مثال ٤: يسير جسم بحيث أن ت = $\frac{1}{ع}$ حيث ع > ٠ ، اذا تحرك الجسم من السكون وقطع مسافة $10\sqrt{2}$ بعد مرور ٤ ثواني فجد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانية واحدة .

الحل: $ت = \frac{دع}{دن} = \frac{1}{ع} \Leftarrow ع\,دع = دن \Leftarrow \int ع\,دع = \int دن$

$\Leftarrow \frac{1}{2}ع^2 = ن + جـ$

تحرك من السكون $\Leftarrow ع(0) = 0 \Leftarrow 0 + 0 = جـ \Leftarrow \boxed{جـ = 0}$

$\Leftarrow \therefore \frac{1}{2}ع^2 = ن \Leftarrow ع^2 = 2ن \Leftarrow ع = \sqrt{2ن} \Leftarrow ع = \sqrt{2} \times \sqrt{ن}$

$ع = \frac{دف}{دن} = \sqrt{2}\sqrt{ن} \Leftarrow دف = \sqrt{2}\sqrt{ن}\,دن \Leftarrow \int دف = \int \sqrt{2}\sqrt{ن}\,دن$

$\Leftarrow ف = \sqrt{2}\int ن^{\frac{1}{2}}\,دن \Leftarrow ف = \sqrt{2} \times \frac{2ن^{\frac{3}{2}}}{3} + جـ$

لكن: $ف(4) = 10\sqrt{2}$

$\therefore ف(4) = \frac{2\sqrt{2}\,(4)^{\frac{3}{2}}}{3} + جـ = 10\sqrt{2} \Leftarrow \frac{2\sqrt{2} \times 8}{3} + جـ = 10\sqrt{2}$

$\Leftarrow جـ = 10\sqrt{2} - \frac{16}{3}\sqrt{2} = \frac{14}{3}\sqrt{2}$ $\boxed{جـ = \frac{14}{3}\sqrt{2}}$

$ف(ن) = \frac{2\sqrt{2}\,ن^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{14\sqrt{2}}{3} \Leftarrow ف(1) = \frac{2\sqrt{2} \times 1}{3} + \frac{14\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

أسئلة سنوات سابقة:

١) قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ث من على ارتفاع ٨٠ قدماً جد معادلة الحركة لهذه الكرة اذا علمت أن تسارع الكرة يساوي -٣٢ قدم/ث^2 .

٢) اذا كان $ق(س) = \sqrt{9 - س^2}$ قابلاً للتكامل في [-٣، ٣] ، فبين دون ايجاد التكامل أنه:
$\int_{-3}^{3} ق(س)\,دس$ تنحصر بين صفر ، ١٨ ⟵ نستخدم نجد أصغر وأكبر قيمة ثم تكامل

٣) اذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً ، فما هي مجموعة قيم ن التي تجعل المساواة

$\int_{-1}^{1} س^ن\,دس = 2\int_{0}^{1} س^ن\,دس$ — نكامل الطرفين

* التكامل بالتعويض : نلجأ للتكامل بالتعويض عندما نلاحظ مشهداً غير مألوف (ليس من الدرجة الأولى (غير خطي)) في الزاوية أو الأس أو تحت الجذر أو داخل قوس أو داخل اقتران أو في المقام .

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

① $\int (\text{٣س}^{٢}+٥)(\text{س}^{٣}+\text{٥س})^{٧}\,\text{دس}$

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٣}+\text{٥س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٢}+٥ \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢}+٥}$

$\Leftarrow \int \cancel{(\text{٣س}^{٢}+٥)}\,\text{ص}^{٧}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٣س}^{٢}+٥}} = \int \text{ص}^{٧}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{٨}}{٨}+\text{ج} = \frac{(\text{س}^{٣}+\text{٥س})^{٨}}{٨}+\text{ج}$

② $\int \frac{\text{س}^{٣}+٥}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}+\text{٢٠س}}}\,\text{دس} = \int (\text{س}^{٣}+٥)(\text{س}^{٤}+\text{٢٠س})^{-\frac{١}{٣}}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٤}+\text{٢٠س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤س}^{٣}+٢٠$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٤(\text{س}^{٣}+٥)}$

$\Leftarrow \int \cancel{(\text{س}^{٣}+٥)}\,(\text{ص})^{-\frac{١}{٣}}\,\frac{\text{دص}}{٤\cancel{(\text{س}^{٣}+٥)}}$

$= \int \frac{\text{ص}^{-\frac{١}{٣}}}{٤}\,\text{دص} = \frac{١}{٤}\times\frac{\text{ص}^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}}+\text{ج}$

$= \frac{٣}{٨}\,\text{ص}^{\frac{٢}{٣}}+\text{ج} = \frac{٣}{٨}(\text{س}^{٤}+\text{٢٠س})^{\frac{٢}{٣}}+\text{ج}$

③ $\int (\text{س}^{٢}+١)\,\text{جتا}(\text{س}^{٣}+\text{٣س}+١)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}+\text{٣س}+١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٢}+٣$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣(\text{س}^{٢}+١)}$

$\Leftarrow \int \cancel{(\text{س}^{٢}+١)}\,\text{جتا ص}\,\frac{\text{دص}}{٣\cancel{(\text{س}^{٢}+١)}}$

$= \frac{١}{٣}\int \text{جتا ص}\,\text{دص} = \frac{١}{٣}\,\text{جا ص}+\text{ج}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{جا}(\text{س}^{٣}+\text{٣س}+١)+\text{ج}$

④ $\int \frac{\text{س}\ \text{قا}^2 \sqrt{\text{س}^2+1}}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2+1}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\cancel{2}\text{س}}{\cancel{2}\sqrt{\text{س}^2+1}}$

$\text{ءس} = \frac{\sqrt{\text{س}^2+1}}{\text{س}}\ \text{ءص}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}}\ \text{قا}^2\text{ص}}{\cancel{\sqrt{\text{س}^2+1}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\text{س}^2+1}}}{\cancel{\text{س}}}\ \text{ءص}$

$= \int \text{قا}^2\text{ص}\ \text{ءص} = \text{ظا ص} + \text{جـ}$

$= \text{ظا}\sqrt{\text{س}^2+1} + \text{جـ}$

* **ملاحظة**: اذا كان التكامل محدود نقوم بتغيير حدود التكامل

⑤ $\int_0^4 \frac{4\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+9}}\ \text{ءس} = \int_0^4 4\text{س}(\text{س}^2+9)^{-\frac{1}{2}}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^2+9$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{2\text{س}}$

عندما $\text{س} = 0$ فإن $\text{ص} = 9$

$\text{س} = 4$ ، $\text{ص} = 25$

$\Leftarrow \int_9^{25} 4\cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \frac{\text{ءص}}{2\cancel{\text{س}}} = 2\int_9^{25} \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{ءص}$

$= 2 \left. \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_9^{25} = 4\sqrt{\text{ص}} \Big|_9^{25} = 4(5-3) = 8$

⑥ $\int_0^1 6\text{س}^2(\text{س}^3+1)^3\ \text{ءس} = \int_1^2 \cancel{6}\text{س}^2\ \text{ص}^3 \frac{\text{ءص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$\text{ص} = \text{س}^3+1$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2}$

عندما $\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 2$

$= 2\int_1^2 \text{ص}^3\ \text{ءص} = \frac{1}{2}\text{ص}^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(16-1) = \frac{15}{2}$

⑦ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}\ \text{ظا}^4\text{س}\ \text{ءس} = \int_0^1 \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{ص}^4 \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$\text{ص} = \text{ظا س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

عندما $\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \Leftarrow \text{ص} = 1$

$= \int_0^1 \text{ص}^4\ \text{ءص} = \frac{\text{ص}^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$

سؤال: $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$ ——— نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\boxed{\text{الاجابة } -4}$

٨) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس جتاس} \left(1 + \text{جا}^2\text{س}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{دس}$

$\text{ص} = 1 + \text{جا}^2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{جاس جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\,\text{جاس جتاس}}$

عندما $\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \text{ص} = 2$

$= \int_{1}^{2} \cancel{\text{جاس جتاس}}\ \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \frac{\text{دص}}{\cancel{2\,\text{جاس جتاس}}}$

$= \frac{1}{2} \int_{1}^{2} \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \text{دص} = \frac{1}{2} \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{1}^{2} = \sqrt{\text{ص}} \Big|_{1}^{2}$

$= \sqrt{2} - 1$

* ملاحظة: لا يجوز التكامل بوجود أكثر من متغير داخل التكامل الواحد وإذا بقي أكثر من متغير نستفيد من الفرض الأصلي أو باستخدام إحدى المتطابقات لتوحيد المتغير.

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int \frac{\text{س}^3}{\sqrt{1 + \text{س}^2}} \text{دس} = \int \text{س}^3 \left(1 + \text{س}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \text{دس}$

$\text{ص} = 1 + \text{س}^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$= \int \text{س}^3 \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \frac{\text{دص}}{2\text{س}} = \frac{1}{2} \int \text{س}^2 \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \text{دص}$

للتخلص من س^2 نستفيد من $1 + \text{س}^2 = \text{ص}$

$\Leftarrow \text{س}^2 = \text{ص} - 1$

$\Leftarrow \frac{1}{2} \int (\text{ص} - 1)\, \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \text{دص} = \frac{1}{2} \int \text{ص}^{\frac{1}{2}} - \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \text{دص} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + \text{ث}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \text{ص}^{\frac{3}{2}} - 2\text{ص}^{\frac{1}{2}} \right) + \text{ث} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \left(1 + \text{س}^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(1 + \text{س}^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) + \text{ث}$

٢) $\int \text{س}^5 \left(\text{س}^3 + 4\right)^{\frac{1}{2}} \text{دس} = \int \text{س}^5 \text{ص}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$\text{ص} = \text{س}^3 + 4$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$= \frac{1}{3} \int \text{س}^3 \text{ص}^{\frac{1}{2}} \text{دص}$

لكن: $\text{س}^3 = \text{ص} - 4$ (من الفرض)

$= \frac{1}{3} \int (\text{ص} - 4)\, \text{ص}^{\frac{1}{2}} \text{دص} = \frac{1}{3} \int \text{ص}^{\frac{3}{2}} - 4\text{ص}^{\frac{1}{2}} \text{دص}$

$= \frac{1}{3} \left(\frac{2\text{ص}^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4 \times 2\,\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + \text{ث} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \left(\text{س}^3 + 4\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3} \left(\text{س}^3 + 4\right)^{\frac{3}{2}} \right) + \text{ث}$

③ $\int \text{س}^5 (\text{س}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \, \text{دس}$ ———— الحل

مثال: اذا كان $\text{م}(1) = 3$ ، $\text{م}(9) = 10$ جد $\int^{2} 6\text{س}^2 \, \text{م}'(\text{س}^3 + 1) \, \text{دس}$

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^3 + 1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

عندما $\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 2 \Leftarrow \text{ص} = 9$

$\Leftarrow \int_1^9 6\text{س}^2 \, \text{م}'(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2} = 2\int_1^9 \text{م}'(\text{ص}) \, \text{دص}$

$= 2\,\text{م}(\text{ص}) \Big|_1^9 = 2\big(\text{م}(9) - \text{م}(1)\big) = 2(10 - 3) = 14$

سؤال: اذا كان $\text{م}(0) = 2$ ، $\text{م}(1) = 6$ جد $\int^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس} \, \text{م}'(\text{جاس}) \, \text{دس}$

$\boxed{\text{الإجابة: } 4}$

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \frac{1}{\text{س}^2} \text{ظا}^2 \frac{1}{\text{س}} \, \text{دس} = \int \frac{1}{\text{س}^2} \text{ظا}^2\text{ص} \times -\text{س}^2 \, \text{دص}$

$\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{\text{س}^2}$

$\text{دس} = -\text{س}^2 \, \text{دص}$

$= -\int \text{ظا}^2\text{ص} \, \text{دص} = -\int (\text{قا}^2\text{ص} - 1) \, \text{دص}$

$= -(\text{ظاص} - \text{ص}) + \text{ج} = -\left(\text{ظا}\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}\right) + \text{ج}$

② $\int \frac{2\text{س} - 1}{\text{ظا}^2(\text{س}^2 - \text{س} + 2)} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 - \text{س} + 2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 1$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س} - 1}$

$= \int \frac{\cancel{2\text{س} - 1}}{\text{ظا}^2\text{ص}} \, \frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س} - 1}} = \int \text{ظتا}^2\text{ص} \, \text{دص}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{ص} - 1) \, \text{دص} = -\text{ظتاص} - \text{ص} + \text{ج}$

$= -\text{ظتا}(\text{س}^2 - \text{س} + 2) - (\text{س}^2 - \text{س} + 2) + \text{ج}$

سؤال: جد التكاملات التالية:

$$①\ \int \frac{\text{جا}\,س}{\text{قتا}^{2}\,س}\,\text{د}س \qquad \text{———} \qquad \text{نفرض } ص = \text{جا}\,س$$

$$②\ \int \frac{\text{جا}^{3}\,س}{\text{جتا}^{7}\,س}\,\text{د}س \qquad \text{———} \qquad \text{نفرض } ص = \text{ظا}\,س$$

$$= \int \frac{\text{جا}^{3}\,س}{\text{جتا}^{3}\,س\ \text{جتا}^{4}\,س}\,\text{د}س$$

مثال: جد التكاملات التالية:

$$①\ \int \text{جتا}^{3}\,س\,\text{د}س = \int \text{جتا}^{2}\,س\ \text{جتا}\,س\,\text{د}س = \int (1 - \text{جا}^{2}\,س)\ \text{جتا}\,س\,\text{د}س$$

$$\text{نفرض } ص = \text{جا}\,س \Leftarrow \frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \text{جتا}\,س \Leftarrow \text{د}س = \frac{\text{د}ص}{\text{جتا}\,س}$$

$$= \int (1 - ص^{2})\ \cancel{\text{جتا}\,س}\ \frac{\text{د}ص}{\cancel{\text{جتا}\,س}} = \int 1 - ص^{2}\,\text{د}ص = ص - \frac{ص^{3}}{3} + \text{ج}$$

$$= \text{جا}\,س - \frac{\text{جا}^{3}\,س}{3} + \text{ج}$$

$$②\ \int \text{جا}\,س \left(\text{ظتا}\,س + \frac{1}{\text{قتا}^{2}\,س} \right) \text{د}س = \int \text{جا}\,س \left(\frac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}\,س} + \text{جا}^{2}\,س \right) \text{د}س$$

$$= \int \text{جتا}\,س + \text{جا}^{3}\,س\,\text{د}س = \int \text{جتا}\,س\,\text{د}س + \int \text{جا}^{3}\,س\,\text{د}س = \text{جا}\,س + \int \text{جا}^{2}\,س\ \text{جا}\,س\,\text{د}س$$

$$\text{نفرض } ص = \text{جتا}\,س \Leftarrow \frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = -\text{جا}\,س \Leftarrow \text{د}س = \frac{\text{د}ص}{-\text{جا}\,س}$$

$$= \text{جا}\,س + \int (1 - \text{جتا}^{2}\,س)\ \text{جا}\,س\,\text{د}س = \text{جا}\,س + \int (1 - ص^{2})\ \cancel{\text{جا}\,س}\ \frac{\text{د}ص}{-\cancel{\text{جا}\,س}}$$

$$= \text{جا}\,س + \int -1 + ص^{2}\,\text{د}ص = \text{جا}\,س - ص + \frac{ص^{3}}{3} + \text{ج}$$

$$= \text{جا}\,س - \text{جتا}\,س + \frac{\text{جتا}^{3}\,س}{3} + \text{ج}$$

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \frac{\text{جتا}^3\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\sqrt{\text{جا س}}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا س}}{\sqrt{\text{جا س}}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جتا س}\,(\text{جا س})^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$= \int \cancel{\text{جتا س}}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{جتا س}}} = \text{ص}^{\frac{1}{2}} \div \frac{1}{2} + \text{ث}$

$= \sqrt{\text{ص}} + \text{ث} = \sqrt{\text{جا س}} + \text{ث}$

$\text{ص} = \text{جا س}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{دس}} = \text{جتا س}$

$\text{دس} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

② $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س}\,(1 - \text{جا}^2\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا س}}{(\text{جا س جتا س})^2}\,\text{دس}$

متطابقة

$= \int \frac{\text{جتا س}}{(\frac{1}{2}\text{جا}2\text{س})^2}\,\text{دس} = \int \frac{\cancel{\text{جتا}2\text{س}}}{\text{ص}^2}\,\frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{جتا}2\text{س}}}$

$= \int \text{ص}^{-2}\,\text{د ص} = \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{ث} = \frac{-1}{\text{ص}} + \text{ث}$

$= \frac{-1}{\frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}} + \text{ث} = \frac{-2}{\text{جا}2\text{س}} + \text{ث}$

$\text{ص} = \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{دس}} = \text{جتا}2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتا}2\text{س}}$

* ملاحظات هامة:

عند وجود $\int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س جتا}^{\text{م}}\text{س دس}$ حيث ن، م أعداد صحيحة موجبة لوجد الحالات التالية:

١) اذا كانت احدى الأسس (١) نفرض الأخرى ص

٢) اذا كانت احدى الأسس زوجية والأخرى فردية نفرض الزوجية

٣) اذا كانت ن، م فرديتان نفرض أي منهما ونفضل الكبرى

٤) اذا كانت ن، م زوجيتان نستخدم المتطابقات

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

① $\int \text{جا}^4\text{س}\ \text{جتا}^3\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$$= \int \text{ص}^4\ \text{جتا}^3\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}} = \int \text{ص}^4\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{دص}$$

$$= \int \text{ص}^4 (1 - \text{جا}^2\text{س})\ \text{دص} = \int \text{ص}^4 (1 - \text{ص}^2)\ \text{دص}$$

$$= \int \text{ص}^4 - \text{ص}^6\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^5}{5} - \frac{\text{ص}^7}{7} + \text{جـ} = \frac{\text{جا}^5\text{س}}{5} - \frac{\text{جا}^7\text{س}}{7} + \text{جـ}$$

② $\int \text{جا}^3\text{س}\ \text{جتا}^3\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$$= \int \text{ص}^3\ \text{جتا}^3\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$$

$$= \int \text{ص}^3\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{دص} = \int \text{ص}^3 (1 - \text{جا}^2\text{س})\ \text{دص}$$

$$= \int \text{ص}^3 (1 - \text{ص}^2)\ \text{دص} = \int \text{ص}^3 - \text{ص}^5\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^4}{4} - \frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{جا}^4\text{س}}{4} - \frac{\text{جا}^6\text{س}}{6} + \text{جـ}$$

③ $\int \text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{دس} = \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س}) \times \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س})\ \text{دس}$

$$= \frac{1}{4}\int 1 - \text{جتا}^2 2\text{س}\ \text{دس} = \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}4\text{س})\right) \text{دس}$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}4\text{س}\ \text{دس} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}4\text{س}\ \text{دس}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{8}\text{جا}4\text{س}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{8}\text{س} - \frac{1}{32}\text{جا}4\text{س} + \text{جـ}$$

"الإرادة تصنع التفوق"

* **ملاحظات هامة:**

عند وجود $\int \text{قا}^{ن}\text{س}\ \text{ظا}^{م}\text{س}\ \text{دس}$ حيث ن، م أعداد صحيحة موجبة يوجد احدى الحالات الآتية:

① اذا كانت ن زوجية نفرض ص = ظاس

② اذا كانت ن، م فرديتان نفرض ص = قاس

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ظا}^{5}\text{س}\ \text{دس} = \int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ص}^{5}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

ص = ظاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{2}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$= \int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ص}^{5}\ \text{دص} = \int (1+\text{ظا}^{2}\text{س})\ \text{ص}^{5}\ \text{دص}$

$= \int (1+\text{ص}^{2})\ \text{ص}^{5}\ \text{دص} = \int \text{ص}^{5} + \text{ص}^{7}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{6}}{6} + \frac{\text{ص}^{8}}{8} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{6}\text{س}}{6} + \frac{\text{ظا}^{8}\text{س}}{8} + \text{جـ}$

② $\int \text{قا}^{5}\text{س}\ \text{ظا}^{3}\text{س}\ \text{دس} = \int \text{ص}^{5}\ \text{ظا}^{3}\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

ص = قاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس ظاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

$= \int \text{ص}^{4}\ \text{ظا}^{2}\text{س}\ \text{دص} = \int \text{ص}^{4}(\text{قا}^{2}\text{س} - 1)\ \text{دص}$

$= \int \text{ص}^{4}(\text{ص}^{2} - 1)\ \text{دص} = \int \text{ص}^{6} - \text{ص}^{4}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{7}}{7} - \frac{\text{ص}^{5}}{5} + \text{جـ} = \frac{\text{قا}^{7}\text{س}}{7} - \frac{\text{قا}^{5}\text{س}}{5} + \text{جـ}$

* **ملاحظة:** نفس الطريقة السابقة عند استخدامها مع $\int \text{قتا}^{ن}\text{س}\ \text{ظتا}^{م}\text{س}\ \text{دس}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \text{جاس}\ \text{جتا}^2(\text{جتاس})\ \text{دس} = \int \cancel{\text{جاس}}\ \text{جتا}^2\text{ص}\ \dfrac{\text{دص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= -\int \text{جتا}^2\text{ص}\ \text{دص} = -\frac{1}{2}\int (1 + \text{جتا}2\text{ص})\ \text{دص}$

$= -\frac{1}{2}\left(\text{ص} + \frac{1}{2}\text{جا}2\text{ص}\right) + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{2}\left(\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{جا}(2\,\text{جتاس})\right) + \text{جـ}$

② $\int \text{س}\ \text{جاس}^2\ \text{ظا}^2(\text{جتاس}^2)\ \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}}\ \cancel{\text{جاس}^2}\ \text{ظا}^2\text{ص}\ \dfrac{\text{دص}}{-2\cancel{\text{س}}\ \cancel{\text{جاس}^2}}$

$\text{ص} = \text{جتاس}^2$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}^2 \times 2\text{س}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{-2\text{س}\ \text{جاس}^2}$

$= -\frac{1}{2}\int \text{ظا}^2\text{ص}\ \text{دص} = -\frac{1}{2}\int \text{قا}^2\text{ص} - 1\ \text{دص}$

$= -\frac{1}{2}\left(\text{ظاص} - \text{ص}\right) + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{2}\left(\text{ظا}(\text{جتاس}^2) - \text{جتاس}^2\right) + \text{جـ}$

مثال: جد $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}}\ \dfrac{\text{دص}}{\text{أ}} = \dfrac{1}{\text{أ}}\int \text{ص}^{\text{ن}}\ \text{دص}$

$= \dfrac{1}{\text{أ}}\ \dfrac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

$= \dfrac{1}{\text{أ}}\ \dfrac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

* ملاحظة: يمكن اعتبار المثال السابق نتيجة لإيجاد تكاملات مشابهة

مثال: ① $\int (3\text{س} - 2)^6\ \text{دس} = \dfrac{1}{3}\ \dfrac{(3\text{س}-2)^7}{7} + \text{جـ}$

② $\int 6(2\text{س} - 1)^{-4}\ \text{دس} = \dfrac{6}{2}\ \dfrac{(2\text{س}-1)^{-3}}{-3} + \text{جـ} = \dfrac{-1}{(2\text{س}-1)^3} + \text{جـ}$

③ $\int (4\text{س}^2+4\text{س}+1)^6 \, \text{د س} = \int \left((2\text{س}+1)^2\right)^6 \, \text{د س} = \int (2\text{س}+1)^{12} \, \text{د س}$

$= \frac{1}{2} \frac{(2\text{س}+1)^{13}}{13} + \text{ث}$

④ $\int \frac{1}{\text{س}^2+10\text{س}+25} \, \text{د س} = \int \frac{1}{(\text{س}+5)^2} \, \text{د س} = \int (\text{س}+5)^{-2} \, \text{د س}$

$= \frac{1}{1} \frac{(\text{س}+5)^{-1}}{-1} + \text{ث} = \frac{-1}{\text{س}+5} + \text{ث}$

⑤ $\int \text{س}^8 \left(\frac{3}{\text{س}} - \frac{2}{\text{س}^2}\right)^4 \, \text{د س} = \int \text{س}^8 \left(\frac{3\text{س}-2}{\text{س}^2}\right)^4 \, \text{د س}$

$= \int \frac{(3\text{س}-2)^4 \, \text{س}^8}{\text{س}^8} \, \text{د س} = \int (3\text{س}-2)^4 \, \text{د س} = \frac{1}{3} \frac{(3\text{س}-2)^5}{5} + \text{ث}$

⑥ $\int \text{س} \times \sqrt[3]{\frac{5}{\text{س}^2} - \frac{2}{\text{س}^3}} \, \text{د س} = \int \text{س} \times \sqrt[3]{\frac{5\text{س}-2}{\text{س}^3}} \, \text{د س}$

$= \int \frac{\sqrt[3]{5\text{س}-2} \; \text{س}}{\text{س}} \, \text{د س} = \int (5\text{س}-2)^{\frac{1}{3}} \, \text{د س} = \frac{1}{5} \times 3 \frac{(5\text{س}-2)^{\frac{4}{3}}}{4} + \text{ث}$

⑦ $\int \text{س} (\text{س}^4 + 2\text{س}^2 + 1)^5 \, \text{د س} = \int \text{س} \left((\text{س}^2+1)^2\right)^5 \, \text{د س} = \int \text{س} (1+\text{س}^2)^{10} \, \text{د س}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^2 + 1$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\text{س} \Longleftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{2\text{س}}$

$= \int \text{ص}^{10} \, \cancel{\text{س}} \, \frac{\text{د ص}}{2 \cancel{\text{س}}} = \frac{1}{2} \int \text{ص}^{10} \, \text{د ص} = \frac{1}{2} \frac{\text{ص}^{11}}{11} + \text{ث}$

$= \frac{\text{ص}^{11}}{22} + \text{ث} = \frac{(\text{س}^2+1)^{11}}{22} + \text{ث}$

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $$\int \frac{(2\text{س}+3)^9}{\text{س}^{11}}\,د\text{س} = \int \frac{1}{\text{س}^2}\left(\frac{2\text{س}+3}{\text{س}}\right)^9 د\text{س}$$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^2}\left(\frac{2\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}}+\frac{3}{\text{س}}\right)^9 د\text{س} = \int \frac{1}{\text{س}^2}\left(2+\frac{3}{\text{س}}\right)^9 د\text{س}$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\text{س}^2}}\,\text{ص}^9\,\frac{\cancel{\text{س}^2}}{-3}\,د\text{ص} = -\frac{1}{3}\int \text{ص}^9\,د\text{ص}$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{\text{ص}^{10}}{10} + ج = -\frac{1}{30}\left(2+\frac{3}{\text{س}}\right)^{10} + ج$$

$$\text{ص} = 2 + \frac{3}{\text{س}}$$

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{-3}{\text{س}^2}$$

$$د\text{س} = \frac{\text{س}^2}{-3}\,د\text{ص}$$

٢) $$\int (1+\text{س})^3(\text{س}^2+2\text{س}+7)^5\,د\text{س}$$

$$= \int (1+\text{س})^3\,\text{ص}^5\,\frac{د\text{ص}}{2(1+\text{س})} = \frac{1}{2}\int (1+\text{س})^2\,\text{ص}^5\,د\text{ص}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{س}^2+2\text{س}+1)\,\text{ص}^5\,د\text{ص}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{ص}-6)\,\text{ص}^5\,د\text{ص} = \frac{1}{2}\int \text{ص}^6 - 6\text{ص}^5\,د\text{ص}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ص}^7}{7} - \frac{6\text{ص}^6}{6}\right) + ج$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(\text{س}^2+2\text{س}+7)^7}{7} - (\text{س}^2+2\text{س}+7)^6\right) + ج$$

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 2\text{س} + 7$$

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = 2\text{س} + 2$$

$$د\text{س} = \frac{د\text{ص}}{2(1+\text{س})}$$

$$\text{ص} - 7 = \text{س}^2 + 2\text{س}$$

$$\text{ص} - 6 = \text{س}^2 + 2\text{س} + 1$$

٣) $$\int (\text{س}^5+1)^8 \times \text{س}^{14}\,د\text{س} = \int \text{ص}^8\,\text{س}^{14}\,\frac{د\text{ص}}{5\text{س}^4}$$

$$= \frac{1}{5}\int \text{ص}^8\,\text{س}^{10}\,د\text{ص} = \frac{1}{5}\int \text{ص}^8(\text{ص}^2 - 2\text{ص} + 1)\,د\text{ص}$$

$$= \frac{1}{5}\int \text{ص}^{10} - 2\text{ص}^9 + \text{ص}^8\,د\text{ص}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\text{ص}^{11}}{11} - \frac{2\text{ص}^{10}}{10} + \frac{\text{ص}^9}{9}\right) + ج$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{(\text{س}^5+1)^{11}}{11} - \frac{2(\text{س}^5+1)^{10}}{10} + \frac{(\text{س}^5+1)^9}{9}\right) + ج$$

$$\text{ص} = \text{س}^5 + 1$$

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = 5\text{س}^4$$

$$د\text{س} = \frac{د\text{ص}}{5\text{س}^4}$$

$$\text{ص} - 1 = \text{س}^5$$

$$(\text{ص}-1)^2 = \text{س}^{10}$$

$$\text{ص}^2 - 2\text{ص} + 1 = \text{س}^{10}$$

مثال: جد التكاملات التالية:

(١)
$$\int \sqrt[3]{\text{٢س}^{3} + \text{٣س}^{5}}\ \text{دس} = \int \sqrt[3]{\text{س}^{3}(\text{٢} + \text{٣س}^{2})}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{س}\,(\text{٢} + \text{٣س}^{2})^{\frac{1}{3}}\ \text{دس}$$

$\text{ص} = \text{٢} + \text{٣س}^{2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٦س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٦س}}$

قمنا باخراج عامل مشترك حتى تصبح على صورة:
(مقدار)$^{\text{ن}}$ × مشتقة المقدار

$$= \int \cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{\frac{1}{3}}\ \frac{\text{دص}}{\text{٦}\cancel{\text{س}}} = \frac{1}{6}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\ \text{دص}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{\text{٣ص}^{\frac{4}{3}}}{4} + \text{ج} = \frac{1}{8}(\text{٢} + \text{٣س}^{2})^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$$

(٢)
$$\int \text{س}\sqrt{\text{س}^{8} + \text{٢س}^{4}}\ \text{دس} = \int \text{س}\sqrt{\text{س}^{4}(\text{س}^{4} + \text{٢})}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{س} \times \text{س}^{2}\sqrt{(\text{س}^{4} + \text{٢})}\ \text{دس} = \int \text{س}^{3}(\text{س}^{4} + \text{٢})^{\frac{1}{2}}\ \text{دس}$$

$\text{ص} = \text{س}^{4} + \text{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤س}^{3}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٤س}^{3}}$

$$= \int \cancel{\text{س}^{3}}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \frac{\text{دص}}{\text{٤}\cancel{\text{س}^{3}}} = \frac{1}{4}\int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{دص}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\text{٢ص}^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{ج} = \frac{1}{6}(\text{س}^{4} + \text{٢})^{\frac{3}{2}} + \text{ج}$$

(٣)
$$\int (\text{س}^{8} - \text{٤س})^{6}\ \text{دس} = \int \left((\text{س}^{7} - \text{٤})\text{س}\right)^{6}\ \text{دس} = \int \text{س}^{6}(\text{س}^{7} - \text{٤})^{6}\ \text{دس}$$

$\text{ص} = \text{س}^{7} - \text{٤}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٧س}^{6}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٧س}^{6}}$

$$= \int \cancel{\text{س}^{6}}\ \text{ص}^{6}\ \frac{\text{دص}}{\text{٧}\cancel{\text{س}^{6}}} = \frac{1}{7}\int \text{ص}^{6}\ \text{دص}$$

$$= \frac{1}{7}\,\frac{\text{ص}^{7}}{7} + \text{ج} = \frac{1}{49}(\text{س}^{7} - \text{٤})^{7} + \text{ج}$$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال ٤ حل:

① $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جاس}(١-\text{جا}^٢\text{س})}\ \text{دس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جاس} \times \text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} |\text{جتاس}| \sqrt{\text{جاس}}\ \text{دس}$ لأن $٠ \le \text{س} \le \frac{\pi}{٢}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس} (\text{جاس})^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس} = \int_{٠}^{١} \text{جتاس}\ \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int_{٠}^{١} \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دص} = \left[\frac{٢\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\right]_{٠}^{١} = \frac{٢}{٣}(١-٠) = \frac{٢}{٣}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

عندما $\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٠$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \leftarrow \text{ص} = ١$

② $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^٦\ \text{جتا}٢\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{ص}^٦ (\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}})(\text{جتاس} + \text{جاس}) \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}}}$

$= \int \text{ص}^٦ \times \text{ص}\ \text{دص} = \int \text{ص}^٧\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^٨}{٨} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^٨}{٨} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جاس} + \text{جتاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} - \text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

$\text{جتا}٢\text{س} = \text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}$

$= (\text{جتاس} - \text{جاس})(\text{جتاس} + \text{جاس})$

③ $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^٧\ \text{قاس}\ \text{دس}$

$= \int \text{ص}^٧\ \text{قاس} \frac{\text{دص}}{\text{قاس}(\text{ظاس} + \text{قاس})}$

$= \int \text{ص}^٧ \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^٦\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^٧}{٧} + \text{جـ} = \frac{(\text{قاس} + \text{ظاس})^٧}{٧} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{قاس} + \text{ظاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس}\ \text{ظاس} + \text{قا}^٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس}(\text{ظاس} + \text{قاس})}$

④ $\int \frac{\text{جاس}}{١ - \text{جاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جاس}}{١ - \text{جاس}} \times \frac{١ + \text{جاس}}{١ + \text{جاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^٢\text{س}}{١ - \text{جا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس} = \int \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^٢\text{س}} + \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}\ \text{جتاس}} + \text{ظا}^٢\text{س}\right) \text{دس} = \int (\text{قاس}\ \text{ظاس} + \text{قا}^٢\text{س} - ١)\ \text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$

مثال: أوجد كلاً من التكاملات التالية:

(١) $\int \frac{(س-2)^3}{\sqrt{س+1}}\, دس = \int (س-2)^3 (س+1)^{-\frac{1}{2}}\, دس$

$ص = س + 1$

$\frac{دص}{دس} = 1$

$دس = دص$

ثم نكمل ———— الإجابة $\frac{-4}{3}$

(٢) $\int \frac{4}{س^3 \sqrt{1+س^2}}\, دس = \int \frac{4}{\sqrt{س^2\left(\frac{1}{س^2}+1\right)}\, س^2}\, دس = \int \frac{4}{س^2 |س| \sqrt{\frac{1}{س^2}+1}}\, دس$

$= \int \frac{4}{س^2 \times س \left(1+\frac{1}{س^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\, دس = \int \frac{4}{س^3 \left(1+\frac{1}{س^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\, دس = \int \frac{4\left(1+\frac{1}{س^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{س^3}\, دس$

نفرض $ص = \frac{1}{س^2} + 1$ ثم نكمل ----

(٣) $\int \frac{\sqrt{س+1}}{\sqrt{س^4 \times س}}\, دس = \int \frac{\sqrt{س+1}}{س^2 \sqrt{س}}\, دس = \int \frac{1}{س^2} \sqrt{\frac{س+1}{س}}\, دس$

$= \int \frac{1}{س^2} \sqrt{\frac{س}{س} + \frac{1}{س}}\, دس = \int \frac{1}{س^2} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{2}} دس$

نفرض $ص = 1 + \frac{1}{س}$ ثم نكمل ----

(٤) $\int \frac{س\sqrt{س+1}}{1-\sqrt{س+1}}$ نضرب بالمرافق $\Leftarrow \int \frac{س\sqrt{س+1}}{1-\sqrt{س+1}} \times \frac{1+\sqrt{س+1}}{1+\sqrt{س+1}}\, دس$

$= \int \frac{س\sqrt{س+1}\left(\sqrt{س+1}+1\right)}{1-(س+1)}\, دس = \int \frac{\cancel{س}\sqrt{س+1}\left(\sqrt{س+1}+1\right)}{-\cancel{س}}\, دس$

$= -\int \sqrt{س+1} + س + 1\, دس = -\int (س+1)^{\frac{1}{2}} + 1 + س\, دس$

$= -\left(\frac{(س+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + س + \frac{س^2}{2}\right) + جـ$

(٥) $\int (4س^3 + 6س^2 + 2س)(س^2 + س)^{10}\, دس$

$ص = س^2 + س$

$\frac{دص}{دس} = 2س + 1$

$دس = \frac{دص}{2س+1}$

$= \int 2س\,\cancel{(2س+1)}(1+س)\, ص^{10} \frac{دص}{\cancel{2س+1}}$

$= 2\int (س^2+س)\, ص^{10}\, دص = 2\int ص \times ص^{10}\, دص$

$= 2\int ص^{16}\, دص = 2\,\frac{ص^{17}}{17} + جـ$

$= \frac{2}{17}\left(س^2 + س\right)^{17} + جـ$

٦) $\int \frac{1}{1-\text{س}^2}\sqrt{\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}}\,d\text{س} = \int \frac{1}{(1+\text{س})(1-\text{س})}\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{\frac{1}{2}} d\text{س}$

$$= \int \frac{1}{(1+\text{س})(1-\text{س})}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}\,\frac{(1-\text{س})^2}{-2}\,d\text{ص}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}\,d\text{ص}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{ص}}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}\,d\text{ص} = -\frac{1}{2}\int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,d\text{ص}$$

$$= -\frac{1}{2}\times \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{ث} = -\sqrt{\text{ص}} + \text{ث}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}} + \text{ث}$$

$\text{ص} = \frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}$

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{1\times(1+\text{س}) - 1\times(1-\text{س})}{(1-\text{س})^2}$

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{-2}{(1-\text{س})^2}$

$d\text{س} = \frac{(1-\text{س})^2}{-2}\,d\text{ص}$

مثال: بين أن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\,d\text{س} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س}\,d\text{س}$

الحل: $\text{جا}\,\text{س} = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\,d\text{س} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^{\text{ن}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right) d\text{س}$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{ص}\,d\text{ص} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{ص}\,d\text{ص} \ \#$$

$\text{ص} = \frac{\pi}{2} - \text{س}$

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = -1$

$d\text{س} = -d\text{ص}$

$\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = \frac{\pi}{2}$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \text{ص} = 0$

مثال: اذا كان ميل المماس للمنحنى يعطى بالعلاقة $\frac{4\text{س}}{3\text{ص}^2\sqrt{\text{س}^2+5}}$ وكان منحنى ق يمر بالنقطة (٢،٣) اكتب معادلة المنحنى.

الحل: $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{4\text{س}}{3\text{ص}^2\sqrt{\text{س}^2+5}} \Leftarrow 3\text{ص}^2\,d\text{ص} = \frac{4\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+5}}\,d\text{س}$

$$\Leftarrow \int 3\text{ص}^2\,d\text{ص} = \int 4\text{س}(\text{س}^2+5)^{-\frac{1}{2}}\,d\text{س}$$

$$\Leftarrow \text{ص}^3 = \int 4\cancel{\text{س}}\,(\text{ل})^{-\frac{1}{2}}\,\frac{d\text{ل}}{2\cancel{\text{س}}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}^3 = \int 2\,\text{ل}^{-\frac{1}{2}}\,d\text{ل} \Leftarrow \text{ص}^3 = 2\times\frac{\text{ل}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{ث}$$

$$\Leftarrow \text{ص}^3 = 4\sqrt{\text{ل}} + \text{ث} \Leftarrow \text{ص}^3 = 4\sqrt{\text{س}^2+5} + \text{ث}$$

يمر بـ $(2،3) \Leftarrow 27 = 4\sqrt{9} + \text{ث} \Leftarrow \boxed{\text{ث} = 15}$

$$\text{ص}^3 = 4\sqrt{\text{س}^2+5} + 15 \Leftarrow \text{ص} = \sqrt[3]{4\sqrt{\text{س}^2+5} + 15}$$

$\text{ل} = \text{س}^2 + 5$

$\frac{d\text{ل}}{d\text{س}} = 2\text{س}$

$d\text{س} = \frac{d\text{ل}}{2\text{س}}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = \sqrt{س ص + س + ص + 1}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \sqrt{\underbrace{س(1+ص) + (1+ص)}_{\text{عامل مشترك}}} = \sqrt{(1+ص)(1+س)} = (1+ص)^{\frac{1}{2}}(1+س)^{\frac{1}{2}}$

$دص = (1+ص)^{\frac{1}{2}}(1+س)^{\frac{1}{2}}\, دس \Leftarrow \frac{دص}{(1+ص)^{\frac{1}{2}}} = (1+س)^{\frac{1}{2}}\, دس$

$(1+ص)^{-\frac{1}{2}}\, دص = (1+س)^{\frac{1}{2}}\, دس \Leftarrow \int (1+ص)^{-\frac{1}{2}}\, دص = \int (1+س)^{\frac{1}{2}}\, دس$

$\frac{2(1+ص)^{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{2(1+س)^{\frac{3}{2}}}{3} + ث$

مثال: جد $\int \frac{(\sqrt{س}+3)^7}{س^5}\, دس$

$ص = \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2ص}$

$دس = 2ص\, دص$

$ع = \frac{3}{ص} + 1$

$\frac{دع}{دص} = \frac{-3}{ص^2}$

$دص = \frac{ص^2}{-3}\, دع$

الحل: $\int \frac{(ص+3)^7}{ص^{10}}\, 2ص\, دص$

$= 2\int \frac{(ص+3)^7}{ص^9}\, دص = 2\int \left(\frac{ص+3}{ص}\right)^7 \frac{1}{ص^2}\, دص$

$= 2\int \frac{1}{ص^2}\left(\frac{3}{ص}+1\right)^7 دص$

تعويض مرة أخرى

$= 2\int \frac{1}{\cancel{ص^2}}\, ع^7\, \frac{\cancel{ص^2}}{-3}\, دع$

$= \frac{-2}{3} \times \frac{ع^8}{8} + ث = \frac{-2}{24}\left(\frac{3}{ص}+1\right)^8 + ث$

$= \frac{-2}{24}\left(\frac{3}{\sqrt{س}}+1\right)^8 + ث$

سؤال: جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\, جتاس\, ظا'(جاس)\, دس$

$ص = جاس$

$\frac{دص}{دس} = جتاس$

$دس = \frac{دص}{جتاس}$

$س = 0 \leftarrow ص = 0$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = 1$

$= \int_0^1 6\, \cancel{جتاس}\, ظا'(ص)\, \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

أكمل ________

$\boxed{\text{الإجابة } -36}$

* التكامل بالأجزاء :

نلجأ إلى التكامل بالأجزاء عندما نريد إيجاد تكامل حاصل ضرب أو خارج قسمة اقترانين ولا يوجد بينهما مشتهد غير مألوف .

مثل : $\int \text{س}\ \text{جا}\,٢\text{س}\ \text{دس}$ ، $\int \text{س}\ \text{قا}^{٢}(\tfrac{١}{٢}\text{س})\ \text{دس}$

$\int \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}+١}\ \text{دس}$ ، $\int \text{س}\sqrt{٢-٥\text{س}}\ \text{دس}$ ، $\int \dfrac{\text{س}}{(\text{س}+١)^{٣}}\ \text{دس}$

$\int \text{ل و}\ \text{دس}$ حيث نختار أحد الاقترانين للاشتقاق وإعطاؤه الرمز (ص) والاقتران الآخر للتكامل إعطاؤه الرمز (دهـ) بحيث يكون ص اقتراناً منتهياً تفاضله (أي مشتقة تصل إلى الصفر) بشرط أن يكون الاقتران الآخر (دهـ) معروف تكامله لدينا .

* ملاحظة : في حالات خاصة جداً قد نحتاج إلى تغيير تلك التسمية

مثال : $\int ١٢\text{ص}\sqrt[٣]{١-٢\text{س}}\ \text{دس} = \int ١٢\text{س}\,(١-٢\text{س})^{\frac{١}{٣}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = ١٢\text{س}$ ، $\text{دهـ} = (١-٢\text{س})^{\frac{١}{٣}}\ \text{دس}$

$\text{دص} = ١٢\ \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \dfrac{(١-٢\text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}$

$I = \text{ص}\times\text{هـ} - \int \text{هـ}\times\text{دص} \Leftarrow I = (١٢\text{س})\left(\dfrac{(١-٢\text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}\right) - \int \dfrac{(١-٢\text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}\,(١٢\ \text{دس})$

$\Leftarrow I = \dfrac{-٩}{٢}\text{س}\sqrt[٣]{(١-٢\text{س})^{٤}} + \int \dfrac{٩}{٢}(١-٢\text{س})^{\frac{٤}{٣}}\ \text{دس}$

$\Leftarrow I = \dfrac{-٩}{٢}\text{س}\sqrt[٣]{(١-٢\text{س})^{٤}} + \dfrac{٩}{٢}\times\dfrac{(١-٢\text{س})^{\frac{٧}{٣}}}{-٢\times\frac{٧}{٣}} + \text{جـ}$

$\Leftarrow I = \dfrac{-٩}{٢}\text{س}\sqrt[٣]{(١-٢\text{س})^{٤}} - \dfrac{٢٧}{٢٨}\sqrt[٣]{(١-٢\text{س})^{٧}} + \text{جـ}$

مثال: جد التكاملات التالية:

١) ∫ س جا س ءس ⇐ ق = س ، ءق = ءس

ءهـ = جا س ءس ، هـ = − جتا س

I = − س جتا س − ∫ − جتا س ءس = − س جتا س + جا س + ث

٢) $\int_{0}^{\frac{ط}{٢}}$ ٤س جا ٢س ءس ⇐ ق = ٤س ، ءق = ٤ ءس

ءهـ = جا ٢س ءس ، هـ = $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س

I = ٤س × $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س $\Big|_{0}^{\frac{ط}{٢}}$ − $\int_{0}^{\frac{ط}{٢}}$ $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س × ٤ ءس

= ٢س جتا ٢س $\Big|_{0}^{\frac{ط}{٢}}$ − ٢ × − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س $\Big|_{0}^{\frac{ط}{٢}}$ = ٢س جتا ٢س $\Big|_{0}^{\frac{ط}{٢}}$ + جتا ٢س $\Big|_{0}^{\frac{ط}{٢}}$

= (٢ × $\frac{ط}{٢}$ × ٠ − ٠) + (−١ − ١) = −٢

٣) ∫ $\frac{(٢س + ٣)}{قا ٢س}$ ءس = ∫ (٢س + ٣) جتا ٢س ءس

ق = ٢س + ٣ ، ءق = ٢ ءس

ءهـ = جتا ٢س ءس ، هـ = $\frac{١}{٢}$ جا ٢س

I = $\frac{(٢س + ٣)}{٢}$ جا ٢س − ∫ جا ٢س ءس = $\frac{(٢س + ٣)}{٢}$ جا ٢س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + ث

٤) ∫ $\frac{٢س^{٢}}{قا ٢س}$ ءس = ∫ ٢س^{٢} جا ٢س ءس ⇐ ق = ٢س^{٢} ، ءق = ٤س ءس

ءهـ = جا ٢س ءس ، هـ = − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س

I = ٢س^{٢} × − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س − ∫ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س × ٤س ءس

= − س^{٢} جتا ٢س + ∫ ٢س جتا ٢س ءس بالأجزاء مرة أخرى

ق = ٢س ، ءق = ٢ ءس ؛ ءهـ = جتا ٢س ءس ، هـ = $\frac{١}{٢}$ جا ٢س ⇐ I = − س^{٢} جتا ٢س + ٢س × $\frac{١}{٢}$ جا ٢س − ∫ $\frac{١}{٢}$ جا ٢س × ٢ ءس

⇐ I = − س^{٢} جتا ٢س + س جا ٢س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + ث