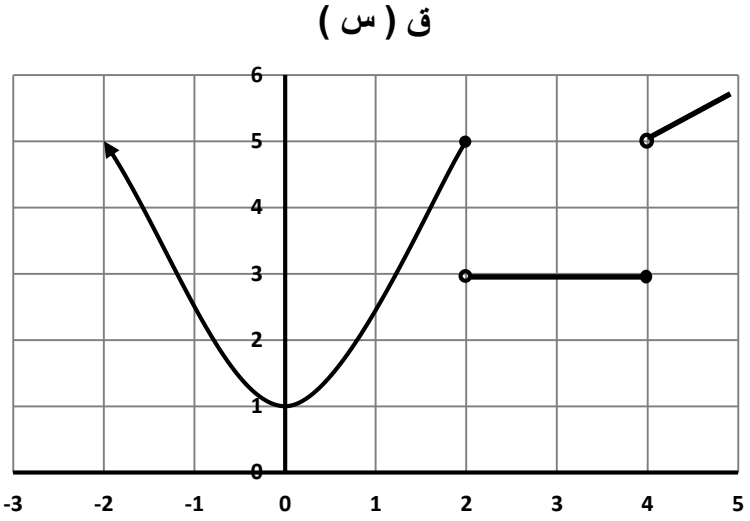
$\lim_{س \to ٣}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٠}$ ق (س) =

$\lim_{س \to -٢}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٣}$ (ق (س) ^{٢} - $\frac{١}{٤}$ (س - ٧)) =

*** مثال : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :**



$\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٤^+}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٤^-}$ ق (س) = ، $\lim_{س \to ٤}$ ق (س) = ، ق (٤) =

*** أوجد قيمة أو قيم (ب) :**

$\lim_{س \to ب}$ ق (س) = غير موجودة ، اذن ب =

$\lim_{س \to ب}$ ق (س) = ١ ، اذن ب =

$\lim_{س \to ب^+}$ ق (س) = ٥ ، اذن ب =

ق (ب) = ٥ ، اذن ب =

الدرس الثاني : نظريات النهايات

*** نظرية (١) :** إذا كان أ و جـ عددين حقيقيين و كان :

ق (س) = جـ فإن $\lim_{س \to ا}$ ق (س) = جـ <<< $\lim_{س \to ا}$ العدد الثابت = العدد الثابت

*** أمثلة :** $\lim_{س \to ٢}$ ٤ = ٤ $\lim_{س \to ٣}$ ٧ = ٧ $\lim_{س \to ٩}$ ٦ = ٦

* **نظرية (٢)** : إذا كان ق (س) كثير حدود فإن : $\lim_{س \to ا}$ ق (س) = ق (أ)

* **مثال (١) :**

$\lim_{س \to ٣}$ س - ٢ = ٣ - ٢ = ١ $\qquad$ $\lim_{س \to ١}$ ٢س - ٣ = ٢ X ١ - ٣ = -١

$\lim_{س \to -١}$ ٣س^{٢} + ٢س + ٧ = ٣(-١)^{٢} + ٢(-١) + ٧ = ٣ - ٢ + ٧ = ٨

---

* **مثال (٢) :** اذا علمت أن $\lim_{س \to ٢}$ (ق (س) + س + ١) = ٩ ، فأوجد $\lim_{س \to ٢}$ (ق (س))^{٢} ؟؟

الحل : $\lim_{س \to ٢}$ (ق (س) + س + ١) = ٩ <<<< $\lim_{س \to ٢}$ (ق (س) + ٢ + ١) = ٩

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ٦ <<< $\lim_{س \to ٢}$ ق (س)^{٢} = (٦)^{٢} = ٣٦

س ١ : اذا علمت أن $\lim_{س \to -١}$ (ق (س) + س^{٢} - ٣) = ٥ ، فأوجد $\lim_{س \to -١}$ ٣(ق (س))^{٢} ؟؟

س ٢ : اذا علمت أن $\lim_{س \to ٣}$ (م س^{٢} + ٥س + ١) = ٢٥ ، **أوجد قيمة الثابت (م)** ؟؟؟

س ٣ : اذا علمت أن $\lim_{س \to ٢}$ (٣ ق (س) + ٢س + ١) = ٢٧ ، فأوجد $\lim_{س \to ٢}$ (ق (س))^{٣} ؟؟

---

* **نظرية (٣) =** إذا كانت أ ، ل ، ك ، جـ أعداداً حقيقية

و كانت $\lim_{س \to ا}$ ق(س) = ل ، $\lim_{س \to ا}$ هـ (س) = ك فإن :

* $\lim_{س \to ا}$ ق(س) + $\lim_{س \to ا}$ هـ (س) = ل + ك
* $\lim_{س \to ا}$ ق(س) - $\lim_{س \to ا}$ هـ (س) = ل - ك
* $\lim_{س \to ا}$ ق(س) X $\lim_{س \to ا}$ هـ (س) = ل X ك
* $\lim_{س \to ا}$ جـ X ق (س) = جـ X ل
* $\lim_{س \to ا}$ $\sqrt[ن]{\text{و(س)}}$ = $\sqrt[ن]{\text{ل}}$ (ل > صفر إذا كان ن عدد زوجي)
* ($\lim_{س \to ا}$ و(س))^{ن} = ل^{ن}

فيصل السعدون

س ١ : اذا كان $\lim_{س\to٢}$ ق (س) = ٤ ، $\lim_{س\to٢}$ هـ (س) = -٣ ، **جد قيمة ما يلي :**

١) $\lim_{س\to٢}$ (ق (س) - ٣هـ (س)) =

٢) $\lim_{س\to٢}$ ق (س) X هـ (س) =

٣) $\lim_{س\to٢}$ ٥ ق (س) =

٤) $\lim_{س\to٢}$ (٢ق (س) + ٤هـ (س)) =

٥) $\lim_{س\to٢}$ (٢+ ق (س)^{٢} - ٣س + ٥ هـ(س) =

س ٢ : اذا كان $\lim_{س\to٤}$ (س - ٢) = ٢ ، $\lim_{س\to٤}$ (س + ٢) = ٦ ، **جد قيمة ما يلي :**

١) $\lim_{س\to٤}$ (س^{٢} - ٤) =

٢) $\lim_{س\to٤}$ ٢س =

نهاية الاقتران المتشعب

*** مثال :**

ق (س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} - ٢س & ، س < ٤ \\ ٢س + ٣ & ، س \geq ٤ \end{cases}$ ، جد قيمة $\lim_{س\to٤}$ ق (س) ؟

الحل :

$\lim_{س\to٤^{+}}$ ق (س) = $\lim_{س\to٤^{+}}$ ٢س +٣ = ٢ X ٤ + ٣ = ١١

$\lim_{س\to٤^{-}}$ ق (س) = $\lim_{س\to٤^{-}}$ ٣(٤)^{٢} - ٢ X ٤ = ٤٠

في حال وجود نقطة تشعب :

نأخذ النهاية من اليمين (+)
و من اليسار (-)

اذن $\lim_{س\to٤}$ ق(س) غير موجودة ، لأن $\lim_{س\to٤^{+}}$ ق (س) ≠ $\lim_{س\to٤^{-}}$ ق (س)

أ. فيصل السعدون

س ١ : ق (س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & ، س < -١ \\ س^{٢} + س & ، س \leq -١ \end{cases}$

جد قيمة أ) $\lim_{س \to -١}$ ق (س) ، ب) $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) ، ج) ق (-١) ، د) ق (-٤) ؟؟

*** مثال :** اذا كان هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، س > ٣ \\ ٢٠ & ، س = ٣ \\ أس + ٢ & ، س < ٣ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) موجودة ، جد قيمة (أ) ؟

الحل :

$\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) موجودة اذن $\lim_{س \to ٣+}$ هـ (س) = $\lim_{س \to ٣-}$ هـ (س)

= $\lim_{س \to ٣+}$ (أس + ٢) = $\lim_{س \to ٣-}$ ($س^{٢}$ + ٥) >>> ٣أ + ٢ = $٣^{٢}$ + ٥

٣أ = ١٢ >> أ = ٤

س ٢ : اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢س^{٣} + ٤ & ، س < -٢ \\ أس + ٦ & ، س \leq -٢ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to -٢}$ ق (س) موجودة ، **جد قيمة (أ) ؟**

س٣ : اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٥س^{٢} - ل & ، س > ٢ \\ ل س + ٢ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) موجودة ، **جد قيمة (ل) ؟**

س ٤ : اذا كان هـ (س) = $\begin{cases} ٥س - أ & ، س < ١ \\ ب س^{٢} + ٧ & ، س \leq ١ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) = ١٦ و $\lim_{س \to ١}$ هـ (س) موجودة ، **جد قيمة (أ) و (ب) ؟**

س ٥ : اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٥س^{٣} & ، س < أ \\ ٤٠ & ، س \leq أ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to أ}$ ق (س) موجودة ، **فأوجد قيمة الثابت (أ) ؟؟**

الدرس الثالث :

نهاية خارج قسمة اقترانين

*** نظرية :** اذا كانت أ ، ل ، ك أعداداً حقيقية ، حيث ك ≠ صفر

و كانت $\lim_{س \to أ}$ ق (س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ (س) = ك

فإن $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$ **(اذا كان الناتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ تكون النهاية غير موجودة)**

*** مثال :**

اذا كانت $\lim_{س \to ٥}$ ق (س) = ٦ ، $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س) = -٢ ، جد قيمة $\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ؟

الحل : $\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ٥} ق(س)}{\lim_{س \to ٥} هـ(س)} = \frac{٦}{-٢} = -٣$

س ١: اذا كانت $\lim_{س \to ٤}$ ق (س) = ٥ ، $\lim_{س \to ٤}$ هـ (س) = -٣ ،

أوجد : أ) $\lim_{س \to ٤} \frac{ن(س)}{هـ(س)}$ ، ب) $\lim_{س \to ٤} \frac{ن(س) + ٣س}{هـ(س) + ٢}$ ؟؟؟

س ٢ : اذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ ٣ ق (س) = ١٥ ، $\lim_{س \to ٢}$ (هـ (س) + ٣س - ٤) = ٩ ،

أوجد أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{ن(س)}{هـ(س)}$ ، ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س) + ١}{ن(س) + س - ٥}$ ؟؟؟

س٢ : ما قيمة كل مما يلي : **(اذا كان الناتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ تكون النهاية غير موجودة)**

١) $\lim_{س \to -١} \frac{٢س - ٤}{س^{٢} + س - ٣} =$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{٢س^{٢} - س - ١} =$

٣) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٢س - ١} + ٧}{س^{٢} - ٣} =$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + ٥}{س} =$

٥) $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س + ٤}{س^{٢} - ١} =$

*** اذا كان الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نستخدم احد الطرق الاتية :**

١) التحليل للعوامل (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)

٢) الضرب بالمرافق

٣) توحيد المقامات

*** أمثلة :** **<u>الطريقة الأولى : حالة (١) : (اخراج العامل المشترك)</u>**

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣س - ٦}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ٢} \frac{٣(س - ٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} ٣ = ٣$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + س}{س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ٠} \frac{\cancel{س}(س + ١)}{\cancel{س}} = \lim_{س \to ٠} ١ = ١$

أ. فيصل السعدون

س١: جد قيمة ما يلي :

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢٥س^{٢} + ٥س}{٥س} =$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{٧س - ٢١}{٣ - س} =$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٤} + ٣س^{٢}}{س^{٣} - ٤س^{٢}} =$

الطريقة الأولى : حالة (٢) : الفرق بين مربعين **(صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)**

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to -٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{٣ (س + ٣)}$ = $\lim_{س \to -٣} \frac{(-٣ - ٣)}{٣}$ = $\frac{-٦}{٣}$ = -٢

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)(س - ١)}{س - ١}$ = $\lim_{س \to ١} س + ١$ = ٢

*** سؤال : جد قيمة ما يلي :**

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{٩ - س^{٢}}{س - ٣}$ =

٢) $\lim_{س \to ١٠} \frac{س^{٢} - ١٠٠}{س^{٢} - ١٠س}$ =

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) $\lim_{ص \to ٧} \frac{٤٩ - ص^{٢}}{ص - ٧} =$

*** الطريقة الأولى : حالة (٣) : تحليل العبارة التربيعية (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)**

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} س - ٣ = -١$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} - ٩} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٤)}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{٤ + ٣}{٣ + ٣} = \frac{٧}{٦}$

*** سؤال : جد قيمة كل ما يلي :**

١) $\lim_{س \to -٤} \frac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س + ٤} =$

٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٤س - ٥} =$

٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٤} =$

*** الطريقة الأولى : حالة (٤) :**

تحليل فرق و جمع عددين مكعبين (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س + ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} <<< \lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)(س^{٢} - ٢س + ٤)}{س + ٢} = (-٢)^{٢} - ٢(-٢) + ٤ = ١٢$

٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{٥ - س}{س^{٣} - ١٢٥} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} <<< \lim_{س \to ٥} \frac{-(س - ٥)}{(س - ٥)(س^{٢} + ٥س + ٢٥)} = \frac{-١}{٥^{٢} + ٥(٥) + ٢٥} = \frac{-١}{٧٥}$

*** سؤال : جد قيمة ما يلي :**

١) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} + ٣س + ٢} =$

٢) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣} =$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٢} + ٤س + ٣} =$

*** الطريقة الثانية : (الضرب بالمرافق) >>> هو عكس الإشارة بين الجذر و العدد .**

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} = \frac{صفر}{صفر}$

الحل : $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{(س - ١)(\sqrt{س} + ١)} = \frac{١}{\sqrt{١} + ١} = \frac{١}{٢}$

---

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$

الحل : $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)}{س + ١ - ٤} = = ٤$

*** سؤال : جد قيمة النهاية في كل ما يلي:**

١) $\lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} =$

أ. فيصل السعدون

٢) $\frac{٢ - \sqrt{س + ١}}{س - ٣} =$ ، س $\longrightarrow$ ٣

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{\sqrt{س + ١} - ٢} =$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} =$

*** الطريقة الثالثة : توحيد المقامات (اذا كان لدينا كسور)**

$$\frac{\frac{أ}{ب} \pm \frac{جـ}{د}}{هـ} = \frac{\frac{أ \times د \pm جـ \times ب}{ب \times د}}{هـ} = \frac{أ \times د \pm جـ \times ب}{ب \times د \times هـ}$$

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\frac{\frac{١ \times س - ١ \times ٢}{٢ \times س}}{س - ٢} = \frac{١ \times س - ١ \times ٢}{٢ س (س - ٢)} = \frac{\cancel{س - ٢}}{٢ س \cancel{(س - ٢)}} = \frac{١}{٤}$

---

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{٢}{س + ٣}}{س - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، **الحل :**

$$\frac{\frac{(س + ٣) - ٢(س + ١)}{(س + ١)(س + ٣)}}{س - ١} = \frac{س + ٣ - ٢س - ٢}{(س + ١)(س + ٣)(س - ١)} = \frac{\cancel{-س + ١}}{\cancel{(س - ١)}(س + ١)(س + ٣)} = \frac{-١}{٨}$$

*** سؤال : جد قيمة النهاية في كل ما يلي :**

١) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س}}{س - ٤} =$

٢) $\frac{\frac{٢}{س - ٣} + \frac{٤}{٦ + س}}{س} =$ ، $س \to ٠$

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{٣س} - \frac{١}{س + ٢}}{س - ١} =$

٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{س - ٢} - \frac{س + ٢}{س - ١}}{٢س - ٨} =$

*** سؤال :** اذا كان ق (س) = س ، فجد $\lim_{س \to -٣} \frac{ق^{٢}(س) - ق(٩)}{س + ٣}$ ؟؟

*** سؤال :** اذا علمت أن $\lim_{س \to ٥} ق(س) = -٧$ ، $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٢$

فبيّن (أثبت) أن $\lim_{س \to ٥} \frac{٢ق(س) - ٣هـ(س)}{ق(س) + س + ٧} = -٤$ ؟

الدرس الرابع :
نهاية اقتران الجذر النوني

- الجذور الزوجية : بعد التعويض :

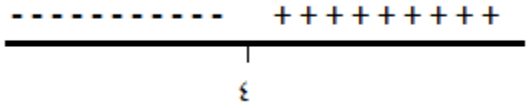
* اذا كان الناتج موجباً تكون النهاية موجودة و تساوي العدد الناتج .
* اذا كان الناتج سالباً تكون النهاية غير موجودة .
* اذا كان الناتج صفراً , نساوي ما داخل الجذر بالصفر و نضع الناتج على خط الأعداد و نأخذ النهاية من اليمين و اليسار .

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س\to ٢} \sqrt{س+٧} = \sqrt{٢+٧} = ٣$

٢) $\lim_{س\to ٢} \sqrt{س-٣} = \sqrt{٢-٣} = \sqrt{-١}$ = غير موجودة

٣) $\lim_{س\to ٤} \sqrt{س-٤} = \sqrt{٤-٤}$ = صفر >> س - ٤ = ٠ >> س = ٤



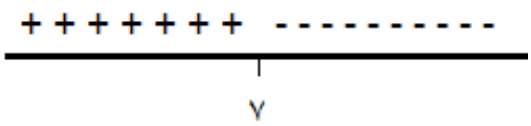
$\lim_{س\to ٤+}$ ق (س) = صفر

$\lim_{س\to ٤-}$ ق (س) = غير موجودة

$\lim_{س\to ٤}$ ق (س) = غير موجودة

---

٤) $\lim_{س\to ٧} \sqrt{٧-س} = \sqrt{٧-٧}$ = صفر >>> س - ٧ = صفر >>> س = ٧



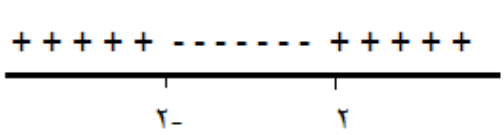
$\lim_{س\to ٧+}$ ق (س) = غير موجودة

$\lim_{س\to ٧-}$ ق (س) = صفر

$\lim_{س\to ٧}$ ق (س) = غير موجودة

أ. فيصل السعدون

٥) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} - ٤}$ = $\sqrt{٤ - ٤}$ = صفر <<< $س^{٢} - ٤$ = صفر <<< س = ٢ ، -٢



$\lim_{س \to ٢+}$ ق (س) = صفر

$\lim_{س \to ٢-}$ ق (س) = غير موجودة

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = غير موجودة

س ١ : جد قيمة كل من النهايات التالية (إن كانت موجودة) ؟

١) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س + ١٨}$ =

٢) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} - ٩}$ =

٣) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{٣ - س}$ =

أ. فيصل السعدون

٤) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س^{٢} - ١٦} =$

٥) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{س^{٢}} =$

---

* **<u>الجذور الفردية</u> : يُقبل الناتج دائما .**

* **أمثلة :**

١) $\lim_{س \to ٣} \sqrt[٣]{س + ٢٤} = \sqrt[٣]{٣ + ٢٤} = ٣$

٢) $\lim_{س \to -١٤} \sqrt[٣]{س + ٦} = \sqrt[٣]{-١٤ + ٦} = -٢$

٣) $\lim_{س \to -٢} \sqrt[٣]{س + ٢} = \sqrt[٣]{-٢ + ٢} =$ صفر

س ٢ : اذا علمت أن $\lim_{س\to ٣} ن(س) = -٦٤$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

١) $\lim_{س\to ٣} \sqrt[٣]{ن(س)} =$

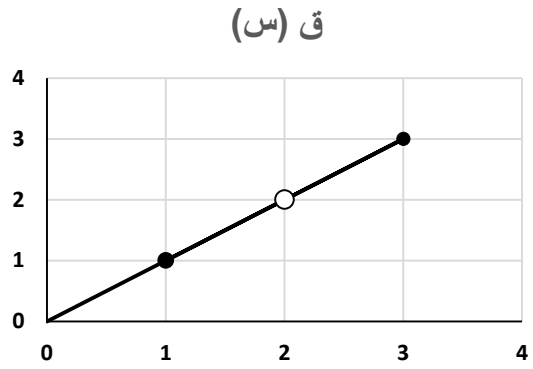
٢) $\lim_{س\to ٣} \sqrt{ن(س)} =$

٣) $\lim_{س\to ٣} (\sqrt[٣]{ن(س)} + س^{٢} + ٥س - ٣) =$

٤) $\lim_{س\to ٣} (\sqrt[٣]{\frac{ن(س)}{٢}} + س - ٥) =$

الدرس الخامس : الاتصال عند نقطة

* يكون الاقتران متصلاً في حال عدم وجود قفزات أو ثقب ,, و يكون غير متصل عند وجود قفزات او ثقب ..



ق (س) عند س = ٢ (غير متصل)

ق (س) عند س = ١ (متصل)

* يكون الاقتران (ق) متصلاً عند النقطة س = أ ، إذا كانت $\lim_{س\to ا} ن(س) = ن(ا)$

*** أمثلة :**

١) اذا كان ق (س) = ٣س^{٢} + ٢س - ١ ، فهل (ق) متصل عند س = ٢ ؟

الحل : ق(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) - ١ = ١٥

$\lim_{س\to ٢} ن(س) = \lim_{س\to ٢} (٣س^{٢} + ٢س - ١) = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) - ١ = ١٥$

بما أن $\lim_{س\to ٢} ن(س) = ن(٢)$ ، فإن ق (س) متصل عند س = ٢

٢) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س + ١ & ، س \neq ٠ \\ ٣س + ١ & ، س = ٠ \end{cases}$ ، هل (ق) متصل عند س = ٠ ؟

الحل : ق (٠) = ٣ × ٠ + ١ = ١

$$\lim_{س \to ٠} ق(س) = (٠)^{٢} + ٢ \times ٠ + ١ = ١$$

بما أن $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ = ق (٠) ، فإن ق (س) متصل عند س = ٠

---

٣) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & ، س < -١ \\ س^{٢} + س & ، س \leq -١ \end{cases}$ ، ابحث في الاتصال عند س = -١ ؟

الحل : ق (-١) = $(-١)^{٢}$ + (-١) = ١ - ١ = صفر

$$\lim_{س \to -١^{+}} ق(س) = (-١)^{٢} + (-١) = ١ - ١ = \text{صفر}$$

$$\lim_{س \to -١^{-}} ق(س) = (-١)^{٣} + ٢ = ١$$

اذن $\lim_{س \to -١} ق(س)$ غير موجودة و هذا يعني أن ق (س) غير متصل عند س = -١

في حال وجود نقطة تشعب :

نأخذ النهاية من اليمين (+)
و من اليسار (-)

*** أسئلة :**

١) اذا كان ق (س) = $س^{٢}$ + ٥س + ٢ ، فهل (ق) متصل عند س = ٣ ؟

أ. فيصل السعدون

٢) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٥ & ، س = ٣ \end{cases}$ ، ابحث في الاتصال عند س = ٣ ؟

٣) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٣س^{٢} & ، س < ٣ \\ س + ٢٤ & ، س = ٣ \end{cases}$ ، ابحث في الاتصال عند س = ٣ ؟

٤) اذا كان ق (س) = { ٢س^{٣} + ٤ ، س < -٢ ; أس + ٦ ، س ≤ -٢ } و كان ق (س) متصلا عند س = -٢ ، فما هي قيمة الثابت (أ) ؟

٥) اذا كان ق (س) = { أس^{٢} + ب ، س > ٢ ; ٣أس + ٤ ، س < ٢ ; ١٦ ، س = ٢ } و كان ق (س) متصلا عند س = ٢ ، فما هي قيمة الثابت (أ) و (ب) ؟

٦) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢أس + ب & ، س < ٢ \\ أس^{٢} + ٣ ب س & ، س > ٢ \\ ٨ & ، س = ٢ \end{cases}$ و كان ق (س) متصلا عند س = ٢ ، فما هي قيمة الثابت (أ) و (ب) ؟

٧) اذا كان هـ (س) = $\begin{cases} \frac{٣ - س}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ م س + ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$ ، و كان هـ (س) متصلا عند س = ٣ ، فما هي قيمة الثابت (م) ؟

٨) اذا كان الاقتران (ق) متصلاً عندما س = ٢ ، وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + س = ٦ ، **فأوجد ق (٢) ؟؟؟**

نقاط عدم الاتصال (الانفصال)

هي النقاط التي تجعل المقام صفر (الاقتران النسبي)

* الاقتران النسبي دائما متصل عند جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام

*** مثال :**

ق (س) = $\frac{\text{س} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$ **جد نقاط عدم الاتصال ؟**

الحل : $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ٠$ >>> س(س - ٣) = ٠ >>> س = ٠ ، س = ٣

*** سؤال : جد نقاط عدم الاتصال للاقترانات الاتية :**

١) ق (س) = ٥

٢) ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} + ٥}$ =

٣) ق (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٢٨}$ =

٤) ق (س) = (س+٣) ($\text{س}^{٢}$ - ١٦) =

٥) $\frac{١ - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٩}$ =

٦) هـ (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} < ٤ \\ ٢\text{س} + ٥ & ، \text{س} = ٤ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$

أ. فيصل السعدون

الدرس السادس : نظريات الاتصال

*** نظرية :** اذا كان كل من الاقترانين (ق) ، (هـ) متصلا عند س = أ فإن :

* ق + هـ متصل عند س = أ (مجموع اقترانين متصلين)
* ق - هـ متصل عند س = أ (فرق بين اقترانين متصلين)
* ق X هـ متصل عند س= أ (حاصل ضرب اقترانين متصلين)
* $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = أ ، هـ (أ) ≠ صفر (ناتج قسمة اقترانين متصلين)

*** مثال :**

اذا كان ق (س) = ٣س - ١ ، هـ (س) = $\begin{cases} ٤س + ١ & ، س < ٢ \\ س^{٢} + ٥ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ل(س) = ق (س) X هـ (س) ؟

الحل : **باستخدام الطريقة الأولى** (فقط عندما يكون الاقترانين متصلين)

* ق (س) متصل لأنه كثير حدود
* $\lim_{س \to ٢^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} س^{٢} + ٥ = ٩$
* $\lim_{س \to ٢^{-}} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ٤س + ١ = ٩$
* هـ (٢) = $٢^{٢} + ٥ = ٩$

اذن هـ (س) متصل من لأن $\lim_{س \to ٢^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} هـ(س) = هـ(٢)$

* اذن ل (س) متصل عند س = ٢ لأنه (حاصل ضرب اقترانين متصلين)

أ. فيصل السعدون

* **<u>الحل بالطريقة الثانية</u>** (عندما يكون احد الاقترانين او كلاهما غير متصلين عند نقطة معينة)
(و تستخدم في حال الاتصال ايضاً)

$$ل(س) = \begin{cases} (٣س - ١)(٤س + ١) & ، \ س > ٢ \\ (٣س - ١)(س^{٢} + ٥) & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$$

* $\lim_{س \to ٢^{+}} ل(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} (٣س - ١)(٤س + ١) = ٥ \times ٩ = ٤٥$

* $\lim_{س \to ٢^{-}} ل(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} (٣س - ١)(س^{٢} + ٥) = ٥ \times ٩ = ٤٥$

* $\lim_{س \to ٢} ل(س) = ٤٥$ ، * ل (٢) = ٥ X ٩ = ٤٥

* اذن ل (س) = ق (س) X هـ (س) متصل عند س = ٢ من لأن $\lim_{س \to ٢} ل(س) = ل(٢) = ٤٥$

---

* **أسئلة :**

١) اذا كان هـ (س) = س^{٢} + ٥س ، ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، \ س > ٢ \\ ٢ \ س & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق (س) + هـ (س) عند س = ٢ ؟

٢) اذا كان هـ (س) = س^{٢} - ٤ ، ق (س) = { س^{٢} ، س < ٢ ؛ ٢س + ٣ ، س ≤ ٢ }

و كان ل (س) = ق (س) X هـ (س) ، فبيّن أن ل (س) متصل عند س = ٢ ؟

٣) اذا كان هـ (س) = س - ٥ ، ق (س) = { ١ ، س < ٥ ؛ صفر ، س = ٥ ؛ -١ ، س > ٥ }

ابحث في اتصال ل(س) = ق (س) X هـ (س) عند س = ٥ ؟

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٤) اذا كان هـ (س) = ٣س^{٢} ، ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ & ، \ س < ٢ \\ ٢س + ٣ & ، \ س \geq ٢ \end{cases}$

و كان ل (س) = هـ (س) - ق (س) ، فابحث في اتصال ل (س) عند س = ٢ ؟

٥) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٥ - س & ، \ س > ٥ \\ س - ٥ & ، \ س \leq ٥ \end{cases}$ ، هـ (س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٢٥}$

و كان ل (س) = ق (س) X هـ (س) ، فبيّن أن ل (س) متصل عند س = ٥ ؟

*** أسئلة إضافية للوحدة الأولى : (مهمة جداً)**

١) اذا كانت $\lim_{س \to ٥}$ (٢ ق (س) -١) = ٧ ، $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س) = -٢

جد قيمة (ب) التي تجعل $\lim_{س \to ٥}$ ($\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ - $\sqrt{س^{٢}}$ + ب) = - ١٠ ؟؟

ب) اذا كان ق , هـ اقترانين متصلين عند س = ٢, و كان ق (٢) = ١٠, $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) - ٢هـ(س)) = ١٨

أوجد هـ (٢) ؟

ج) اذا كان ق , هـ اقترانين متصلين عند س = ٥ , و كان هـ (٥) = ٤ , $\lim_{س \to ٥}$ $\frac{ق(س) + س}{٣هـ(س)}$ = ١ , **أوجد ق (٥) ؟**

د) اذا كان $\lim_{س \to ب}$ (٢س ^{٢} – ٤س) = ٠ , **فجد قيم (ب) ؟**

الوحدة الثانية

(التفاضل)

الدرس الأول : متوسط التغير

* مثال على مفهوم التغير : قد يكون سعر كيلو غرام من الخبز في أحد الأيام ٢٠ قرشاً ثم يصبح بعد سنة ٣٠ قرشاً ، اذن التغير في السعر من ٢٠ الى ٣٠ ، أي زيادة قدرها (٣٠ - ٢٠) = ١٠ قروش .

* مقدار التغير في (س) : هو الفرق بين قيمتي (س) عندما تتغير (س) من ($س_1$) إلى ($س_2$)

و يرمز له $\Delta س$ (دلتا س)

* التغير في (س) : $\Delta س = س_2 - س_1$ ، التغير في (ص) : $\Delta ص = ص_2 - ص_1 = ق(س_2) - ق(س_1)$

* أمثلة : جد $\Delta س$ اذا تغيرت (س) من :

$س_1 = ٢$ ، $س_2 = ٥$ ، $\Delta س = س_2 - س_1 = ٥ - ٢ = ٣$

$س_1 = -٢$ ، $س_2 = -٦$ ، $\Delta س = س_2 - س_1 = -٦ - (-٢) = -٦ + ٢ = -٤$

$س_1 = ٢,٥$ ، $س_2 = ٣,٦$ ، $\Delta س = س_2 - س_1 = ٣,٦ - ٢,٥ = ١,١$

سؤال (١) : اذا كان ص = ق(س) = $س^2$ - ١ ، و تغيرت (س) من ٢ الى ٣ ، جد التغير في (س) و (ص) ؟

* **معدل (متوسط) التغير** >>> $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

*** مثال :**

اذا كان ص = ق(س) = $س^2$ + ٣ ، $س_1$ = ٢ ، $\Delta س$ = ٣ ، جد : ١) $\Delta ص$ ٢) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ؟

الحل :

$\Delta س = س_2 - س_1$ >>> ٣ = $س_2$ - ٢ >>> $س_2$ = ٥

١) $\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1) = ق(٥) - ق(٢) = ٢٨ - ٧ = ٢١$

٢) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{٢١}{٣} = ٧$

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

* **أسئلة :** ١) ما معدل تغير الاقتران (ل) ، ل(س) = ٥س^{٢} + ٦ ، عندما تتغير (س) من ١ إلى ٣ ؟

٢) ما متوسط التغير في الاقتران (ق) حيث ق(س) = $\sqrt{س}$ عندما تتغير (س) من ٤٩ الى ٢٥ ؟

٣) اذا كانت ص = و(س) = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ١ ، س$_{١}$ = ١ ، Δس = ٣

جد : ١) مقدار التغير في الاقتران (ق) **٢) معدل التغير للاقتران (ق)**

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٤) اذا كان ق (س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، و تغيرت س من (١) إلى (٣) ، **فأوجد :**

أ) مقدار التغير في الاقتران (ق) ب) معدل التغير في الاقتران (ق)

٥) اذا كان متوسط التغير في الاقتران (ق) في الفترة [-١ ، ٣] يساوي ١ ، و كان هـ (س) = ق (س) - $س^{٢}$

جد متوسط التغير للاقتران (هـ) في الفترة [-١ ، ٣] ؟

٦) اذا كان معدل التغير في الاقتران (ق) في الفترة [-١ ، ٢] يساوي -٣ ،

و كان هـ (س) = ٢ق (س) + ٥س ، جد معدل التغير للاقتران (هـ) في الفترة [-١ ، ٢] ؟

٧) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ & ، \ ٠ \leq س \geq ٣ \\ ٢س + ١ & ، \ ٣ < س \geq ٧ \end{cases}$

جد معدل التغير في الاقتران (ق) عندما تتغير (س) من ٢ إلى ٥ ؟

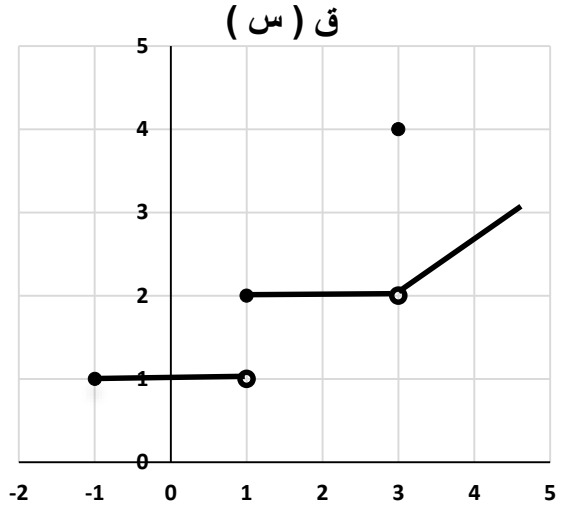
٨) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ & ، \ ١ \leq س < ٤ \\ ٦س + ٢ & ، \ ٤ \leq س \geq ٨ \end{cases}$

جد معدل التغير في الاقتران (ق) اذا كانت $س_{١} = ٣$ ، $\Delta س = ٢$ ؟

٩) اذا كان هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، \ ١ \leq س \geq ٣ \\ أس & ، \ ٣ < س \geq ٥ \end{cases}$

و كان معدل تغير الاقتران (هـ) عندما تتغير (س) من ٢ إلى ٥ يساوي ٤ ، **<u>فجد قيمة الثابت (أ)</u>** ؟؟

١٠) **اعتمادا على الشكل الاتي الذي يمثل منحنى اقتران ق (س) ، أوجد :**



أ) متوسط التغير في الاقتران (ق) في الفترة [٠ , ٣] ؟؟

ب) نقاط عدم الاتصال (الانفصال) ؟

*** التفسير الهندسي لمتوسط التغير :**

- **ميل القاطع** : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

* **مثال** : اذا كان ص = ق(س) = ٣ - س^٢ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (-٣ ، -٦) ؟

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٦ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{-٨}{-٤} = ٢$

*** أسئلة :**

١) اذا كان ص = ق(س) = س^٣ - ٧ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠ ، -٧) ، (١ ، -٦) ؟

٢) اذا كان ص = ق(س) = ٣س^٢ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق (١)) ، (-٣ ، ق (-٣)) ؟

أ. فيصل السعدون

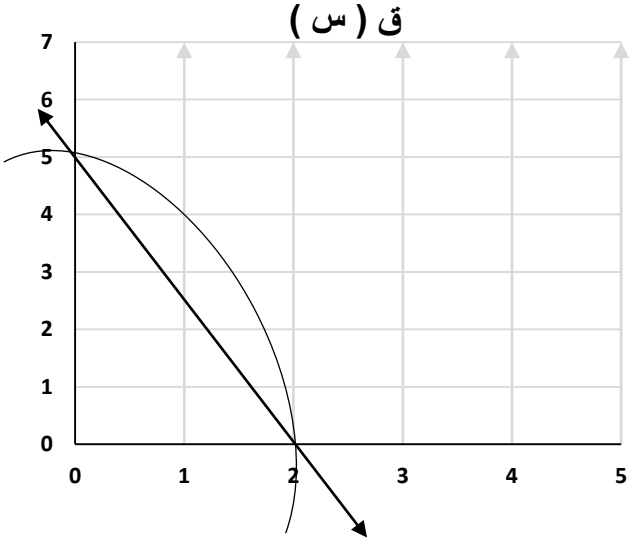
٣) اذا كان ص = ق(س) = ٨س^{٢} ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠ ، ق (٠)) ، (٣ ، ق (٣)) ؟

٤) إذا كان منحنى الاقتران (ق) يمر بالنقطتين : أ (٣،٧) و ب (-١، ل) ،
و كان ميل القاطع يساوي = (-٣) ، **<u>فأوجد قيمة (ل) ؟؟</u>**

---

٥) <u>اعتمادا على الشكل الاتى :</u>

أوجد ميل القاطع لمنحنى الاقتران (ق) ؟؟



*** التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير :**

- السرعة المتوسطة $\bar{ع} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

* مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^٢ + ٣ ،
حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) المسافة بالمتر ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٢] ؟

الحل : $(\bar{ع}) = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(٢) - ف(١)}{٢ - ١} = \frac{(٣ + ٢^٢) - (٣ + ١^٢)}{١} = ٣$ م/ث

*** سؤال (١)**

١) اذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم في أثناء سقوطه الى أسفل تعطى بالعلاقة ف (ن) = ٣٠ن - ٥ن^٢
حيث (ن) الزمن بالثانية و (ف) المسافة بالمتر ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٣] ؟

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^٢ + ٢ن ،حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) المسافة بالمتر
احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [٢ ، ٣] ؟

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} + ٥ ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٣] ؟

*** سؤال (٢) :** مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١) سم إلى (٣) سم ، جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب ؟؟

الدرس الثاني : المشتقة الأولى

* التعريف العام للمشتقة الأولى :

$$ق'(س) = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

* رموز المشتقة الأولى : $ق'(س)$ ، $ص'$ ، $\frac{د ص}{د س}$

مثال : جد المشتقة الأولى للاقتران (ق) حيث ق (س) = ٣س - ٥ ، باستخدام التعريف العام للمشتقة الأولى ؟

الحل :

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٣(س + هـ) - ٥ - (٣س - ٥)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٣س + ٣هـ - ٥ - ٣س + ٥}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٣هـ}{هـ} = ٣$$

*** أسئلة : باستخدام <u>التعريف العام للمشتقة</u> ، جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = س^{٢} - س

٢) ق (س) = ٦ - ٥س ، س= ٢ أو ق ′(٢)

٣) ق (س) = $\sqrt{س}$ ، س ≤ ٠

٤) ص = $\sqrt{٣س - ٢}$ ، س = ١

٥) ص = $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠

٦) ص = $\frac{١}{١-٣س}$ ، س = $\frac{١}{٢}$ أو ص$'$($\frac{١}{٢}$) ، ص$''$($\frac{١}{٢}$)

٧) ق (س) = ٧

٨) اذا كان ص = ق (س) ، و كان **معدل** تغير الاقتران ق (س) = س^{٢}هـ - ٢س هـ^{٢} ، **فجد ق ´(س)** ؟؟

٩) اذا كان ص = ق (س) ، و كان **مقدار** تغير الاقتران ق (س) عندما تتغير (س) من (س) إلى (س+هـ) هو ٤س هـ + ٢ هـ^{٢} ، فجد قيمة **ق ´(س)** ؟؟

الدرس الثالث :

قواعد الاشتقاق

*** قاعدة (١)** : ق(س) = عدد >>> ق´(س) = صفر

*** أمثلة :**

١) ق (س) = ٤ >>> ق´(س) = صفر ٢) ق (س) = $\sqrt{١٦}$ >>> ق´(س) = صفر

٣) ق (س) = $٦^{٣}$ >>> ق´(س) = صفر

*** قاعدة (٢)** : ق(س) = $س^{ن}$ >>> ق´(س) = ن $س^{ن-١}$

*** أمثلة :** ١) ق (س) = $س^{٥}$ >>> $٥س^{٤}$ ٢) ق (س) = $س^{-٦}$ >>> $-٦س^{-٧}$

*** أسئلة : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = $س^{٤}$

٢) ق (س) = $س^{-٣}$

٣) ق (س) = $س^{\frac{١}{٢}}$

٤) ق (س) = $س^{\frac{١}{٣}}$

٥) ق (س) = $س^{\frac{٣}{٢}}$

*** ملاحظة** : تذكر أن $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{١}{س^{م}} = س^{-م}$

*** أمثلة :** ١) ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٤}} = س^{\frac{٤}{٣}}$ >>> ق´(س) = $\frac{٤}{٣}س^{\frac{١}{٣}} = \frac{٤}{٣}\sqrt[٣]{س}$

٢) ق (س) = $\sqrt{س^{٥}} = س^{\frac{٥}{٢}}$ >>> ق´(س) = $\frac{٥}{٢}س^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٥}{٢}\sqrt{س^{٣}}$

أ. فيصل السعدون

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) $\sqrt[3]{س}$ =

٢) $\frac{١}{\sqrt[٨]{س}}$ =

٣) $\frac{٤}{س}$ =

*** قاعدة (٣)** : ق (س) = جـ X م (س) ، حيث (جـ) عدد ثابت >>> ق ´(س) = جـ X م ´(س)

*** أمثلة :** ١) ق (س) = ٣س^{٦} >>> ق ´(س) = ٣ X ٦س^{٥} = ١٨س^{٥}

٢) ق (س) = $\frac{٤}{س^{٢}}$ = ٤س$^{-٢}$ >>> ق ´(س) = ٤ X -٢س$^{-٣}$ = -٨س$^{-٣}$

٣) ق (س) = $٣\sqrt[٨]{س}$ = ٣س$^{\frac{١}{٢}}$ >>> ق ´(س) = ٣ × $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{-١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{-١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٢\sqrt[٨]{س}}$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق(س) = $\frac{٥}{٢}$ س$^{-٤}$

٢) ق(س) = ٥ × $\sqrt[٣]{س}$

٣) ق(س) = $\frac{٤}{س^{٢}}$

٤) ق(س) = ٢س$^{\frac{١}{٢}}$

*** قاعدة (٤)** : في حالة الجمع و الطرح نشتق كل قاعدة لوحدها

ق (س) = م (س) ± هـ (س) >>> ق ´(س) = م ´(س) ± هـ ´(س)

*** مثال :**

س^{٦} - ٣س^{٤} + س$^{-٢}$ - ٧س + ٨ >>> ق ´(س) = ٦س^{٥} - ١٢س^{٣} - ٢س$^{-٣}$ - ٧

أ. فيصل السعدون

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = ٥س^{٤} - ٢س^{٣} - س^{٢} - س + ٢ =

٢) ق (س) = س$^{-٢}$ - ٣س + ٥ =

٣) ق (س) = $\sqrt{س^{٣} - ٢س + ١}$ =

٤) ق (س) = $\sqrt{س + س^{٢} - ٢٠٠}$ =

*** قاعدة (٥) :** مشتقة حاصل ضرب اقترانين

ص = ل (س) X م (س) >>> $\frac{د ص}{د س}$ = ل (س) X م ` (س) + م (س) X ل ` (س)

بمعنى آخر (الاقتران الأول X مشتقة الاقتران الثاني) + (الاقتران الثاني X مشتقة الاقتران الأول)

*** مثال :**

ق (س) = (٥س + ٣) (س^{٢} - ١) >>> ق `(س) = (٥س + ٣) (٢س) + (س^{٢} - ١) (٥)

= ١٠س^{٢} + ٦س + ٥س^{٢} - ٥ = ١٥س^{٢} + ٦س - ٥

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ع (س) = (٣س - ١) (س^{٢} + ٧) ، عندما س = ٠

٢) ق (س) = س$^{-٣}$(س^{٣} + ٧)

٣) ق (س) = (٤ - ٦س^{٢}) (٢س+ ١) ، **أوجد** $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(-٢ + هـ) - ق(-٢)}{هـ}$

٤) ص = ٤س^{٢}(س^{٣} + ٢) ، عندما س = ١

*** قاعدة (٦) :** مشتقة قسمة اقترانين

$$\text{ب}(س) = \frac{\text{ل}(س)}{\text{م}(س)} \quad >>> \quad \text{ب}'(س) = \frac{\text{م}(س) \times \text{ل}'(س) - \text{ل}(س) \times \text{م}'(س)}{(\text{م}(س))^{٢}}$$

بمعنى اخر $\frac{\text{(المقام × مشتقة البسط) - (البسط × مشتقة المقام)}}{\text{مربع المقام}}$

*** مثال :**

$$\text{ص} = \frac{س^{٣} + ١}{س^{٢} + ٤} \leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{(س^{٢} + ٤)(٣س^{٢}) - (س^{٣} + ١)(٢س)}{(س^{٢} + ٤)^{٢}}$$

$$= \frac{٣س^{٤} + ١٢س^{٢} - (٢س^{٤} + ٢س)}{(س^{٢} + ٤)^{٢}} = \frac{٣س^{٤} + ١٢س^{٢} - ٢س^{٤} - ٢س}{(س^{٢} + ٤)^{٢}} = \frac{س^{٤} + ١٢س^{٢} - ٢س}{(س^{٢} + ٤)^{٢}}$$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) $\text{ص} = \frac{٣س - ٥}{٨س - ٣}$

٢) ق (س) = $\frac{٢س + ١}{س^{٣} + ١}$ ، عندما س = ١

٣) ق (س) = $\frac{س + ١}{س^{٢}}$

٤) ق (س) = $\frac{١ - ٣س}{٤}$

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

*** قاعدة (٧)** : اذا كانت ص = $\frac{جـ}{م(س)} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-جـ \times م'(س)}{(م(س))^{٢}}$

*** مثال** :

ص = $\frac{٥}{س^{٢}+١} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-٥ \times ٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}} = \frac{-١٠س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = $\frac{٤}{س^{٢}-س-٦}$ =

(عند س = ١)

٢) ص = $\frac{-٣}{٣-٢س^{٧}}$ =

٣) هـ (س) = $\frac{-٢}{١٠س+س^{٢}}$ =

الدرس الرابع : قاعدة السلسة

*** قاعدة (١) :** اذا كان ص = ق (هـ(س)) ، ع = هـ (س) فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

(ع هو وسيط)

*** مثال :** اذا كان ص = ٥ع^{٢} + ٣ ، ع = س^{٣} + ٤ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحل :

$\frac{د ص}{د ع}$ = ١٠ع ، $\frac{د ع}{د س}$ = ٣س^{٢}

$\frac{د ص}{د س}$ = ١٠ع × ٣س^{٢} >>> $\frac{د ص}{د س}$ = ١٠(س^{٣} + ٤) × ٣س^{٢} = ٣٠س^{٥} + ١٢٠س^{٢}

*** سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :**

١) ص = ع^{٣} + ١ ، ع = ٥س - ٢

٢) ص = ع^{٢} + ٣ع ، ع = ٣ - ٢س^{٢} ، **أوجد** $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$

٣) ص = ع^{٢} + ٥ ، ع = ٤س ، عندما س = ١

*** قاعدة (٢)** : اذا كان ص = (هـ(س))^{ن} فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ن(هـ(س))$^{ن-١}$ × هـ`(س)

بمعنى آخر (اشتقاق القوة × اشتقاق الاقتران)

*** أمثلة :**

١) ص = (٢س - ٣)^{٧} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٧(٢س - ٣)^{٦} × (٢)

٢) ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} + ٤}$ = (س^{٢} + ٤)$^{\frac{١}{٣}}$ <<< $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٣}$(س^{٢} + ٤)$^{\frac{-٢}{٣}}$ × ٢س = $\frac{٢س}{٣\sqrt[٣]{(س^{٢} + ٤)^{٢}}}$

٣) ص = $\frac{١}{(س^{٣} - ٤)^{٣}}$ = (س^{٣} − ٤)$^{-٣}$ <<< $\frac{د ص}{د س}$ = −٣(س^{٣} − ٤)$^{-٤}$ × ٣س^{٢} = $\frac{-٩س^{٢}}{(س^{٣} - ٤)^{٤}}$

* **سؤال :** جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) $ص = (س^{٢} + ٤س + ٦)^{٩}$ =

٢) $ص = \frac{٣}{٢}(٣س^{٢} + ٥س)^{-٤}$ =

٣) $ص = \frac{-٢}{(س + ٤)^{٣}}$ =

٤) $ص = \frac{٣}{(س^{٢} + ٣س)^{٤}}$ =

أ. فيصل

٥) ص = $\sqrt[٤]{(س^{٣} + ٦س)}$ =

٦) ص = $\sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٦)^{٢}}$ =

*** قاعدة (٣) :** مشتقة الجذر التربيعي

ق (س) = $\sqrt{ل(س)}$ ← ن´(س) = $\frac{ل´(س)}{٢\sqrt{ل(س)}}$ = $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \text{ X الجذر نفسه}}$

* **مثال :** ق (س) = $\sqrt{س^{٣} + ٥}$ ← ن´(س) = $\frac{٣س^{٢}}{٢\sqrt{س^{٣} + ٥}}$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ص = $\sqrt{س^{٢} + س}$ =

٢) هـ (س) = $\sqrt{٢س^{٣} + ٣س^{٢}}$ =

٣) ق (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٣س}$ ، س = ٢

٤) ص = $\sqrt{ع + ١}$ ، ع = ١ - ٢س

الدرس الخامس :

مشتقات الاقترانات المثلثية

ملاحظة :

* $\frac{١}{\text{جتاس}} =$ **قا س**
* $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} =$ **قا^{٢} س**
* $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} =$ **ظا س**

*** حالة (١) :**

* ق (س) = جا س >>> ق$'$(س) = جتا س
* ق (س) = جتا س >>> ق$'$(س) = - جا س
* ق (س) = ظا س >>> ق$'$(س) = قا^{٢}س

*** مثال :**

ص = ٣ ظاس - ٥ جتاس + جاس >>> $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ قا^{٢}س + ٥ جاس + جتاس

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = ٢س^{٣} - ٢ ظاس + ٤ جاس - جتاس

٢) ص = ٣ جاس + ٢ جتاس - ٥ ظاس

٣) ق (س) = ٥ × $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ + $\frac{٢}{\text{جتاس}}$

٤) ق (س) = ٣س جاس

٥) ق (س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{١+جتاس}}$

٦) ق (س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ + جاس جتاس

٧) ص = جا ع ، ع = س^{٥} أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

٨) ص = ٢س جا س + ٤ جتا س

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

*** حالة (٢) :** مشتقة اقتران مثلثي بداخله اقتران

ص =جاهـ(س) <<< $\frac{د ص}{د س}$ = هـ ´(س)×جتاهـ(س)

ص =جتاهـ(س) <<< $\frac{د ص}{د س}$ = هـ ´(س)× (-جاهـ(س))

ص =ظاهـ(س) <<< $\frac{د ص}{د س}$ = هـ ´(س)×قا^{٢}هـ(س)

---

* **مثال :** ص =جا٣س <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٣×جتا٣س

سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) ص =جا(س ^{٣} +٤س ^{٢}) =

٢) ص =ظا(٢س ^{٢} +٦س) =

٣) ص =-جتا(٤س ^{٢} +٧س) =

٤) ص = س ^{٢} جتا(٣ − س ^{٢}) =

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٥) ص = (جاس - جتاس) $^{-٢}$

٦) ص = (س جاس)^{٣} ظاس

*** حالة (٣) :** مشتقة اقتران مثلثي بداخله اقتران مرفوع لقوة

ص = (جاق(س))^{ن} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ن(جاق(س))$^{ن-١}$ × جتاق(س) × ق´(س)

ص = (جتاق(س))^{ن} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ن(جتاق(س))$^{ن-١}$ × (-جاق(س)) × ق´(س)

ص = (ظاق(س))^{ن} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ن(ظاق(س))$^{ن-١}$ × قا^{٢}ق(س) × ق´(س)

*** أمثلة :**

١) ص = (جا٦س)^{٤} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٤(جا٦س)^{٣} × جتا٦س × ٦

٢) ص = (جتا٢س^{٢})^{٣} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٣(جتا٢س^{٢})^{٢} × (-جا٢س^{٢}) × ٤س

٣) ص = (ظاس^{٤})^{٦} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٦(ظاس^{٤})^{٥} × (قا^{٢}س^{٤}) × ٤س^{٣}

* سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) ص = (جا٩س ^{٢}) ^{٤} =

٢) ص = (جتاس ^{٥}) ^{٢} =

٣) ص = (ظا٥س) ^{٧} =

٤) ص =جتا ^{٣}س =

٥) ص =ظا ^{٢}٣س =

٦) ص = جا ^{٢}س (١ - جتاس) =

الدرس السادس :المشتقات العليا

* **رموز المشتقة الثانية :** $ن''(س)$ ، $ص''$ ، $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$

* **مثال :**

ص = ٩س^{٣} - ٣س^{٢} - ٥ ، جد $ن''(٢)$ ؟

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ٢٧س^{٢} - ٦س \leftarrow \frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = ٥٤س - ٦ \leftarrow \left|\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}\right|_{س=٢} = ٥٤ \times ٢ - ٦ = ١٠٢$$

---

* **سؤال (١) :** جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ لكل مما يلي :

١) ص = ٥س^{٣} - ٤س^{٢} - ٣ ، عندما س = ٢

٢) ص = س جاس + ٢ جتاس

٣) ص = (٢س^{٤} - ٥) (٨ - ٥س)

٤) ص = جا٢س جتاس

٥) ص = $\frac{٥}{س}$ عندما س = -٥

سؤال (٢) : اذا كان ق (س) = $\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س + ٧$ ، **فأوجد أصفار المشتقة الأولى و الثانية ؟**

سؤال (٣) : اذا كان ق (س) = أ^{٢} س^{٣} - ١٢س^{٢} ، **فجد قيمة (قيم) الثابت (أ) التي تجعل** ق ″(١) = ٠

سؤال (٤) : اذا ق (س) = أس^{٢} - ب س^{٣} + ٣ ، وكان ق ′(١) = ٧ ، ق ″(٠) = ١٠
فجد قيم الثابتين (أ) و (ب) ؟؟

سؤال (٥) : اذا ق (س) = ٣أس^{٣} -٢ ب س + ١ ، وكان ق$'$(٠) = ٤ ، ق$''$(١) = ٣٦

فجد قيم الثابتين (أ) و (ب) ؟؟

سؤال (٦) : اذا ق (س) = أس^{٣} - ب س^{٢} - ٣ ، وكان ق$'$(١) = ٢١ ، ق$''$(٢) = ١٠٢

فجد قيم الثابتين (أ) و (ب) ؟؟

سؤال (٧) : اذا كان ق (س) = جتا ٢س ، **فأوجد** ق$''$(س) + ٦ق(س)

سؤال (٨) : اذا كان ق (س) = (٢س - ١)^{٣}، و كان ن ״(س) = ٤ ، **فأوجد قيم (س)** ؟

*** **<u>أسئلة إضافية للوحدة الثانية (مهمة جداً)</u>** :

١) اذا كان (هـ) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عندما س = -٢ ، هـ (-٢) = ١ ، **هـ ׳ (-٢) = ٢**
فأوجد ن ׳ (-٢) في كل مما يأتي :

أ) ق (س) = $\sqrt{\text{س} + ٦} \times$ هـ(س)

ب) ق (س) = هـ(س) $-\frac{\text{هـ(س)}}{\text{س}}$

ج) اذا كان ق (س) = $\frac{أ}{س + ٢}$ ، و كان معدل تغير الاقتران (ق) يساوي (-١) ،

عندما تتغير (س) من (٠) إلى (٣) ، **<u>فجد قيمة اثابت (أ) ؟</u>**

د) اذا كان ق (١) = ٤ ، ن ´(١) = -٢ ، هـ (١) = -٢ ، هـ ´ (١) = ١ ، **<u>فأوجد :</u>**

١) $(ن \times هـ)'(١)$ ٢) $((ن \times هـ)(١))'$ ٣) $(\frac{ن}{هـ})'(١)$

٤) $(\frac{٣}{هـ})'(١)$ ٥) $(ن + هـ)'(١)$ ٦) $(٣ن - ٢هـ)'(١)$

الوحدة الثالثة

(تطبيقات التفاضل)

الدرس الأول : التفسير الهندسي للمشتقة

* التفسير الهندسي للمشتقة : ميل المماس (م) = ق ´(س) (المشتقة الأولى)

* **مثال :** اذا كان ص = ق (س) = س^{٣} - ١٥س - ١٠

أوجد : ١) ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند س = -٣
٢) معادلة المماس لمنحى الاقتران (ق) عند النقطة (-٣ ، ٨)

الحل :

١) ق ´(س) = ٣س^{٢} - ١٥ >>> ق ´(-٣) = ٣(-٣)^{٢} - ١٥ = ٢٧ - ١٥ = ١٢ (م)

٢) معادلة المماس >>> ص -ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

= ص - ٨ = ١٢ (س + ٣) >>> ص - ٨ = ١٢س + ٣٦ >>> ص = ١٢س + ٤٤

*** سؤال (١) : جد معادلة المماس كل من المنحنيات الآتية :**

١) ق (س) = ٢س + ١ ، النقطة (٢ ، ٥)

أ. فيصل السعدون

٢) ق (س) = ٤س$^{-١}$ + ٩س ، س = ٢

٣) ق (س) = (٢س - ٣)(س - ٥) ، س = ١

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٤) ق (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٥}$ ، النقطة (٢ ، ٣)

٥) ق (س) = $\frac{٢س + ٢}{س^{٢} + ١}$ ، س = صفر

٦) ق (س) = $\frac{٤}{س}$ ، س = ٢

٧) ق (س) = (س^{٢} + ١)^{٢} ، س = ١

٨) ق (س) = (٣س^{٢} - ٢)^{٤} ، عند النقطة (-١ ، ق (-١))

* **سؤال (٢) :** اذا كان ق (س) = أس^{٢} + ٢س + ٥ ، وكان ميل المماس عند س = ٢ يساوي (١٨)
أوجد قيمة (أ) ؟؟

* **سؤال (٣) :** اذا كان ق (س) = ك س^{٢} + ٤س - ٣ ، وكان ميل المماس عند س = ٣ يساوي (٢٢)
أوجد قيمة (ك) ؟؟

الدرس الثاني : التفسير الفيزيائي للمشتقة

(ف) : المسافة بالمتر ، (ن) : الزمن بالثانية ، (ع) : السرعة (م / ث) ، (ت) : التسارع (م / ث^{٢})

* المسافة = ف(ن)
* السرعة = ع (ن) = ف ′(ن)
* التسارع = ت (ن) = ع ′(ن) = ف ″ (ن)

*** أمثلة :**

١) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} - ٣ن + ٥ ،
جد سرعة الجسيم بعد مرور (٤) ثواني من بدء الحركة ؟

الحل :

ع (ن) = ف ′(ن) = ٢ن - ٣ >>> ع (٤) = ٢× ٤ - ٣ = ٨ - ٣ = ٥ م / ث

---

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} - ٢ن + ٧ ،
جد تسارع الجسيم بعد مرور (٤) ثواني من بدء الحركة ؟

الحل :

ع (ن) = ف ′(ن) = ٢ن - ٢

ت (ن) = ع ′(ن) = ف ″ (ن) = ٢ >>> ت (٤) = ٢ م / ث^{٢}

*** سؤال (١)**

١) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٣ن^{٢} + ٧ ،
احسب سرعة الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة ؟

أ. فيصل السعدون

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} + $\frac{٥}{٢}$ ن^{٢} − ٧ن − ١ ، جد تسارع الجسيم عندما (ن) = ٢ ثانية ؟

٣) يتحرك جسيم وفق العلاقة ف (ن) = ن^{٢} - ٦ن + ٥ ، احسب تسارع الجسيم عندما تكون سرعته (٤٢) م / ث ؟

٤) اذا مثّل الاقتران ف (ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة ،
و كان ف (ن) = ن^{٣} - ن^{٢} + ٥ ، فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه يساوي (٤) م / ث^{٢} ؟

٥) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ن^{٣} - ٦ن - ٧، احسب تسارع الجسيم عنما تكون سرعته (١٨) م/ث ؟

٦) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٣} - ١٢ن + ٣ ، احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم التسارع ؟

٧) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٣} - ٣ن + ٦ ، احسب تسارع الجسيم عندما تنعدم السرعة ؟

*** سؤال (٢) :** تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة : ف (ن) = ٢ن^{٢} ، إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، أ] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور (٣) ثواني ، **فأوجد قيمة (أ)** ؟؟

*** سؤال (٣) :** تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة : ف (ن) = ن^{٢} + ٤ ، **متى** تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن (٤) ثواني ؟؟

الدرس الثالث : التزايد و التناقص للاقتران

*** نظرية :** اذا كان الاقتران (ق) متصلاً على الفترة [أ ، ب] ،
و قابلاً للاشتقاق في الفترة المفتوحة (أ ، ب) فإن :

١) ق (س) متزايد على الفترة [أ ، ب] اذا كان ق´(س) > صفر ، لجميع قيم (س) ∈ (أ ، ب)

٢) ق (س) متناقص على الفترة [أ ، ب] اذا كان ق´(س) < صفر ، لجميع قيم (س) ∈ (أ ، ب)

٣) ق (س) ثابت في الفترة [أ ، ب] اذا كان ق´(س) = صفر ، لجميع قيم (س) ∈ (أ ، ب)

*** الخطوات الإجرائية لإيجاد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) باستخدام اختبار المشتقة الأولى :**

١) إيجاد المشتقة الأولى ق´(س) للاقتران (ق)

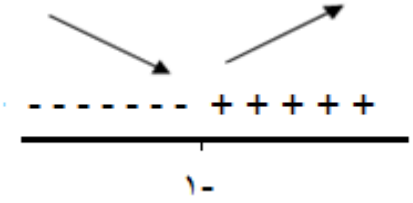
٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع (ق´(س) = صفر) و تسمى القيم الحرجة

٣) نضع قيم (س) على خط الأعداد (الموجب = تزايد ، السالب = تناقص)

*** أمثلة :**

١) جد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) = $س^{٢}$ + ٢س + ١ ؟

الحل : ق´(س) = ٢س + ٢ >>> ٢س + ٢ = ٠ >>> ٢س = -٢ >>> س = -١



* ق (س) متناقص في الفترة (-∞ ، -١]

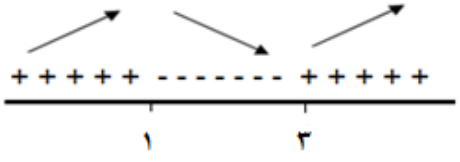
* ق (س) متزايد في الفترة [-١ ، ∞)

---

٢) جد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) = $س^{٣}$ - ٦$س^{٢}$ + ٩س - ٦ ؟

الحل : ق (س) = ٣$س^{٢}$ - ٦س + ٩ >>> $س^{٢}$ - ٢س + ٣ = ٠

(س - ١)(س - ٣) >>> س = ١ ، س = ٣



* ق (س) متناقص في الفترة [١ ، ٣]

* ق (س) متزايد في الفترتين [- ∞ ، ١] ، [٣ ، ∞)

*** سؤال (١) : جد فترات التزايد و التناقص لكل مما يلي :**

١) ق (س) = س^{٢} - ٦س + ٨

٢) ق (س) = ٢س - س^{٢} + ٤

٣) ق (س) = س^{٣} - ٣س + ١

٤) ق (س) = - س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٥س - ٦

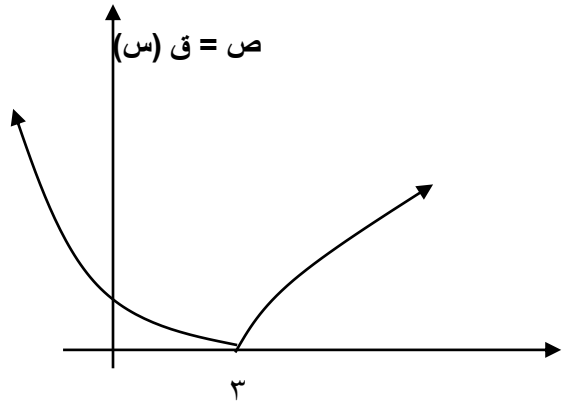
٥) ق (س) = (س+١)(س+٢)

٦) ق (س) = (٢س - ٤)^{٢}

٧) ق (س) = ١ - ٢س

*** سؤال (٢) :** بيّن أن الاقتران ق (س) = س^{٣} + ٢س + ٥ يكون متزايد لقيم (س) جميعها ؟؟

* **سؤال (٣) : اوجد فترات التزايد و التناقص للاقتران (ق) :**

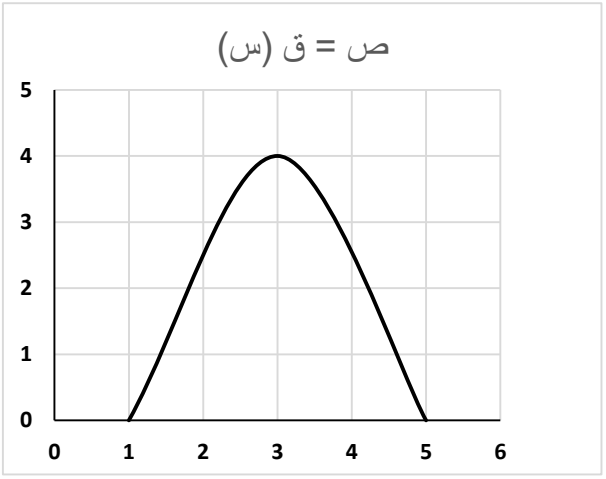


---

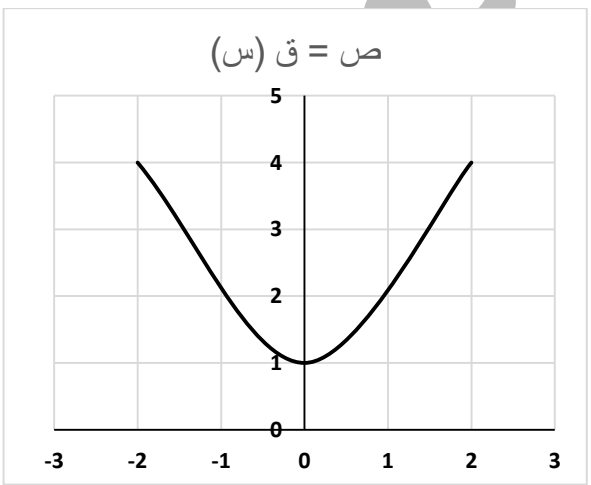
* **سؤال (٤) :** اذا كان ق ` (س) = هـ ` (س) ، **فأثبت** أن ق (س) = هـ (س) + جـ ، جـ : عدد ثابت .

الدرس الرابع : القيم القصوى للاقتران

الشكل (١)



الشكل (٢)



* الشكل (١) يوجد نقطة عظمى عند النقطة (٣ ، ٤) (قمة)

* الشكل (٢) يوجد نقطة صغرى عند النقطة (٠ ، ١) (قاع)

*** اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى :**

- الخطوات الإجرائية للإيجاد القيم الصغرى و العظمى للاقتران ص = ق (س) (المشتقة الأولى)

١) إيجاد المشتقة الأولى ق ´(س) للاقتران (ق)

٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع (ق ´(س) = صفر) و تسمى القيم الحرجة

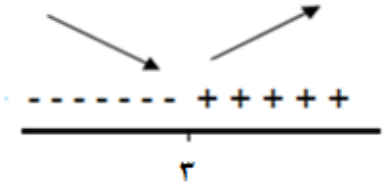
٣) نضع قيم (س) على خط الأعداد (الموجب = تزايد ، السالب = تناقص)

٤) اذا تحول الاقتران من متزايد الى متناقص (يكون قيمة عظمى)
و اذا من متناقص الى متزايد (يكون قيمة صغرى)

*** أمثلة :**

١) جد النقط الحرجة و القيم الصغرى و العظمى (ان وجدت) للاقتران : ق (س) = س^{٢} - ٦س

الحل :



* ق ´(س) = ٢س - ٦ = ٠

٢س = ٦ >>> س = ٣

* نقطة حرجة عند س = ٣

* قيمة صغرى عند س = ٣

و قيمتها : ق (٣) = (٣)^{٢} - ٦ × ٣ = ٩ - ١٨ = -٩

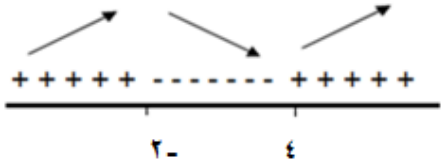
* النقطة (٣ ، -٩)

٢) جد النقط الحرجة و القيم الصغرى و العظمى (ان وجدت)

للاقتران : م (س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٢٤س + ١٢

الحل :

* م$'$(س) = ٣س^{٢} - ٦س - ٢٤



س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠

(س + ٢) (س - ٤) = ٠

س = -٢ ، س = ٤

* نقط حرجة عند س = -٢ ، س = ٤ ، * قيمة عظمى عند س = -٢

و قيمتها : م (-٢) = (-٢)^{٣} - ٣(-٢)^{٢} - ٢٤(-٢) + ١٢ = ٤٠

النقطة (-٢ ، ٤٠)

* قيمة صغرى عند س = ٤

و قيمتها : م (٤) = (٤)^{٣} - ٣(٤)^{٢} - ٢٤(٤) + ١٢ = -٦٨ ، النقطة (٤ ، -٦٨)

*** سؤال : جد النقط الحرجة و فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = س^{٢} - ٨س + ٥

أ. فيصل

٢) ق (س) = س^{٣} - ٣س + ٤

٣) ق (س) = ٢س^{٢} + ٥س - ٤

٤) هـ(س) = ١٦س − $\frac{س^{٣}}{٣}$

٥) ق (س) = ٢س (١٢ - س^{٢})

٦) ل (س) = س^{٣} + ١

٧) ق (س) = ١٠ - ٣س

*** سؤال (٢) :** اذا كان للاقتران ق (س) = ٣س^{٢} - أس + ٤ قيمة حرجة عند س = ٢ ، **أوجد قيمة (أ) ؟؟**

*** اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى :**

- الخطوات الإجرائية للإيجاد القيم الصغرى و العظمى للاقتران ص = ق (س) (المشتقة الثانية)

١) إيجاد المشتقة الأولى ق´(س) للاقتران (ق)

٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع (ق´(س) = صفر) و تسمى القيم الحرجة و نفترضها (جـ)

٣) إيجاد المشتقة الثانية ق´´(س) و عندئذ :

- اذا كانت ق´´(جـ) > صفر (موجبة) ، فإن ق (جـ) هي قيمة صغرى للاقتران ق .

- اذا كانت ق´´(جـ) < صفر (سالبة)، فإن ق (جـ) هي قيمة عظمى للاقتران ق .

- اذا كانت ق´´(جـ) = صفر ، يفشل الاختبار و نستخدم اختبار المشتقة الأولى .

*** أمثلة :**

١) باستخدام اختبار المشتقة الثانية ، جد القيم العظمى و الصغرى (ان وجدت)

للاقتران : ق (س) = ٤س^{٢} - ٣

الحل :

* ق´(س) = ٨س >>> ٨س = ٠ >>> س = ٠

* نقطة حرجة عند س = ٠

* ق´´(س) = ٨ >>> ق´´(٠) = ٨ موجب (قيمة صغرى عند س = ٠)

النقطة (٠ ، ق (٠)) = (٠ ، -٣)

---

٢) جد القيم العظمى و الصغرى (ان وجدت) للاقتران :

ل (س) = ٤ - س^{٢} ، باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

الحل :

* ل´(س) = - ٢س >>> - ٢س = ٠ >>> س = ٠

* نقطة حرجة عند س = ٠

* ل´´(س) = -٢ >>> ل´´(٠) = -٢ سالب (قيمة عظمى عند س = ٠)

النقطة (٠ ، ل (٠)) = (٠ ، ٢)

أ. فيصل السعدون

*** سؤال : جد القيم العظمى و الصغرى (ان وجدت) لكل مما يلي ، باستخدام اختبار المشتقة الثانية ؟**

١) ق (س) = س^{٢} + ٢

٢) ق (س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ٥

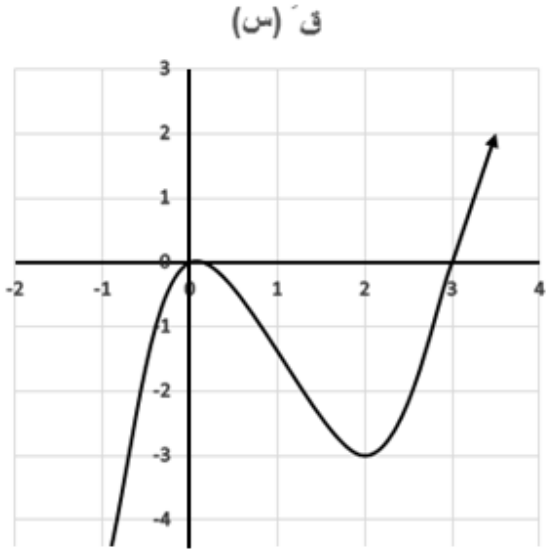
٣) ق (س) = ٣س^{٢} - ٤س^{٣}

٤) ق (س) = (س - ١)^{٤}

إيجاد القيم القصوى بالرسم البياني

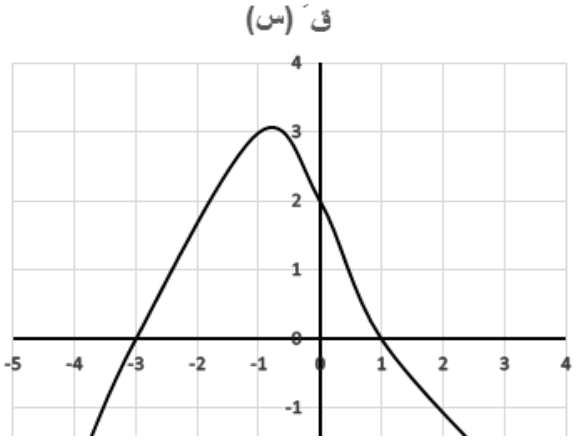
*** رسمة ق (س)**

*** سؤال (١) : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟**

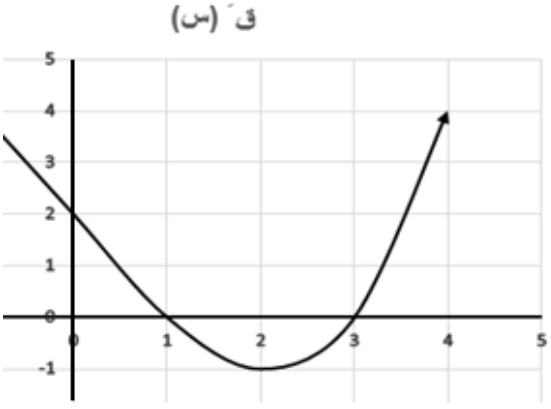


*** رسمة ق َ (س) :**

*** سؤال (٢) : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟**

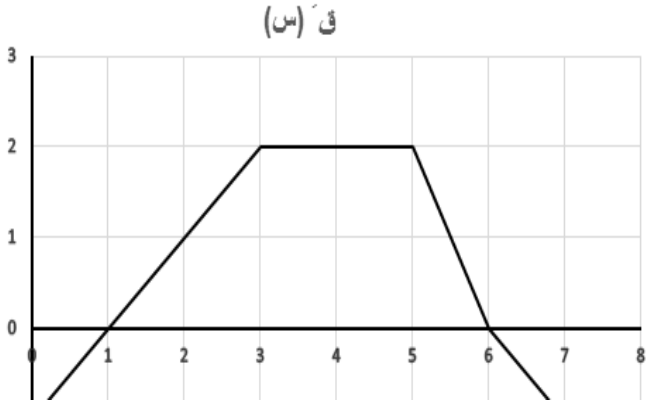


*** سؤال (٣) : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟**



أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

*** سؤال (٤) : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟**



الدرس الخامس : تطبيقات على القيم القصوى

*** مثال** : ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (٥٠) و حاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟

الحل :

س + ص = ٥٠ >>> ص = ٥٠ - س

ح (س) = س × ص >>> س × (٥٠ - س) >>> ٥٠س - س^{٢}

ح$'$(س) = ٥٠ - ٢س >>> ٥٠ - ٢س = ٠

٢س = ٥٠ >>> س = ٢٥

ح$''$(س) = -٢ >>> ح$''$(٢٥) = -٢ (سالب)

(قيمة عظمى عند س = ٢٥)

ص = ٥٠ - ٢٥ = ٢٥

اذن يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن عندما يكون العدد الأول = ٢٥ و العدد الثاني = ٢٥

(ملاحظة : يمكن استخدام اختبار المشتقة الأولى
بدلا من المشتقة الثانية في تحديد القيمة العظمى و الصغرى)

*** أسئلة :**

١) ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (١٢) و **حاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟**

٢) ما العددان اللذان حاصل ضربهما (٣٦) **و حاصل جمعهما أقل ما يمكن ؟**

٣) ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما (٦٠) و **حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن** ؟

٤) ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (٢٠) و **مجموع مربعيهما أقل ما يمكن** ؟

* **مثال** : قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها (٦٠٠ م) ، **ما بعدا قطعة الأرض اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن ؟**

الحل :

نفرض الطول = س ، و العرض = ص

المحيط = ٢ (س + ص) >>> ٢س + ٢ص = ٦٠٠ >>> ص = ٣٠٠ - س

مساحة المستطيل = س × ص >>> م (س) = س (٣٠٠ - س)

م (س) = ٣٠٠س - س^{٢}

م$'$(س) = ٣٠٠ - ٢س >>> ٣٠٠ - ٢س = ٠ >>> ٢س = ٣٠٠ >>> س = ١٥٠

م$''$(س) = -٢ >>> م$''$(١٥٠) = -٢ (سالب)

(قيمة عظمى عند س = ١٥٠)

ص = ٣٠٠ - ١٥٠ = ١٥٠

اذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل عندما يكون طوله = ١٥٠ ، و عرضه = ١٥٠ (مربع الشكل)

(ملاحظة : يمكن استخدام اختبار المشتقة الأولى (خط الأعداد) بدلا من المشتقة الثانية في تحديد القيمة العظمى و الصغرى)

*** أسئلة :**

١) مستطيل مساحته (١٠٠ سم^{٢}) **أوجد أبعاده ليكون المحيط أكبر ما يمكن ؟**

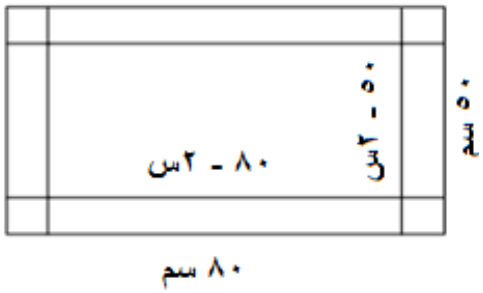
٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (٨٠٠ م^{٢}) ، تقع على ضفة نهر مستقيم , فإذا أراد مالكها تسييجها ، و لم يسيّج الواجهة الواقعة على ضفة النهر ، **فأثبت أن طول السياج يكون أصغر ما يمكن إذا كان طول القطعة مساويا مثلي عرضها ؟**

٣) يملك مزارع قطعة أرض تقع على ضفة نهر مستقيم , فإذا اشترى المزارع (٣٠٠) متر من الأسلاك الشائكة ، **فما أبعاد أكبر جزء مستطيل من قطعة الأرض يمكن تسييجه من دون تسييج البعد الواقع على ضفة النهر ؟**

٤) اذا كان مجموع طول ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي (٤٠ سم)،**فجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث؟**

* **مثال** : يراد عمل صندوق مفتوح من الجهة العليا من قطعة ورق مقوى مستطيلة الشكل أبعادها (٨٠ سم ، ٥٠ سم) و ذلك بقطع مربعات متساوية عند رؤوسها ثم ثني الأجزاء البارزة الى أعلى ،
ما حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة ؟

الحل :



نفرض طول ضلع المربع المراد قطعه (س) ، فيكون :

* طول قاعدة الصندوق = (٨٠ - ٢س)
* و عرض قاعدة الصندوق = (٥٠ - ٢س)
* و ارتفاع الصندوق = س
* بما أن شكل الصندوق متوازي مستطيلات ، اذن الحجم = الطول × العرض × الارتفاع
* ح (س) = (٨٠ - ٢س) (٥٠ - ٢س) (س)

= س (٤س^{٢} - ٢٦٠س + ٤٠٠٠) >>> ٤س^{٣} - ٢٦٠ س^{٢} + ٤٠٠٠س

* ح ′(س) = ١٢س^{٢} - ٥٢٠س + ٤٠٠٠ >>> ح ′(س) = ٣س^{٢} - ١٣٠س + ١٠٠٠ = ٠

(٣س - ١٠٠) (س - ١٠) = ٠ >>> س = $\frac{١٠٠}{٣}$ (تُهمل) ، س = ١٠

* ح ″(س) = ٢٤س - ٥٢٠ >>> ح ″(١٠) = ٢٤٠ - ٥٢٠ = - ٢٨٠ (سالب)
* (قيمة عظمى عند س = ١٠)

* طول قاعدة الصندوق = ٨٠ - ٢(١٠) = ٦٠ سم ، * عرض قاعدة الصندوق = ٥٠ - ٢(١٠) = ٣٠ سم

اذن أكبر حجم متوازي مستطيلات = ١٠ × ٦٠ × ٣٠ = ١٨٠٠٠ سم^{٣}

(ملاحظة : يمكن استخدام اختبار المشتقة الأولى
بدلا من المشتقة الثانية في تحديد القيمة العظمى و الصغرى)

فيصل السعدون

أسئلة :

١) صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها (١٢ سم) ، اذا رفعت من زواياها الأربع أربعة مربعات متساوية ، طول ضلع كل منها (س) ، ثم ثنيت الجوانب بحيث أصبحت الصفيحة على شكل علبة مفتوحة من أعلى ،

فجد قيمة (س) ليكون حجم العلبة أكبر ما يمكن ؟

٢) يراد عمل صندوق مفتوح من الجهة العليا من لوح مربع من الصفيح طول ضلعه (١٢٠ سم) ، وذلك بقطع مربعات ، متساوية من أركانه الأربعة و ثني الأجزاء البارزة الى أعلى ،
ما أكبر حجم ممكن للصندوق ؟

٣) صندوق قاعدته مربعة الشكل ، حجمه (٦٤ سم^{٣}) ، **جد أكبر مساحة لأوجه الصندوق ؟**

٤) صندوق قاعدته مربعة الشكل ، حجمه (١٠٨ سم^{٣}) ، **جد أكبر مساحة لأوجه الصندوق <u>دون غطاء</u> ؟**

٥) صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، قاعدته مربعة الشكل ، و مجموع أبعاده الثلاثة (١٢٠) سم
جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن ؟

٦) صحيفة من الورق مستطيلة الشكل ، مساحتها (٣٢ سم^{٢}) ، يراد طباعة إعلان عليها ،
إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة و أسفلها (١ سم) ، و في كل من الجانبين (٠,٥ سم) ،
فجد بعدي الورقة حتى تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن ؟

٧) يراد تصميم بركة قاعدتها مستطيلة الشكل ، و مساحتها (٣٦) م^{٢} ، تم إحاطتها بممر خارجي منتظم عرضه (متران) ، **جد أبعاد البركة المراد تصميمها بحيث تكون المساحة الكلية للبركة و الممر أقل ما يمكن ؟**

٨) أراد إبراهيم أن يفتح نافذة مستطيلة في جدار إحدى غرف منزله ، بحيث يكون محيط النافذة (٦) م ، **جد بُعدي النافذة اللذين يسمحان لأكبر كمية ممكنة من الضوء بدخول الغرفة ؟**

الدرس السادس :

تطبيقات اقتصادية على التفاضل

* **التعريف** : اذا كانت (س) هي عدد الوحدات المنتجة من سلعة معينة في فترة محددة في مصنع ما ، فإن :

١) ك (س) = التكلفة الكلية

ك ′(س) = التكلفة الحدية (معدل التغير في التكلفة بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)

٢) د (س) = الايراد الكلي = التكلفة الكلية + الربح = ك (س) + ر (س)

د ′(س) = الايراد الحدي (معدل التغير في الايراد بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)

٣) ر (س) = الربح = الايراد الكلي - التكلفة الكلية = د (س) - ك (س)

ر ′(س) = الربح الحدي = د ′(س) - ك ′(س) (معدل التغير في الربح بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)

---

* **مثال** : اذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) لعبة هو ك (س) = ٢٠٠ - ٠,٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢} ،

و أن اقتران الربح الناتج من بيع (س) لعبة هو ر (س) = ٠,٢٠ س ،

جد : ١) التكلفة الحدية ٢) الايراد الحدي ٣) الربح الحدي

الحل :

١) التكلفة الحدية = ك ′(س) = -٠,٥ + ٠,٠٠٠٢ س

٢) الايراد الكلي = د (س) = ك (س) + ر (س)

د (س) = ٢٠٠ - ٠,٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢} + ٠,٢٠ س

د (س) = ٢٠٠ + ٠,١٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢}

د ′(س) = ٠,١٥ + ٠,٠٠٠٢ س

٣) الربح الحدي = ر ′(س) = ٠,٢٠

أ. فيصل السعدون

* **أسئلة** :

١) اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو د (س) = ٦٠س - س^{٢} ، و اقتران التكلفة الكلية هو ك (س) = ٢٠ + ٨س ، حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، **فجد الربح الحدي ؟**

٢) اذا كان اقتران التكلفة الكلية هو ك (س) = ١٠س ، و اقتران الايراد الكلي هو د (س) = ٥٠س - س^{٢} عن بيع (س) وحدة من منتج ما ، **جد : ١) التكلفة الحدية ٢) الايراد الحدي ٣) الربح الكلي ٤) الربح الحدي ؟**

٤) يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (١٠٠) دينار ، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعيا تُعطى بالعلاقة : ك (س) = ٠,٣ س^{٢} + ٦٠س + ٧٠ ، **جد الربح الحدّي ؟**

٥) اذا كان سعر الوحدة الواحدة ع (س) = ٥س^{٣} + س^{٢} ، و تكلفة القطعة الواحدة = ٤س + ٣ ،

جد الربح الحدي عند س = ١ ؟

<u>* إيجاد أكبر ايراد ، أكبر ربح ، أقل كلفة</u>

* **مثال** : وجد مصنع أثاث أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرف نوم عددها (س) تقدر بالاقتران :

ك (س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٨٠س + ٥٠٠ ، فإذا بيعت كل غرفة نوم ب (٢٨٠٠ دينار) ،

فما الإنتاج الأسبوعي للشركة الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

الحل :

الايراد الكلي = عدد القطع × سعر القطعة الواحدة >>> د (س) = ٢٨٠٠ × س = ٢٨٠٠س

الربح الكلي = ر (س) = د (س) - ك (س) = ٢٨٠٠س - س^{٣} + ٣س^{٢} + ٨٠س - ٥٠٠

ر (س) = - س^{٣} + ٣س^{٢} +٢٨٨٠س - ٥٠٠

الربح الحدي = ر ′(س) = -٣س^{٢} + ٦س + ٢٨٨٠ >>> س^{٢} - ٢س - ٩٦٠

(س - ٣٢) (س + ٣٠) = ٠ >>> <u>س = ٣٢</u> ، س = -٣٠ (تُهمل)

ر ″(س) = -٦س + ٦ >>> ر ″(٣٢) = -٦(٣٢) + ٦ = -١٨٦ (سالب) (قيمة عظمى)

* اذن أكبر ربح ممكن عندما ينتج المصنع (٣٢) غرفة نوم في الأسبوع .

(ملاحظة : يمكن استخدام خط الأعداد بدلا من المشتقة الثانية في تحديد القيمة العظمى و الصغرى)

*** أسئلة :**

١) اذا كانت تكلفة قطعة واحدة هي س - ٤ ، **جد عدد القطع حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن ؟**

٢) اذا كان اقتران التكلفة الكلية هو ك (س) = ٦٠٠٠ + ٥٠س + ٠,٠٠٢٥ س^{٢} ، ويتم بيع الوحدة الواحدة بسعر (٧٠) دينار ، **فما عدد الوحدات التي يجب انتاجها لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟**

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) اذا كان د (س) = ٥٠س - س^{٢} هو اقتران الايراد الكلي الناتج عن بيع (س) وحدة من منتج ما ،

و ك (س) = ١٠س هو اقتران التكلفة الكلية ، **جد قيمة (س) التي تجعل الربح أكبر ما يمكن ؟**

٤) اذا كان ر (س) = ٣س + س^{٢} هو اقتران الربح الكلي الناتج عن بيع (س) وحدة من منتج ما ،

و ك (س) = $١ - \frac{س^{٣}}{٣}$ هو اقتران التكلفة الكلية ، **جد قيمة (س) التي تجعل الايراد أكبر ما يمكن ؟**

٥) ينتج مصنع (س) من الوحدات في الأسبوع من بضاعة معينة ، و يبيع الوحدة بمقدار (ص) ديناراً ،
إذا كانت كلفة الإنتاج لهذه الوحدات هي : ٠,٢ س^{٢} + ١٥س + ٥٠٠ دينار ،
و كانت العلاقة بين س ، ص هي : ٥س = ٣٨١ - ٣ص ،
فبرهن أن أكبر ربح يحصل عليه هذا المصنع هو عندما يكون الإنتاج الأسبوعي (٣٠) وحدة ؟

٦) اذا كان ك (س) = ٣٦٠٠٠ + ٤س + س^{٢} هو اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) ثلاجة ،
و يتم بيع الثلاجة الواحدة بسعر (٥٠٠ دينار) ، **جد : ١) الايراد الكلي**
٢) عدد الثلاجات التي يجب أن يتم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن .

*** **<u>أسئلة إضافية للوحدة الثالثة (مهمة جداً)</u>** :

١) اذا مثّل الاقتران ف (ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة ،
و كان ف (ن) = م (ن - ١)^{٢} ، اذا كانت سرعة هذا الجسيم بعد (٤) ثواني تساوي (١٢) م / ث ؟
فجد قيمة الثابت (م) ؟؟

٢) قطعة أرض يراد تسييج جزء مستطيل منها بحيث تبلغ مساحته ٣٧٥٠ م^{٢} ، إذا كانت تكلفة المتر الطولي الواحد من جانبين متوازيين ثلاثة دنانير ، و من الجانبيين الآخرين دينارين ،
فجد أبعاد قطعة الأرض التي يمكن تسييجها لتحقيق أقل كلفة ممكنة ؟

<u>تم بحمد الله و بالتوفيق يا مبدعين ☺</u>