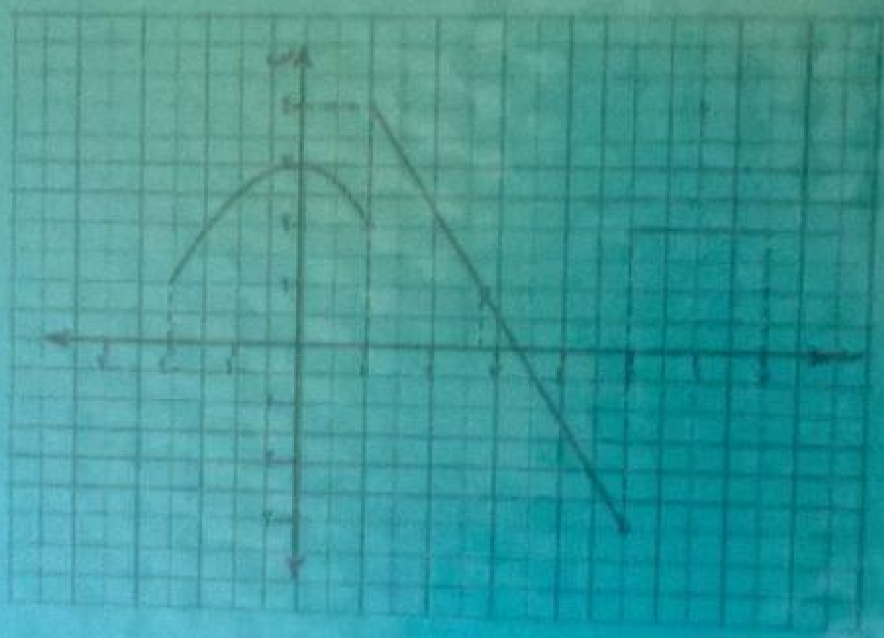
النهايات والاتصال

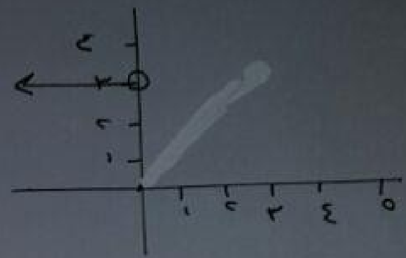


محمود البريم

0788010271

0792318082

19



جد قيمة أ حيث $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) = ٣

$\boxed{\text{٢ علامة}}$

٢ جد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{س}$

$\boxed{\text{٢ علامة}}$

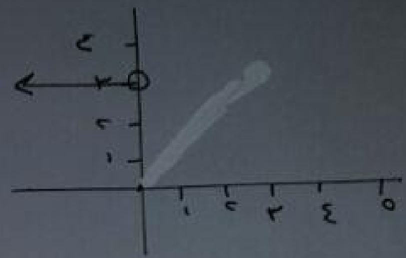
ق متصل عند س = ٤

٣ ق(٤) = ٦

$\lim\limits_{س \to ٤^+}$ ق(س) = ٤ب

قيمة ب ؟ $\boxed{\text{٢ علامة}}$

١٩



جد قيمة أ حيث $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) = ٣

$\boxed{\text{٢ علامة}}$

٢ جد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جتا(\frac{\pi}{٢} - س)}{س}$

$\boxed{\text{٢ علامة}}$

ق متصل عند س = ٤

٣ ق(٤) = ٦

$\lim\limits_{س \to ٤^+}$ ق(س) = ٤ب

قيمة ب ؟ $\boxed{\text{٢ علامة}}$

مثال:- اذا كانت أ، ب ∈ ح

وكانت $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - أس + ٣}{س - ١} & س < ١ \\ ب س - ٥ & س \geq ١ \end{cases}$

جد قيم أ، ب اذا كانت $\underset{س \to ١}{نها}\ ق(س)$ موجودة

الحل:

بما أن $\underset{س \to ١}{نها}\ س - ١ = صفر$

$\Leftarrow \underset{س \to ١^+}{نها}\ س^2 - أس + ٣ = صفر$

$١ - أ + ٣ = ٠$

$\Leftarrow أ = ٤$

$\Leftarrow \underset{س \to ١^+}{نها}\ \frac{س^2 - ٤س + ٣}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{نها}\ س^2 + س - ٢$

$\Leftarrow \underset{س \to ١^-}{نها}\ ب س - ٥ = -١$

$ب - ٥ = -١$

$+٥ \quad +٥$

$ب = ٤$

مثال: $\underset{س \to ٢}{نها}\ \frac{أس^2 - ب س - ٦}{س - ٢}$

الحل:-

$\underset{س \to ٢}{نها}\ أس^2 - ب س - ٦ = ٠$

$\Leftarrow ٤أ - ٢ب - ٦ = ٠$

$\Leftarrow -٢ب = ٦ - ٤أ$

$ب = ٢أ - ٣$

$\Leftarrow \underset{س \to ٢}{نها}\ \frac{أس^2 - (٢أ - ٣)س - ٦}{س - ٢} =$

$\Leftarrow \underset{س \to ٢}{نها}\ \frac{(أس + ٣)\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}} = ٥$

$٢أ + ٣ = ٥$

$\Leftarrow أ = ١$

$\Leftarrow ب = ٢ \times ١ - ٣ = -١$

ونستطيع الحل كما يلي:-

$\underset{س \to ٢}{نها}\ \frac{أس^2 - (٢أ - ٣)س - ٦}{س - ٢} = ٥$

$\underset{س \to ٢}{نها}\ \frac{أس^2 - ٢أس + ٣س - ٦}{س - ٢} = ٥$

$\underset{س \to ٢}{نها}\ \frac{أس(س - ٢) + ٣(س - ٢)}{س - ٢}$

$\underset{س \to ٢}{نها}\ \frac{\cancel{(س - ٢)}(أس + ٣)}{\cancel{س - ٢}} = ٥$

$\Leftarrow ٢أ + ٣ = ٥$

$أ = ١ \quad \Leftarrow ب = -١$

مثال: إذا كانت أ، ب $\in$ ح

وكانت ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 - أس + ٣}{س - ١} & س > ١ \\ ب س - ٥ & س \le ١ \end{cases}$

جد قيم أ، ب إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١}$ موجودة

الحل:

بما أن $\lim\limits_{س \to ١} س - ١ = $ صفر

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ١^+} س^2 - أس + ٣ = $ صفر

$١ - أ + ٣ = ٠$

$\Leftarrow أ = ٤$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ١^+} \dfrac{س^2 - ٤س + ٣}{س - ١}$

$= \lim\limits_{س \to ١} س^2 + س - ٣$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ١^-} ب س - ٥ = -١$

$ب - ٥ = -١$

$\quad +٥ \quad\; +٥$

$ب = ٤$

مثال: $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{أس^2 - ب س - ٦}{س - ٢}$

الحل:

$\lim\limits_{س \to ٢} أس^2 - ب س - ٦ = ٠$

$\Leftarrow ٤أ - ٢ب - ٦ = ٠$

$\Leftarrow -٢ب = ٦ - ٤أ$

$ب = ٢أ - ٣$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{أس^2 - (٢أ - ٣)س - ٦}{س - ٢} =$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{(أس + ٣)\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}} = ٥$

$٢أ + ٣ = ٥$

$\Leftarrow أ = ١$

$\Leftarrow ب = ٢ \times ١ - ٣ = -١$

ونستطيع الحل كما يلي:

$= \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{أس^2 - (٢أ - ٣)س - ٦}{س - ٢} = ٥$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{أس^2 - ٢أس + ٣س - ٦}{س - ٢} = ٥$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{أس(س - ٢) + ٣(س - ٢)}{س - ٢}$

$\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{\cancel{(س - ٢)}(أس + ٣)}{\cancel{س - ٢}} = ٥$

$\Leftarrow ٢أ + ٣ = ٥$

$أ = ١ \quad \Leftarrow ب = -١$

مثال:- اذا كانت أ ، ب ∈ ح

$$\text{وكانت ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{أس} + ٣}{\text{س} - ١} & \text{س} < ١ \\ \text{ب س} - ٥ & \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

جد قيم أ ، ب اذا كانت $\lim_{\text{س} \to ١}$ ق(س) موجودة

الحل:

بما أن $\lim_{\text{س} \to ١} \text{س} - ١ = \text{صفر}$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{س}^{٢} - \text{أس} + ٣ = \text{صفر}$$

$$١ - \text{أ} + ٣ = ٠$$

$$\Leftarrow \text{أ} = ٤$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \text{س}^{٢} + \text{س} - ٢$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ب س} - ٥ = -١$$

$$\underset{+٥}{\text{ب}} - ٥ = \underset{+٥}{-١}$$

$$\text{ب} = ٤$$

مثال: $\lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{أ س}^{٢} - \text{ب س} - ٦}{\text{س} - ٢}$

الحل:-

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \text{أ س}^{٢} - \text{ب س} - ٦ = ٠$$

$$\Leftarrow ٤\text{أ} - ٢\text{ب} - ٦ = ٠$$

$$\Leftarrow -٢\text{ب} = ٦ - ٤\text{أ}$$

$$\text{ب} = ٢\text{أ} - ٣$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{أ س}^{٢} - (٢\text{أ} - ٣)\text{ س} - ٦}{\text{س} - ٢} =$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{أ س} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٥$$

$$٢\text{أ} + ٣ = ٥$$

$$\Leftarrow \text{أ} = ١$$

$$\Leftarrow \text{ب} = ٢ \times ١ - ٣ = -١$$

ونستطيع الحل كما يلي :-

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{أ س}^{٢} - (٢\text{أ} - ٣)\text{ س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ٥$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{أ س}^{٢} - ٢\text{أ س} + ٣\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ٥$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{أ س}(\text{س} - ٢) + ٣(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{أ س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٥$$

$$\Leftarrow ٢\text{أ} + ٣ = ٥$$

$$\text{أ} = ١ \quad \Leftarrow \text{ب} = -١$$

مثال: إذا كانت م، ب ∈ ح

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - \text{م س} + ٣}{\text{س} - ١} & \text{س} > ١ \\ \text{ب س} - ٥ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

جد قيم م، ب إذا كانت $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١}$ موجودة

الحل:

بما أن $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \text{س} - ١ = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١^+} \text{س}^2 - \text{م س} + ٣ = \text{صفر}$

$١ - \text{م} + ٣ = ٠$

$\Leftarrow \text{م} = ٤$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١^+} \dfrac{\text{س}^2 - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$

$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \text{س}^2 + \text{س} - ٢$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١^-} \text{ب س} - ٥ = -١$

$\text{ب} - ٥ = -١$
$\quad\;\; +٥ \quad +٥$

$\text{ب} = ٤$

مثال: $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{\text{م س}^2 - \text{ب س} - ٦}{\text{س} - ٢}$

الحل:-

$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{م س}^2 - \text{ب س} - ٦ = ٠$

$\Leftarrow ٤\text{م} - ٢\text{ب} - ٦ = ٠$

$\Leftarrow -٢\text{ب} = ٦ - ٤\text{م}$

$\text{ب} = ٢\text{م} - ٣$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{\text{م س}^2 - (٢\text{م} - ٣)\,\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} =$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{(\text{م س} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٥$

$٢\text{م} + ٣ = ٥$

$\Leftarrow \text{م} = ١$

$\Leftarrow \text{ب} = ٢ \times ١ - ٣ = -١$

ونستطيع الحل كما يلي:-

$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{\text{م س}^2 - (٢\text{م} - ٣)\,\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ٥$

$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{\text{م س}^2 - ٢\text{م س} + ٣\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ٥$

$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{\text{م س}(\text{س} - ٢) + ٣(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢}$

$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{م س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٥$

$\Leftarrow ٢\text{م} + ٣ = ٥$

$\text{م} = ١ \qquad \Leftarrow \text{ب} = -١$

مثال:- اذا كانت أ ، ب ∈ ح

وكانت $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{أس} + ٣}{\text{س} - ١} & \text{س} < ١ \\ \text{ب س} - ٥ & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

جد قيم أ ، ب اذا كانت $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة

الحل:

بما أن $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}\ \text{س} - ١ = \text{صفر}$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نها}}\ \text{س}^{٢} - \text{أس} + ٣ = \text{صفر}$

$١ - \text{أ} + ٣ = ٠$

$\Leftarrow \text{أ} = ٤$

$\Leftarrow ٢\ \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}\ \text{س}^{٢} + \text{س} - ٣$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نها}}\ \text{ب س} - ٥ = -١$

$\text{ب} - ٥ = -١$
$+٥ \qquad +٥$

$\text{ب} = ٤$

مثال: $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{أس}^{٢} - \text{ب س} - ٦}{\text{س} - ٢}$

الحل:-

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \text{أس}^{٢} - \text{ب س} - ٦ = ٠$

$\Leftarrow ٤\text{أ} - ٢\text{ب} - ٦ = ٠$

$\Leftarrow -٢\text{ب} = ٦ - ٤\text{أ}$

$\text{ب} = ٢\text{أ} - ٣$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{أس}^{٢} - (٢\text{أ} - ٣)\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} =$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{(\text{أس} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٥$

$٢\text{أ} + ٣ = ٥$

$\Leftarrow \text{أ} = ١$

$\Leftarrow \text{ب} = ٢ \times ١ - ٣ = -١$

ونستطيع الحل كما يلي :-

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{أس}^{٢} - (٢\text{أ} - ٣)\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ٥$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{أس}^{٢} - ٢\text{أس} + ٣\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ٥$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{أس}(\text{س} - ٢) + ٣(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢}$

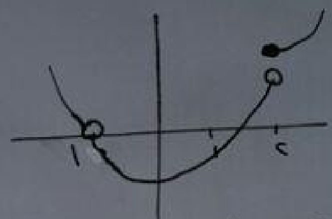
$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{أس} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٥$

$\Leftarrow ٢\text{أ} + ٣ = ٥$

$\text{أ} = ١ \qquad \Leftarrow \text{ب} = -١$

الاتصال

الاتصال: هو أن ترسم الاقتران حول نقطة دون فجوات



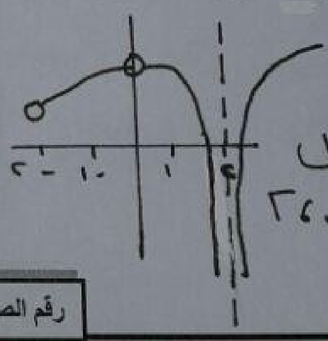
لاحظ أن الاقتران غير متصل عند س = -١ ، س = ٢

وهنا يجدر بنا الإشارة لبعض النقاط المهمة للتفريق بين النهايات والاتصال

١ يكون الاقتران غير متصل عند القفزات والثقوب والأطراف والخطوط الوهمية .

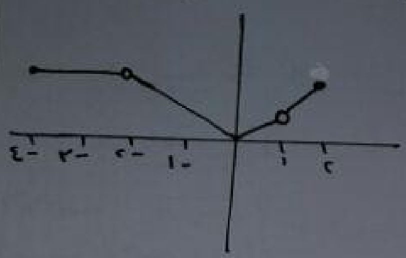
٢ وتكون النهاية غير موجودة عند القفزات والأطراف والخطوط الوهمية بشكل عام

مثال:



ق(س) غير متصل عند س = -٢ ، ٠ ، ٢

تدريب: جد نقاط عدم الاتصال



* الطريقة الرياضية لبحث الاتصال عند نقطة يكون

ق(س) متصل عند س = أ

إذا وفقط إذا

١ ق(س) معرف عند س = أ

٢ $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٣ $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) = ق(س)

مثال: ق(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ٣ & س < ١ \\ ٥ & س = ١ \\ ٥س^٢ + س - ١ & س > ١ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عند س = ١

$\lim\limits_{س \to ١^+}$ ٥س^٢ + س - ١ = ٥

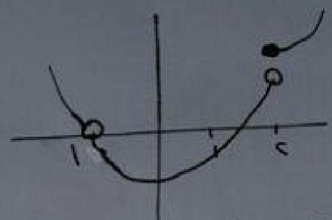
$\lim\limits_{س \to ١^-}$ ٢س^٢ + ٣ = ٥

ق(١) = ٥

∴ ق(س) متصل عند س = ١

الاتصال

الاتصال: هو أن ترسم الاقتران حول نقطة دون فجوات



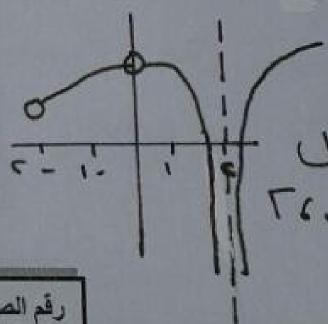
لاحظ أن الاقتران غير متصل عند س = -١ ، س = ٢

وهنا يجدر بنا الإشارة لبعض النقاط المهمة للتفريق بين النهايات والاتصال

$\boxed{1}$ يكون الاقتران غير متصل عند القفزات والثقوب والأطراف والخطوط الوهمية .

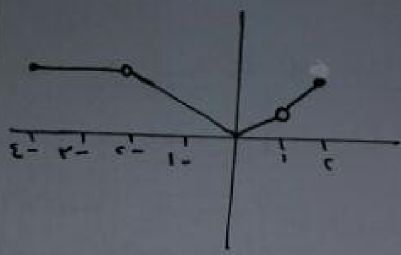
$\boxed{2}$ وتكون النهاية غير موجودة عند القفزات والأطراف والخطوط الوهمية بشكل عام

مثال:



ق(س) غير متصل عند س = -٢ ، ٠ ، ٢

تدريب: جد نقاط عدم الاتصال



* الطريقة الرياضية لبحث الاتصال عند نقطة يكون

ق(س) متصل عند س = أ إذا وفقط إذا

$\boxed{1}$ ق(س) معرف عند س = أ

$\boxed{2}$ $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) موجودة

$\boxed{3}$ $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) = ق(س)

مثال:
$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ٣ & س < ١ \\ ٥ & س = ١ \\ ٥س^{٢} + س - ١ & س > ١ \end{cases}$$

إبحث إتصال ق(س) عند س = ١

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ ٥س^{٢} + س - ١ = ٥

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها}$ ٢س^{٢} + ٣ = ٥

ق(١) = ٥

∴ ق(س) متصل عند س = ١

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}+١ & [\text{س}] = ٢ \\ ٤ & ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$

على مجاله

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{٢\text{س}} & -٢ \le \text{س} < ٠ \\ & \text{س} = ٠ \\ [٢ + \text{س}] & ٠ < \text{س} \le ١ \end{cases}$

على $[-٢ ، ١]$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٢ - ٤}$

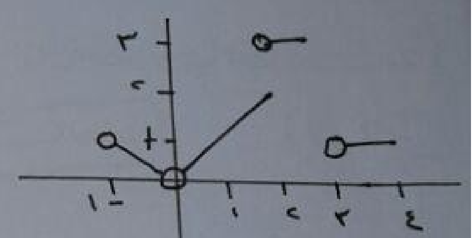
٧) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - [\text{س}]|$

على $[١ ، ٣)$

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ + ١}}{\sqrt[٣]{\text{س} - ٥}}$

على $[٣ ، ٦]$

تدريب :



أ) ما مجموعة قيم أ حيث $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = ٣$ ؟

ما مجموعة قيم ب حيث $\lim_{\text{س} \to \text{ب}} \text{ق}(\text{س})$ غ.م ؟

ج) ما مجموعة قيم ج حيث ق(س) غير متصل عند س = ج ؟

وزارة

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \left|\dfrac{\text{س}}{٢} - ١\right| & -١ \le \text{س} \le ٢ \\ \left[\dfrac{١}{٢}\text{س} + ٣\right] & ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عند س = ٢

وزارة ل(س) =

$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}(٥\text{س}) - ٩\text{س}^٢}{\text{س حا}٥\text{س}} & -\dfrac{\pi}{٦} \le \text{س} < ٠ \\ ١١ & \text{س} = ٠ \\ \dfrac{\text{س}^٢ + (٢-\text{أ})\text{س}}{\text{أس}} & ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$

إقتران متصلاً عند س = صفر

فجد قيم أ ، ب

* إتصال بعض الاقترانات

1. كثير الحدود دائماً متصل
2. الاقترانات النسبية متصلة ماعدا أصفار المقام
3. $ق(س) = جاس$ ، $جتاس$ متصل دائماً ، باقي النسب متصلة ماعدا أصفار المقام
4. اقتران القيمة المطلقة متصل دائماً إذا كان لوحده
5. أكبر عدد صحيح متصل ماعدا نقاط التحول.

مثال: جد نقاط عدم الاتصال فيما يلي:

1. $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & س < ٠ \\ س^٢ - ٢ & س \geq ٠ \end{cases}$

نبحث عند نقاط التحول فقط

$\lim_{س \to ٠^+} س^٢ - ٢ = -٢$

$\lim_{س \to ٠^-} ٢س + ١ = ١$

$ق(س)$ غير متصل عند $س =$ صفر

2. $ق(س) = \frac{٣س}{س^٢ - س}$

نبحث أصفار المقام فقط

$س^٢ - س = ٠$

$س(س - ١) = ٠$

$\Leftarrow س = ٠ ، س = ١$ غير متصل

3. $ق(س) = [س + ١]$ ، $٠ < س < ٣$

غير متصل عند $س = ١$ ، $س = ٢$

تمرين: جد قيم س التي يكون عندها الاقتران ق(س) غير متصل

1. $ق(س) = \begin{cases} ٣س - ١ & ٠ < س \leq ٢ \\ س + ٣ & ٢ < س \leq ٤ \\ ٥س & س > ٤ \end{cases}$

2. $ع(س) = \frac{٣س^٢ - ١}{٥س + ٣}$

نبحث أصفار المقام فقط

3. $ل(س) = [٣س - ٢]$
$٣ < س < ٤$

4. $هـ(س) = جاس$

5. $هـ(س) = س^٢ + ١$

6. $م(س) = ظاس$ ، $٠ < س < ٢\pi$

أسئلة سنوات سابقة على النهايات والاتصال

1) $ق(س) = \dfrac{ب\,س}{أ + |س - ١|}$

وكانت $\lim\limits_{س \to -١} ق(س) = ١$

$\lim\limits_{س \to \infty} ق(س) = ٣$

فما قيمة أ ، ب ؟

6 علامات

2) جد $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{قا٢س - ١}{س^٢}$

6 علامات

3) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ١}{س + ١} ، & -٢ \le س < -١ \\ س[س] + ١ ، & -١ \le س < ١ \end{cases}$

ابحث اتصال الاقتران على $[-٢ ، ١)$

9 علامات

4) $\lim\limits_{س \to ٢} (ق(س) - ٥) = ٣$

جد قيمة $\lim\limits_{س \to ٢} \sqrt{٢ق(س)}$

2 علامة

5) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١ + جتا٤س - ٢جتا^٢س}{س^٢}$

5 علامات

6) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{أس^٢ + ٢ب\,س + ٢}{س - ١} = ١$

جد قيمة أ ، ب

7 علامات

7) $ق(س) = \begin{cases} س^٣ ، & س < ١ \\ ٢س - ١ ، & س \ge ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) لجميع قيم س الحقيقية

8) جد قيمة

$\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٦س^٤ + ٨س^٢}{٢س^٢ - ٣س^٢}$

2 علامة

9) $ق(س) = \begin{cases} ٣ & س = ١ \\ [س] + ٥ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & س = ٢ \end{cases}$

جد فترة اتصال ق(س)

2 علامة

10) جد قيمة

$\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٢س\,(س + جا٨س - جا٤س)}{س^٢\,جتاس}$

5 علامة

مثال: جد قيمة أ التي تجعل ق(س) متصل على ح

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 2\text{س} + \text{أ}}$$

الحل: لتكون ق(س) متصل على ح فإن المميز < صفر

$$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times \text{أ}$$

$$= 4 - 4\text{أ}$$

$$\Leftarrow 4 - 4\text{أ} < \text{صفر}$$

$$4 < 4\text{أ}$$

$$\Leftarrow \text{أ} > 1$$

تدريب جد قيمة أ التي تجعل ق(س) متصل على ح

$\boxed{1}$ $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 5}{\text{س}^2 - \text{أس} + 3}$

$\boxed{2}$ $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{-2}{\text{س}^2 - 2\text{س} - 2\text{أ}}$

$\boxed{3}$ جد قيمة أ

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{ظاس}}{\text{س}} & \text{س} > \pi \\ \text{أس} + 5 & \text{س} \leq \pi \end{cases}$$

حيث $\lim\limits_{\text{س} \to \pi} \text{ق}(\text{س})$ موجودة

$\boxed{4}$ جد قيمة أ، ب

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا أس}}{6\text{س}} = \frac{\text{ظا } 5\text{س}}{\text{ب س} - \text{س}} = 2$$

$\boxed{5}$ $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س} + \text{أ}] & \text{س} < 2 \\ \text{س}^2 + \text{أ} & \text{س} \geq 2 \end{cases}$

فما قيمة أ؟

تدريب: إذا كان

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^2(\text{ن س}) - \text{س}^2}{\text{س جا س}} & -\frac{\pi}{2} < \text{س} < \text{صفر} \\ 2 & \text{س} = 0 \\ \dfrac{\text{س}^2 + (1-\text{أ})\text{س}}{\text{أس}} & \text{صفر} < \text{س} \end{cases}$$

اقتراناً متصلاً عند س = ٠، نجد قيم كل من أ، ب

تدريب: إذا كان

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - \text{س} - 60}{\text{أس} - 6\text{أ}} & \text{س} > 6 \\ 1 & \text{س} = 6 \\ \dfrac{1}{\text{ب س}} & \text{س} < 6 \end{cases}$$

اقتراناً متصلاً على ح، نجد قيمة كل من أ، ب

تدريب: إذا علمت أن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 - (3\text{جـ} - 2)\text{س} - 6\text{جـ} & \text{س} \neq 3 \\ 4\text{س} - 1 & \text{س} = 3 \end{cases}$$

اقتران متصل على ح، جد قيمة جـ.

تدريب: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 5}{\text{س}^2 - \text{أس} + 3}$ متصلاً على ح، نجد قيمة أ.

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 + 3\text{س} - \text{أ}}$$

جد قيمة أ التي تجعل الاقتران هـ(س) نقطة عدم اتصال واحدة

وزارة: $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{أ}\,\text{س}^2 + 2\text{ب}\,\text{س} + 4}{\text{س} - 1} = 1$

جد قيمة أ، ب ؟

الاتصال على فترة [أ، ب]

لبحث الاتصال على فترة

1. نبحث اتصال القواعد على الفترات المفتوحة
2. نبحث الاتصال عند نقاط التحول
3. نبحث الاتصال على الأطراف يمين أ، ويسار ب

مثال: ابحث اتصال

1. $\text{ق}(\text{س}) = |2\text{س} + 7|$ على الفترة $[-5, 0]$

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} + 7 & -\frac{7}{2} < \text{س} < 0 \\ -2\text{س} - 7 & -5 < \text{س} < -\frac{7}{2} \end{cases}$$

القواعد

$2\text{س} + 7$ متصل على $(-5, -\frac{7}{2})$ لأنه كثير حدود

$-2\text{س} - 7$ متصل على $(-\frac{7}{2}, 0)$ لأنه كثير حدود

نقاط التحول

$\lim\limits_{\text{س} \to -\frac{7}{2}^+} 2\text{س} + 7 = $ صفر

$\lim\limits_{\text{س} \to -\frac{7}{2}^-} -2\text{س} - 7 = $ صفر

$\text{ق}(-\frac{7}{2}) = $ صفر

$\therefore$ ق(س) متصل عند $\text{س} = -\frac{7}{2}$

الأطراف

$\lim\limits_{\text{س} \to 0^-} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(0) = 7$

$\lim\limits_{\text{س} \to -5^+} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(-5) = 3$

$\therefore$ ق(س) متصل على $[-5, 0]$

تمارين: ابحث اتصال ق(س) على الفترات المطلوبة

1. $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 1 & -1 \le \text{س} < 2 \\ 2\text{س} + 1 & 2 \le \text{س} < 3 \\ 5 & \text{س} = 3 \end{cases}$ على $[-1, 3]$

2. $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س} + 2] & \text{س} = 0.5 \\ 4\text{س} & 0.5 < \text{س} < 1 \\ 6\text{س} - 2 & \text{س} = 1 \end{cases}$ على $[0.5, 1]$

3. $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + 2 & |\text{س}| \le 2 \\ \text{س}^2 & |\text{س}| > 2 \end{cases}$ على مجاله

مثال: ابحث اتصال

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{|٦-٢\text{س}|}{٣-\text{س}} & \text{س} \neq ٣ \\ ٢ & \text{س} = ٣ \end{cases}$

عند س = ٣

الحل:

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{٦-٢\text{س}}{٣-\text{س}} & \text{س} < ٣ \\ \dfrac{٢\text{س}-٦}{٣-\text{س}} & \text{س} > ٣ \\ ٢ & \text{س} = ٣ \end{cases}$

$= \begin{cases} ٢ & \text{س} < ٣ \\ -٢ & \text{س} > ٣ \\ ٢ & \text{س} = ٣ \end{cases}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{ق(س)} = -٢$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{ق(س)} = ٢$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س)}$ غ.م

$\Leftarrow$ ق(س) غير متصل عند س = ٣

مثال: ابحث اتصال الاقترانات التالية عند النقاط المبينه إزاء كل منها

1) $\text{ق(س)} = \text{س}\,[\text{س}+١]$ ، س = ١

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} & ٠ \le \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢} & ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} ٢\text{س} = ٢$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{س} = ١$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ق(س)} \neq \lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ق(س)}$

∴ ق(س) غير متصل

2) $\text{ل(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س}-٢} & \text{س} > ٢ \\ |٢\text{س}-\text{س}^{٢}| & \text{س} \le ٢ \end{cases}$

عند س = صفر ، س = ٢

الحل:

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}} \sqrt{\text{س}-٢} = $ صفر لأن ل معرف على يمين س = ٢

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}} ٢\text{س} - \text{س}^{٢} = $ صفر

ل(٢) = صفر

$\Leftarrow$ ل(س) متصل عند س = ٢

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} ٢\text{س} - \text{س}^{٢} = $ صفر

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{-}} -٢\text{س} + \text{س}^{٢} = $ صفر

ل(٠) = صفر

$\Leftarrow$ ل(س) متصل عند س = صفر

تمارين: ابحث اتصال الاقترانات التالية

1) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{|\text{ظاس}|}{\text{س}} & \text{س} < ٠ \\ ١ - ٢\text{جاس} & \text{س} \ge ٠ \end{cases}$

2) $\text{ل(س)} = \begin{cases} \left[\dfrac{\text{س}}{٢} - ١\right] & \text{س} < ٢ \\ |\text{س} - ١| & \text{س} \ge ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

3) $\text{ل(س)} = \begin{cases} ١ - ٤\text{س} & \text{س} < -٢ \\ ٣\text{س}^{٢} - ٥ & \text{س} \ge -٢ \end{cases}$

عند س = صفر ، س = -٢

وزارة أثبت أن $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1-\text{جتا}\,6\text{س}}{\text{جتا}\,8\text{س}-1} = \dfrac{-9}{16}$

وزارة: بين أن $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{2}\,\text{جاس}}{1-\sqrt{2}\,\text{جتاس}} = -1$

الحل: نضرب بالمرافق

$1+\sqrt{2}\,\text{جاس}$ و $1+\sqrt{2}\,\text{جتاس}$

$$\lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sqrt{2}\,\text{جاس}}{1-\sqrt{2}\,\text{جتاس}} \times \frac{1+\sqrt{2}\,\text{جاس}}{1+\sqrt{2}\,\text{جاس}} \times \frac{1+\sqrt{2}\,\text{جتاس}}{1+\sqrt{2}\,\text{جتاس}}$$

$$= \frac{2}{2} \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-2\,\text{جا}^2\text{س}}{1-2\,\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}\,2\text{س}}{-\text{جتا}\,2\text{س}} = -1$$

وزارة $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جتا}\,3\text{س}-\text{جتاس}}{\text{س}^2}$

وزارة: أثبت أن $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\,\text{جاس}-1}{4\,\text{جتا}^2\text{س}-3} = \dfrac{1}{2}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\,\text{جاس}-1}{4-4\,\text{جا}^2\text{س}-3}$

$$= \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,\text{جاس}-1}{1-4\,\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,\text{جاس}-1}{(1-2\,\text{جاس})(1+2\,\text{جاس})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

وزارة $\lim\limits_{\text{س}\to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\text{جتا}\,2\text{س}}{(2\text{س}+\pi)^2}$

تدريب: $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1-\text{ظتاس}}{\text{قتاس}}$

مثال: $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}\,2\text{س}}{2\text{س}+\text{ظا}\,3\text{س}}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}}}{\frac{2\text{س}}{\text{س}}+\frac{\text{ظا}\,3\text{س}}{\text{س}}}$

$$= \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

وزارة: $\dfrac{1+\text{جتا}\,4\text{س}-2\,\text{جتا}^2\text{س}}{\text{س}^2}$

وزارة: $\lim\limits_{\text{س}\to 0} 7\text{س}\ \text{ظتا}\,2\text{س}\ \text{قتا}^2\,5\text{س}$

وزارة $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{ظاس}-\text{جاس}}{\text{س}^3}$

مثال: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{1-\text{جتا}\,5\text{س}}{2\text{س}^2}$

مرافق تربيعي $1+\text{جتا}\,5\text{س}$

$= \frac{1}{2}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{1-\text{جتا}^2\,5\text{س}}{2\text{س}^2}$

$= \frac{1}{2}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}^2\,5\text{س}}{2\text{س}^2}$

$= \frac{1}{2}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}\,5\text{س}}{2\text{س}}\;\frac{\text{جا}\,5\text{س}}{\text{س}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$

مثال: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{1-\text{جتا}\,\text{س}}}{\text{س}}$

الحل: نضرب بالمرافق $\sqrt{1+\text{جتا}\,\text{س}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0^+} \frac{|\text{جا}\,\text{س}|}{\text{س}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0^-} \frac{-\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{1-\text{جتا}\,\text{س}}}{\text{س}}$ غ.م

تدريب: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ظا}\,2\text{س}^2}{4\text{س}^2}$

تدريب: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{قا}\,2\text{س}-1}{\text{س}^2}$

مثال: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \text{س}^2\,\text{ظتا}\,3\text{س}\,\text{قتا}\,\text{س}$

الحل: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2}{\text{ظا}\,3\text{س}\,\text{جا}\,\text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\text{ظا}\,3\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}$

$= \frac{1}{3}$

مثال: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{\text{جا}\,\text{س}-\text{جا}\,\text{أ}}{\text{س}-\text{أ}}$

الحل

$= \text{نها}_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{2\,\text{جا}\frac{\text{س}-\text{أ}}{2}\,\text{جتا}\frac{\text{س}+\text{أ}}{2}}{\text{س}-\text{أ}}$

$= 2\,\text{نها}_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{\text{جا}\frac{(\text{س}-\text{أ})}{2}}{\text{س}-\text{أ}} \times \text{نها}_{\text{س}\to \text{أ}} \text{جتا}\frac{(\text{س}+\text{أ})}{2}$

نفرض ص = س − أ

$= 2\,\text{نها}_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جا}\frac{1}{2}\text{ص}}{\text{ص}} \times \text{جتا}\,\frac{2}{2}\text{أ}$

$= 2 \times \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,\frac{2}{2}\text{أ} = \text{جتا}\,\text{أ}$

تدريب: أثبت أن

$\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{\text{جتا}\,\text{س}-\text{جتا}\,\text{أ}}{\text{س}-\text{أ}} = \text{جا}\,\text{أ}$

تدريب: جد $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to \pi} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{1+\text{جتا}\,\text{س}}$

مثال: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{2\,\text{جا}\,\text{س}-\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}^3}$

الحل: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{2\,\text{جا}\,\text{س}-2\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^3}$

$= \frac{2\,\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}\;\frac{(1-\text{جتا}\,\text{س})}{\text{س}^2}$ بالمرافق

$= 2 \times \frac{1}{2}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{1-\text{جتا}^2\text{س}}{\text{س}^2}$

$= 2 \times \frac{1}{2}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^2} = 1$

تدريب: $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{3\,\text{جا}\,\text{س}-\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}^3}$

٤ الإضافة والطرح

١ عند وجود جذور مختلفة في الدرجة تحتها اقترانات مختلفة

٢ عند وجود حاصل ضرب اقترانين في كل حد.

مثال: $\text{نها}_{س\to٣} \dfrac{\sqrt[٣]{٤س^٢-٣س} - \sqrt{٢س+٣}}{س-٣}$

نعوض في أحد الجذرين ثم نضيف ونطرح الجواب

$$\text{نها}_{س\to٣} \frac{\sqrt[٣]{٤س^٢-٣س} - ٣ + ٣ - \sqrt{٢س+٣}}{س-٣}$$

يجب المحافظة قبل توزيع النهاية على حالة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$= \text{نها}_{س\to٣} \frac{\sqrt[٣]{٤س^٢-٣س} - ٣}{س-٣} + \text{نها}_{س\to٣} \frac{٣ - \sqrt{٢س+٣}}{س-٣}$$

مرافق تكعيبي

مرافق تربيعي

$$= \frac{١}{٢٧} \text{نها}_{س\to٣} \frac{٤س^٢-٣س-٢٧}{س-٣} + \frac{١}{٦} \text{نها}_{س\to٣} \frac{٩-(٢س+٣)}{س-٣}$$

$$= \frac{١}{٢٧} \text{نها}_{س\to٣} \frac{(٤س+٩)(س-٣)}{س-٣} + \frac{١}{٦} \text{نها}_{س\to٣} \frac{٦-٢س}{س-٣}$$

$$= \frac{١}{٢٧} \times ٢١ + \frac{١}{٦} \text{نها}_{س\to٣} \frac{٢\overset{-١}{\cancel{(٣-س)}}}{\cancel{س-٣}}$$

$$= \frac{٧}{٩} + \frac{١٤}{٢٧} = \frac{٧}{٩} + \frac{١}{٣} = \frac{٤}{٩}$$

تدريب: $\text{نها}_{س\to١} \dfrac{\sqrt{٢س+٢} - \sqrt[٣]{٧س+١}}{س-١}$

تدريب: $\text{نها}_{س\to١} \dfrac{١-س}{\sqrt{٢س+٢} - \sqrt[٣]{٧س+١}}$

تدريب: $\text{نها}_{س\to٣} \dfrac{(س+١)\sqrt{٣س} - ١٢}{س-٣}$

الحل: نعوض في أحد جزأي الاقترانين ونترك الآخر ثم نضيف $(س+١)٣\sqrt{٣س}$ ونطرح الناتج

$\Leftarrow$ نضيف ونجمع $٣(س+١)$

$$\text{نها}_{س\to٣} \frac{(س+١)\sqrt{٣س} - ٣(س+١) + ٣(س+١) - ١٢}{س-٣}$$

$$= \text{نها}_{س\to٣} \frac{(س+١)(\sqrt{٣س} - ٣)}{س-٣} + \text{نها}_{س\to٣} \frac{٣س+٣-١٢}{س-٣}$$

$$= \text{نها}_{س\to٣} (س+١)\frac{(\sqrt{٣س} - ٣)}{س-٣} + \text{نها}_{س\to٣} \frac{٣س+٣-١٢}{س-٣}$$

مرافق تربيعي

$$\frac{٤}{٦} \text{نها}_{س\to٣} \frac{٣س-٩}{س-٣} + \text{نها}_{س\to٣} \frac{٣س-٩}{س-٣}$$

$$= \text{نها}_{س\to٣} \frac{٤}{٦} \times \frac{٣(س-٣)}{س-٣} + \text{نها}_{س\to٣} \frac{٣(س-٣)}{س-٣}$$

$$= ٢ + ٣ = ٥$$

تدريب: $\text{نها}_{س\to٢} \dfrac{ص(س) - ١}{س-٢} = ٣$

جد $\text{نها}_{س\to٢} \dfrac{س-٢}{س\,ص(س) - ٢}$

تدريب: $\text{نها}_{س\to٨} \dfrac{(س-٥)\sqrt[٤]{س+٨} - ٦}{س-٨}$

٣ الاستبدال

١ عند وجود اقترانات تحت أسس كبيرة أو نسبية

٢ وجود اقترانات أسية

مثال: جد قيمة ما يلي

١ $\text{نهـا}_{س \to ٣} \dfrac{(س-٢)^{٣} + س - ٤}{س - ٣}$

الحل:

نفرض ص = س − ٢ (تحت الأس)

⇐ ص + ٢ = س

عندما س ← ٣
فإن ص ← ١

⇐ $\text{نهـا}_{ص \to ١} \dfrac{ص^{٣} + ص + ٢ - ٤}{ص + ٢ - ٣}$

$\text{نهـا}_{ص \to ١} \dfrac{ص^{٣} + ص - ٢}{ص - ١}$

بالقسمة التركيبية

١	.	١	−٢	
	١	١	٢	١
١	١	٢	∴	

$\text{نهـا}_{س \to ١} \dfrac{\cancel{(ص-١)}(ص^{٢} + ص + ٢)}{\cancel{ص-١}}$

= ١ + ١ + ٢

= ٤

٢ $\text{نهـا}_{س \to ١} \dfrac{(س+١)^{٥} - ٣٢}{س - ١}$

الحل:

ص = س + ١ ⇐ ص − ١ = س

عندما س ← ١
فإنه ص ← ٢

$\text{نهـا}_{ص \to ٢} \dfrac{ص^{٥} - ٣٢}{ص - ١ - ١}$

$\text{نهـا}_{ص \to ٢} \dfrac{\cancel{(ص-٢)}(ص^{٤} + ٢ص^{٣} + ٤ص^{٢} + ٨ص + ١٦)}{\cancel{ص-٢}}$

= ١٦ + ١٦ + ١٦ + ١٦ + ١٦

= ٨٠

٣ $\text{نهـا}_{س \to ١} \dfrac{٣^{٢س} - ٣^{س+٢} + ١٨}{٩^{س} - ٩}$

الحل:

نفرض ص = ٣^س

س ← ١ ⇐ ص ← ٣

⇐ $\text{نهـا}_{ص \to ٣} \dfrac{ص^{٢} - ٩ص + ١٨}{ص^{٢} - ٩}$

$\text{نهـا}_{ص \to ٣} \dfrac{\cancel{(ص-٣)}(ص-٦)}{\cancel{(ص-٣)}(ص+٣)}$

$= \dfrac{٣-٦}{٣+٣} = \dfrac{-٣}{٦} = -\dfrac{١}{٢}$

تدريب جد قيمة

١ $\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{(س+١)^{٣} - ٩س - ٩}{س - ٢}$

٢ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \dfrac{١٢٥^{س} - ٥^{س+١} + ٤}{٢٥^{س} - ٥^{س}}$

٣ $\text{نهـا}_{ص \to ٣} \dfrac{\sqrt[٣]{س-٢} - \sqrt{س-٢}}{\sqrt[٦]{س-٢} - ١}$

$\boxed{٣}$ $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{٩ س}{حا ٢ س}$

الحل: ص = ٢ س ، س ← ٠ ، ص ← ٠

$\underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{٩ \frac{ص}{٢}}{حا ص} = \dfrac{٩}{٢} \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{ص}{حا ص}$

$= \dfrac{٩}{٢}$

نتيجة

$\boxed{١}$ $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{حا أ س}{ب س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{أ س}{حا ب س} = \dfrac{أ}{ب}$

ب ≠ ٠

$\boxed{٢}$ $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{ظا أ س}{ب س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{أ س}{ظا ب س} = \dfrac{أ}{ب}$

ب ≠ ٠

مثال: $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{س حا س - ظا ٣ س}{حا ٣ س - ٥ س}$

نقسم البسط والمقام على س

$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{\dfrac{س حا س}{س} - \dfrac{ظا ٣ س}{س}}{\dfrac{حا ٣ س}{س} - \dfrac{٥ س}{س}}$

$= \dfrac{٣-}{٥-٣} = \dfrac{٣-}{٢-}$

تمرين: $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{٤ س - حا ٢ س + ٣ ظا ٢ س}{٥ س - حا ٢ س}$

مثال: $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \dfrac{حا (٢ س - ٦)}{س - ٣}$

الحل: $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \dfrac{حا ٢ (س - ٣)}{س - ٣}$

نفرض ص = س − ٣ ، س ← ٣ ، ص ← ٠

$= \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{حا ٢ ص}{ص} = ٢$

تمرين: $\underset{س \leftarrow ٥}{نها} \dfrac{حا (س - ٥)}{س^٢ - ٢٥}$

تمرين: $\underset{س \leftarrow ٥}{نها} \dfrac{حا (س^٢ - ٢٥)}{س - ٥}$

مثال: $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{١ + حا ٥ س - جتا^٢ س}{س}$

الحل

$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{١ - جتا^٢ س}{س} + \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{حا ٥ س}{س}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{حا^٢ س}{س} + ٥$

$= ١ \times ٠ + ٥ = ٥$

مثال: $\underset{س \leftarrow ٣\pi}{نها} \dfrac{حا س}{\frac{س}{٣} - \pi}$

الحل: $\underset{س \leftarrow ٣\pi}{نها} \dfrac{حا (٣\pi - س)}{\frac{١}{٣} (س - ٣\pi)}$

نفرض ص = س − ٣π

$= \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{حا ص}{\frac{١}{٣} ص} = ٣-$

إيجاد الثوابت ***

ملاحظات

١) إذا كانت نهاية المقام = صفر والنهاية موجودة فإن نهاية البسط = صفر

٢) إذا كانت النهاية موجودة فإن $\underset{س\leftarrow أ^{+}}{نها} ق(س) = \underset{س\leftarrow أ^{-}}{نها} ق(س)$

مثال: جد قيمة ب

$$\underset{س\leftarrow ٢}{نها} \frac{س^{٢} + \sqrt[٣]{٣س+٢}}{ب س + ٣} = ٥$$

$$\frac{٤ + \sqrt[٣]{٨}}{٢ب + ٣} = ٥$$

$$\frac{٢}{٢ب + ٣} = ١$$

$$\Leftarrow ٢ = ٢ب + ٣$$
$$-٣ \quad\quad -٣$$

$$\frac{-١}{٢} = \frac{٢}{٢} ب \Leftarrow ب = \frac{-١}{٢}$$

تدريب: جد قيمة أ

١) $\underset{س\leftarrow ٣}{نها} \frac{٢أ س^{٢} - \sqrt{س+١}}{٢} = ٦$

٢) $\underset{س\leftarrow ٥}{نها} \frac{٣س + ٢أ}{س + ٥} = ٥$

مثال: $\underset{س\leftarrow ٢}{نها} \frac{س^{٢} + ٣ب س}{س - ٢} = ٤$

بما أن $\underset{س\leftarrow ٢}{نها}$ المقام = صفر

$\Leftarrow \underset{س\leftarrow ٢}{نها} س^{٢} + ٣ب س = صفر$

$٤ + ٦ب = صفر$

$\Leftarrow ب = \frac{-٤}{٦} = \frac{-٢}{٣}$

تدريب: $\underset{س\leftarrow ٢}{نها} \frac{٤س^{٢} + ٢ب}{س - ٢} = ٧$

فما قيمة ب

مثال: $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{ق(س)}{س-٢} = ٥$

جد $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{ق(٢س-٤)}{س^{٢}-٩}$

الحل: نفرض ص $= ٢س - ٤$

$\Leftarrow س = \dfrac{ص+٤}{٢}$

$س \to ٣ \Leftarrow ص \to ٢$

$= \lim\limits_{ص \to ٢} \dfrac{ق(ص)}{\dfrac{ص^{٢}+٨ص+١٦}{٤} - \dfrac{٩}{١}\dfrac{\times ٤}{\times ٤}}$

$= \lim\limits_{ص \to ٢} \dfrac{٤ق(ص)}{ص^{٢}+٨ص+١٦-٣٦}$

$= \lim\limits_{ص \to ٢} \dfrac{٤ق(ص)}{ص^{٢}+٨ص-٢٠}$

$= \lim\limits_{ص \to ٢} \dfrac{٤ق(ص)}{(ص-٢)(ص+١٠)}$

$= ٤\lim\limits_{ص \to ٢} \dfrac{ق(ص)}{ص-٢} \times \lim\limits_{ص \to ٢} \dfrac{١}{ص+١٠}$

$= ٤ \times ٥ \times \dfrac{١}{١٢} = \dfrac{٥}{٣}$

تدريب: $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{هـ(س)}{س-٣} = ٦$

جد $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{هـ(٢س+١)}{س^{٢}-س}$

نهاية الاقترانات الدائرية

مراجعة هامة

الزاوية / النسبة	صفر	٣٠ $\frac{\pi}{6}$	٤٥	٦٠ $\frac{\pi}{3}$	٩٠ $\frac{\pi}{2}$	١٨٠ π	٢٧٠ $\frac{3\pi}{2}$
جا	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	صفر	-1
جتا	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	صفر	-1	صفر
ظا	صفر	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرفة	صفر	غير معرفة

ملاحظة: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

النسب الموجبة في الدورة الكاملة

جا	كل
ظا	جتا

زاوية المرجع: تستخدم للتحويل الزوايا مع المحافظة على النسبة (الاقتران)

جا(π − هـ) = جاهـ
جتا(π − هـ) = − جتاهـ
ظا(π − هـ) = − ظاهـ

جا(π + هـ) = − جاهـ
جتا(π + هـ) = − جتاهـ
ظا(π + هـ) = ظاهـ

جا(2π − هـ) = − جاهـ
جتا(2π − هـ) = جتاهـ
ظا(2π − هـ) = − ظاهـ

متطابقات هامة

1. جا^{2}س + جتا^{2}س = ١
2. جا٢س = ٢ جاس جتاس
3. جتا٢س = جتا^{2}س − جا^{2}س

* جتا٢س = ١ − ٢جا^{2}س
* جتا٢س = ٢جتا^{2}س − ١

4. ١ + ظا^{2}س = قا^{2}س
5. ١ + ظتا^{2}س = قتا^{2}س
6. جاس = جتا($\frac{\pi}{2}$ − س)
7. جتاس = جا($\frac{\pi}{2}$ − س)
8. جاس + جاص = ٢ جتا$\frac{س + ص}{2}$ جا$\frac{س - ص}{2}$
9. جتاس − جتاص = −٢ جا$\frac{س + ص}{2}$ جا$\frac{س - ص}{2}$
10. جا(س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص
11. جتا(س ± ص) = جتاس جتاص ∓ جاس جاص
12. ظا(س ± ص) = $\frac{\text{ظاس} \pm \text{ظاص}}{1 \mp \text{ظاس ظاص}}$
13. جا^{2}س = $\frac{1}{2}$(١ − جتا٢س)
14. جتا^{2}س = $\frac{1}{2}$(١ + جتا٢س)

ملاحظة: التعويض المباشر هو الأصل.

تدريب: $\text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{س\sqrt[3]{س} - ١٦}{س - ٨}$

أمثلة عامة على المطلق وأكبر عدد صحيح

وزارة: $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{[\frac{س}{٢} + ٤] + س}{|س| - ٢}$

الحل: $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٢ + س}{-س - ٢}$

$= \text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{٢ + س}{-(س + ٢)} = -١$

مثال: $ق(س) = \begin{cases} [س + ٢] & س \le ٠ \\ \frac{|س|}{س} & س > ٠ \end{cases}$

الحل: نعيد التعريف حول س = ٠

$ق(س) = \begin{cases} ١ & -١ \le س < صفر \\ \frac{س}{س} & س > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} ١ & ٠ > س \ge -١ \\ ١ & س > ٠ \end{cases}$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٠^+} ق = ١ ، \text{نهـا}_{س \to ٠^-} ق = ١$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٠} ق(س) = ١$

تدريب: $\text{نهـا}_{س \to ١^+} \frac{|س - ١|}{س - ١}$

مثال: $\text{نهـا}_{س \to ٣^+} \frac{س^٢ - س - ٦}{[س] - س}$

الحل: $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)}{٣ - س} = -٥$

مثال: $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س}$

الحل: $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{-س + ٣ - (-٢س + ٣)}{س}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س}{س} = ١$

تدريب: $\text{نهـا}_{س \to ٢} \left| \frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٣} \right|$

تدريب: $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{|س^٢ - ٣|س||}{س - ٢}$

تدريب: $\text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}}{س + ٢}$

تدريب: أ) $\text{نهـا}_{س \to ٣^+} [س + ١]$

ب) $\text{نهـا}_{س \to ٣} [س + ١]$

ج) $\text{نهـا}_{س \to ٣^-} [س + ١]$

تدريب وزارة ٢٠١٤ $\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{|\sqrt{س^٣} - ٢|س||}{٢س^٢ - ٥س - ١٢}$

تدريب: $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٥ - |س - ٣|}{س^٢ - ٤}$

تدريب: $\text{نهـا}_{س \to ٢^-} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} + [س - ١]$

تدريب: $\text{نهـا}_{س \to ١^+} \frac{(س - ١)}{س - ١} + \sqrt{٥ - ١}$

مثال: جد النهايات التالية

$\boxed{1}$ $\displaystyle \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{ظا}^2 س - 2\,\text{جا}\,س\ \text{قا}^2 س}{\text{جا}\,2س}$

الحل: $\displaystyle \frac{\text{ظا}^2 \frac{\pi}{3} - 2\,\text{جا}\frac{\pi}{3}\ \text{قا}^2\frac{\pi}{3}}{\text{جا}\ 2 \times \frac{\pi}{3}}$

$\displaystyle = \frac{\sqrt{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\displaystyle = \frac{\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\displaystyle = -3\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -6$

مثال: $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}\,س}{س}$

الحل: غ.م

مثال: $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\,3س - \text{جا}\,س}{س+1}$

الحل: صفر

مثال: $\displaystyle \lim_{س \to 3} \text{جتا}\,\pi س - \text{جا}\,\pi س =$

الحل $= -1$

* نستطيع إستعمال الطرق السابقة اذا كان التعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال: $\displaystyle \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س}$

الحل: $\displaystyle \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س)(\text{جتا}\,س + \text{جا}\,س)}{\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س}$

$= \sqrt{2}$

مثال: $\displaystyle \frac{1 - \sqrt{\text{جتا}\,س}}{\text{جتا}^2 س - 5\,\text{جتا}\,س + 4} \times$ مرافق تربيعي

$\displaystyle = \frac{1}{2} \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,س}{(\text{جتا}\,س - 1)(\text{جتا}\,س - 4)}$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-3} = \frac{1}{-6}$

نظرية: $\displaystyle \boxed{\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\,س}{س} = 1}$

مثال: جد النهايات التالية

$\boxed{1}$ $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{جا}\,س}$

الحل: نقسم البسط والمقام على س

$\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\frac{س}{س}}{\frac{\text{جا}\,س}{س}} = \frac{1}{1} = 1$

$\boxed{2}$ $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\,3س}{5س}$ نفرض ان ص = ٣س

$\displaystyle \Leftarrow \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}\,ص}{\frac{5ص}{3}}$

$\displaystyle = \frac{3}{5} \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}\,ص}{ص} = \frac{3}{5}$

[11] $ق(س) = \begin{cases} س^{٤} + \sqrt{س+١} & ، -١ \le س < ٠ \\ [س] + ٥س - ٢ & ، ٠ \le س \le ١ \end{cases}$

ابحث اتصال الاقتران ق على الفترة $[-١ ، ١]$

(٨ علامات)

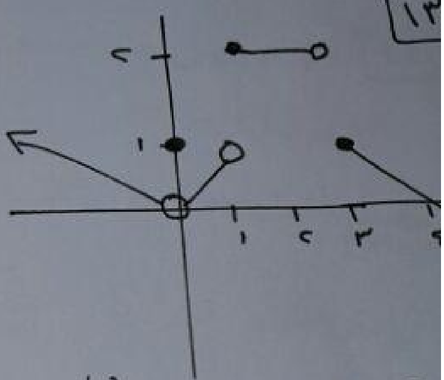
[12] $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$

وكانت $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٤} + ٢ك - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

جد قيمة ن ؟

(٥ علامات)

[13]



... قيم م حيث $\underset{س \to م}{\text{نها}}$ ق(س)

... غير موجودة

(٢ علامة)

... ه اقترانات

[15] $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س + جا^{٢} س}{٣س}$

(٢ علامة)

[16] جد قيمة

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ ٧س³ ظتا²(٢س) قتا(٥س)

(٥ علامات)

[17] $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٣س} + |س-١| & ، -٢ \le س < ٠ \\ \frac{٤}{س+١} & ، ٠ \le س < ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) على $[-٢ ، ٣]$

(٨ علامات)

[18] هـ اقتران كثير حدود

وكانت $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} (هـ(س) - ٥ - ٣ب) = ٢$

جد قيمة ب ؟

(٥ علامات)

مثال: ق(س) = [٥س - ١٠]

جد ١) نهـا ق(س) عندما س ← ٣

٢) نهـا ق(س) عندما س ← ٠

٣) نهـا ق(س) عندما س ← ٢

الحل:

١) نهـا [٥س - ١٠] = ٥ عندما س ← ٣

٢) نهـا عندما س ← ٠

٣) نهـا ١٠ - ١٠ = صفر عندما س ← ٢⁺

نهـا -١٠ + ١٠ = صفر عندما س ← ٢⁻

⇐ نهـا ق(س) = صفر عندما س ← ٢

مثال: ق(س) = [س - ١]

نجد ١) نهـا ق(س) عندما س ← ٢

٢) نهـا ق(س) عندما س ← ٢.٥

الحل: نعيد التعريف.

ق(س) = { صفر ، ١ ≤ س < ٢
  ١ ، ٢ ≤ س < ٣ }

١) نهـا ق(س) = ١ عندما س ← ٢⁺

نهـا ق(س) = صفر عندما س ← ٢⁻

⇐ نهـا ق(س) غ.م عندما س ← ٢

٢) نهـا ق(س) = نهـا ١ = ١ عندما س ← ٢.٥

خلاصة:

في اقتران أكبر عدد صحيح

١) إذا كان التعويض المباشر [عدد صحيح]
نعيد التعريف وتكون النهاية
عند س ← ؟ غ.م

٢) إذا كان التعويض المباشر [عدد غير صحيح]
نأخذ الجواب المباشر ولا داعي لإعادة
تعريف

٣) إذا كان التعويض الكلي صفر
نعيد التعريف

تدريب: إذا كان ق(س) =
[س + ٥]

هـ(س) = [٤ - س]

نجد ما يلي

١) نهـا ق(س) عندما س ← ٢.٥

٢) نهـا هـ(س) عندما س ← ٢.٥

٣) نهـا ق(س) + هـ(س) عندما س ← ٢.٥

٤) نهـا ق(س) عندما س ← ١

٥) نهـا هـ(س) عندما س ← ١

٦) نهـا ق(س) + هـ(س) عندما س ← ١

مثال :- ل(س) = ٤

هـ(س) = ٢س^٣ - ٣

جد ١) نهـا (س←١) (هـ + ل)(س)

٢) نهـا (س←١) (هـ × ل)(س)

٣) نهـا (س←١) ٤√((هـ + ل)(س))

٤) نهـا (س←١) (ل/هـ)(س)

الحل:

١) نهـا (س←١) (هـ + ل)(س) = -١ + ٤ = ٣

٢) نهـا (س←١) (هـ × ل)(س) = -١ × ٤ = -٤

٣) نهـا (س←١) ٤√((هـ + ل)(س)) = ٤√٣

٤) نهـا (س←١) (ل/هـ)(س) = ٤/-١ = -٤

تمرين إذا كانت نهـا (س←٠) ق(س) = ٤

فجد أ) نهـا (س←٠) ٣√(٢ ق(س))

ب) نهـا (س←٠) (س^٢ ق(س) - ق(س))^٢ + ٢س

تمرين :- إذا كانت نهـا (س←١) ق(س) = ٥ ، نهـا (س←١) هـ(س) = -٣

فجد ما يلي :-

١) نهـا (س←٢) (٣ هـ(س) - (ق(س))^٢ + ١)

٢) نهـا (س←١) (هـ(س) - ٣ق^٢(س)) × هـ(س)

٣) نهـا (س←٣) (ق(س) - ٢) / (س - ٢)

مثال :- إذا كان ق(س) = |٦ - ٢س|

فجد نهـا (س←٣) ق(س) ، نهـا (س←-٣) ق(س)

الحل :- نعيد التعريف

ق(س) = { ٦ - ٢س ، س ≤ ٣ ؛ ٢س - ٦ ، س > ٣ }

⟸ نهـا (س←+٣) ق(س) = نهـا (س←-٣) ق(س)

⟸ نهـا (س←٣) = صفر

نهـا (س←-٣) ٦ - ٢س = ١٢

خلاصة (القيمة المطلقة)

* في اقتران القيمة المطلقة نعوض مباشرة
* فإذا كان التعويض ≠ صفر نأخذ القاعدة المعنية ولا داعي لإعادة التعريف
* إذا كان التعويض = صفر نعيد التعريف

نظريات في النهايات

نظرية [1]

[1] أ، ب عددين حقيقيين

فإن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ب} = \text{ب}$

$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}$ الثابت = الثابت نفسه

[2] أ ∈ ح

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}$

حيث ن = ١، ٢، ٣، ....

نظرية [2]

ق، هـ اقترانين، أ، ب، جـ، م

أ، ب، جـ، م ∈ ح

بحيث $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ب}$

$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = \text{جـ}$

فإن

[1] $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق} \pm \text{هـ} = \text{ب} \pm \text{جـ}$

[2] $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{م ق(س)} = \text{م} \times \text{ب}$

[3] $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} \times \text{هـ(س)} = \text{ب} \times \text{جـ}$

[4] $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$

ب > صفر، ن عدد زوجي

[5] $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ ، جـ ≠ ٠

نتيجة: إذا كان ق(س) كثير حدود

[أ] أ ∈ ح، فإن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$

[ب] $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ب}$ ،

فإن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ (\text{ق(س)})^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}}$

حيث ن عدد طبيعي.

مثال: ق(س) = ٩س − ٢س^{٣}

جد [1] $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$

[2] $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \sqrt{\text{ق(س)}}$

الحل:

[1] ٩س − ٢س^{٣} = ٩×٢ − ٢(٢)^{٣}

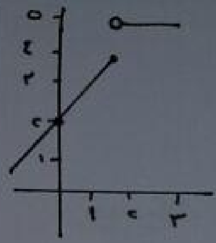
= ١٨ − ١٦

= ٢

[2] $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \sqrt{\text{ق(س)}} = \sqrt{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}}$

$= \sqrt{٢}$

[٢] $ق(س) = \begin{cases} س+٣ & س \le ٢ \\ ٥ & س > ٢ \end{cases}$



أ) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$

ب) $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$

الحل:

أ] $\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س) = ٥$

$\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س) = ٤$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$ غ.م

ب] $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = ٥$

تمرين ارسم

$ق(س) = \begin{cases} س^٢+١ & س \le ٢ \\ ٢س+١ & س > ٢ \end{cases}$

ثم جد

[١] $\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س)$

[٢] $\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س)$

[٣] $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$

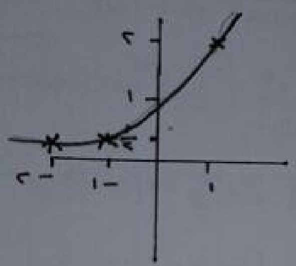
تمرين $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|-١}{س} & س \ne ٠ \\ ٥ & س = ٠ \end{cases}$

ارسم ثم جد $\lim\limits_{س \to ٠} ق(س)$ من الرسم

مثال: $ق(س) = ٢^س$

ارسم ثم جد $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ من الرسم

س	١-	٠	١
$٢^س$	$\frac{١}{٢}$	١	٢



$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ١} ق(س) = \frac{١}{٢}$

تمرين $ق(س) = \sqrt{س-١}$

جد

[١] $\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س)$

[٢] $\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س)$

[٣] $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$

[٤] $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$

مثال: $\lim\limits_{س \to 0} \frac{ق(س)}{س^2} = -2$

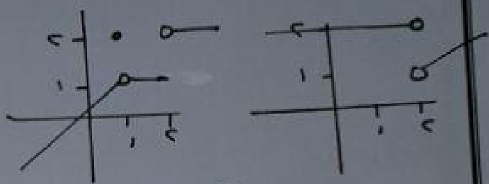
جد $\lim\limits_{س \to 0} \frac{ق(س)}{س}$

الحل: $\lim\limits_{س \to 0} \frac{ق(س)}{س} = \lim\limits_{س \to 0} \frac{س\, ق(س)}{س^2}$

$= \lim\limits_{س \to 0} س \times \lim\limits_{س \to 0} \frac{ق(س)}{س^2}$

$= 0 \times -2 =$ صفر

تمرين:



بالاعتماد على الأشكال في الأعلى جد

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{س \to 2} ق(س)$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{س \to 2} هـ(س)$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{س \to 2} ق(س) + هـ(س)$

نلاحظ: أنه إذا كانت $\lim\limits_{س \to م} ق(س)$ ، $\lim\limits_{س \to م} هـ(س)$ غ.م

فإن $\lim\limits_{س \to م} ق + هـ$ ليست بالضرورة غ.م

مثال: $\lim\limits_{س \to -1} ق(س) = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{س \to -1} هـ(س) = -2$

جد كل مما يلي

$\boxed{أ}$ $\lim\limits_{س \to -1} \left(ق(س) - \frac{1}{هـ(س)}\right)$

$\boxed{ب}$ $\lim\limits_{س \to -1} \sqrt[3]{ق(س) - \frac{1}{2}}$

الحل:

$\boxed{أ}$ $\lim\limits_{س \to -1} ق(س) - \frac{1}{هـ(س)} =$

$\frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1$

$\boxed{ب}$ $\sqrt[3]{\lim\limits_{س \to -1} ق(س) - \frac{1}{2}} =$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} =$ صفر

تمرين: $هـ(س) = [\![2س + 1]\!]$

جد ما يلي

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} هـ(س)$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} هـ(س)$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^5 - 32}{س - 2}$

بالقسمة الطويلة

$= \lim\limits_{س \to 2} \dfrac{(س-2)(س^4 + 2س^3 + 4س^2 + 8س + 16)}{(س-2)}$

$= 5 \times 16 = 80$

تمرين: $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{س^4 - 81}{س^3 - 27}$

مثال: $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{1}{س-2} - \dfrac{2}{س^2+4س-12}$

$= \lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^2 + 4س - 12 - 2س + 4}{(س-2)(س^2+4س-12)}$

$= \lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^2 + 2س - 8}{(س-2)(س^2+4س-12)}$

$= \lim\limits_{س \to 2} \dfrac{(س-2)(س+4)}{(س-2)(س^2+4س-12)}$

$= \dfrac{6}{صفر}$ غ.م

تمرين: $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1}{س}\left(\dfrac{1}{5+س} - \dfrac{1}{5-س}\right)$

تمرين: $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^3 + 3س - 4}{س^2 - 1}$

مثال: $\lim\limits_{س \to 8} \dfrac{(س+1)^2 - 81}{8 - س}$

الحل: $\lim\limits_{س \to 8} \dfrac{(س+1-9)(س+1+9)}{8-س}$

$\lim\limits_{س \to 8} \dfrac{(س-8)(س+10)}{(8-س)}$

$= -18$

مثال: $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{49^س - 7^س}{1 - 7^س}$

الحل: $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{7^{2س} - 7^س}{1 - 7^س}$

$= \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{7^س(7^س - 1)}{1 - 7^س}$

$= -1$

ونستطيع البدء بالاستبدال

تمرين: $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{(5^{2س} - 25)(5^س - 1)}{5^س - 5}$

وزارة جد $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\frac{1}{2+س} - \frac{1}{2}}{س}$

مثال:

اثبت أن $\lim\limits_{س \to أ} \dfrac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن س^{ن-1}$ ، ن ∈ ط

الحل: بالقسمة الطويلة

$\lim\limits_{س \to أ} \dfrac{(س-أ)(س^{ن-1} + أ س^{ن-2} + \cdots)}{(س-أ)}$

$= أ^{ن-1} + أ^{ن-1} + \cdots + أ^{ن-1}$

$= ن أ^{ن-1}$

مثال: جد كل مما يلي

1) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 1} \sqrt{\frac{\text{س}^2-1}{\text{س}-1}}$

2) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{\text{س}^2-1}}{\sqrt{\text{س}-1}}$

الحل: نبحث المجال لما تحت الجذر

البسط س^2-1 ‏ ++ | -- | ++ عند -1 ، 1

$\text{س} = \pm 1$

المقام $\text{س}-1=1$ ‏ ------ | +++ عند 1

$\text{س}=1$

الكسر ‏ --- | +++ | +++ عند -1 ، 1

نلاحظ أن الاقتران معرف على اليمين واليسار

$\Leftarrow \displaystyle\lim_{\text{س}\to 1} \sqrt{\frac{\text{س}^2-1}{\text{س}-1}} = \sqrt{2}$

$\displaystyle\lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\sqrt{\text{س}^2-1}}{\sqrt{\text{س}-1}}$ لاحظ أن الجذرية معرفة على يمين (1)

$\Leftarrow \displaystyle\lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\sqrt{\text{س}^2-1}}{\sqrt{\text{س}-1}} = \sqrt{\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2-1}{\text{س}-1}} = \sqrt{2}$

$\displaystyle\lim_{\text{س}\to 1^-} \text{ق}$ غ.م لأن الجذرية غير معرفة على يسار العدد (1)

$\Leftarrow \displaystyle\lim_{\text{س}\to 1} \text{ق(س)}$ غ.م

تدريب: جد ما يلي

1) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 4^+} \frac{\sqrt{\text{س}^2-16}}{\sqrt{\text{س}-4}}$

2) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}^2-16}}{\sqrt{\text{س}-4}}$

3) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 1} \sqrt{\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}}$

مثال: $\displaystyle\lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{ق(س)}+5}{\text{س}-2} = -2$

نجد

1) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to -2} (\text{ق(س)} + 2\text{س})$

2) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to -2} \text{ق}^2\text{(س)} + 2\text{س}$

3) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to -2} \text{ق(س)} + 2\,\text{ق(س)}$

تدريب: $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 2} \text{ق(س)} = 4$

$\text{ق}(2) = 5$

جد $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 2} \text{ق(س)} - 2\,\text{ق}(2)$

الطريقة الرياضية

الأصل في النهايات التعويض المباشر فإذا كان ناتج التعويض

١) عدد حقيقي نقبل به

(مع ملاحظة أن $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد} \neq ٠}$ = صفر مقبول)

٢) $\frac{\text{عدد} \neq ٠}{\text{صفر}}$ ∴ تكون النهاية غ.م

٣) $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نلجأ إلى إحدى الطرق التالية

١) التحليل

٢) الضرب بالمرافق

٣) الاستبدال

٤) الإضافة والطرح.

تمرين :- جد النهايات التالية عند النقاط المبينة إزاء كل منها

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ س^٢ + ٢س$

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ ق(س)$ حيث

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & س < ١ \\ س^٢ + ١ & س \geq ١ \end{cases}$$

٣) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{٢س^٢ - ٣ - س}{٢س - ١}$

٤) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{٥س - س^٢}{س + ٥}$

٥) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \sqrt[٣]{س^٢ - ١} + \frac{٢س}{س^٢ - ٥}$

١) التحليل

تستخدم غالباً في حالة $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$

ملاحظة :- إذا كان ناتج تعويض ∞ × ∞ أو ∞ - ∞ نكامل النهاية مثل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

لا تنسى الأصل تعويض مباشر

أمثلة :- جد النهايات التالية

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س - ٣} = \frac{٢٤}{٠}$

غ.م

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س^٣ - ٨}$

نحلل باستخدام القسمة التركيبية أو الطويلة البسط والمقام على ما تحت النهاية (س - ٢)

$$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{(س-٢)(س^٢+٢س+١)}{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}$$

$$= \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$$

$\boxed{٤}$ $\lim\limits_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س - ٧}$

الحل

$\lim\limits_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س - ٧} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}{\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}$

$= \frac{١}{١٢} \lim\limits_{س \to ٧} \frac{س+١-٨}{س-٧} = \frac{١}{١٢}$

نلاحظ : في المرافق التكعيبي $(س^٢ + أس + أ^٢)$ يكون ناتج التعويض هو $٣أ^٢$ كما في المثال السابق

$٤ + ٤ + ٤ = ٣ \times ٤ = ١٢$

وزارة جد $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{\sqrt{٦-س} - ٣}{س+٣}$

وزارة جد $\lim\limits_{س \to -٨} \frac{\sqrt{١-س} - ٣}{٢ + \sqrt[٣]{س}}$

مرافقه تربيعي $(\sqrt{١-س} + ٣)$ وتكعيبي $٤ - ٢\sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^٢}$

$= \frac{١٢}{-٦} \lim\limits_{س \to -٨} \frac{-٨-س}{س+٨}$

$= -٢ \times \lim\limits_{س \to -٨} \frac{\cancel{-س+٨}}{\cancel{س+٨}}$

$= -٢$

وزارة جد $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س+١} - ٢}{س-١}$

مرافقه تربيعي $\sqrt{٣س+١} + ٢$

$= \frac{١}{٤} \lim\limits_{س \to ١} \frac{٣س+١-٤}{س-١}$

$= \frac{١}{٤} \lim\limits_{س \to ١} \frac{٣\cancel{(س-١)}}{\cancel{(س-١)}}$

$= \frac{١}{٤}$

تدريب وزارة: جد $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤-س} - \sqrt{س}}{٢-س}$

تدريب: جد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+٦} - ٣}{\sqrt[٣]{٨س+٣} - ٣}$

تدريب: جد $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{\sqrt{س+٦} - ٢}{س + \sqrt{\;} - ٤ - س}$

تدريب: $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ٤\sqrt{س} + ٣}{س^٢ - ١}$

[2] طريقة الضرب بالمرافق

نستخدم عند وجود جذور تحتوي أحد المرافقين التربيعي أو التكعيبي

جدول توضيحي

المرافق	المرافق	حاصل ضربهما
$\text{س} - \text{م}$	$\text{س} + \text{م}$	$\text{س}^2 - \text{م}^2$
$\text{س} - \text{م}$	$\text{س}^2 + \text{م}\text{س} + \text{م}^2$	$\text{س}^3 - \text{م}^3$
$\text{س} + \text{م}$	$\text{س}^2 - \text{م}\text{س} + \text{م}^2$	$\text{س}^3 + \text{م}^3$

أمثلة :- جد النهايات التالية

[1] $\text{نها}_{\text{س} \to 2} \dfrac{\sqrt{\text{س}+2} - 2}{\text{س} - 2}$

الحل: $\text{نها}_{\text{س} \to 2} \dfrac{\sqrt{\text{س}+2} - 2}{\text{س} - 2} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+2} + 2}{\sqrt{\text{س}+2} + 2}$

نلاحظ أننا نستطيع التعويض في المرافق في المقام مباشرة ونخرجها خارج النهاية .

$= \dfrac{1}{\sqrt{2+2} + 2} \; \text{نها}_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س} + 2 - 4}{\text{س} + 2}$

$= \dfrac{1}{4}$

[2] $\text{نها}_{\text{س} \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2\text{س}^2} - 2}{\text{س}^2 - 4}$

$\text{نها}_{\text{س} \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2\text{س}^2} - 2}{\text{س}^2 - 4} \times \dfrac{(\sqrt[3]{2\text{س}^2})^2 + 2\sqrt[3]{2\text{س}^2} + 4}{(\sqrt[3]{2\text{س}^2})^2 + 2\sqrt[3]{2\text{س}^2} + 4}$

$= \text{نها}_{\text{س} \to 2} \dfrac{2\text{س}^2 - 8}{(\text{س}^2 - 4)(12)}$

$= \text{نها}_{\text{س} \to 2} \dfrac{2\cancel{(\text{س}^2 - 4)}}{(12)\cancel{(\text{س}^2 - 4)}} = \dfrac{1}{6}$

[3] $\text{نها}_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt{3\text{س}^2 + 1} - 2}{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}$

الحل: نضرب البسط والمقام بالمرافق التربيعي $(\sqrt{3\text{س}^2 + 1} + 2)$

والمرافق التكعيبي $\sqrt[3]{\text{س}^2} + \sqrt[3]{\text{س}} + 1$

$\Leftarrow \text{نها}_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt{3\text{س}^2 + 1} - 2}{\sqrt[3]{\text{س}} - 1} \times \dfrac{\sqrt{3\text{س}^2 + 1} + 2}{\sqrt{3\text{س}^2 + 1} + 2}$

$= \text{نها}_{\text{س} \to 1} \dfrac{3\text{س}^2 + 1 - 4}{(\sqrt[3]{\text{س}} - 1)(4)}$

$= \text{نها}_{\text{س} \to 1} \dfrac{3\text{س}^2 - 3}{(\sqrt[3]{\text{س}} - 1)(4)} \times \dfrac{(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + \sqrt[3]{\text{س}} + 1}{(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + \sqrt[3]{\text{س}} + 1}$

$= \text{نها}_{\text{س} \to 1} \dfrac{(3\text{س}^2 - 3)(3)}{(4)(\text{س} - 1)}$

$= \text{نها}_{\text{س} \to 1} \dfrac{9(\text{س}^2 - 1)}{4(\text{س} - 1)}$

$= \text{نها}_{\text{س} \to 1} \dfrac{9\cancel{(\text{س} - 1)}(\text{س} + 1)}{4\cancel{(\text{س} - 1)}}$

$= \dfrac{9 \times 2}{4} = \dfrac{9}{2}$

تمرين أعد تعريف

ق(س) = |س| − ⟦س⟧

على الفترة [−٢ ، ٢]

ثم ارسم الاقتران الناتج

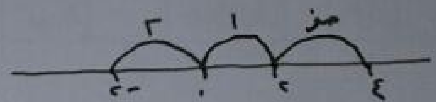
مثال: أعد تعريف الاقتران على الفترة المطلوبة

ق(س) = ⟦٢ − ½ س⟧

−٢ ≤ س < ٤

الحل: ل = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٢

ق(س) =
- ٣ ، س = −٢
- ٢ ، −٢ < س < ٠
- ١ ، ٠ < س ≤ ٢
- صفر ، ٢ < س < ٤



* ملاحظة: يجب أن نغطي الفترة المطلوبة تماماً

* نخضع للمساواة قاعدة مستقلة

تدريب: أعد تعريف

ق(س) = ⟦س + ٣⟧

−١ < س ≤ ١

مثال: إذا كانت م(س) = $\sqrt{١-س}$
اعتمد الشكل

١) نهـا م(س) ، س ← ١+
٢) نهـا م(س) ، س ← ١−
٣) نهـا م(س) ، س ← ١

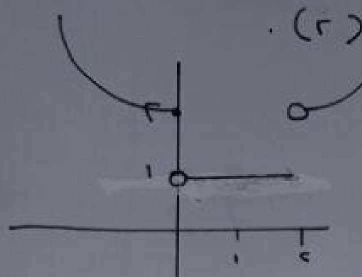
الحل:
١) غ.م
٢) صفر
٣) غ.م

مثال: الشكل التالي يمثل م(س) = [س] − س ، س ∈ [−٢،٢]
جد ما يلي

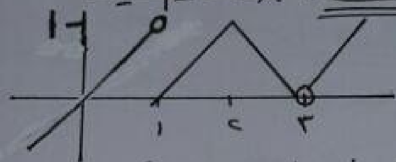
١) نهـا م(س) ، س ← ٠+
٢) نهـا م(س) ، س ← ١
٣) نهـا م(س) ، س ← ١,٥
٤) م(١)
٥) م(٣)

الحل:-
١) صفر
٢) نهـا م(س) ، س ← ١+ = صفر ، نهـا م(س) ، س ← ١− = −١
⟸ نهـا م(س) ، س ← ١ غ.م
٣) −٠,٥
٤) م(١) = صفر
٥) م(٣) = غ.م

تدريب: جد ما يلي:-
١) نهـا م(س) ، س ← ٢+
٢) نهـا م(س) ، س ← ٢−
٣) نهـا م(س) ، س ← ٢
٤) م(٢).



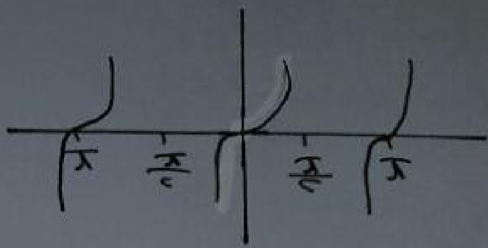
مثال: جد ما يلي



١) نهـا م(س) ، س ← ١
٢) نهـا م(س) ، س ← ٢
٣) نهـا م(س) ، س ← ٣
٤) نهـا م(س) ، س ← ٠

الحل:
١) غ.م
٢) ١
٣) صفر
٤) صفر

ق(س) = ظا س



قا س = $\frac{1}{\text{جتا س}}$

قتا س = $\frac{1}{\text{جا س}}$

ظتا س = $\frac{1}{\text{ظا س}}$

* الاقتران المتشعب

وهو الاقتران المعرّف على أكثر من مجال بأكثر من قاعدة

ملاحظة: رسم الاقتران المتشعب يكون على حسب مجالاته

* اقتران القيمة المطلقة

ق(س) = |هـ(س)|

إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة

[1] نساوي هـ(س) بالصفر

نجد قيمة س

نبحث الإشارات ونبقي الاقتران كما هو في الموجب ونعكس إشارته في السالب

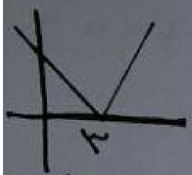
مثال: ق(س) = |س - ٣|

س - ٣ = صفر

س = ٣

ق(س) = { س - ٣ ، س ≥ ٣
　　　　 -س + ٣ ، س < ٣

مكان إشارة المساواة إختياري



* حل المعادلات التي تحتوي على القيمة المطلقة |ق(س)| = أ

ق(س) = أ　　　ق(س) = -أ

مثال:

|س - ٣| = ٣

س - ٣ = ٣　　　س - ٣ = -٣

س = ٦　　　س = صفر

* حل المتباينة التي تحتوي على قيمة مطلقة

[1] |ق(س)| < أ

⟸ -أ < ق(س) < أ

[2] |ق(س)| > أ

ق(س) > أ　　　ق(س) < -أ

* أقل ← نحصر
* أكبر ← نشعب

* الاقتران الجذري ...

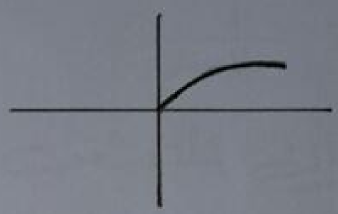
$\sqrt[ن]{ق(س)}$

≫ إذا كانت ن عدد فردي فإن ق(س) معرفة على جميع الأعداد الحقيقية

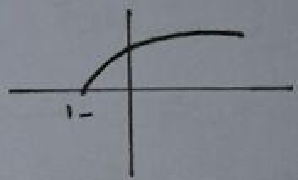
≫ إذا كانت ن عدد زوجي فإنه الاقتران معرف حيث ق(س) ≥ ٠

رسم الاقتران الجذري

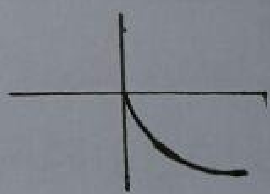
* ق(س) = $\sqrt{س}$



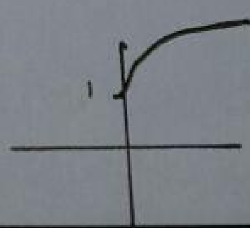
* ق(س) = $\sqrt{س + ١}$



* ق(س) = $-\sqrt{س}$



* ق(س) = $\sqrt{س}$ + ١



مثال: جد مجال ق(س) = $\sqrt{س^2 - ٤}$

نبحث عن إشارات ما تحت الجذر

س^2 - ٤ = ٠

+++ -٢ ------ ٢ +++

⇐ س = ±٢

⇐ المجال [٢، ∞) ، (-∞، -٢]

* الاقتران النسبي ما الكسري

ق(س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س)}$

حيث ل(س) تحتوي على س

يكون الاقتران ق(س) معرف على مجال (هـ ∩ ل) / {أصفار المقام}

مثال: جد مجال ق(س) = $\frac{س - ٣}{س + ١}$

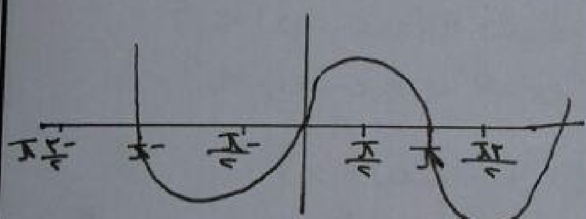
س + ١ = ٠

⇐ س = -١

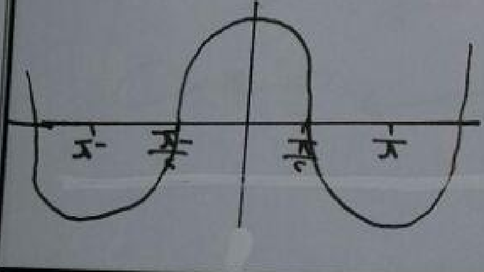
= المجال : ح / {-١}

* الاقترانات الدائرية

ق(س) = جا س



ق(س) = جتا س



** تحليل فرق ومجموع مكعبين

$س^3 + أ^3 = (س + أ)(س^2 - أس + أ^2)$

$س^3 - أ^3 = (س - أ)(س^2 + أس + أ^2)$

مثال: $س^3 - 27$

$س^3 - 27 = (س - 3)(س^2 + 3س + 9)$

في حالة حل فرق بين مكعبين غل مباشرة

$س^3 - 27 = صفر$

$س^3 = 27$

$س = 3$

« تدريب »

» حلل

1) $125 س^3 - \frac{1}{8}$

2) $54 س^3 - 16$

ملاحظة:

العبارة التربيعية الناتجة عن فرق أو مجموع مكعبين دائماً لا تحلل

* تحليل العبارات التكعيبية من الدرجة الثالثة فاموه

* نستخدم القسمة التركيبية

مثال: حلل

$س^3 - 2س^2 - 4س + 8$

نبحث في معاملات الحد الثابت على عدد يصفر العبارة

$(2)^3 - 2(2)^2 - 4 \times 2 + 8 = صفر$

	$س^3$	$س^2$	$س$	ن
$\boxed{2}$	1	-2	-4	8
		2	صفر	-1
	1	صفر	-4	∴

$(س - 2)(س^2 - 4)$

$(س - 2)(س - 2)(س + 2$

* الاقتران الجذري ...

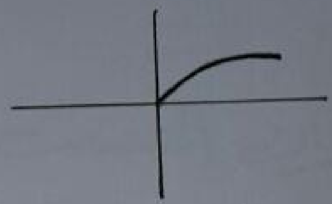
$\sqrt[ن]{ق(س)}$

≫ إذا كانت ن عدد فردي فإن ق(س) معرفة على جميع الأعداد الحقيقية

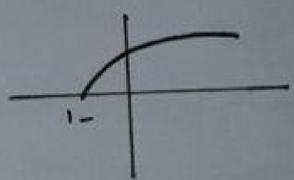
≫ إذا كانت ن عدد زوجي فإنه الاقتران معرف حيث ق(س) ≥ ٠

رسم الاقتران الجذري

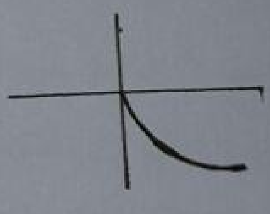
* ق(س) = $\sqrt{س}$



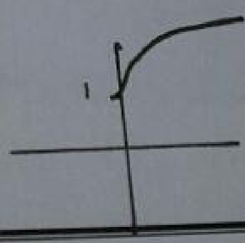
* ق(س) = $\sqrt{س+١}$



* ق(س) = $-\sqrt{س}$



* ق(س) = $\sqrt{س}$ + ١



مثال: جد مجال ق(س) = $\sqrt{س^2 - ٤}$

نبحث عن إشارات ما تحت الجذر

س² − ٤ = ٠

+ + + | − − − − − | + + +
−٢ ، ٢

⇐ س = ± ٢

⇐ المجال [٢، ∞) ، (−∞، −٢]

* الاقتران النسبي والكسري

ق(س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س)}$

حيث ل(س) تحتوي على س

يكون الاقتران ق(س) معرف على مجال (هـ ∩ ل) / {أصفار المقام}

مثال: جد مجال ق(س) = $\frac{س-٣}{س+١}$

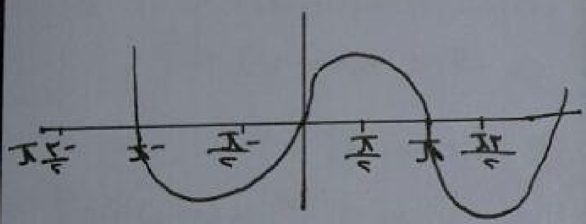
س + ١ = ٠

⇐ س = −١

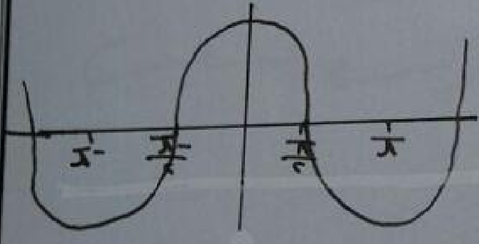
⇐ المجال: ح / {−١}

* الاقترانات الدائرية

ق(س) = جاس



ق(س) = جتاس



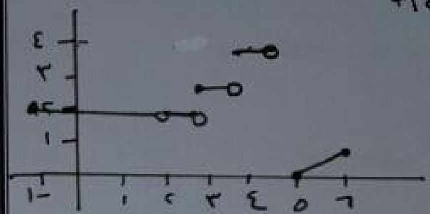
تدريب * جد قيم أ حيث

نهـا$_{س \to أ}$ ق(س) غ.م

* جد مجموعة قيم أ حيث

نهـا$_{س \to أ}$ ق(س) = ٣

* نهـا$_{س \to أ^{+}}$ ق(س) = ٢

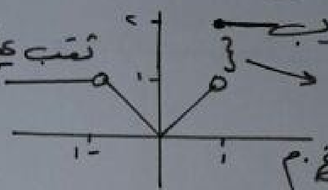


نلاحظ أن النهاية تكون غير موجودة عند القفزات وتكون موجودة عند الثقوب

نهـا$_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ١

ثقب

قفزة

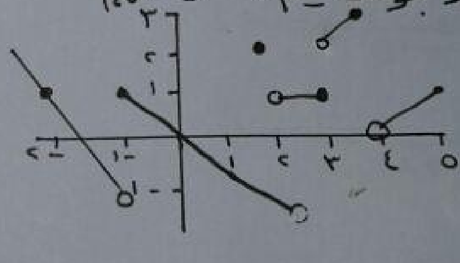


نهـا$_{س \to ١}$ غ.م

تدريب * جد قيم أ بحيث

نهـا$_{س \to أ}$ ق غ.م

* جد مجموعة قيم أ حيث نهـا$_{س \to أ}$ ق(س) = ١



مثال: ارسم ق(س) = [س]

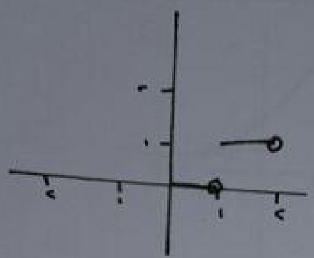
ثم جد نهـا$_{س \to ١}$ ق(س) من خلال الرسم

الحل:

نهـا$_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ١

نهـا$_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = صفر

$\Leftarrow$ نهـا$_{س \to ١}$ ق(س) غ.م



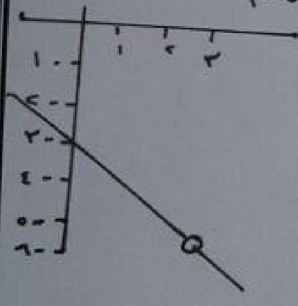
مثال: ارسم الاقترانات التالية ثم جد النهايات عند النقاط المبينة إزاء كل منها

$\boxed{أ}$ ق(س) = $\frac{٩ - س^{٢}}{س - ٣}$ ، س $\neq$ ٣

أ- نهـا$_{س \to ٣^{+}}$ ق(س)

ب- نهـا$_{س \to ٣^{-}}$ ق(س)

جـ- نهـا$_{س \to ٣}$ ق(س)



الحل:

أ) -٦   ب) -٦   جـ) -٦

النهايات

النهاية: هي سلوك الاقتران ق(س) عندما تقترب س من نقطة مثل م
ويكون النهاية موجودة إذا تساوت النهايتان يمين ويسار م
أي أنه:
إذا كانت نها ق(س) (س←م+) = نها ق(س) (س←م−)
فإن نها ق(س) (س←م) موجودة

مثال: من خلال الجدول التالي
جد نها ق(س) (س←٣) حيث
ق(س) = ٢س

→ ٣ ←

س	٢,٩٩	٢,٩٩٩		٣,٠٠١	٣,١
ص	٥,٩٨	٥,٩٩٨		٦,٠٠٢	٦,٢

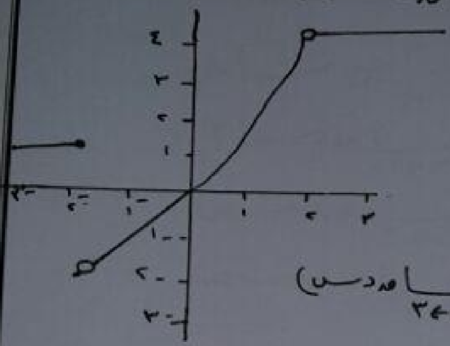
↓
٦

∴ نها ق(س) (س←٣−) = نها ق(س) (س←٣+) = ٦

ونستطيع حساب النهاية من خلال
١ الرسم البياني
٢ الطريقة الرياضية

* طريقة الرسم نستخدمها في حالة طلب السؤال ذلك

مثال: في الرسم التالي والذي يمثل ق(س) جد ما يلي:-



١ نها ق(س) (س←٣)
٢ نها ق(س) (س←٢)
٣ نها ق(س) (س←٠+)
٤ نها ق(س) (س←-٢+)
٥ نها ق(س) (س←-٢−)

الحل:-
١ نها ق(س) (س←٣) = ٤
٢ نها ق(س) (س←٢) = ٤
٣ نها ق(س) (س←٠+) = صفر
٤ نها ق(س) (س←-٢+) = -٢
٥ نها ق(س) (س←-٢−) = ١
∴ نها ق(س) (س←-٢) غير موجودة

مثال: حل المتباينات التالية

$\boxed{1}$ $|س - 1| < 1$

$\Leftarrow -1 < س - 1 < 1$

$\quad\ \ +1 \qquad\ +1 \qquad +1$

$\Leftarrow 0 < س < 2$

$\boxed{2}$ $|س - 1| > 3$

$س - 1 > 3$ ، $س - 1 < -3$

$\Leftarrow س > 4$ ، $\Leftarrow س < -2$

$\boxed{3}$ $|س + 3| < -2$

$\Leftarrow س = \emptyset$

* **اقتران أكبر عدد صحيح**

$ق(س) = [أس + ب]$

$\boxed{1}$ نجد صفر الاقتران أس + ب

«نستطيع البدء من الصفر العادي إذا ب عدد صحيح»

$\boxed{2}$ نجد طول الفترة $ل = \frac{1}{|أ|}$

$\boxed{3}$ نجزء الاقتران حسب طول الفترة

$\boxed{4}$ المساواة إذا كانت أ موجب عند الرقم الأصغر

وإذا كانت أ سالب عند الرقم الأكبر.

مثال: أعد تعريف

$\boxed{1}$ $ق(س) = [2س + 1]$

$2ك + 1 = صفر \Leftarrow س = -\frac{1}{2}$

طول الفترة $ل = \frac{1}{2}$

$$ق(س) = \begin{cases} صفر & -\frac{1}{2} \le س < 0 \\ 1 & 0 \le س < \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \le س < 1 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $ق(س) = [5 - س]$

$5 - س = صفر \Leftarrow س = 5$

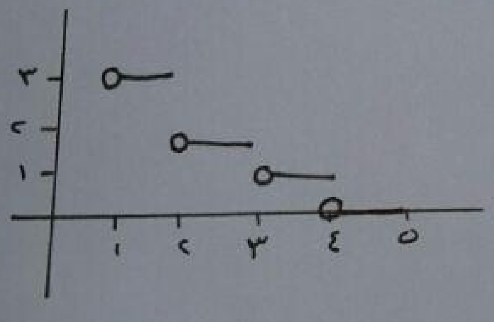
$ل = 1$

$$ق(س) = \begin{cases} 3 & 1 < س \le 2 \\ 2 & 2 < س \le 3 \\ 1 & 3 < س \le 4 \end{cases}$$

ملاحظة: إذا كانت ب عدد صحيح نستطيع البداية من الصفر العادي

لاحظ أن إعادة تعريف أكبر عدد صحيح تكون اقترانات ثابتة لذلك تكون الرسم خطوط أفقية حسب المجال (درج).

مثال: ارسم $ق(س) = [5 - س]$



الإقترانات...

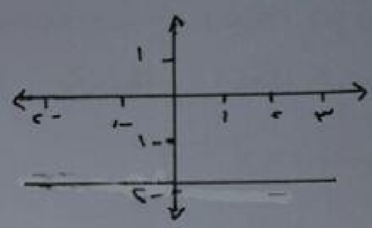
* الإقتران الخطي.

أ- الاقتران الثابت

ق(س) = جـ

رسم الاقتران: خط أفقي عند س = جـ

مثال: ق(س) = -٢



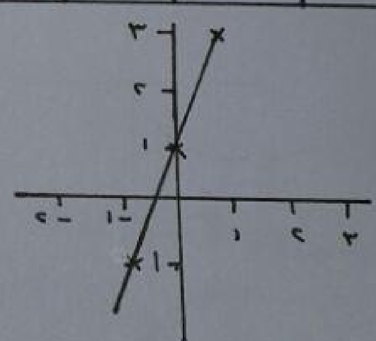
ب- الإقتران الخطي

ق(س) = أس + ب

رسم الإقتران

١) ق(س) = ٢س + ١

س	-١	صفر	١
ص	-١	١	٣



* الإقتران التربيعي

ق(س) = أس² + ب س + جـ

رسم الإقتران

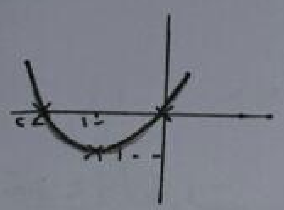
نجد الإحداثي السيني لرأس القطع س = -ب / ٢أ

ثم نفرض قيمة أقل وأكبر منه

مثال: ق(س) = س² + ٢س

-ب / ٢أ = -٢ / ٢ = -١

س	-٢	-١	صفر
ص	صفر	-١	صفر



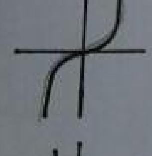
يكون اتجاه فتحة القطع للأعلى إذا كانت أ > ٠

وللأسفل إذا كانت أ < ٠

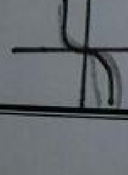
* الإقتران التكعيبي

ق(س) = أس³ + ب س² + جـ س + د

* يحتوي الاقتران التكعيبي على تعريج للأعلى وللأسفل



ق(س) = س³



ق(س) = -س³

مُراجعة عامة ...

* تحليل المعادلات التربيعية

أ س² + ب س + جـ = صفر

[1] في حالة عدم وجود حد مطلق
((نستخدم إخراج عامل مشترك))

مثال: س² - ٥س = صفر

س (س - ٥) = صفر

س = ٠ ، س - ٥ = ٠ ← س = ٥

[2] في حالة عدم وجود ((حد أوسط))
((نستخدم فرق بين مربعين))

س² - أ² = (س - أ)(س + أ)

مثال: س² - ١٦ = صفر

(س - ٤)(س + ٤) = ٠

س = ٤ ، س = -٤

ونستطيع حلها مباشرة

س² - ١٦ = ٠ ⟸ √س² = √١٦

⟸ س = ± ٤

[3] في حالة وجود جميع الحدود ، أ=١
نستخدم التحليل بالأقواس

مثال: س² - س - ٦ = صفر

(س - ٣)(س + ٢) = صفر

س = ٣ ، س = -٢

الرقمين حاصل ضربهما الحد المطلق ومجموعهما الحد الأوسط .

[4] في حالة وجود جميع الحدود ، أ≠١
((نستخدم التحليل بطريقة القريبين والبعيدين)).

مثال: ٢س² + ٥س - ١٢ = صفر

(٢س - ٣)(س + ٤) = صفر

٢س - ٣ = صفر ، س + ٤ = صفر

س = $\frac{٣}{٢}$ ، س = -٤

حاصل ضربهما الحد المطلق ومجموع حاصل ضرب القريبين وحاصل ضرب البعيدين يساوي الأوسط

[5] القانون العام : يستخدم للحل في حالة تعذر الحل بالطرق السابقة.

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

المميز (Δ) = ب² - ٤أجـ

Δ > ٠ يوجد حلان مختلفان

Δ = ٠ يوجد حل واحد فقط

Δ < ٠ لا يوجد حل.

مثال: س² - س - ١ = صفر

س = $\frac{١ \pm \sqrt{١+٤}}{٢}$

$\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

المميز = ب² - ٤أجـ

= ١ - ٤×١×-١

= ١ + ٤

= ٥