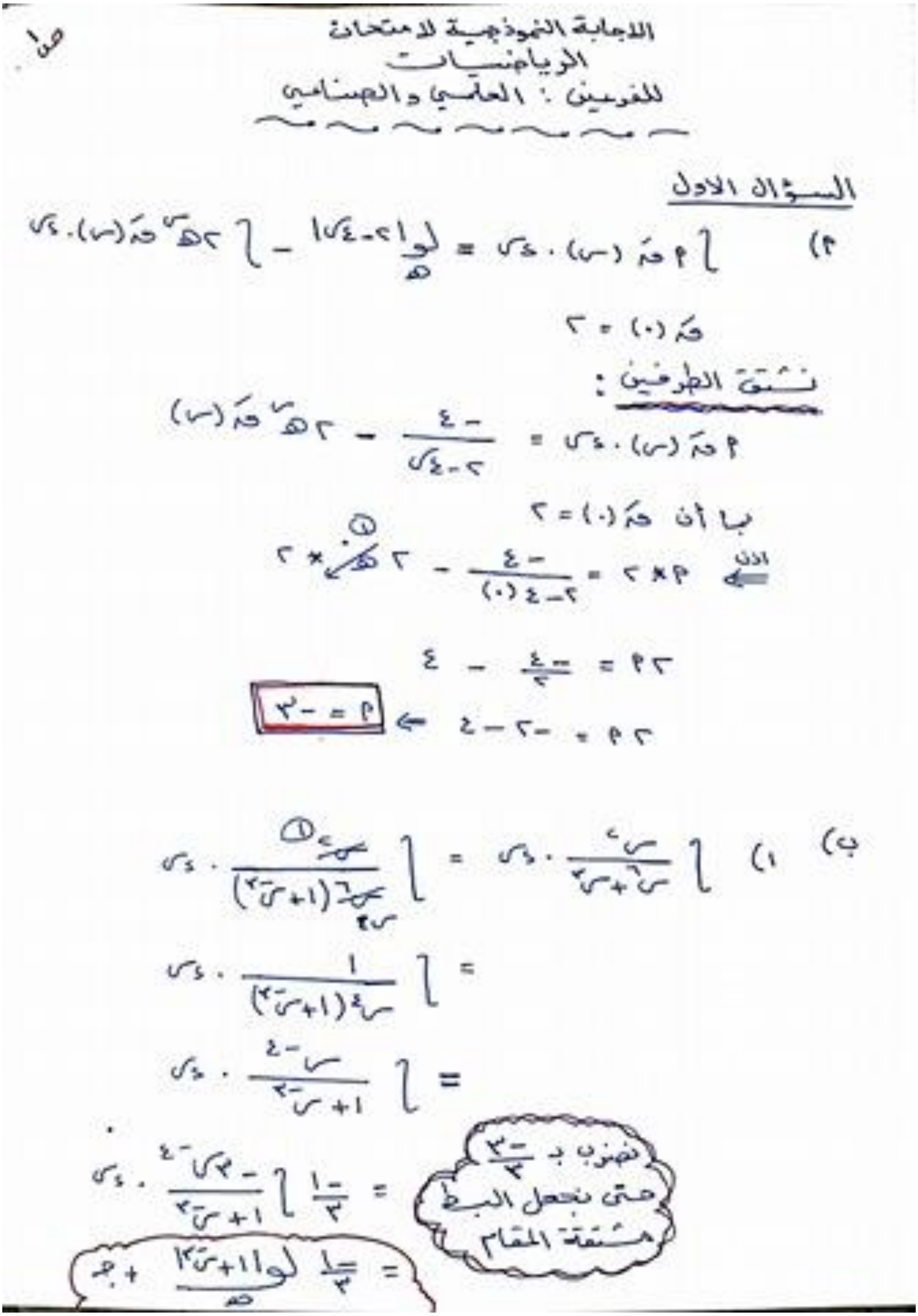


ص١

الاجابة النموذجية لامتحان
الرياضيات
للفرعين : العلمي والصناعي

السؤال الاول

أ) $\int أ\,قَ(س)\,.\,ءس = لو_{هـ}|٢-٤س| - \int ٢هـ^{س}\,قَ(س)\,.\,ءس$

$قَ(٠) = ٣$

نشتق الطرفين :

$أ\,قَ(س) = \frac{-٤}{٢-٤س} - ٢هـ^{س}\,قَ(س)$

بما أن $قَ(٠) = ٣$

اذن $\Leftarrow$ $أ \times ٣ = \frac{-٤}{٢-٤(٠)} - ٢\,\overset{①}{\cancel{هـ^{٠}}} \times ٣$

$٣أ = \frac{-٤}{٢} - ٤$

$٣أ = -٢ - ٤ \Leftarrow \boxed{أ = -٢}$

ب) ١) $\int \frac{س^{٢}}{س^{٦}+س^{٣}}\,.\,ءس = \int \frac{\overset{①}{\cancel{س^{٢}}}}{\underset{س^{٤}}{\cancel{س^{٦}}}(١+س^{-٣})}\,.\,ءس$

$= \int \frac{١}{س^{٤}(١+س^{-٣})}\,.\,ءس$

$= \int \frac{س^{-٤}}{١+س^{-٣}}\,.\,ءس$

$= \frac{-١}{٣} \int \frac{-٣س^{-٤}}{١+س^{-٣}}\,.\,ءس$

نضرب بـ $\frac{-٣}{-٣}$ حتى نجعل البسط مشتقة المقام

$= \frac{-١}{٣}\,لو_{هـ}|١+س^{-٣}| + جـ$

صح

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{(س^{٢} - ٦س + ٩)^{\frac{٧}{٢}}}{س^{٩}} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٣} \frac{((س-٣)(س-٣))^{\frac{٧}{٢}}}{س^{٩}} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٣} \frac{((س-٣)^{٢})^{\frac{٧}{٢}}}{س^{٩}} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٣} \frac{(س-٣)^{٧}}{س^{٩}} \cdot دس = \int_{١}^{٣} \frac{(س-٣)^{٧}}{س^{٧} \times س^{٢}} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٣} \left(\frac{س-٣}{س}\right)^{٧} \times س^{-٢} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٣} \left(\frac{س}{س} - \frac{٣}{س}\right)^{٧} \times س^{-٢} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٣} \underbrace{\left(١ - \frac{٣}{س}\right)^{٧}} \cdot س^{-٢} \cdot دس$

نفرض: $ص = ١ - \frac{٣}{س}$ $\Longleftarrow$ عندما $س = ١ \Leftarrow ص = -٢$

عندما $س = ٣ \Leftarrow ص = ٠$

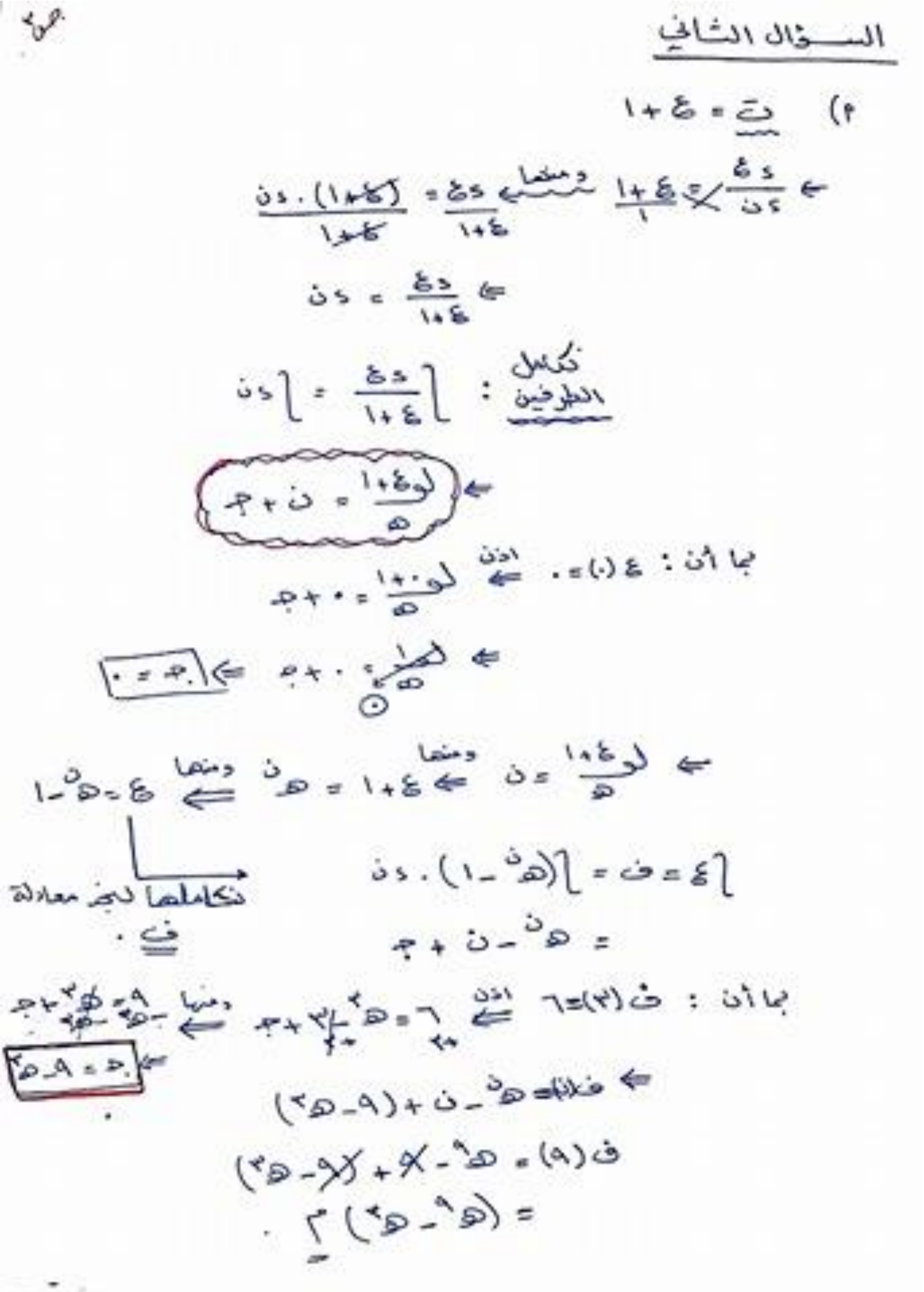
$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س^{-٢}}{١} \Leftarrow \boxed{دس = \frac{دص}{٣س^{-٢}}}$

$\Leftarrow \int_{-٢}^{٠} ص^{٧} \times \cancel{س^{-٢}} \times \frac{دص}{\cancel{٣س^{-٢}}}$

$= \int_{-٢}^{٠} \frac{١}{٣} ص^{٧} \cdot دص$

$= \frac{١}{٣} \frac{ص^{٨}}{٨} \Big|_{-٢}^{٠} = \left(٠ - \frac{١}{٣} \times \frac{(-٢)^{٨}}{٨}\right)$

$= \frac{-٢٥٦}{٢٤} = \boxed{\frac{-٣٢}{٣}}$



ج٢

السؤال الثاني

٢) $\underline{\text{ع}'} = \text{ع} + ١$

⇐ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{ع} + ١}{١}$ ومنها $\frac{\text{دع}}{\text{ع}+١} = \frac{\cancel{(\text{ع}+١)} . \text{دن}}{\cancel{\text{ع}+١}}$

⇐ $\frac{\text{دع}}{\text{ع}+١} = \text{دن}$

بتكامل الطرفين : $\int \frac{\text{دع}}{\text{ع}+١} = \int \text{دن}$

⇐ $\boxed{\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{ع}+١ = \text{ن} + \text{جـ}}$

بما أن : ع(٠) = ٠ $\xRightarrow{\text{اذن}}$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, ٠+١ = ٠ + \text{جـ}$

⇐ $\underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\, ١}_{٠} = ٠ + \text{جـ}$ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٠}$

⇐ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{ع}+١ = \text{ن}$ ومنها ⇐ $\text{ع} + ١ = \text{هـ}^{\text{ن}}$ ومنها ⇐ $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ن}} - ١$

نكاملها لنجد معادلة $\underline{\text{ف}}$.

$\int \text{ع} = \text{ف} = \int (\text{هـ}^{\text{ن}} - ١) . \text{دن}$

$= \text{هـ}^{\text{ن}} - \text{ن} + \text{جـ}$

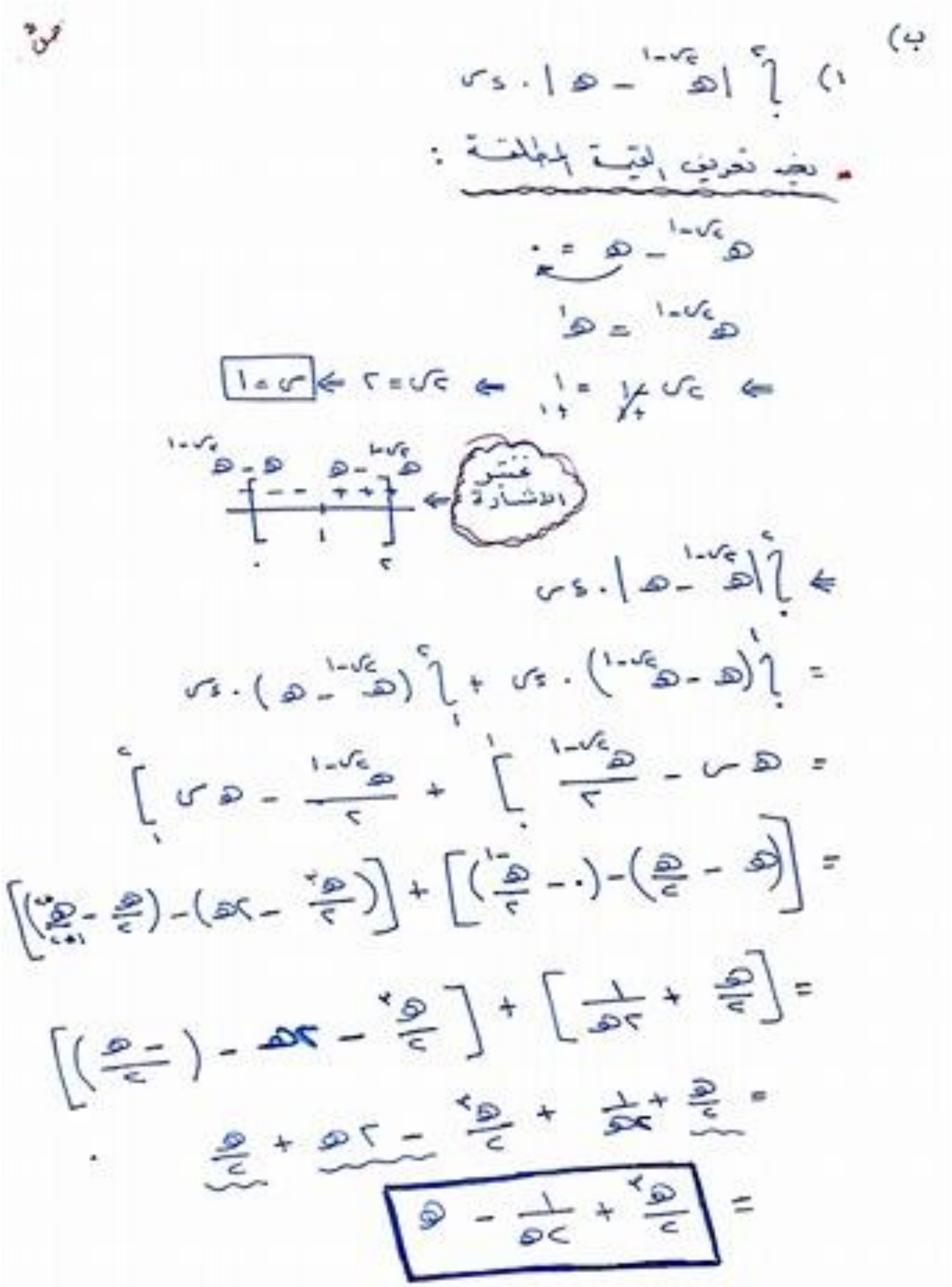
بما أن : ف(٢) = ٦ $\xRightarrow{\text{اذن}}$ $\underset{+٢}{٦} = \text{هـ}^{٢} \underset{+٢}{\cancel{-٢}} + \text{جـ}$ ومنها $\underset{-\text{هـ}^٢}{٩} = \underset{-\text{هـ}^٢}{\text{هـ}^{٢}} + \text{جـ}$

⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٩ - \text{هـ}^{٢}}$

⇐ فإذاً $= \text{هـ}^{\text{ن}} - \text{ن} + (٩ - \text{هـ}^{٢})$

$\text{ف}(٩) = \text{هـ}^{٩} - \cancel{٩} + (\cancel{٩} - \text{هـ}^{٢})$

$= (\text{هـ}^{٩} - \text{هـ}^{٢})$ م .



حل

ب)

١) $\int_{٠}^{٢} |هـ^{٢س-١} - هـ| \, ءس$

- نجد تعريف القيمة المطلقة :

$هـ^{٢س-١} - هـ = ٠$

$هـ^{٢س-١} = هـ^{١}$

$\Leftarrow ٢س - ١ = ١ \Leftarrow ٢س = ٢ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

$\Leftarrow \int_{٠}^{٢} |هـ^{٢س-١} - هـ| \, ءس$

$= \int_{٠}^{١} (هـ - هـ^{٢س-١}) \, ءس + \int_{١}^{٢} (هـ^{٢س-١} - هـ) \, ءس$

$= \left[هـ س - \frac{هـ^{٢س-١}}{٢} \right]_{٠}^{١} + \left[\frac{هـ^{٢س-١}}{٢} - هـ س \right]_{١}^{٢}$

$= \left[(هـ - \frac{هـ}{٢}) - (٠ - \frac{هـ^{-١}}{٢}) \right] + \left[(\frac{هـ^{٣}}{٢} - ٢هـ) - (\frac{هـ}{٢} - هـ) \right]$

$= \left[\frac{هـ}{٢} + \frac{١}{٢هـ} \right] + \left[\frac{هـ^{٣}}{٢} - ٢هـ - (\frac{-هـ}{٢}) \right]$

$= \frac{هـ}{٢} + \frac{١}{٢هـ} + \frac{هـ^{٣}}{٢} - ٢هـ + \frac{هـ}{٢}$

$= \boxed{\frac{هـ^{٣}}{٢} + \frac{١}{٢هـ} - هـ}$

حل

٢) $\int_{٢}^{٦} \left[\frac{١}{٣}\text{س}\right] - ٢ \,.\, \text{ءس}$

- نعيد تعريف أكبر عدد صحيح :

$\left[\frac{١}{٣}\text{س}\right]$

$= \int_{٢}^{٣} ٠ - ٢ \,.\, \text{ءس} + \int_{٣}^{٦} ١ - ٢ \,.\, \text{ءس}$

$= \int_{٢}^{٣} -٢ \,.\, \text{ءس} + \int_{٣}^{٦} -١ \,.\, \text{ءس}$

$= -٢\text{س}\Big|_{٢}^{٣} + -١\text{س}\Big|_{٣}^{٦}$

$= \left(-٢(٣) - -٢(٢)\right) + \left(-١(٦) - -١(٣)\right)$

$= (-٦ + ٤) + (-٦ + ٣)$

$= -٢ + -٣$

$= \boxed{-٥}$

السؤال الثالث

٩) $\int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(\text{س}+٢)^{٢}} \,.\, \text{ءس} = ٩$ جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}+١} \,.\, \text{ءس}$

تعويض : ص = ٢س ← عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ ← ص = π

عندما س = ٠ ← ص = ٠

يتبع ....

ص

⇐ تابع....

بما أن $\text{ص} = ٢\text{س} \xrightarrow{\text{اذن}} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢}{١} \Leftarrow \boxed{\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢}}$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{٢\pi} \frac{\text{جاص}}{١ + \frac{\text{ص}}{٢}} \cdot \frac{\text{دص}}{٢}$$

$$= \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢} \times \frac{\text{جاص}}{\frac{\text{ص}}{٢} + \frac{١ \times ٢}{٢ \times ١}} \cdot \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢} \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جاص}}{\frac{\text{ص}+٢}{\cancel{٢}}} \cdot \text{دص} = \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}+٢} \cdot \text{دص}$$

تكامل بالأجزاء :

نفرض

$$\text{م} = \frac{١}{\text{ص}+٢} \qquad \text{دل} = \text{جاص}$$

$$\text{دم} = \frac{-١}{(\text{ص}+٢)^٢} \xrightarrow{-\int} \text{ل} = -\text{جتاص}$$

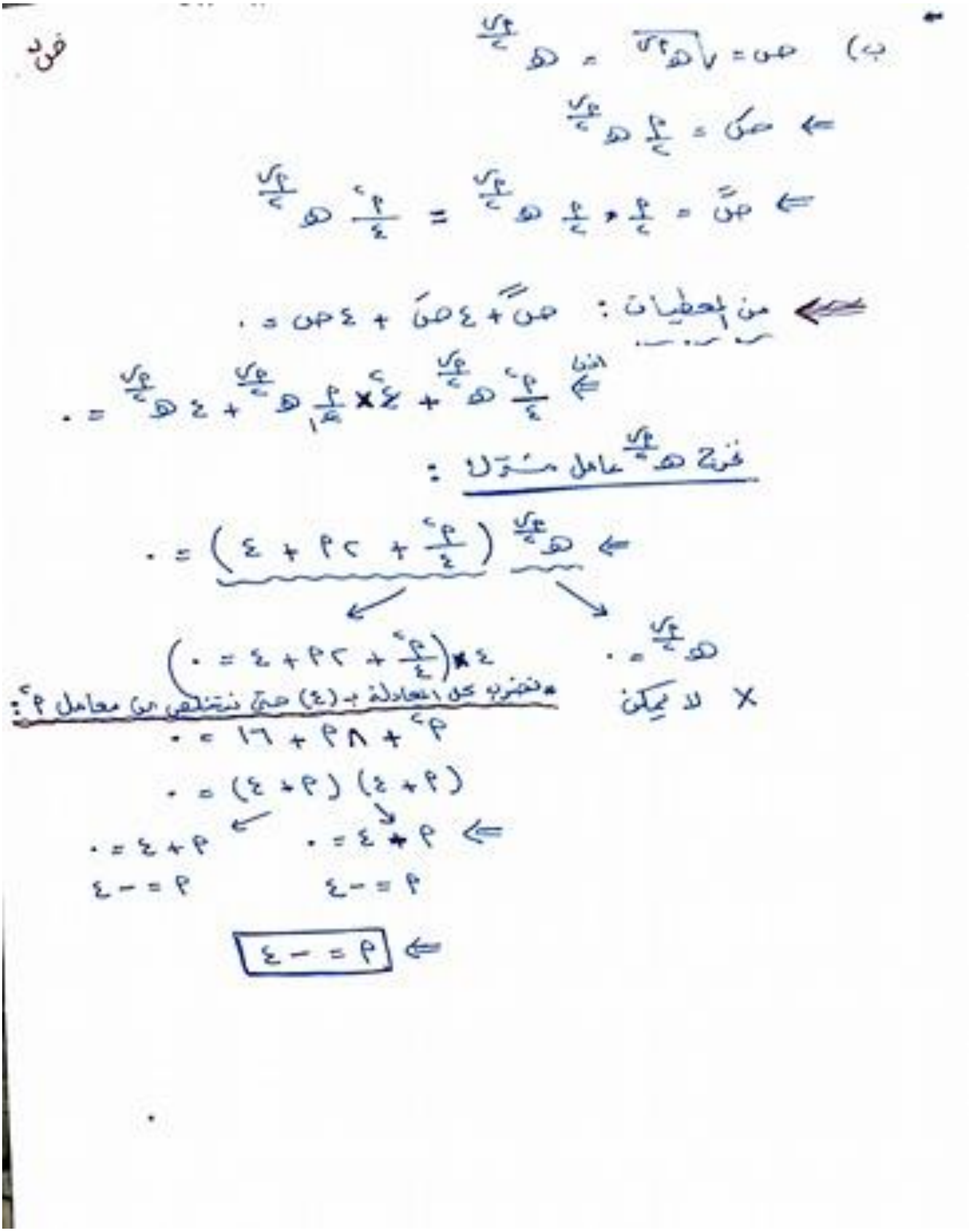
$$\Leftarrow = \frac{-\text{جتاص}}{\text{ص}+٢}\Bigg|_{٠}^{\pi} - \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتاص}}{(\text{ص}+٢)^٢} \cdot \text{دص}$$

معطاة ← $= \text{م}$

$$= \left(\frac{-\text{جتا}\,\pi}{\pi+٢} - \frac{-\text{جتا}\,٠}{٠+٢} \right) - \text{م}$$

$$= \left(\frac{-(-١)}{\pi+٢} + \frac{١}{٢} \right) - \text{م}$$

$$= \boxed{\frac{١}{\pi+٢} + \frac{١}{٢} - \text{م}}$$



فيد

ب) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{مس}}} = \text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}}$

$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{م}}{2}\,\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = \frac{\text{م}}{2} \times \frac{\text{م}}{2}\,\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}} = \frac{\text{م}^2}{4}\,\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}}$

$\Leftarrow$ من المعطيات: $\text{ص}'' + 4\text{ص}' + 4\text{ص} = 0$

$\overset{\text{اذا}}{\Leftarrow} \frac{\text{م}^2}{4}\,\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}} + \overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{\text{م}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\,\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}} + 4\,\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}} = 0$

نخرج $\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}}$ عامل مشترك :

$\Leftarrow \underbrace{\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}}}\underbrace{\left(\frac{\text{م}^2}{4} + 2\text{م} + 4\right)} = 0$

$\text{هـ}^{\frac{\text{مس}}{2}} = 0$

لا يمكن ×

$4 \times \left(\frac{\text{م}^2}{4} + 2\text{م} + 4 = 0\right)$

* نضرب كل المعادلة ب (4) حتى نتخلص من معامل م^2 :

$\text{م}^2 + 8\text{م} + 16 = 0$

$(\text{م} + 4)(\text{م} + 4) = 0$

$\Leftarrow \text{م} + 4 = 0$ $\qquad \text{م} + 4 = 0$

$\text{م} = -4$ $\qquad \text{م} = -4$

$\Leftarrow \boxed{\text{م} = -4}$

ج) حل:

$ق(س) = ٤ - س^٢ \longleftarrow$

$هـ(س) = س + ٢$

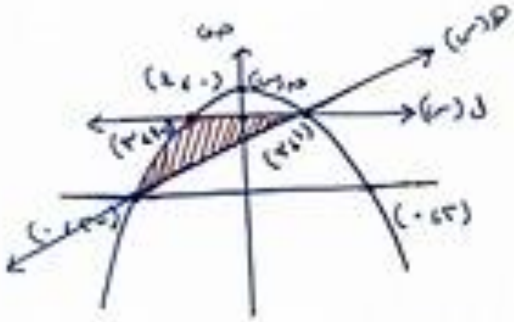
$ل(س) = ٣$

تقاطعه مع محور السينات:

$٤ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٤$

$\Leftarrow س = \pm ٢$

$(٢، ٠) \quad (-٢، ٠)$



∵ تقاطع ق(س) مع هـ(س):

$٤ - س^٢ = س + ٢$

$\frac{-س^٢ - س + ٢ = ٠}{-١}$

$\Leftarrow س^٢ + س - ٢ = ٠ \Leftarrow (س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٢} \quad \boxed{س = ١}$

∴ تقاطع ق(س) مع ل(س):

$٤ - س^٢ = ٣$

$-س^٢ = -١ \Leftarrow س^٢ = ١ \Leftarrow \boxed{س = \pm ١}$

الجزء الأول من المساحة محصور بين ق(س) و هـ(س)

الجزء الثاني من المساحة محصور بين ل(س) و هـ(س)

$م = \int_{-٢}^{-١} (٤ - س^٢) - (س + ٢) \, . دس + \int_{-١}^{١} (٣) - (س + ٢) \, . دس$

$= \int_{-٢}^{-١} ٤ - س^٢ - س - ٢ \, . دس + \int_{-١}^{١} ٣ - س - ٢ \, . دس$

$= \int_{-٢}^{-١} ٢ - س^٢ - س \, . دس + \int_{-١}^{١} ١ - س \, . دس$

$= ٢س - \frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} \Big|_{-٢}^{-١} + س - \frac{س^٢}{٢} \Big|_{-١}^{١}$

$= \left[\left(-٤ - \frac{-٨}{٣} - \frac{٤}{٢}\right) - \left(-٢ - \frac{-١}{٣} - \frac{١}{٢}\right)\right] + \left[\left(١ - \frac{١}{٢}\right) - \left(-١ - \frac{١}{٢}\right)\right]$

$= \left[\frac{-١٣}{٦} - \frac{-١٠}{٣}\right] + \left[\frac{١}{٢} - \frac{-٣}{٢}\right] = \frac{٧}{٦} + \frac{١٢}{٦} = \boxed{\frac{١٩}{٦}}$ وحدة مربعة

ص

السؤال الرابع

أ) ٩س^{٢} + ٤ص^{٢} + ١٦ص = ١٨س + ١١

٩س^{٢} − ١٨س + ٤ص^{٢} + ١٦ص = ١١

٩(س^{٢} − ٢س) + ٤(ص^{٢} + ٤ص) = ١١

إكمال مربع

٩(س^{٢} − ٢س + ١) + ٤(ص^{٢} + ٤ص + ٤) = ١١ + ٩ + ١٦

$$\frac{٩(س - ١)^{٢} + ٤(ص + ٢)^{٢} = ٣٦}{٣٦}$$

$$\frac{(س - ١)^{٢}}{٤} + \frac{(ص + ٢)^{٢}}{٩} = ١$$

∴ قطع ناقص صادي ،

* مركزه : (١ ، −٢)

أ^{٢} = ٩ ⇐ أ = ٣

ب^{٢} = ٤ ⇐ ب = ٢

⇐ جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢}

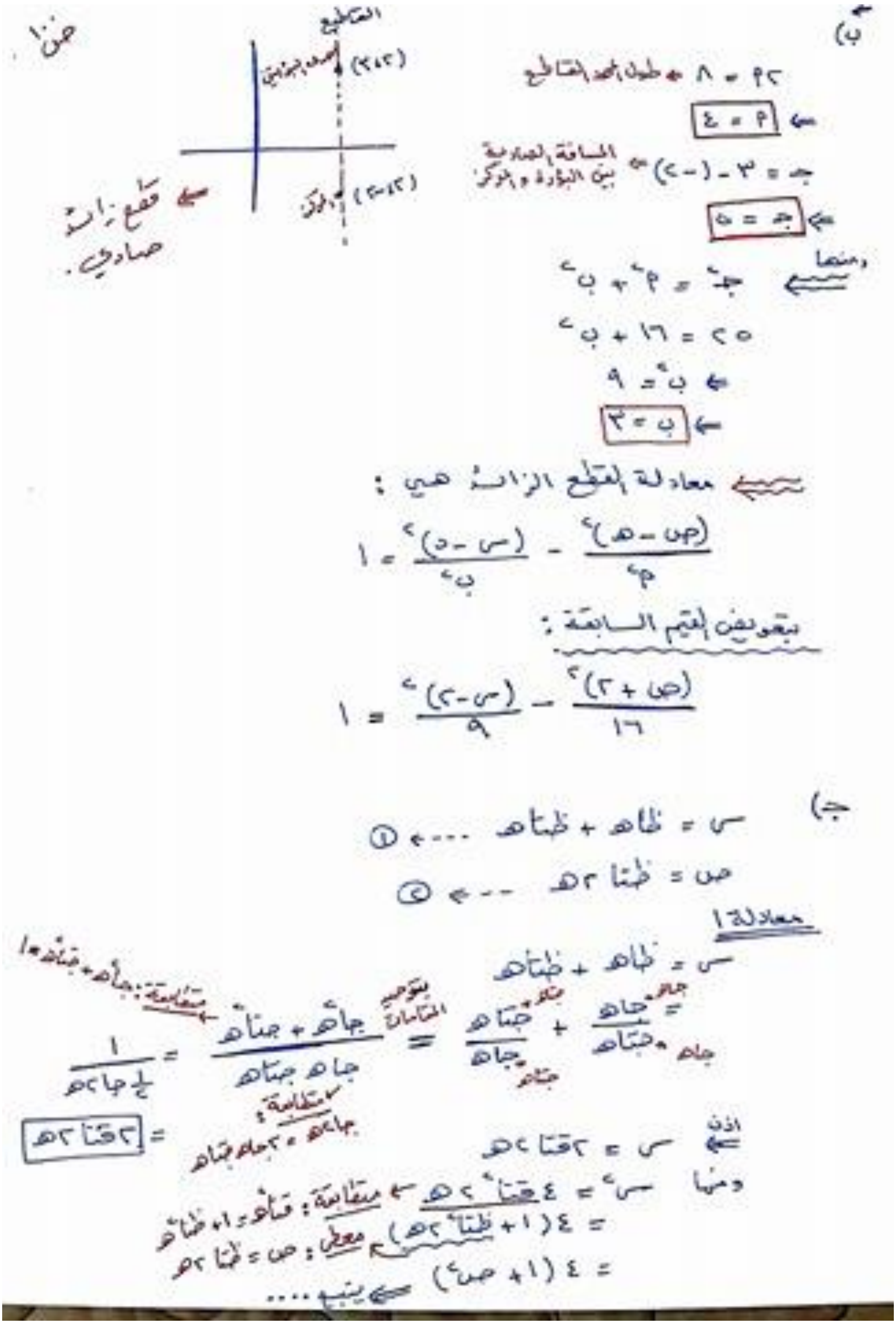
= ٩ − ٤

$\sqrt{\text{جـ}^{٢}} = \sqrt{٥}$

⇐ $\boxed{\text{جـ} = \sqrt{٥}}$

* الرأسين : $(١ ، \overset{−٢+٣}{١})$ ، $(١ ، \overset{−٢−٣}{−٥})$

* البؤرتين : (١ ، −٢ + $\sqrt{٥}$) ، (١ ، −٢ − $\sqrt{٥}$)



حل ١٠ :

ب)

$\text{٢أ} = \text{٨}$ ← طول المحور القاطع

← $\boxed{\text{أ} = \text{٤}}$

$\text{جـ} = \text{٣} - (-\text{٢})$ ← المسافة العمودية بين البؤرة والمركز

← $\boxed{\text{جـ} = \text{٥}}$

ومنها ← $\text{جـ}^{2} = \text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}$

$\text{٢٥} = \text{١٦} + \text{ب}^{2}$

← $\text{ب}^{2} = \text{٩}$

← $\boxed{\text{ب} = \text{٣}}$

← قطع زائد صادي.

← معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{2}}{\text{أ}^{2}} - \frac{(\text{س} - \text{د})^{2}}{\text{ب}^{2}} = \text{١}$$

بتعويض القيم السابقة :

$$\frac{(\text{ص} + \text{٢})^{2}}{\text{١٦}} - \frac{(\text{س} - \text{٢})^{2}}{\text{٩}} = \text{١}$$

ج)

$\text{س} = \text{ظاهـ} + \text{ظتاهـ}$ ---- ← ①

$\text{ص} = \text{ظتا ٢هـ}$ --- ← ②

معادلة ١

$\text{س} = \text{ظاهـ} + \text{ظتاهـ}$

$$= \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} \times \frac{\text{جاهـ}}{\text{جاهـ}} + \frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}} \times \frac{\text{جتاهـ}}{\text{جتاهـ}} \overset{\text{بتوحيد المقامات}}{=} \frac{\text{جا}^{2}\text{هـ} + \text{جتا}^{2}\text{هـ}}{\text{جاهـ جتاهـ}} = \frac{\text{١}}{\frac{1}{2}\text{جا٢هـ}}$$

← متطابقة: $\text{جا}^{2}\text{هـ} + \text{جتا}^{2}\text{هـ} = \text{١}$

متطابقة: $\text{جا٢هـ} = \text{٢جاهـ جتاهـ}$

$= \boxed{\text{٢قتا٢هـ}}$

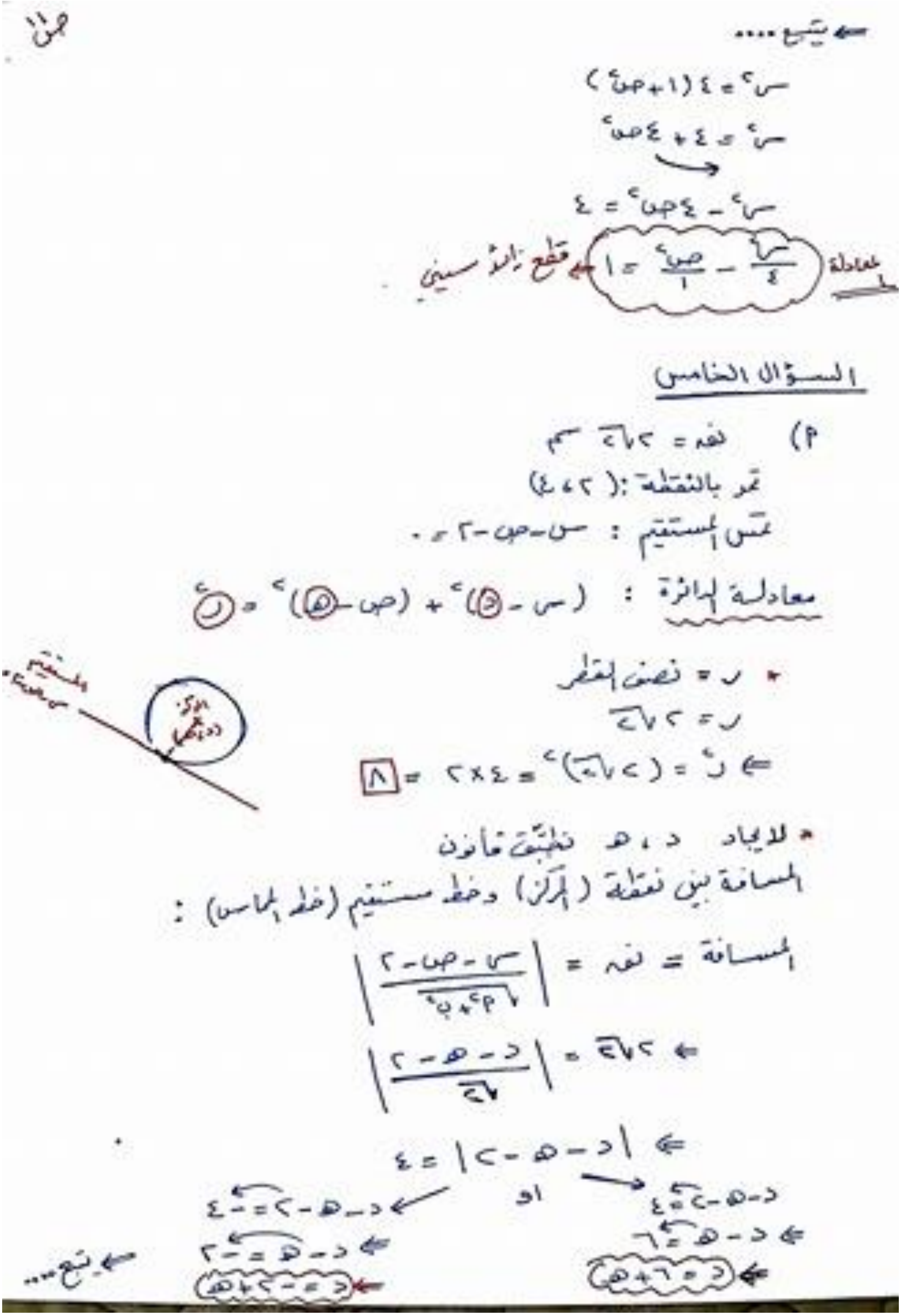
إذن ← $\text{س} = \text{٢قتا٢هـ}$

ومنها $\text{س}^{2} = \text{٤قتا}^{2}\text{٢هـ}$ ← متطابقة: $\text{قتا}^{2}\text{هـ} = \text{١} + \text{ظتا}^{2}\text{هـ}$

$= \text{٤}(\text{١} + \text{ظتا}^{2}\text{٢هـ})$ ← معطى: $\text{ص} = \text{ظتا٢هـ}$

$= \text{٤}(\text{١} + \text{ص}^{2})$

← يتبع ....



حل

← يتبع ....

$س^٢ = ٤(١ + ص^٢)$

$س^٢ = ٤ + ٤ص^٢$

$س^٢ - ٤ص^٢ = ٤$

معادلة المحل: $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{١} = ١$ ← قطع زائد سيني

السؤال الخامس

أ) نق = $٢\sqrt{٢}$ سم

تمر بالنقطة: (٢ ، ٤)

تمس المستقيم: س − ص − ٢ = ٠

معادلة الدائرة: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

* ر = نصف القطر

ر = $٢\sqrt{٢}$

⇐ $ر^٢ = (٢\sqrt{٢})^٢ = ٤ \times ٢ = \boxed{٨}$

* لإيجاد د ، هـ نطبق قانون المسافة بين نقطة (المركز) وخط مستقيم (خط المماس):

المسافة = نق = $\left|\frac{س - ص - ٢}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}\right|$

⇐ $٢\sqrt{٢} = \left|\frac{د - هـ - ٢}{\sqrt{٢}}\right|$

⇐ $|د - هـ - ٢| = ٤$

$د - هـ - ٢ = ٤$

⇐ $د - هـ = ٦$

⇐ $\boxed{د = ٦ + هـ}$

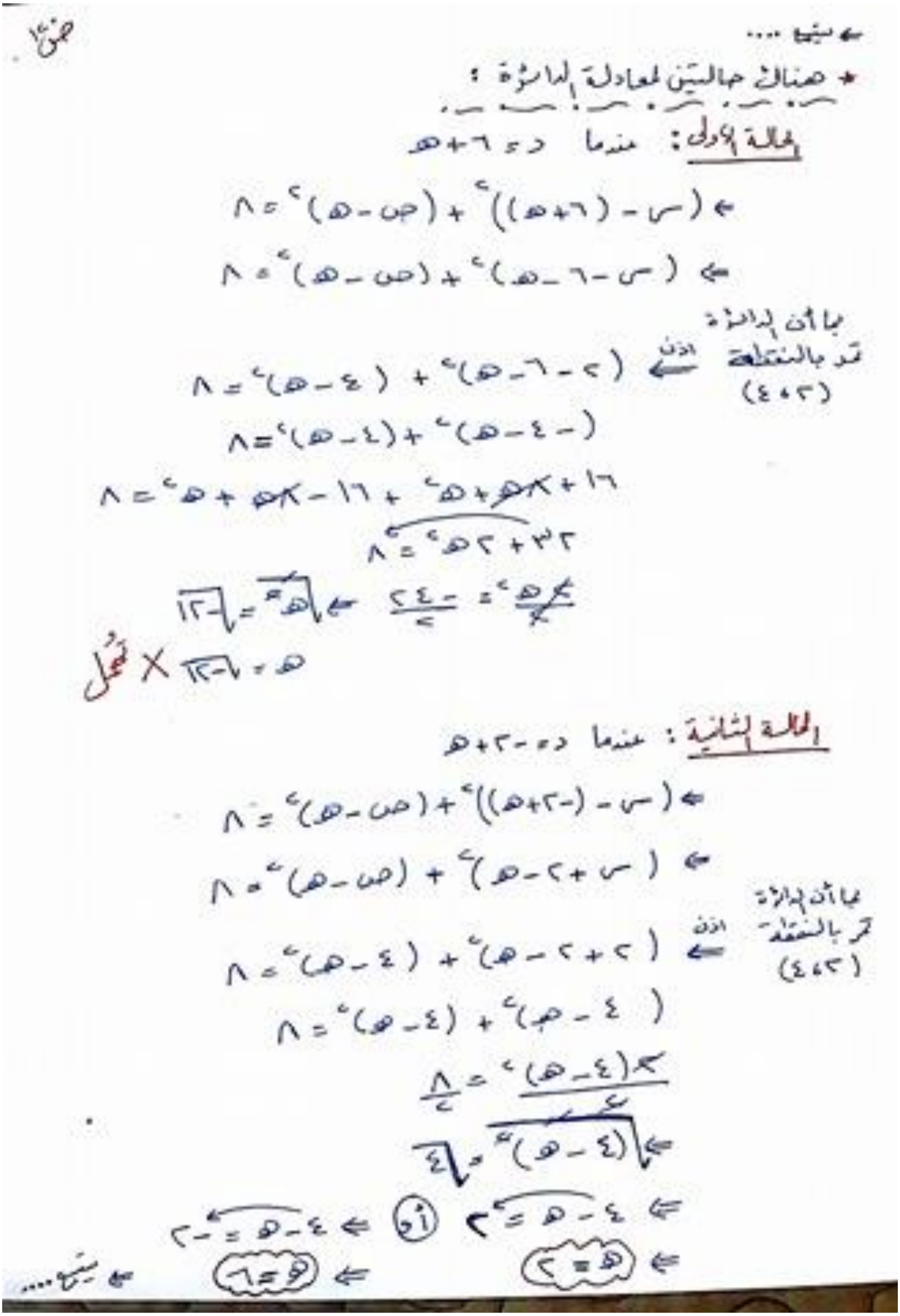
أو

$د - هـ - ٢ = -٤$

⇐ $د - هـ = -٢$

← $\boxed{د = -٢ + هـ}$

← يتبع...



ص١٤

⟵ يتبع ....

★ هناك حالتين لمعادلة الدائرة :

الحالة الأولى: عندما د = ٦ + هـ

⟸ (س − (٦ + هـ))^٢ + (ص − هـ)^٢ = ٨

⟸ (س − ٦ − هـ)^٢ + (ص − هـ)^٢ = ٨

بما أن الدائرة تمر بالنقطة (٢ ، ٤) إذن ⟸ (٢ − ٦ − هـ)^٢ + (٤ − هـ)^٢ = ٨

(− ٤ − هـ)^٢ + (٤ − هـ)^٢ = ٨

١٦ + ٨هـ + هـ^٢ + ١٦ − ٨هـ + هـ^٢ = ٨

٣٢ + ٢هـ^٢ = ٨

٢هـ^٢ / ٢ = −٢٤ / ٢ ⟸ √هـ^٢ = √−١٢

هـ = √−١٢ × تُهمل

الحالة الثانية: عندما د = −٢ + هـ

⟸ (س − (−٢ + هـ))^٢ + (ص − هـ)^٢ = ٨

⟸ (س + ٢ − هـ)^٢ + (ص − هـ)^٢ = ٨

بما أن الدائرة تمر بالنقطة (٢ ، ٤) إذن ⟸ (٢ + ٢ − هـ)^٢ + (٤ − هـ)^٢ = ٨

(٤ − هـ)^٢ + (٤ − هـ)^٢ = ٨

٢(٤ − هـ)^٢ / ٢ = ٨ / ٢

⟸ √(٤ − هـ)^٢ = √٤

⟸ ٤ − هـ = ٢ أو ⟸ ٤ − هـ = −٢

⟸ هـ = ٢ ⟸ هـ = ٦

⟵ يتبع ....

ج٢

يتبع .... ←

* $\boxed{هـ = ٢}$ ← د = -٢ + هـ = ٠ ← المركز (٠، ٢)

المعادلة :

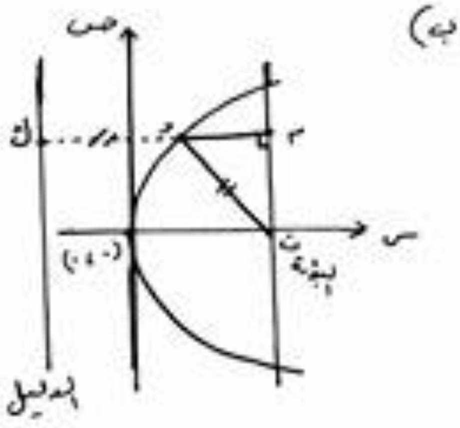
س^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٨

* $\boxed{هـ = ٦}$ ← د = -٢ + هـ = ٤ ← المركز (٤، ٦)

المعادلة :

(س - ٤)^{٢} + (ص - ٦)^{٢} = ٨

ب)



معطى: م و + و ن = ٣ وحدات

بما أن و ن = و ك

← إذن :

م و + و ك = ٣

⇓

← ٢ جـ = ٣ ← جـ = $\frac{٣}{٢}$

معادلة القطع المكافئ :

ص^{٢} = ٤ جـ س

ص^{٢} = $\cancel{٤}^{٢}$ × $\frac{٣}{\cancel{٢}_{١}}$ × س

⇐ $\boxed{ص^{٢} = ٦ س}$ ⇐

مع تمنياتي بالتوفيق للجميع

م. محمد ناصر ياسين