# النهايات

(١) بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يبين قيم ق(س) لقيم س عندما س → ١ فإن نهـا ق(س) = ؟

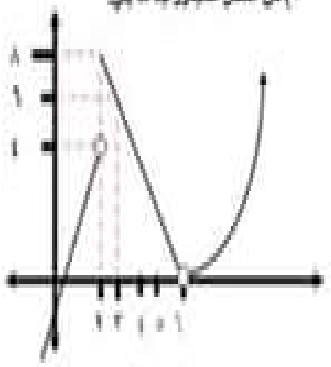
س → ١

| س | ١,٠١ | ١,٠١ | ١,٠٠١ | ١ | ٠,٩٩٩ | ٠,٩٩١ | ٠,٩٩٠ | ٠,٩٩٧ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) | ٢,٠١ | ٢,٠١ | ٢,٠٠١ | | ١,٩٩٩ | ١,٩٩١ | ١,٩٩٠ | ١,٩٩٧ |

نهـا ق(س) = ٢
س → ١

نهـا ق(س) = ∞ ⇒ نهـا ق(س) غير موجودة
س → ١ س → ١

٢) من الشكل المجاور جد ما يلي:



أ) نهـا ق(س) = ٨
س → ٣

ب) جد اعداد الانقطاع (نقط عدم الاتصال) للاقتران ق(س)

✓ يقبل هذين الاقترانين غير متصلين ؛ يكفي عد اعداد النقط في المنحنى او عد الدوائر المفتوحة

الحل: س = ٣ ، ١

ج) جد قيمة ب ، التي عندها نهـا ق(س) غير موجودة
س → ب

✓ في النهاية غير موجودة ؛ يكفي عد اعداد النقط في المنحنى الحل: س = ٣ ،

د) جد قيمة الثابت أ ، حيث ان نهـا ق(س) = ٦ الحل: أ = ٣
س → ١

٣) اذا كان نهـا ق(س) = ٦ ، نهـا ق(س) = ٥
س → ٣ س → ٣

فجد نهـا [٣ ق(س) - ٤ ق(س)]
س → ٣

نهـا ٣ ق(س) - نهـا ٤ ق(س)
س → ٣ س → ٣

= (٣×٦) - (٤×٥) = ١٨

(١) اذا كانت نهـا ق(س) ÷ س = ٣ فجد نهـا ق(س)
س → ٠ س → ٠

فجد نهـا ق(س)
س → ٠

(٢) اذا كان ق(س) = { س^٢ ، س ≤ ١ ; ٤ ، س > ١ } فجد نهـا ق(س)
س → ١

الحل: نهـا ق(س) = نهـا س^٢ = ١
س → ١ س → ١

نهـا ق(س) = ق(١) = ١ × ١ = ١
س → ١

نهـا ق(س) = ق(١)^٢ = ١
س → ١

نهـا ق(س) = ١٦
س → ١

(٨) اذا كان ق(س) = { ٥ ، س = ٢ ; س^٢ + ١ ، س ≠ ٢ } فجد: نهـا ق(س)
س → ٢

✓ في هذه الحالة لا يوجد النهاية ولكننا عند ٢ يكفي النظر الى الرقم المكتوب

نهـا ق(س) = ق(٢) = ٥
س → ٢

(٩) اذا كان ق(س) = { س^٢ + ٢ ، س ≠ ٠ ; ٣ ، س = ٠ } جد نهـا ق(س)
س → ٠

حيث س = مجموعة الاعداد الحقيقية فجد نهـا ق(س)
س → ٠

نهـا ق(س) = ق(٠)^٢ + ٢
س → ٠

= ٣ + ٢ = ٥

(١٠) جد ناتج مايلي:

(أ) نهـا √(س^٢ - ١٠)
س → ٠

الحل: = نهـا √(س^٢ - ١٠) = √(٠ - ١٠) = √-١٠
س → ٠

(ب) نهـا √(س^٢ - ٢٥)
س → ٥

الحل: = نهـا √(س^٢ - ٢٥) = √(٢٥ - ٢٥) = صفر
س → ٥

(ج) نهـا √(س^٢ - ٢٥)
س → ٦

الحل: = نهـا √(س^٢ - ٢٥) = √(٣٦ - ٢٥) = √١١
س → ٦

(١١) اذا كان ق(س) = { ٢س ، س ≤ ٣ ; س^٢ ، س > ٣ } جد نهـا ق(س)
س → ٣

فجد ما يلي: نهـا ق(س)
س → ٣

✓ في هذه الاثير و الاصفر : فقط اعداد ثم يمين و يسار اذا كان للاعداد مشتركة النهاية موجودة و الا لا

الحل: س → ٣ ؟ ٣ س

نهـا ق(س) = ٦
س → ٣

نهـا ق(س) = ٣^٢ = ٩
س → ٣

∴ نهـا ق(س) غير موجودة
س → ٣

(١) اذا كانت نهـا ق(س) ÷ س = ٢ ، س → ٠
فجد نهـا ق(س)
س → ٠

الحل: نهـا ق(س) = نهـا ق(س) × س
س → ٠ س → ٠

= ٢ × ٠ = ٠

(٢) اذا كان نهـا ق(س) = ٦ ، نهـا ق(س) = ٥
س → ٣ س → ٣

فجد نهـا [٣ ق(س) - ٤ ق(س)]
س → ٣

نهـا ٣ ق(س) - نهـا ٤ ق(س)
س → ٣ س → ٣

= (٣×٦) - (٤×٥) = ١٨

(٣) نهـا (س^٢ - ١) ÷ (س - ١) = ؟
س → ١

الحل: نهـا (س - ١)(س + ١) ÷ (س - ١)
س → ١

= نهـا (س + ١) = ١ + ١ = ٢
س → ١

(٤) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س - ٢) = ؟
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤
س → ٢

(٥) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س - ٣) = ؟
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ (س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) = ٣ + ٣ = ٦
س → ٣

(٦) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س - ٥) = ؟
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ (س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) = ٥ + ٥ = ١٠
س → ٥

(٧) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٢س)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ س(س - ٢)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ س = (٢ + ٢) ÷ ٢ = ٤ ÷ ٢ = ٢
س → ٢

(٨) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٩) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(١٠) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(١١) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(١٢) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(١٣) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(١٤) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(١٥) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(١٦) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(١٧) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(١٨) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(١٩) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٢٠) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٢١) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٢٢) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٢٣) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٢٤) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٢٥) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٢٦) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٢٧) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٢٨) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٢٩) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٣٠) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٣١) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٣٢) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٣٣) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٣٤) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٣٥) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٣٦) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٣٧) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٣٨) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٣٩) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٤٠) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٤١) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٤٢) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٤٣) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٤٤) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٤٥) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٤٦) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٤٧) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٤٨) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٤٩) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٥٠) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٥١) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٥٢) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٥٣) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٥٤) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٥٥) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٥٦) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٥٧) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

(٥٨) نهـا (س^٢ - ٤) ÷ (س^٢ - ٣س + ٢)
س → ٢

الحل: نهـا (س - ٢)(س + ٢) ÷ (س - ٢)(س - ١)
س → ٢

= نهـا (س + ٢) ÷ (س - ١) = (٢ + ٢) ÷ (٢ - ١) = ٤ ÷ ١ = ٤
س → ٢

(٥٩) نهـا (س^٢ - ٩) ÷ (س^٢ - ٣س)
س → ٣

الحل: نهـا (س - ٣)(س + ٣) ÷ س(س - ٣)
س → ٣

= نهـا (س + ٣) ÷ س = (٣ + ٣) ÷ ٣ = ٦ ÷ ٣ = ٢
س → ٣

(٦٠) نهـا (س^٢ - ٢٥) ÷ (س^٢ - ٥س)
س → ٥

الحل: نهـا (س - ٥)(س + ٥) ÷ س(س - ٥)
س → ٥

= نهـا (س + ٥) ÷ س = (٥ + ٥) ÷ ٥ = ١٠ ÷ ٥ = ٢
س → ٥

ن) نهــــا (جذر(س+١)−١) / (س² − ١) عندما س ← ٢

**كونكتيل**

[illegible]

= ٤ / (١+١)² = ٤ / ١٦

ص) نهـــا (س − ١) / (جذر(س) − ١ ...) عندما س ← ١

**كونكتيل**

[illegible]

= (١+١) / ٢ = ٢ / ٢

ض) نهـــا ... عندما س ← ٢

**كونكتيل**

[illegible]

= (٢+٢)/... = ١ / ١

ق) نهـــا (١/٢ − ١/س) / (س − ٢) عندما س ← ٢

**توحيد مقامات**

[illegible]

= ١ / ٨

ق) نهـــا (١/س − ١/٢) (١/(س−٢)) عندما س ← ٢

**توحيد مقامات**

نهـــا (٢ − س) / ((٢)(س)(س − ٢)) عندما س ← ٢

= −١ / (٢×٢) = −١ / ٤

ع) نهـــا (س²/(س−١) − ١/(س−١)) عندما س ← ١

**المقام موحد جاهز**

الحل:

= نهـــا (س² − ١) / (س − ١) عندما س ← ١

= نهـــا (س − ١)(س + ١) / (س − ١) عندما س ← ١

# الاتصال

(١١) جد نقاط الانفصال (نقاط عدم الاتصال) للاقتران

أ) ق(س) = (٢س − ١) / (٢س² − س)

٢س² − س = ٠

س(٢س − ١) = ٠

س = ٠ ، ٢س − ١ = ٠

٢س = ١ ← س = ١/٢

✓ الاقتران النسبي : المقام = صفر و حل المعادلة

ب) ق(س) = ١٢ / (س − ٣)

ب) س − ٣ = ٠ ← س = ٣

ج) ق(س) = (٣س − ٦) / (س − ٢) + (جذر س) / (س² − س)

س − ٢ = صفر أو س² − س = صفر

س = ٢ ، س(س − ١) = صفر

س = صفر ، ١

د) ق(س) = { ٣س² + ١ ، س ≥ ٢ ؛ ٤س + ٥ ، س < ٢ }

✓ نبحث عند نقاط التشعب (عند س = ٢) ممكن أن تكون نقطة قطع و لكن ليس بالضرورة

نهــا ق(س) عندما س ← ٢⁺ = ٣(٢)² + ١ = ١٣

نهــا ق(س) عندما س ← ٢⁻ = ٤(٢) + ٥ = ١٣

∴ الاقتران غير متصل عند س = ٢

∴ نقاط الانقطاع عند س = ٢

✓ الاتصال عند نقطة

١. نجد النهاية يمين و يسار

٢. نجد الصورة عند الشارة ونساوي ثم نقارن بهم ببعض

(١٢) ابحث في اتصال الاقتران عند س = ٢

ق(س) = { ٥س + ٣ ، س < ٢ ؛ س³ + ٣س − ١ ، س = ٢ ؛ ٣س² − ١ ، س > ٢ }

الحل:

نهــا ق(س) عندما س ← ٢⁻ = ٥(٢) + ٣ = ١٣

نهــا ق(س) عندما س ← ٢⁺ = ٣(٢)² − ١ = ١١

ق(٢) = (٢)³ + ٣(٢) − ١ = ٨ + ٦ − ١ = ١٣

∴ الاقتران ق(س) متصل عند س = ٢

✓ الاتصال عند نقطة

١. نجد النهاية عند الشارة =

٢. نجد الصورة عند الشارة ونساوي ثم نقارن بهم ببعض

(١٣) إذا كان

ق(س) = { (س² − ١) / (س − ١) ، س ≠ ١ ؛ س² − ٣س + ١٠ ، س = ١ }

فابحث في اتصال الاقتران عند س = ١

نهـــا ق(س) = نهـــا (س² − ١) / (س − ١) عندما س ← ١

نهـــا (س − ١)(س + ١) / (س − ١) = ١ + ١ = ٢ عندما س ← ١

ق(١) = (١)² − (٣×١) + ١٠

= ١ − ٣ + ١٠ = ٨

∴ الاقتران متصل عند س = ١

✓ نحوي أولا الاقتران ق(س) ثم نجد المطلوب

(١٤) إذا كان

ق(س) = { (س² − ١) / (س − ١) ، س ≠ ١ ؛ س² − ٣س + ١٠ ، س = ١ }

فابحث في اتصال الاقتران عند س = ١

الحل:

نهـــا ق(س) = نهـــا (س² − ١) / (س − ١) عندما س ← ١

نهـــا (س − ١)(س + ١) / (س − ١) = ١ + ١ = ٢ عندما س ← ١

ق(١) = (١)² − (٣×١) + ١٠

= ١ − ٣ + ١٠ = ٨

∴ الاقتران متصل عند س = ١

(١١) إذا كان ق(س) = { ٣س² + ١ ، س ≥ ٢ ؛ ٥س + ١ ، س < ٢ } ، هـ(س) = ٢س

فابحث في اتصال ل(س) = هـ(س) × ق(س) عند س = ٢

الحل:

ل(س) = { ٢س × (٣س² + ١) ، س ≥ ٢ ؛ ٢س × (٥س + ١) ، س < ٢ }

نهـــا ل(س) عندما س ← ٢⁺ = ٢(٢) × (٣(٢)² + ١) = ٤ × ١٣

نهـــا ل(س) عندما س ← ٢⁻ = ٢(٢) × (٥×٢ + ١)

ل(٢) = ١٢٠

∴ ل(س) متصل عند س = ٢

(١٥) إذا كان ق(س) = س + ٣ ، هـ(س) = (س² − ٩) / (س + ٣)

فابحث في اتصال ل(س) = ق(س) × هـ(س) عند س = ٣

الحل:

ل(س) = ق(س) × هـ(س)

= (س + ٣) × (س² − ٩) / (س + ٣)

نهـــا ل(س) عندما س ← ٣ = (٣ + ٣)(٩ − ٩) / (٣ − ٣) = صفر / صفر

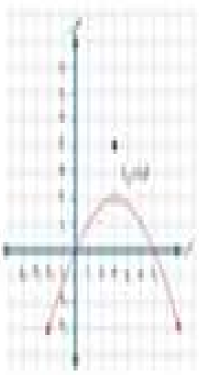
= نهـــا (س + ٣)(س − ٣)(س + ٣) / (س − ٣) عندما س ← ٣

= (٣ + ٣)(٣ + ٣) = ٣٦

ل(٣) = (٣ + ٣)(٣ + ٣) = ٣٦

ل(س) = ق(س) × هـ(س) متصل عند س = ٣

(١٦) اعتمادا على المنحنى أدناه الذي يمثل الاقتران ق(س) ، أجب عما يلي :



أ) ابحث في اتصال الاقتران عند س = ٢

ب) جد ق(٣)

ج) إذا كان كل من الاقترانين ق ، هـ متصلان عند س = ٢ وكان هـ(٢) = ٤ ،

نهـــا (ق(س) + ٣س²) / (٢هـ(س)) عندما س ← ٢

فجد ق(٢)

✓ نحوي أولا الاقتران ق(س) ثم نجد المطلوب

## أسئلة المجاهيل

(١٧) إذا كان ق(س) = أس + ب س ، ق(٢) = ٤ ، ق(١) = ٣ فجد قيمة كل من أ ، ب ، ق(٣)

و هل ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت ؟

س ← ٢ ؟

الحل: (س − ٢)(أس + ٥) / س ← ٢

بما أن نهـا ق(س) موجودة ؟

س ← ٢

∴ نهـا ق(س) = نهـا ق(س)

س ← ٢⁺ س ← ٢⁻

(٢ + هـ)(أ(٢ + هـ) + ٥) / هـ = ٢ أ + ٥

٢ أ + ٥ = ٤

٢ أ = −١ ، أ = −١/٢

ب = −١٠ (بالقسمة على ١٠)

∴ ق(س) = −١/٢ س − ١٠

---

(١٨) إذا كان ق(س) = { س − ١ ، س ≤ ٢ ; ب س − ١ ، س > ٢ }

فجد قيمة الثابت ب إذا كانت نهـا ق(س) موجودة

س ← ٢

الحل: ب(٢) − ١ = ٢ − ١

نهـا ق(س) = ٦ ، نهـا ق(س) = ٦

س ← ٢⁺ ، س ← ٢⁻

ب(٢)² − ١ = ٦ ، ٢ − ١ = ب

٤ ب − ١ = ٦ ، ب = ١

٤ ب = ٧ ، ب = ٢

ب = ٢ ؟

---

(١٩) إذا كان ق(س) = { أس + ٥ ، س ≤ ٣ ; ب س − ١ ، س > ٣ }

وكانت نهـا ق(س) = ١٥ ، فجد قيمة الثابت ب ؟

س ← ٣

الحل: ب(٣)² − ١ = ١٥

٩ ب − ١ = ١٥

٩ ب = ١٥ + ١

٩ ب = ١٦ ⟹ ب = ٢

---

(٢٠) إذا كان ق(س) = { أس² − ٩ ، س ≤ ٣ ; ٣ س + ٩ ، س > ٣ }

وكان ق(س) متصلاً فجد قيمة الثابت أ ؟

الحل

٣ س + ٩ ، أس² − ٩

ق(س) متصل ولم يحدد النقطة ، نبحث عند نقطة التشعب

∴ نهـا ق(س) = نهـا ق(س)

س ← ٣⁺ س ← ٣⁻

(٣ هـ + ٩) = أ(٣ + هـ)² − ٩

٩ = ٩ أ − ٩

٩ أ = ١٨ ، أ = ٢

---

(٢١) إذا كان ق(س) = { أس² + ب ، س ≤ ٢ ; أس + ٥ ، س > ٢ ; س² + ٥ أس ، س ≥ ٣ }

و كان ق(س) متصلاً عند س = ٢ فما قيمة الثوابت أ ، ب

الحل:

٢ أس + ٥ ، أس² + ب

نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(٢)

س ← ٢⁺ س ← ٢⁻

٤ أ + ٥ = ٤ أ + ب = ٤ أ + ٨

٤ أ + ٥ = ٤ أ + ٨ ، ٤ أ + ب = ٤ أ + ٨

٥ = ٨ ، ٤ أ + ب = ٤ أ + ٨

ب = ٨

---

(٢٢) إذا كان ق(س) = { أس + ب ، س ≤ ٢ ; ١١ ، س = ٢ ; أس² + ١٠ ، س > ٢ }

وكان ق(س) متصلاً عند س = ٢ فما قيمة الثوابت أ ، ب

---

(٢٣) إذا كان ق(س) = { ب ، س ≤ ٢ ; أس − ب س² ، س > ٢ }

وكانت نهـا ق(س) = ٨ ، نهـا ق(س) موجودة

س ← ٢ س ← ٢

فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب

---

(٢٤) إذا كان ق(س) = { أس² − ٥ ، س ≤ ٥ ; ١٢ ، س = ل ; س ≥ ل }

و كانت نهـا ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت ل ؟

س ← ل

## التفاضل

### أ. متوسط التغير

التغير في قيم س = ١ من س = س − س

التغير في قيم ص = ١ من ص = ص − ص

التغير في الاقتران = ١ ق(س)

= ق(س + ١) − ق(س)

= ق(س) − ق(س − ١)

متوسط التغير = التغير في ص / التغير في س = ق(س) − ق(س − ١) / س − (س − ١)

متوسط التغير في الفترة [س ، س + ١] = ق(س + ١) − ق(س) / ١

متوسط التغير ومعدل التغير وميل القاطع هو نفس الشيء

(٢٥) إذا كان ق(س) = س² + ٢ فجد ما يأتي :

أ) مقدار التغير في الصيغة إذا كانت س = ٢ وتغيرت لتصبح ١

ب) مقدار التغير في الاقتران

أ) التغير في س = ١ من س = ٢ إلى ٣

ب) ١ ق(س) = ق(س + ١) − ق(س)

= ق(١) − ق(٢)

= (١² + ٢) − (٢² + ٢)

= ١١ − ٧ = ٤

---

(٢٦) يتغير طول ضلع المكعب من القيم التي تمثل س ، ما مقدار التغير في حجم المكعب

الحل: حجم المكعب = ح = س³

١ ح = ح − ح

= (س + ١)³ − س³ = ١٢٦ − ١٢٧ = ٩٨

---

(٢٧) يتغير طول ضلع المربع بعد تعرضه للحرارة من ٢ سم إلى ٣ سم ، ما مقدار التغير في مساحته المربع؟

الحل: مساحة المربع = م = س²

١ م = م − م

= ق(٣) − ق(٢)

= ٩ − ٤ = ٥ سم²

---

(٢٨) إذا كان ق(س) = س² − ٦ فجد متوسط التغير في [س ، س + ١] إذا كانت س = ٢ ، س = ٥ ؟

الحل: متوسط التغير = ق(س + ١) − ق(س) / ١

= ق(٥) − ق(٢) / ٣

= (٥² − ٦) − (٢² − ٦) / ٣ = ١٩ − ٤ / ٣ = ٧

---

(٢٩) إذا كانت ق(س) = √(س + ٢) و كانت س = ٢ ، ١س = ٨ فجد متوسط التغير ؟

متوسط التغير = ق(س + ١س) − ق(س) / ١س

١س = س − س

= ق(١٠) − ق(٢) / ٨

= √(١٠ + ٢) − √(٢ + ٢) / ٨

= ٤ − ٢ / ٨ = ١/٤

س = ١٠

س = ٢ + ٨

---

(٣٠) إذا كان ق(٥) = ٨ ، ق(١) = ١٢ فجد معدل التغير للاقتران عندما تتغير س من ٥ إلى ٢ ؟

معدل التغير = ق(س) − ق(س) / س − س

= ق(٢) − ق(٥) / ٢ − ٥ = ١٢ − ٨ / −٣ = −٤/٣ ؟

---

(٣١) إذا كان متوسط التغير لـ ق(س) عندما تتغير س من س = ١ إلى ٣ = ٦ وكان ق(س) = ٤ س فجد متوسط التغير ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣ ؟

متوسط التغير لـ ق(س) = ق(س) − ق(س) / س − س

٦ = ق(٣) − ق(١) / ٢

ق(٣) − ق(١) = ١٢

متوسط التغير لـ ق(س)

= ق(س) − ق(س) / س − س = ق(٣) − ق(١) / ٢

= ٤ س² − ٤ س / ٢

= ٤(٣)² − ٤(٣) − [٤(١)² − ٤(١)] / ٢

= ٣٦ − ١٢ − ٤ + ٤ / ٢ = ٢٤ / ٢ = ١٢

---

(٣٢) إذا كان ق(س) = { ٣ س − ٤ ، س ≤ ٢ ; ٥ − س ، س > ٢ }

فجد معدل التغير للاقتران ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ ؟

الحل: معدل التغير = ق(س) − ق(س) / س − س

= ق(٥) − ق(٢) / ٣

= (٥ − ٥) − (٣ × ٢ − ٤) / ٣ = ٠ − ٢ / ٣ = −٢/٣

(٢٤) إذا كان ص = ق(س) = ٣ − س² جد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠، ٣) ، (٢، −١)

الحل: ميل القاطع = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$= \frac{-١ - ٣}{٢ - ٠} = \frac{-٤}{٢} = -٢$

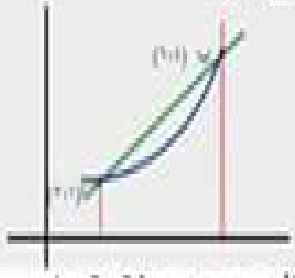
(٢٥) إذا كان ص = ق(س) = ٢س² فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (٢، ق(٢)) ، (١، ق(١))

ميل القاطع = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$= \frac{ق(٢) - ق(١)}{٢ - ١}$

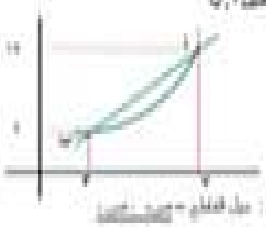
$= \frac{(٢ \times ٢^٢) - (٢ \times ١^٢)}{١} = ٨ - ٢ = ٦$

(٢٦) معتمداً على الشكل المجاور جد ميل القاطع المار بالنقطتين أ ، ب ؟



ميل القاطع = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٤ - ١}{٢ - ١} = ٣$

(٢٦) معتمداً على الشكل المجاور جد ميل القاطع المار بالنقطتين أ ، ب





الحل: ميل القاطع = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$= \frac{٤ - ١}{٢ - ١} = ٣$

## السرعة المتوسطة = متوسط السرعة

ع = ف(ن) − ف(ن)

ن − ن

(٢٧) يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن² + ٢ حيث ف المسافة بالأمتار ن الزمن بالثانية ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة [٥، ٢]

ع = $\frac{ف(ن) - ف(ن)}{ن - ن}$

$= \frac{ف(٢) - ف(٥)}{٢ - ٥}$

$= \frac{(٢^٢ + ٢) - (٥^٢ + ٢)}{-٣} = \frac{-١١}{-٣} = ٣\frac{٢}{٣}$

## ٢. نهاية المقادير

(٢٨) إذا كان مقدار التغير في س = ٦ عندما تتغير س من س = ١ إلى س، فإن قيمة س، تساوي؟

Δ س = س، − س

٦ = س، − ١ ⟹ س، = ٦ + ١ = ٧

(٢٩) إذا علمت أن مقدار التغير في الاقتران ق(س) = ١٢ عندما تتغير س من ٢ إلى ١ و كان ق(٢) = ٢ فإن ق(١) تساوي؟

Δ ق(س) = ق(س + Δ س) − ق(س)

١٢ = ق(١) − ق(٢)

١٢ = ق(١) − ٢ ⟹ ق(١) = ١٢ + ٢ = ١٤

(٣٠) إذا كان ق(س) تقبل س = ٢ ، س ∈ [١، ٣] وكان التغير في الاقتران = ١١ ، فجد قيمة ب ؟

الحل: Δ ق(س) = ق(س + Δ س) − ق(س)

١١ = ق(٣) − ق(١)

١١ = [ب(٣)² + ٣] − [ب(١)² + ٣]

١١ = ٩ب + ٣ − ب − ٣ ⟹ ٨ب = ١١ ⟹ ب = ١١/٨

(٣١) إذا كان متوسط التغير للاقتران ق = −٢ و تغير س من ١ إلى ٥ و كان ق(١) = ١٠ ، أوجد ق(٥)؟

متوسط التغير = $\frac{ق(\text{س}_2) - ق(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$-٢ = \frac{ق(٥) - ق(١)}{٥ - ١}$

$-٨ = ق(٥) - ١٠$

ق(٥) = ١٠ − ٨ = ٢

ق(٥) − ق(١) = ٢ − ١٠ = −٨

(٣٢) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س \le ٢ \\ ب س & ، س > ٢ \end{cases}$

و كان معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ هو ٦ فجد قيمة الثابت ب؟

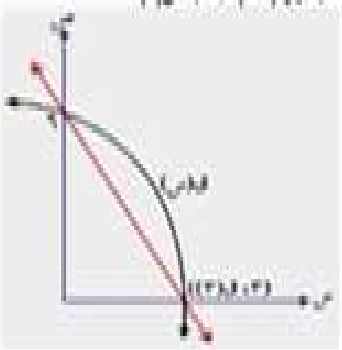
الحل: معدل التغير = $\frac{ق(\text{س}_2) - ق(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$٦ = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$

$٦ = \frac{(ب \times ٥) - (٣ \times ٢^٢)}{٣}$

١٨ = ٥ب − ١٢ ⟹ ٥ب = ٣٠ ⟹ ب = ٦

(٣٣) إذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في الشكل أدناه يساوي (٢٠) فجد قيمة ق(٣)





(٣٤) إذا كان Δ ق(س) = ٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٤}{٢} = ٢$

(٣٥) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٣ يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣} = ٢$

(٣٦) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣} = ٢$

(٣٧) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ١ يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{-١} = -٦$

(٣٨) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٠}$ غير معرف

(٣٩) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٠) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤١) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٢) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٣) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٤) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٥) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٦) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٧) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٨) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٤٩) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٥٠) إذا كان Δ ق(س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ فإن متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + Δ س يساوي؟

متوسط التغير = $\frac{Δق(س)}{Δس} = \frac{٦}{٣}$

(٥١) جد المشتقة الأولى ق(س) = ٧ باستخدام تعريف

ق(س) = نهـــا $\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= نهـــا $\frac{٧ - ٧}{هـ}$ = صفر ، هـ ← ٠

(٥٢) باستخدام تعريف المشتقة ايجاد المشتقة الأولى

ق(س) = س$^٢$ + ٣س − ٥ عند س = ٢ ؟

الحل: ق(س) = نهـــا $\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= نهـــا $\frac{(س+هـ)^٢ + ٣(س+هـ) - ٥ - (س^٢ + ٣س - ٥)}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= نهـــا $\frac{س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢ + ٣س + ٣هـ - ٥ - س^٢ - ٣س + ٥}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= نهـــا $\frac{٢س هـ + هـ^٢ + ٣هـ}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= نهـــا $\frac{هـ(٢س + هـ + ٣)}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= ٢س + ٠ + ٣

= ٢س + ٣

ق(٢) = ٢(٢) + ٣ = ٧

(٥٣) اذا كان ص=ق(س) و كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س الى (س+هـ) هو ٢س هـ + ٣هـ$^٢$ + ٧هـ فجد ق(س)؟

الحل: ق(س) = نهـــا $\frac{Δص}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= نهـــا $\frac{٢س هـ + ٣هـ^٢ + ٧هـ}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= نهـــا $\frac{هـ(٢س + ٣هـ + ٧)}{هـ}$ ، هـ ← ٠

= ٢س + ٧

✓ يستعمل هذا القانون اذا اعطاك التغير في الاقتران (Δق(س)) او (Δص) وطلب المشتقة

(٥٤) اذا كان ص=ق(س) و كان معدل تغير الاقتران ق(س) هو س$^٢$ − ٥س هـ ، فجد ق(س) ؟

الحل: ق(س) = نهـــا $\frac{Δص}{Δس}$ ، هـ ← ٠

= نهـــا (س$^٢$ − ٥س هـ) ، هـ ← ٠

= س$^٢$ − ٥س(٠) = س$^٢$

✓ يستعمل هذا القانون اذا اعطاك متوسط (معدل) التغير وطلب المشتقة

## ٢) قواعد الاشتقاق (الطرق السريعة)

تستعمل دوما ما لم يطلب منك التعريف او القانون

(٥٥) جد المشتقة الأولى في كل من الحالات التالية :

١) ق(س) = (٢س + ٥س)(٣س − س$^٢$)

٢) ق(س) = $\frac{٣س^٢ + ٥س}{س + ٢}$

٣) ق(س) = $\frac{٣}{١ + ٢س^٢}$

مشتقة الضرب = (مشتقة الاول)(الثاني) + (مشتقة الثاني)(الاول)

١) ق(س) = (٢س + ٥)(٣س − س$^٢$) + (٣ − ٢س)(٢س + ٥س)

مشتقة القسمة = $\frac{(مشتقة الاول)(الثاني) - (مشتقة الثاني)(الاول)}{(الثاني)^٢}$

٢) ق(س) = $\frac{(٦س + ٥)(س + ٢) - (١)(٣س^٢ + ٥س)}{(س + ٢)^٢}$

٣) ق(س) = $\frac{- ٣(٤س)}{(١ + ٢س^٢)^٢}$ — $\frac{- الثابت (مشتقة الثاني)}{(الثاني)^٢}$

١) ص = $\sqrt{س^٢ + ٥س}$

٢) ص = $\sqrt[٣]{س}$

٣) ق(س) = $\sqrt[٣]{(س^٢ + ٧س)^٢}$

الحل :

١) ق(س) = $\frac{٢س + ٥}{٢\sqrt{س^٢ + ٥س}}$

٢) ص = (س)$^{١/٣}$

ص = ١/٣ (س)$^{-٢/٣}$

= $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

اقتران مركب (نشتق القوة)(داخل)

٣) ق(س) = (س$^٢$ + ٧س)$^{٢/٣}$

ق(س) = $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٢}{٣}$(س$^٢$ + ٧س)$^{-١/٣}$(٢س + ٧)

= $\frac{٢}{٣}$ $\frac{(٢س + ٧)}{\sqrt[٣]{(س^٢ + ٧س)}}$

٧) ق(س) = ٣جا ٧س + جتا ٥س$^٢$

٨) ق(س) = س$^٥$ + ظا ٣س

٩) ص = ٥س قا٣س

١٠) ص = ٤س جا ٥س

١١) ص = ٣س$^٢$ قتا (٥س − س$^٢$)

الحل:

٧) ق(س) = ٣ (جتا ٧س) (٧) + (− جا ٥س$^٢$)(١٠س)

٨) ص = ٥س$^٤$ + (قا$^٢$ ٣س)(٣)

٩) ص = (٥)(قا٣س) + (قا٣س ظا٣س)(٣)(٥س)

١٠) ص = (٤)(جا٥س) + (جتا٥س)(٥)(٤س)

١٥) ص = (س$^٢$ + ٥)$^٦$

١٦) ص = $\frac{٥}{(٢س - ١)^٣}$

١٧) ص = (جتا٥س)$^٣$

١٨) ق(س) = ظا$^٣$ ٥س

١٥) $\frac{دص}{دس}$ = ٦(س$^٢$ + ٥)$^٥$ × ٢س

١٦) $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{- ٥ × ٣(٢س - ١)^٢ × ٢}{((٢س - ١)^٣)^٢}$

١٧) ص = ٣(جتا٥س)$^٢$ (− جا٥س)(٥)

١٨) ق(س) = ٣(ظا٥س)$^٢$ (قا$^٢$٥س)(٥)

٢٠) ص = قا (٣س + ٥)

٢١) ص = ٣ قا$^٢$ (٢ + ٥س)

٢٢) ص = جا$^٢$ س (٥ − جتا٣س)

٢٣) ق(س) = (س$^٢$ جا ٣س)$^٢$ قتا س

الحل:

٢٠) نستعمل متطابقة قتا س = $\frac{١}{جتا س}$ للتسهيل

ق(س) = $\frac{١}{جتا(٣س + ٥)}$

ق(س) = $\frac{٠ × ... − جا(٣س + ٥)(٣)}{(جتا(٣س + ٥))^٢}$

٢١) ص = $\frac{٣}{جتا^٢(٢ + ٥س)}$

ص = $\frac{٠ × ٣ − ٣ × ٢(جتا(٢ + ٥س))(− جا(٢ + ٥س))(٥)}{(جتا^٢(٢ + ٥س))^٢}$

(٥٦) ق(١) = ٤ ، هـ(١) = ٥ ، ق(١) = ٧ ، هـ(١) = ٥ فجد:

أ) (ق.هـ)(١)

الحل: (قاعدة الضرب)

ق(١) × هـ(١) + هـ(١) × ق(١)

= (٧ × ٤) + (٥ × ٥) = ٢٨ + ٢٥ = ...

ب) اذا كان ل(س) = ٣س ق(س) فجد ل(٢)

ل(س) = (٣) ق(س) + ق(س) (٣س)

ل(١) = ٣ ق(١) + (ق(١)) × (٣ × ١)

= (٣ × ٤) + (٧ × ٣) = ١٢ + ٢١ = ...

(٥٧) اذا علمت ان ق(س) = ٥س$^٤$ − ٣س + ٩ فان نهـــا $\frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$ تساوي؟ ، هـ ← ٠

الحل: المطلوب هو ق(١) وتشتقه بالطرق السريعة

∴ ق(س) = ٢٠س$^٣$ − ٢

ق(١) = ٢٠(١)$^٣$ − ٢ = ٢٠ − ٢

= ١٨

(٥٨) اذا كان ص = ٢س$^٣$ + ٧س فجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

$\frac{دص}{دس}$ = ٦س$^٢$ + ٧

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ١٢س

(٥٩) اذا كان ق(س) = $\frac{س^٤}{١٢}$ + $\frac{س^٣}{٣}$ + ٥س − ١

فجد قيمة س التي تجعل ق(س) = صفر ؟

الحل ق(س) = $\frac{٤س^٣}{١٢}$ + س$^٢$ + ٥

ق(س) = س$^٢$ + ٢س = صفر

= س(س + ٢) = ٠

س = ٠ او س = −٢

(٦١) اذا كان ص = ع$^٣$ + ع ، ع = ٢س + ٥ جد $\frac{دص}{دس}$ ؟

قاعدة السلسلة

$\frac{دص}{دع}$ = ٣ع$^٢$ + ١ ، $\frac{دع}{دس}$ = ٢

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$

= (٣ع$^٢$ + ١) × ٢

= [٣(٢س + ٥)$^٢$ + ١] × ٢

(٦٢) اذا كان ص = ٢ع + ع$^٢$ ، ع = ٣س$^٢$ + ١ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١ ؟

$\frac{دص}{دع}$ = ٢ + ٢ع ، $\frac{دع}{دس}$ = ٦س

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$

= (٢ + ٢ع) × ٦س = (٢ + ٢(٣س$^٢$ + ١)) × ٦ × ١

$\frac{دص}{دس}$ = ... ١٠

(٢٣) إذا كان ق(س) = ٢ جتا ٣س فجد
ق(س) = ؟ ق(س) ؟؟؟

**المسائل المجاهيل**

(٢١) إذا كان ق(س) = ٢ س$^{٣}$ − ب س + ٥ وكان ق(١) = ١ , ق(٠) = ١٢ , فجد قيم الثابتين أ , ب

الحل: ق(س) = ١١ س − ب س$^{٢}$

ق(١) = ١١(١) − ٢ب (١)

١١ − ٢ب = ١ .....(١)

ق(س) = ١١ − ٢ب س

ق(٠) = ١١ − ٢ب (٠)

١١ = ١٢ (بالقسمة على ١)

٢ = ب

نعوض قيمة أ في المعادلة (١) لإيجاد (ب)

١١ − ٢ب = ١

١(٢) − ٢ب = ١

١٢ − ٢ب = ١ ، ٢ب = ١٠ ، ب = ٥

(٢٢) إذا كان ق(س) = ب س$^{٣}$ − ١٢س , فجد قيمة (قيم) الثابت (ب) التي تجعل ق$'$(٢) = ٠

الحل: ق(س) = ب س$^{٣}$ − ١٢ س

ق$'$(س) = ٣ ب س$^{٢}$ − ١٢

ق$'$(٢) = ٣ ب (٢)$^{٢}$ − ١٢

١٢ ب − ١٢ = ٠

١٢ ب = ١٢ ، ب = ١

(٢١) إذا كان ق(س) = (أ س + ١٠)$^{٢}$ , فجد قيمة الثابت (أ) التي تجعل ق(٠) = ٤٨

الحل: ق(س) = ٤ (أ س + ١٠)$^{٢}$ (أ)

ق(س) = ١٢ (أ س + ١٠)$^{٢}$ (١) (أ)

ق(٠) = ١٢ (أ × ٠ + ١٠)$^{٢}$ (١) (أ)

٤٨ = ١٢ (١٠)$^{٢}$ (١) (أ)

٤٨ = ١٢٠ أ (بقسم الطرفين على ١٢)

أ = ٤٨ / ١٢٠ = ٢ / ٥

(١٧) إذا كان ق(س) = أ س$^{٣}$ − ب س$^{٢}$ + ٣ ,
وكان ق(١) = ٧ , ق(١) = ١٩ , فجد قيم الثوابت أ , ب ؟

(١٨) إذا كانت ق(س) = ـــــ ب ـــــ وكان
(٣س + ١)
ق(١) = ـ ١٢ / ١١ فجد ب !!!

**معادلة المماس = قاعدة المماس**

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص$_{١}$ = نقطي من السؤال

س$_{١}$ = نعوض قيمة س$_{١}$ في الأقتران الأصلي (ق(س))

م = ميل المماس = نشتق ثم نعوض بقيمة س

(١٩) جد ميل المماس لمنحنى الأقتران
ص = ٤س$^{٣}$ + ٥س عند س = ١

الحل: ق(س) = ٤س$^{٣}$ + ٥س

ق$'$(١) = ١٢(١)$^{٢}$ + ٥ = ١٧

(٢٠) جد معادلة المماس لمنحنى الأقتران
ق(س) = ٣س$^{٢}$ + ٥ عند النقطة (١,٠)

الحل:

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

س$_{١}$ = ١

ص$_{١}$ = ق(١) = ٨

م = ق$'$(س) = ٦س

ق$'$(١) = ٦

معادلة المماس : ص − ٨ = ٦(س − ١)

(٢١) جد معادلة المماس لمنحنى الأقتران
ق(س) = ٣س$^{٣}$ + ٢س − ٣ عندما س = ١

الحل: ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

س$_{١}$ = ١

ص$_{١}$ = ق(١) = ٣ + ٢ − ٣ = ٢

م = ق$'$(س) = ٩س$^{٢}$ + ٢

ق$'$(١) = ٩ + ٢ = ١١

معادلة المماس : ص − ٢ = ١١(س − ١)

ف = المسافه
ع = السرعه
ت = التسارع
تتعدم السرعه ⟸ ع = صفر
يتعدم التسارع ⟸ ت = صفر
يتوقف الجسم ⟸ ف = صفر
لولا لكتب القانون ف ع ت
المطلوب نضعه في مربع و الثاني نحل معادلته لإيجاد
ن (الزمن) و نرجع لتعريض نعوض فيه

(٢٢) يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن$^{٣}$ − ٩ن$^{٢}$ + ٥ فجد
ما يلي

(١) سرعة الجسم بعد مرور ٣ ثواني (السرعة المتجهة عند ن = ٣ ثانية)

(٢) تسارع الجسم عندما ن = ٣ (التسارع اللحظي عند ن = ٣ ثانية)

ف(ن) = ن$^{٣}$ − ٩ن$^{٢}$ + ٥

ع(ن) = ٣ن$^{٢}$ − ١٨ن

ت(ن) = ٦ن − ١٨

١) ع(٣) = ٣(٣)$^{٢}$ − ١٨(٣) = ٢٧ − ٥٤ = −٢٧

٢) ت(٣) = ٦(٣) − ١٨ = ١٨ − ١٨ = ٠

(٢٤) إذا كانت ف(ن) = ن$^{٣}$ − ١٢ن + ٩ فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٢١ م/ث

ف(ن) = ن$^{٣}$ − ١٢ن + ٩

ع = ٣ن$^{٢}$ − ١٢

ت = ٦ن

٣ن$^{٢}$ − ١٢ = ٢١

٣ن$^{٢}$ = ٣٣ ، ن$^{٢}$ = ١٨ / ٦ = ٣ ∴ ن = ٢

ت(٢) = ٦ × ٢ = ١٢ م/ث$^{٢}$

(٢٥) يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ن$^{٣}$ − ٦ن$^{٢}$ + ٨ , حيث ف المسافة بالأمتار , ن الزمن بالثواني , جد السرعة عندما تنعدم التسارع ؟

ف(ن) = ن$^{٣}$ − ٦ن$^{٢}$ + ٨

ع(ن) = ٣ن$^{٢}$ − ١٢ن ،

ت(ن) = ٦ن − ١٢ ، ن = ٢

∴ ع(٢) = ٣(٢)$^{٢}$ − ١٢(٢)

= ١٢ − ٢٤ = −١٢

ع(ن) = ق$'$(ن)

(٢٦) يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ن$^{٣}$ − ٩ن$^{٢}$ + ١٢ن + ١ , حيث ف المسافة بالأمتار , ن الزمن بالثواني , جد السرعة عندما تنعدم التسارع

ف(ن) = ن$^{٣}$ − ٩ن$^{٢}$ + ١٢ن + ١

ع(ن) = ٣ن$^{٢}$ − ١٨ن + ١٢

ت(ن) = ٦ن − ١٨ ، ن = ٣

ع(٣) = ٣(٣)$^{٢}$ − ١٨(٣) + ١٢

= ٢٧ − ٥٤ + ١٢ = −١٥ م/ث

(٢٧) إذا كان ق(س) = ٣(س−١)$^{٢}$ فجد فترات التزايد و التناقص للاقتران

الحل:

ق(س) = ٣(س−١)$^{٢}$ = ٠ ،

س − ١ = ٠ ،

س = ١

الأقتران متزايد على ح ولا يوجد قيم لصور للاقتران فيما عدا س = ١

(٢٨) إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − ٢٧س يستخدم لطريقة الثانية أوجد القيم القصوى للاقتران

الحل:

ق(س) = ٣س$^{٢}$ − ٢٧ = ٠ ،

٣س$^{٢}$ = ٢٧

س$^{٢}$ = ٢٧ / ٣ ∴ س = ± ٩

ق(س) = ٦س

ق(٩) = ٦ × ٩ = ٥٤ , موجب ∴ قيمة صغرى محليه

ق(−٩) = ٦ × −٩ = −٥٤ سالب ∴ قيمة عظمى محليه

(٢٩) إذا كان ق(١) = ١٠ , ق(١) = ٠ ,
ق(١) = ٦ ق(٣) = ٨ , ق(٣) = ٠ , ق(٣) = ٦٠
فجد: ١) قيم س الحرجه
٢) القيمة العظمى والصغرى للاقتران

١) ق(١) = ٠ , ق(٣) = ٠

∴ القيم الحرجة عند س = ١,٣

٢) ق(١) = ٦ موجب ∴ صغرى وقيمتها ق(١) = ١٠

ق(٣) = ٠ سالب ∴ عظمى وقيمتها = ق(٣) = ٨

**خطوات الحل**

١) نجد ق$'$(س) ثم نساويها بالصفر
٢) نجد قيم س الحرجه
٣) نجد إشارة ق$'$(س) على خط الأعداد
٤) نستنتج قيم الصغرى والعظمى

**ملاحظات**

١) إذا كانت ق$'$(س) > ٠ على فترة فإن ق(س) متزايد على هذه الفترة
٢) إذا كانت ق$'$(س) < ٠ على فترة فإن ق(س) متناقص على هذه الفترة
٣) إذا كانت ق$'$(س) = ٠ على فترة فإن ق(س) ثابت على هذه الفترة

**اختبار المشتقة الأولى**

| | |
|---|---|
| ١. نجد قيم س الحرجه | ٢. نشتق مشتقه ثانيه و نعوض فيها القيم من الحرجه |
| ٣. نختبر إشارة ق$'$(س) على خط الأعداد | ٤. نستنتج القيم العظمى والصغرى |
| ق$'$ = ٠ متزايد | ق$''$ > ٠ قيمة صغرى |
| ق$'$ = ٠ متناقص | ق$''$ < ٠ قيمة عظمى |
| ق$'$ = ٠ قيمة عظمى | ق$''$ = ٠ اختبار المشتقه الأولى |
| ق$'$ = ٠ قيمة صغرى | |

**اختبار المشتقة الثانية**

١. نجد قيم س الحرجه
٢. نجد القيم القصوى للاقتران
٣. فترات التزايد و التناقص

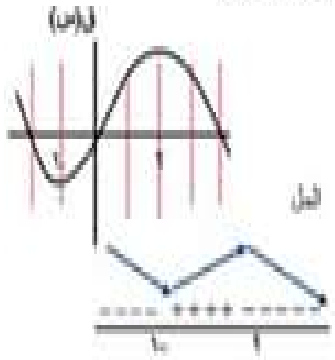
**طريقة الحل**

١. نشتق الاقتران = صفر و نحل المعادله لإيجاد قيم س الحرجه

**اختبار المشتقه الأولى**

١. نختص على خط الأعداد
٢. نشتق مشتقه ثانيه و نعوض قيم س الحرجه بها لنخص الإشارة
ق$'$ = ٠ متزايد
ق$'$ = ٠ متناقص
ق$'$ = ٠ قيمة عظمى
ق$'$ = ٠ قيمة صغرى

(٨٠) الرسم يمثل منحنى ق(س) اعتمد عليه الرسم في إيجاد:
١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)
٢) قيم س الحرجة
٣) القيم القصوى المحلية (إن وجدت)
أ) ق(-١) ، ق(٢)

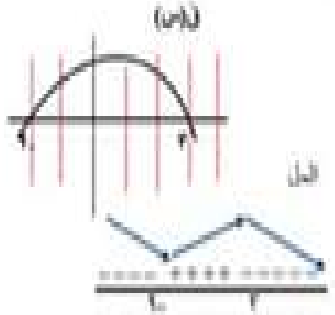



١) الاقتران متزايد في [-١ ، ٢]
ومتناقص في (-∞ ، -١] ، [١ ، ∞)

٢) قيم س الحرجة عندما س = -١ ، ٢

٣) ق(-١) = صفر } لأنهما نقط
ق(٢) = صفر } حرجة

(٨١) يمثل التمثيل المجاور منحنى ق(س) جد ما يلي:
١) فترات التزايد والتناقص
٢) القيم س الحرجة للاقتران ق(س)
٣) القيم القصوى

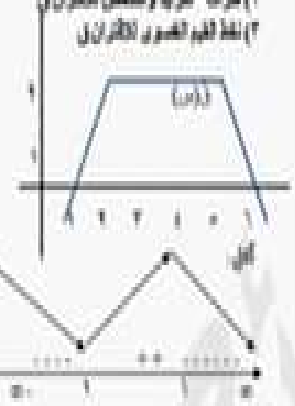



١) الاقتران متزايد في [-١ ، ٢]
ومتناقص في (-∞ ، -١] ، [٢ ، ∞)

٢) قيم س الحرجة عندما س = -١ ، ٢

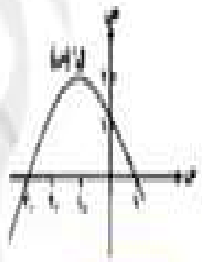
٣) للاقتران قيمة عظمى عندما س = ٢
وقيمتها = ق(٢)
لاقتران قيمة صغرى عندما س = -١
وقيمتها = ق(-١)

يمثل التمثيل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق
في (٣) = ق (٩) = ؟
ق(١) = ق(٦) = صفر
اعتمد على التمثيل في إيجاد
١) قيم س الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق
٣) نقط القيم القصوى للاقتران ق




١) س = ١ ، ٦
٢) التزايد [١ ، ٦]
التناقص (-∞ ، ١] ، [٦ ، ∞)
٣) عظمى عندما س = ١ وقيمتها ق(١)
صغرى عندما س = ٦ وقيمتها ق(٦)

معتمداً على التمثيل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعرف على ح أجب عما يأتي:
١) كم عدد القيم الحرجة للاقتران ق؟
٢) اكتب قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى وبين نوعها
٣) جد أبسط قاعدة للاقتران ق(س) علماً بأن ق(٠) = ٠




## أسئلة المجاميع

(٨٢) جد قيم س التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = أس³ - ٣س يساوي ١
الحل: م = ق'(س) = ١
٣أس² - ٣ = ١
٣أس² = ٤
أس² = ٤/٣
س = ± ٢/√٣

(٨٣) إذا كان ميل المماس للاقتران ق(س) = (٢س)³ عند النقطة (س، ص) يساوي ١ ، فجد قيم س
الحل: م = ق'(س) = ١ ، (٣ - س)³ (-١)
-١ = (٣ - س)³
-١ = (٣ - س)³ (بقسم الطرفين على -١)
-١ = ٣ - س (الجذر التكعيبي على الطرفين)
س = ٤

(٨٤) إذا كان ق(س) = ل س³ + ١٢س + ٢٠ ، حيث ل عدد ثابت وكان ميل المماس عندما س = ٢ هو ٢١ ، فجد قيمة الثابت ب ؟
الحل: م = ق'(س) = ٣ل س² + ١٢
ق'(٢) = ٣ل (٢)² + ١٢
٢١ = ١٢ل + ١٢
١٢ = ١٢ل ، ل = ١

(٨٥) يتحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته معطى بالعلاقة
ف(ن) = ٤ن² ، إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠ ، ب] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ١ ثواني فجد قيمة ب ؟
الحل: ع = ف' ، ع = ٨ن ، ن = ١
ع(١) = ٨ × ١ = ٨
السرعة اللحظية = ع = ف(ب) - ف(٠) / ب - ٠
٨ = ٤ب² - ٠ / ب
٨ = ٤ب
ب = ٢

(٨٦) يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ل (ن+٢)² ، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن المحسوب بالثواني ، إذا كان تسارع الجسيم بعد مرور ١ ثواني تساوي ١٨ م/ث² ، فجد قيمة الثابت ل
ف = ل (ن + ٢)²
ع = ف' = ل (ن + ٢)' (١)
ت = ٢ل (ن + ٢)
ت (١) = ٢ل (١+٢) ، ١٨ = ٦ل ، ل = ٣

إذا كان للاقتران ق(س) = أس³ + ٢ أس نقطة حرجة عند س = ١ فما قيمة أ؟
ق(س) = ٠ عند س = ١
ق(١) = ٣(١)² + ٢ = ٠
٣أ + ٢ = ٠ ، ٣أ = -٢
أ = -٢/٣ ، ق(س) = صفر

## تطبيقات على القيم القصوى

خطوات الحل:
١) نرسم شكلاً توضيحياً للمسألة إن أمكن
٢) نكون الاقتران و المعادلة حسب المطلوب
٣) نحول المعادلة إلى متغير واحد فقط
٤) نشتق ونساوي المشتقة بالصفر لإيجاد القيمة الحرجة (المطلوب)
٥) نختبر القيم الحرجة باستخدام اختبار المشتقة الأولى أو الثانية

(٨٧) جد العددان اللذين مجموعهما (١٠) وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن
الحل: نفرض العدد الأول = س ، العدد الثاني = ص
س + ص = ١٠ ، ص = ١٠ - س
ل = حاصل ضربهما
ل = س × ص
ل = س (١٠ - س)
ل = ١٠س - س²
ل' = ١٠ - ٢س
ل' = ٠ ، ١٠ - ٢س = ٠ ، ٢س = ١٠ ، س = ٥
ل'' = -٢ ، ل''(٥) = -٢ < ٠ ∴ عظمى
العدد الأول = ٥ ، العدد الثاني = ١٠ - ٥ = ٥
العددان ٥ ، ٥

(٨٨) قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ١٠٠ متر جد بعدي القطعة لتكون مساحتها أكبر ما يمكن
الحل:
المحيط = ٢ س + ٢ ص = ١٠٠
٢ ص = ١٠٠ - ٢ س
ص = ٥٠ - س
المساحة = م = س × ص
م = س (٥٠ - س)
م = ٥٠ س - س²
م' = ٥٠ - ٢ س ، ٢ س = ٥٠
س = ٢٥ ، م'' = -٢ < ٠ ∴ عظمى
ص = ٥٠ - ٢٥ = ٢٥
البعدان ٢٥ ، ٢٥

(٨٩) صفيحة معدنية على شكل مستطيل طوله ٨ سم وعرضه ٥ سم قطع من زواياه الأربع مربعات متطابقة طول ضلع كل منها س سم ثم ثنيت الصفيحة لتكون علبة بدون غطاء فما قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن ؟
الحل:
الحجم = ح = س × ٣ × ٢ = ٦ س
ح = ٦ س (٨ - ٢س) (٥ - ٢س)
ح = ٦ س (٤٠ - ١٦ س - ١٠ س + ٤ س²)
ح = ٦ س (٤٠ - ٢٦ س + ٤ س²)
ح = ٢٤٠ س - ١٥٦ س² + ٢٤ س³
ح' = ٢٤٠ - ٣١٢ س + ٧٢ س²
ح' = ٠ ، ٢٤٠ - ٣١٢ س + ٧٢ س² = ٠
٣٠ - ٣٩ س + ٩ س² = ٠
(٣ - ٣ س)(١٠ - ٣ س) = ٠
س = ١ ، س = ١٠/٣
ح'' = ٧٢ س - ٣١٢
ح''(١) = ٧٢ - ٣١٢ = -٢٤٠ < ٠ ∴ عظمى
س = ١ سم

(٩٠) أسطوانة معدنية قائمة مربعة الشكل بلا غطاء حجمها ١ سم³ ما أبعاد تلك العلبة المستخدمة في تصنيعها لكي ما يمكن ؟
الحل :
المساحة = م = أس ص + ٤ أس ص
م = س² + ٤ س ص
م = س² + ٤ س × ١/س²
م = س² + ٤/س
م' = ٢ س + ٤(-١)/س² = ٠
٢ س = ٤/س²
٢ س³ = ٤ ، س³ = ٢
أس³ = ٢ ، س² = أس ٢ ، س = ٢^(٢/٣)
م'' = ٢ + ٨/س³ ، م''(٢^(٢/٣)) = ٢ + ٨/(٢^(٢/٣))³ = ٢ + ٨/٢² = ٤ موجب ∴ صغرى
ص = ١/س² = ١/(٢^(٢/٣))² = ١/٢^(٤/٣) = ١/(٢ أس ٢)

(٩١) مثلث قائم الزاوية مجموع طولي ضلعي القائمة = ٢٠ سم
جد اكبر مساحة ممكنة للمثلث ؟

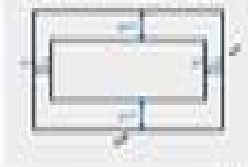
الحل:
س + ص = ٢٠
ص = ٢٠ − س
المساحة = ½ × س × ص
= ½ س (٢٠ − س)
= ١٠ س − ½ س²
ن = −½ ، ب = ١٠
ن < ٠ ∴ عظمى
س = −ب / ٢ن
= −١٠ / −١
= ١٠
اكبر مساحة = ½ × ١٠ × ١٠
= ٥٠ سم²

(٩٢) يراد تسييج قطعة ارض مستطيلة الشكل إذا كانت تكلفة المتر الواحد من الجانبين المتوازيين هي ٦ دنانير ومن الجانبين الآخرين هي ٣ دنانير فجد مساحة اكبر قطعة يمكن تسييجها بمبلغ ٢٤٠٠ دينار

الحل:

المبلغ = (س × ٦) + (ص × ٣)
٢٤٠٠ = ٦س + ٣ص
٨٠٠ = ٢س + ص
ص = ٨٠٠ − ٢س
م = س × ص
= س (٨٠٠ − ٢س)
= ٨٠٠ س − ٢س²
ن = −٢ ، ب = ٨٠٠
ن < ٠ ∴ عظمى
س = −ب / ٢ن = −٨٠٠ / −٤
= ٢٠٠
ص = ٨٠٠ − ٤٠٠ = ٤٠٠
المساحة = ٢٠٠ × ٤٠٠ = ٨٠٠٠٠ م²

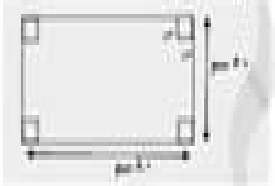
(٩٣) صفيحة من الورق مستطيلة مساحتها (٢٤ سم²) يراد طباعة اعلان عليها اذا كان عرض كل من الهامشين في راس الورق واسفلها (٤ سم) وفي كل من الجانبين (٣ سم) فجد بعدي الورقة حتى تكون المساحة اكبر ما يمكن



المساحة الكلية = م
م = (س + ٦)(ص + ٨)  ،  م = (س + ٦)(٢٤/س + ٨)
م = (١)(٢٤ + ٦)(٢٤/س + ٨)
م = ٢٤ + ١٤٤/س + ٨س + ٤٨
م = ٨س + ١٤٤/س + ٧٢
م = ٨ − ١٤٤/س²
٨ − ١٤٤/س² = صفر
٨ = ١٤٤/س²
س² = ١٤٤/٨
س² = ١٨
س = ±√١٨ = ±٣√٢
م = ١٤٤/س + ٨س + ٧٢
م(−٣√٢) = −٤٨√٢ − ٢٤√٢ + ٧٢ = −٧٢√٢ + ٧٢ = ٧٢(١ − √٢) موجب ، صغرى
م(٣√٢) = ٤٨√٢ + ٢٤√٢ + ٧٢ = ٧٢(١ + √٢) موجب ، كبرى
ص = ٢٤/س = ٢٤/٣√٢ = ٤√٢
بعدي الورقة = (س + ٦) ، (ص + ٨)
= (٦ + ٣√٢) ، (٨ + ٤√٢) سم

(١٠٠) أعطت احدى الشركات التي تصنع العاب الأطفال ان الايراد الكلي الناتج من لعبة هي
د(س) = ٢٠٠ س − ٠,٢ س² دينار ، وان الربح الناتج عن بيع س لعبة هو ر(س) = ١٠ س دينار ، جد عدد العاب اللازم انتاجها حتى تكون التكلفة اكبر ما يمكن؟
الحل: ك = ر − د
ك = ١٠ س − (٢٠٠ س − ٠,٢ س²)
ك = ١٠ س − ٢٠٠ س + ٠,٢ س²
ك = ٠,٢ س² − ١٩٠ س
٠,٢ س² − ١٩٠ س = صفر
٠,٢ س (س − ٩٥٠) = صفر
س = ٩٥٠
ك = ٠,٢ × ٢ − ١٩٠
ك = −١٠ ... سالب ∴ صغرى

(١٠١) يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى من قطعة ورق مستطيلة الشكل بعداها ٨٠ سم ، ٥٠ سم وذلك بقطع مربعات متساوية من زواياها ثم ثني الأجزاء البارزة إلى الأعلى ، ما حجم اكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟



الحجم = الطول × العرض × الارتفاع
ح = (٨٠ − ٢س)(٥٠ − ٢س)(س)
ح = (٤٠٠٠ − ٢٦٠س + ٤س²)(س)
ح = ٤٠٠٠س − ٢٦٠س² + ٤س³
ح = ١٢س² − ٥٢٠س + ٤٠٠٠ = صفر (بالقسمة على ٤)
٣س² − ١٣٠س + ١٠٠٠ = صفر
(٣س − ١٠٠)(س − ١٠) = صفر
إما ٣س − ١٠٠ = صفر
٣س = ١٠٠
س = ٣٣,٣ (مرفوض)
أو س − ١٠ = صفر
س = ١٠
ح = ٤س³ − ١٣٠س² + ٤٠٠٠س
ح(١٠) = ٤(١٠)³ − ١٣٠(١٠)² + ٤٠٠٠(١٠)
= ٤٠٠٠ − ١٣٠٠ + ٤٠٠٠ = ٧٠٠ سالب ∴ عظمى

(١٠٢) قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها ٤٠٠ م² تقع على ضفة نهر مستقيم فإذا أراد مالكها تسييجها وترك بسيج الواجهة المواقعة على ضفة النهر جد ابعادها لتكون مساحتها اكبر ما يمكن ؟

(١٠٣) لدى مزارع ٤٠٠ متر من الأسلاك الشائكة إذا أراد المزارع تسييج قطعة ارض مستطيلة الشكل ما بعدا قطعة الأرض المستطيلة الشكل اللذان يجعلان مساحتها اكبر ما يمكن

الإيراد الكلي = د(س)
الربح الكلي = ر(س)
التكلفة الكلية = ك (س)
ر = ر − ك = س × السعر

هدي = مشكله
ايراد هدي = د
ربح هدي = ر
تكلفه هديه = ك
ر = ر − ك ..... ... ر = ر − ك

(١٠٤) إذا كان الفسران الإسبرة الفلسي للعيسات هو ك = ٢ س² + ٦٠ س دينار و الفسران التكلفة الكلية ك = ١ س دينار ، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما فجد ما يلي :
١) التكلفة الحدية ٢) الإيراد الحدي ٣) الربح الحدي
١) التكلفة الحدية = ك (س) = ١
٢) الإيراد الحدي = د(س) = ١٠ س + ٦٠
٣) الربح الحدي = ر (س)
ر(س) = د(س) − ك(س)
= ١٠ س + ٦٠ − ١ = ر + ١

ر = ١٠ س + ٦٠ − ١ = ١ = ١٠ س + ٥٩

(١١) يبتاع مصنع للحواسيب من جهاز أسيوغا فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي تعطى بالعلاقة
ك(س) = ١٥ + ٢ س + س² وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ ٢٠٠ دينار فجد:
١. القران الإيراد الكلي ٢. القران الربح الكلي
٣. عدد الأجهزة التي يجب بيعها أسبوعيا ليحقق اكبر ربح
١) الإيراد الكلي = س × السعر
= ٢٠٠ س
٢) ر = ر − ك
٢٠٠ س = ر + ١٥ + ٢ س + س²
ر = ٢٠٠ س − ١٥ − ٢ س − س²
= ٢٨٨ س − ١٥ − س²
٣) ر(س) = ٢٨٨ − ٢س = ٠
٢٨٨ = ٢س
∴ س = ٢٨٨/٢ = ١٤٤ جهاز
ر = ٢٠ ... سالب ∴ عظمى

(١١) يبتاع مصنع من من اجهزة الحاسوب في الشهر و يبيع الجهاز الواحد بمبلغ ( ٢٢٠ + ٣ س) دينارا ، إذا كانت التكلفة الكلية الناتج س من الاجهزة تعطى بالعلاقة ك(س) = ٢٥٠ + ٢٠ س + س² دينارا ، فما عدد الأجهزة التي يجب ان ينتجها و يبيعها المصنع شهريا حتى يكون ربحه اكبر ما يمكن؟

ر = س × السعر
ر = س × (٢٢٠ + ٣س)
= ٢٢٠ س + ٣س²
ر = ر − ك
٢٢٠ + ٣س = ر + ٢٠ + ٢س
ر = ٢٢٠ + ٣س − ٢٠ − ٢س
ر = ٢٠٠ − س²
٢٠٠ − س² = صفر
٢٠٠ = س²
س = ١٠٠
ر = ٢٠ ... سالب ∴ عظمى