الوحدة الثانية

القطوع المخروطية

" العلمي"

المستوى الرابع

الأستاذ : عماد مسك

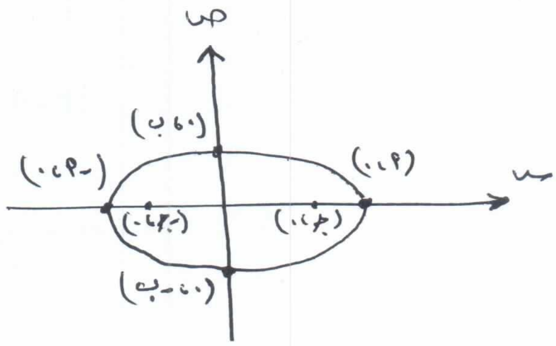
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

التحـــدّي

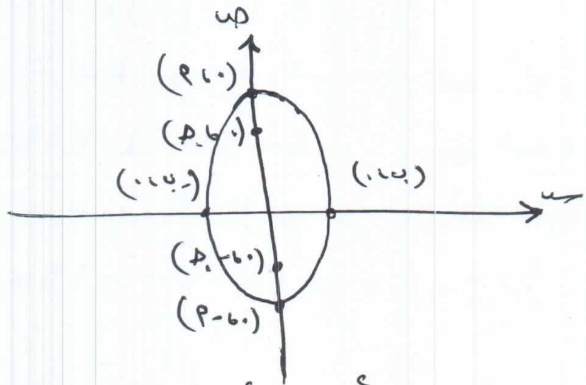
* القطع الناقص:

هو القطع أو الشكل الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى بشرط أن يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً.
حيث تسمى النقطتين الثابتتين بؤرتي القطع والمقدار الثابت هو طول المحور الأكبر للقطع حيث يرمز له بالرمز (٢أ)

* استنتاج: معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $\boxed{\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١}$

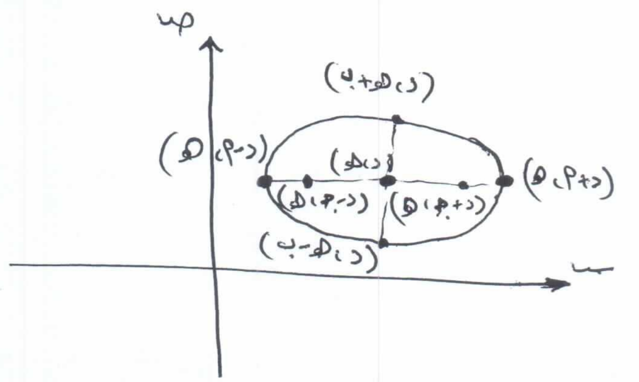


$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$$

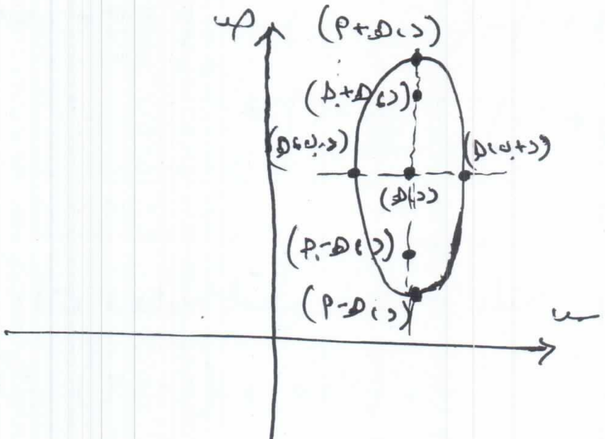


$$\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = ١$$

ثانياً: عندما يكون المركز (د، هـ)



$$\frac{(س-د)^2}{أ^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} = ١$$



$$\frac{(ص-هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س-د)^2}{ب^2} = ١$$

* ملاحظات عامة :

١) ما يحدد نوع القطع من حيث كونه سيني أو صادي هو العدد الأكبر، فإذا كان العدد الأكبر تحت س يكون القطع سيني وإذا كان الأكبر تحت ص يكون القطع صادي

٢) طول المحور الأكبر = ٢أ

٣) طول المحور الأصغر = ٢ب

٤) البعد البؤري = ٢جـ

٥) الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ < ١

٦) جـ² = أ² − ب²

٧) إذا كانت ن نقطة على القطع فإن مجموع بعديها عن البؤرتين = ٢أ

٨) الرأسان (د ± أ ، هـ)

٩) البؤرتان (د ± جـ ، هـ)

مثال: للقطع الناقص فيما يلي عين إحداثيات المركز والرأسين والبؤرتين وطرفي المحور الأصغر وجد معادلة وطول كل من المحورين والبعد البؤري والاختلاف المركزي.

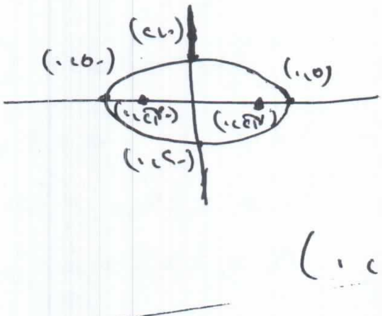
١) ٤س² + ٢٥ص² = ١٠٠ ⟸ $\frac{٤س^2}{١٠٠} + \frac{٢٥ص^2}{١٠٠} = \frac{١٠٠}{١٠٠}$ ⟸ $\frac{س^2}{٢٥} + \frac{ص^2}{٤} = ١$

المركز (٠،٠) القطع سيني

أ² = ٢٥ ⟸ أ = ٥ ب² = ٤ ⟸ ب = ٢ جـ² = ٢٥ − ٤ = ٢١ ⟸ جـ = √٢١

طول المحور الأكبر = ٢أ = ١٠ ومعادلته $\boxed{ص = ٠}$

طول المحور الأصغر = ٢ب = ٤ ومعادلته $\boxed{س = ٠}$



البعد البؤري = ٢جـ = ٢√٢١

الاختلاف المركزي ف = $\frac{جـ}{أ} = \frac{√٢١}{٥}$

الرأسان (±٥، ٠) البؤرتان (±√٢١، ٠)

طرفي المحور الأصغر (٠، ±٢)

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

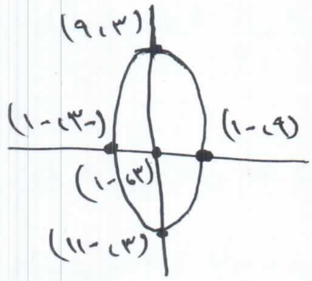
٢) $\frac{(\text{س}-٣)^{٢}}{٣٦} + \frac{(\text{ص}+١)^{٢}}{١٠٠} = ١$

المركز (٣، -١) القطع صادي

أ² = ١٠٠ ⟸ أ = ١٠ ب² = ٣٦ ⟸ ب = ٦ جـ² = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤ ⟸ جـ = ٨

طول المحور الأكبر = ٢٠ ومعادلته $\boxed{\text{س} = ٣}$

طول المحور الأصغر = ١٢ ومعادلته $\boxed{\text{ص} = -١}$



البعد البؤري = ١٦

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

الرأسان (٣، -١ ± ١٠) = (٣، -١١)، (٣، ٩)

البؤرتان (٣، -١ ± ٨) = (٣، -٩)، (٣، ٧)

طرفي المحور الأصغر (٣ ± ٦، -١) = (٩، -١)، (-٣، -١)

٣) ١٦س² + ٢٥ص² - ٦٤س - ٥٠ص = ٣١١ نرتب المعادلة

⟸ ١٦س² - ٦٤س + ٢٥ص² - ٥٠ص = ٣١١ ⟸ ١٦(س² - ٤س) + ٢٥(ص² - ٢ص) = ٣١١

بإكمال المربع ⟸ ١٦(س² - ٤س + ٤) + ٢٥(ص² - ٢ص + ١) = ٣١١ + (١٦×٤) + (٢٥×١)

⟸ ١٦(س - ٢)² + ٢٥(ص - ١)² = ٤٠٠ بالقسمة على ٤٠٠

⟸ $\frac{١٦(\text{س}-٢)^{٢}}{٤٠٠} + \frac{٢٥(\text{ص}-١)^{٢}}{٤٠٠} = ١$ ⟸ $\frac{(\text{س}-٢)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{١٦} = ١$

المركز (٢، ١) القطع سيني

أ² = ٢٥ ⟸ أ = ٥ ب² = ١٦ ⟸ ب = ٤ جـ² = ٢٥ - ١٦ = ٩ ⟸ جـ = ٣

طول المحور الأكبر = ٢×٥ = ١٠ ومعادلته $\boxed{\text{ص} = ١}$

طول المحور الأصغر = ٢×٤ = ٨ ومعادلته $\boxed{\text{س} = ٢}$

البعد البؤري = ٢×٣ = ٦ الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٥}$

الرأسان (٢ ± ٥، ١) = (٧، ١)، (-٣، ١)

البؤرتان (٢ ± ٣، ١) = (٥، ١)، (-١، ١)

طرفي المحور الأصغر (٢، ١ ± ٤) = (٢، ٥)، (٢، -٣)

④ $$16\text{س}^2 + 7\text{ص}^2 - 160\text{س} + 56\text{ص} = -400$$

$$16\text{س}^2 - 160\text{س} + 7\text{ص}^2 + 56\text{ص} = -400$$

$$\Leftarrow\ 16(\text{س}^2 - 10\text{س}) + 7(\text{ص}^2 + 8\text{ص}) = -400$$

$$16(\text{س}^2 - 10\text{س} + 25) + 7(\text{ص}^2 + 8\text{ص} + 16) = -400 + (16\times 25) + (7\times 16)$$

$$\Leftarrow\ \frac{16(\text{س}-5)^2}{112} + \frac{7(\text{ص}+4)^2}{112} = \frac{112}{112}$$ قسمنا على ١١٢

$$\Leftarrow\ \frac{(\text{س}-5)^2}{7} + \frac{(\text{ص}+4)^2}{16} = 1$$

المركز (٥، -٤) قطع صادي

$\text{أ}^2 = 16 \Leftarrow \text{أ} = 4$ ، $\text{ب}^2 = 7 \Leftarrow \text{ب} = \sqrt{7}$

$\text{جـ}^2 = 16 - 7 = 9 \Leftarrow \text{جـ} = 3$

طول المحور الأكبر $= 2\times 4 = 8$ ومعادلته $\text{س} = 5$

طول المحور الأصغر $= 2\times\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$ ومعادلته $\text{ص} = -4$

البعد البؤري $= 2\times 3 = 6$

الاختلاف المركزي $\text{ف} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{3}{4}$

الرأسان $(5 ، -4 \pm 4) = (5 ، 0) ، (5 ، -8)$

البؤرتان $(5 ، -4 \pm 3) = (5 ، -1) ، (5 ، -7)$

طرفي المحور الأصغر $(5 \pm \sqrt{7} ، -4)$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* لكتابة معادلة القطع الناقص يجب معرفة احداثيات المركز وقيم أ ، ب

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٦،٣) ، (-٢،٣) واختلافه المركزي يساوي $\frac{1}{2}$

قطع سيني

الحل: المركز $\left(\frac{٦ + -٢}{٢} ، ٣\right) = (٢،٣)$

$٢\text{أ} = ٦ - (-٢) = ٨ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٤}$

$\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{\text{جـ}}{٤} \Leftarrow ٤ = ٢\text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٢}$

$\Leftarrow \text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢ \Leftarrow ٤ = ١٦ - \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢ = ١٢$

$\therefore$ المعادلة: $\frac{(\text{س} - ٢)^٢}{١٦} + \frac{(\text{ص} - ٣)^٢}{١٢} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي نهايتا محوره الأصغر هما (٣،٠) ، (-٣،٠) ويمر بالنقطة (٢،٣)

الحل: ب = ٣ ، المركز (٠،٠)

المعادلة: $\frac{\text{س}^٢}{٩} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} = ١$

يمر بـ (٢،٣) $\Leftarrow \frac{٤}{٩} + \frac{٩}{\text{أ}^٢} = ١ \Leftarrow \frac{٩}{\text{أ}^٢} = ١ - \frac{٤}{٩} \Leftarrow \frac{٩}{\text{أ}^٢} = \frac{٥}{٩}$

$\Leftarrow ٥\text{أ}^٢ = ٨١ \Leftarrow \text{أ}^٢ = \frac{٨١}{٥}$

المعادلة: $\frac{\text{س}^٢}{٩} + \frac{٥\text{ص}^٢}{٨١} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٠،-١) ، (٠،٥) واحدى نقطتي تقاطعه مع محور الصادات هي (٠،٧)

الحل: المركز $\left(٠ ، \frac{-١ + ٥}{٢}\right) = (٠،٢)$

$٢\text{جـ} = ٥ - (-١) = ٦ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٣}$

$\text{أ} = ٧ - ٢ = ٥$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢ \Leftarrow ٩ = ٢٥ - \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢ = ١٦$

المعادلة: $\frac{\text{س}^٢}{١٦} + \frac{(\text{ص} - ٢)^٢}{٢٥} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (-١، ١) ، (٥، ١) وطول محوره الأكبر يساوي ٣ أمثال البعد البؤري له.

الحل: المركز: $\left(\frac{٥+-١}{٢} ، ١\right) = (٢، ١)$

$٢جـ = ٥ - (-١) = ٦ \Leftarrow \boxed{جـ = ٣}$

$٢أ = ٣ \times ٢جـ \Leftarrow ٢أ = ٣ \times ٦ \Leftarrow ٢أ = ١٨ \Leftarrow \boxed{أ = ٩}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ٩ = ٨١ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٧٢$

∴ المعادلة: $\frac{(س-٢)^٢}{٨١} + \frac{(ص-١)^٢}{٧٢} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي معادلتا محوريه هما س=٢ ، ص=-٣ واحدى بؤرتيه (٢، ٤) وطول محوره الأصغر = ٨

الحل: المركز: (٢، -٣) وبما أن احدى بؤرتيه (٢، ٤) فإن القطع صادي

$جـ = ٤ - (-٣) = ٧$

$٢ب = ٨ \Leftarrow \boxed{ب = ٤}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ٤٩ = أ^٢ - ١٦ \Leftarrow أ^٢ = ٦٥$

∴ المعادلة: $\frac{(س-٢)^٢}{١٦} + \frac{(ص+٣)^٢}{٦٥} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه (٤، -١) وأحد طرفي محوره الأصغر هو (١، ٣) ومحوره الأصغر يوازي محور السينات

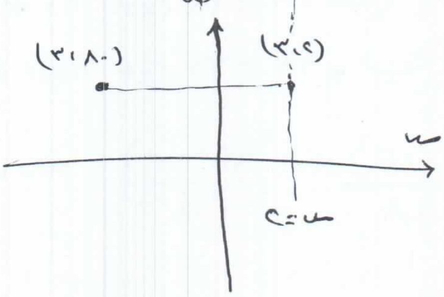
الحل: المركز: (٤، ٣) $\Leftarrow ب = ٤ - ١ = ٣$

$جـ = ٣ - (-١) = ٤ \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ١٦ = أ^٢ - ٩ \Leftarrow أ^٢ = ٢٥$

∴ المعادلة: $\frac{(س-٤)^٢}{٩} + \frac{(ص-٣)^٢}{٢٥} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي = ٦و٠ ويمر بالنقطة (-٨، ٣) ومركزه يقع على المستقيم س=٢ وبؤرتيه تقعان على المستقيم ص=٣

الحل: المركز: (٢، ٣) ويكون أحد الرأسين (-٨، ٣)



∴ $أ = ٢ - (-٨) = ١٠$

$ف = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow \frac{٦}{١٠} = \frac{جـ}{١٠} \Leftarrow \boxed{جـ = ٦}$

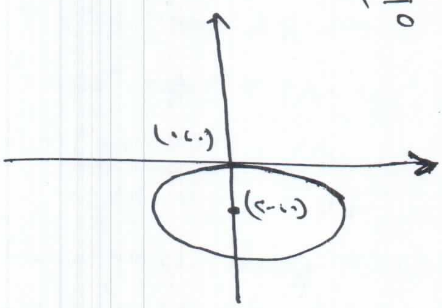
$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ٣٦ = ١٠٠ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٦٤$

∴ المعادلة: $\frac{(س-٢)^٢}{١٠٠} + \frac{(ص-٣)^٢}{٦٤} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي مركزه هو رأس القطع المكافئ $\text{س}^2 + 2\text{ص} + 4 = 0$ ويمر بالنقطة الأصل ومحوره الأكبر يوازي السينات واختلافه المركزي $= \frac{3}{5}$

الحل: $\text{س}^2 = -2\text{ص} - 4 \Leftarrow \text{س}^2 = -2(\text{ص}+2)$ رأس القطع المكافئ $(0، -2)$ = مركز القطع الناقص

$\text{ب} = 0 - (-2) = 2 \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \frac{3}{5} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \text{جـ} = \frac{3}{5}\text{أ}$



$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow \frac{9}{25}\text{أ}^2 = \text{أ}^2 - 4$

$\Leftarrow 4 = \text{أ}^2 - \frac{9}{25}\text{أ}^2 \Leftarrow 4 = \frac{16}{25}\text{أ}^2 \Leftarrow \text{أ}^2 = \frac{25}{4}$

$$\therefore \text{المعادلة: } \frac{4\text{س}^2}{25} + \frac{(\text{ص}+2)^2}{4} = 1$$

مثال: جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(1،2)$ وإحدى بؤرتيه $(-3،2)$ واختلافه المركزي يساوي (0.8)

الحل: $\text{جـ} = 1 - (-3) = 4 \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \frac{8}{10} = \frac{4}{\text{أ}} \Leftarrow 8\text{أ} = 40 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 5}$

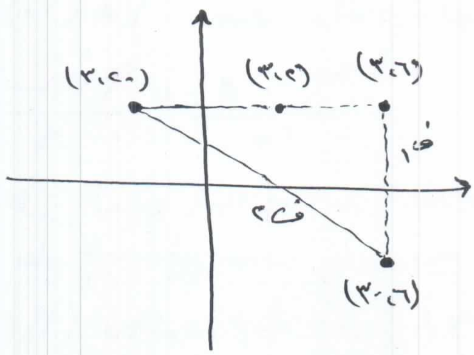
$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow 16 = 25 - \text{ب}^2 \Leftarrow \text{ب}^2 = 9$

$$\therefore \text{المعادلة: } \frac{(\text{س}-1)^2}{25} + \frac{(\text{ص}-2)^2}{9} = 1$$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(-2،3)$، $(6،3)$ ويمر بالنقطة $(6،-3)$

الحل: المركز $\left(\frac{-2+6}{2}، 3\right) = (2،3)$

$2\text{جـ} = 6 - (-2) = 8 \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = 4}$



$\text{ف}_1 + \text{ف}_2 = 2\text{أ}$

$2\text{أ} = \sqrt{(6-6)^2 + (-3-3)^2} + \sqrt{(6+2)^2 + (-3-3)^2}$

$2\text{أ} = \sqrt{0+36} + \sqrt{64+36}$

$2\text{أ} = 6 + 10 \Leftarrow 2\text{أ} = 16 \Leftarrow \text{أ} = 8$

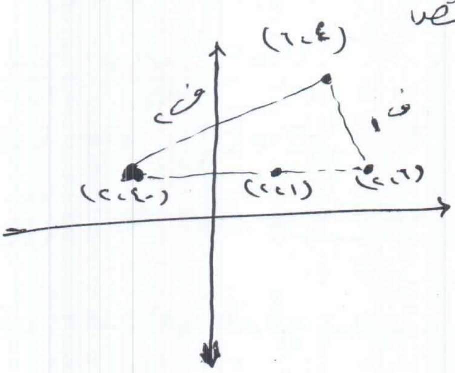
$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow 16 = 64 - \text{ب}^2 \Leftarrow \text{ب}^2 = 48$

$$\therefore \text{المعادلة: } \frac{(\text{س}-2)^2}{64} + \frac{(\text{ص}-3)^2}{48} = 1$$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: قطع مخروطي بعده البؤري أقل من البعد بين رأسيه ومركزه (١،٢) وإحدى بؤرتيه (٦،٢) ويمر بالنقطة (٤،٦) جد معادلته.

الحل: بما أن $2\text{جـ} < 2\text{أ} \Leftarrow \text{جـ} < \text{أ}$ ∴ القطع هو ناقص



$\text{جـ} = 6 - 1 = 5$

البؤرة الثانية $(1-5, 2) = (-4, 2)$

$\text{ف}_1 + \text{ف}_2 = 2\text{أ}$

$$2\text{أ} = \sqrt{(4-6)^2 + (6-2)^2} + \sqrt{(4+4)^2 + (6-2)^2}$$

$$2\text{أ} = \sqrt{4+16} + \sqrt{64+16}$$

$$\sqrt{20} + \sqrt{80} = 2\text{أ} \Leftarrow 2\text{أ} = \sqrt{20} + 2\sqrt{20} = 3\sqrt{20}$$

بالتربيع $\Leftarrow 4\text{أ}^2 = 9 \times 20 \Leftarrow \text{أ}^2 = \frac{9 \times 20}{4} = 45$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow 25 = 45 - \text{ب}^2 \Leftarrow \text{ب}^2 = 20$

∴ المعادلة: $\frac{(\text{س}-1)^2}{45} + \frac{(\text{ص}-2)^2}{20} = 1$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي يساوي $\frac{1}{3}$ وإحدى بؤرتيه (−١،٢) ورأسه القريب من تلك البؤرة هو (−٥،٢)

الحل: $\text{ف} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \frac{1}{3} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \text{أ} = 3\text{جـ}$ وأيضاً $\text{أ} - \text{جـ} = -1 - (-5) \Leftarrow \text{أ} - \text{جـ} = 4 \Leftarrow \text{أ} = 4 + \text{جـ}$

$\Leftarrow 3\text{جـ} = 4 + \text{جـ} \Leftarrow 3\text{جـ} - \text{جـ} = 4 \Leftarrow 2\text{جـ} = 4 \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = 2}$

∴ $\text{أ} = 3 \times 2 = 6$ أيضاً $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow 4 = 36 - \text{ب}^2 \Leftarrow \text{ب}^2 = 32$

المركز $(-1+2, 2) = (1, 2) \Leftarrow$ المعادلة: $\frac{(\text{س}-1)^2}{36} + \frac{(\text{ص}-2)^2}{32} = 1$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي يمس المستقيمات $\text{س} = -2$، $\text{س} = 8$، $\text{ص} = 1$، $\text{ص} = 7$

الحل: المركز $\left(\frac{-2+8}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = (3, 4)$

$2\text{أ} = 8 - (-2) = 10 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 5}$

$2\text{ب} = 7 - 1 = 6 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 3}$

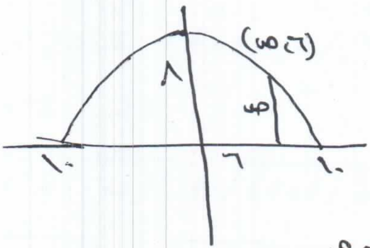
الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

∴ المعادلة: $\frac{(\text{س}-3)^2}{25} + \frac{(\text{ص}-4)^2}{9} = 1$

مثال: بني جسر على شكل نصف قطع ناقص طول قاعدته الأفقية ٢٠م وأقصى ارتفاع له ٨م ، أسند الجسر بعمودين عند البؤرتين ، أوجد ارتفاع كل عمود .

الحل: أ = ١٠ ب = ٨ ← $\text{جـ}^2 = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦$ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٦}$

المعادلة: $\frac{\text{س}^2}{١٠٠} + \frac{\text{ص}^2}{٦٤} = ١$



نجرب (٦،ص) ← $\frac{٣٦}{١٠٠} + \frac{\text{ص}^2}{٦٤} = ١$ ⇐ $\frac{\text{ص}^2}{٦٤} = ١ - \frac{٣٦}{١٠٠}$

⇐ $\frac{\text{ص}^2}{٦٤} = \frac{٦٤}{١٠٠}$ ⇐ $\text{ص}^2 = \frac{٦٤ \times ٦٤}{١٠٠}$ ⇐ $\text{ص} = \frac{٦٤}{١٠} = ٦,٤$

مثال: اذا علمت أن مساحة القطع الناقص $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$ هي π أ ب

١) جد مساحة القطع: $\frac{(\text{س} - ١)^2}{١٤٤} + \frac{(\text{ص} + ٢)^2}{٨١} = ١$

٢) جد نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة القطع $\frac{\text{س}^2}{٨١} + \frac{\text{ص}^2}{١٦} = ١$

٣) قطع ناقص مساحته (٣٠π) ورأساه (٦،٠)، (-٦،٠) جد معادلته .

الحل: ١) $\text{أ}^2 = ١٤٤$ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ١٢}$ $\text{ب}^2 = ٨١$ ⇐ $\boxed{\text{ب} = ٩}$

المساحة = π أ ب = $\pi \times ١٢ \times ٩ = ١٠٨\pi$

٢) $\text{أ}^2 = ٨١$ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ٩}$ $\text{ب}^2 = ١٦$ ⇐ $\boxed{\text{ب} = ٤}$

مساحة القطع = π أ ب ⇐ $\pi \times ٩ \times ٤ = ٣٦\pi$

مساحة الدائرة = $\pi \text{نق}^2$ ⇐ $\pi \text{نق}^2 = ٣٦\pi$

⇐ $\text{نق}^2 = ٣٦$ ⇐ $\boxed{\text{نق} = ٦}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

٣) المركز (٠،٠) أ = ٦

المساحة = π أ ب

$٣٠\pi = \pi \times ٦ \times \text{ب}$ ⇐ $\boxed{\text{ب} = ٥}$

المعادلة: $\frac{\text{س}^2}{٣٦} + \frac{\text{ص}^2}{٢٥} = ١$

* ملاحظات :

١) أي نقطة تقع على القطع الناقص يكون مجموع بعديها عن بؤرتي القطع = ٢م

أي أن : ن ب١ + ن ب٢ = ٢م

٢) محيط المثلث المكون من النقطة ن على القطع وبؤرتي القطع = ٢م + ٢ج

٣) أقرب نقطة على القطع لبؤرة القطع هي الرأس المجاور وتكون أقصر مسافة = م − ج

٤) أبعد نقطة على القطع عن بؤرة القطع هي الرأس البعيد وتكون أطول مسافة = م + ج

مثال : النقطة ن(س، ص) تقع على القطع الناقص : $\frac{س^٢}{٢٢٥} + \frac{ص^٢}{٨١} = ١$ وكانت ب١، ب٢ هما بؤرتا القطع

١) جد ب١، ب٢ ٢) جد ن ب١ + ن ب٢

٣) جد محيط المثلث ن ب١ ب٢ ٤) اذا كانت ل نقطة متحركة على القطع جد أطول مسافة وأقصر مسافة بين ل، ب١

٥) اذا كانت م نقطة على القطع وكان بعدها عن ب١ يساوي ١١ فجد بعدها عن ب٢

الحل: م^٢ = ٢٢٥ ⟸ م = ١٥ ب^٢ = ٨١ ⟸ ب = ٩ ج^٢ = ٢٢٥ − ٨١ = ١٤٤ ⟸ ج = ١٢

١) البؤرتان هما (١٢، ٠)، (−١٢، ٠)

٢) ن ب١ + ن ب٢ = ٢م = ٣٠

٣) محيط المثلث = ٢م + ٢ج = ٣٠ + ٢٤ = ٥٤

٤) أقصر مسافة = م − ج = ١٥ − ١٢ = ٣

أطول مسافة = م + ج = ١٥ + ١٢ = ٢٧

٥) ف١ + ف٢ = ٢م ⟸ ١١ + ف٢ = ٣٠ ⟸ ف٢ = ١٩

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: قطع ناقص بعده البؤري يساوي طول محوره الأصغر، جد اختلافه المركزي

الحل: ٢ج = ٢ب ⟸ ج = ب

ج^٢ = م^٢ − ب^٢ ⟸ ج^٢ = م^٢ − ج^٢ ⟸ ٢ج^٢ = م^٢

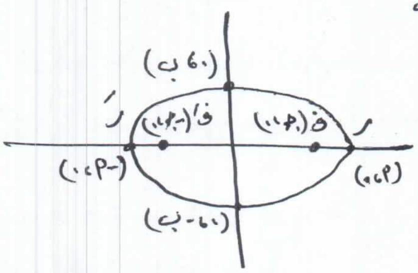
⟸ م = $\sqrt{٢}$ ج

ف = $\frac{ج}{م} = \frac{ج}{\sqrt{٢}\,ج} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

مثال: للقطع الناقص ٢٥ س^٢ + ٤ ص^٢ = ١ جد طول المحور الأكبر

الحل: $\frac{\text{س}^2}{\frac{1}{25}} + \frac{\text{ص}^2}{\frac{1}{4}} = 1$ ⟸ أ^٢ = $\frac{1}{4}$ ⟸ أ = $\frac{1}{2}$ ⟸ ٢أ = ١

مثال: معتمداً على الشكل أثبت أن ف ر × ر ف$'$ = ب^٢



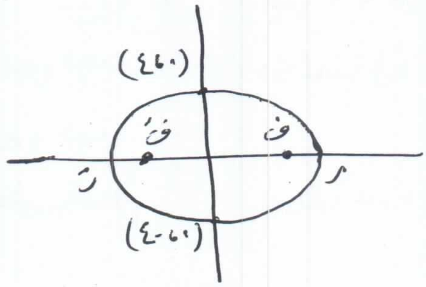
الحل: ف ر = أ - جـ

ر ف$'$ = أ + جـ

ف ر × ر ف$'$ = (أ + جـ) (أ - جـ)

= (أ^٢ - جـ^٢) = ب^٢

مثال: معتمداً على الشكل جد ف ر × ر ف$'$



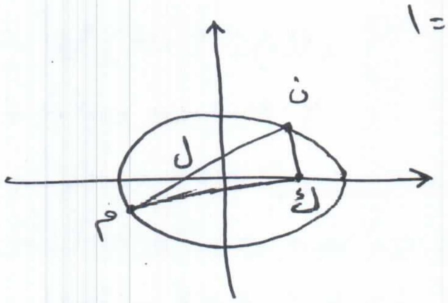
الحل: ف ر = أ - جـ

ر ف$'$ = أ + جـ

ف ر × ر ف$'$ = (أ - جـ) (أ + جـ)

= (أ^٢ - جـ^٢) = ب^٢ = ١٦

مثال: معتمداً على الشكل الذي معادلته $\frac{\text{س}^2}{100} + \frac{\text{ص}^2}{64} = 1$
جد محيط المثلث م ك ن حيث ك، ل بؤرتا القطع



الحل: ن ك + ن ل = ٢أ

م ك + م ل = ٢أ

∴ محيط المثلث ن ك م = ٢أ + ٢أ = ٤أ

أ^٢ = ١٠٠ ⟸ $\boxed{\text{أ} = 10}$ ∴ محيط المثلث = ٤ × ١٠ = ٤٠

مثال: قطع ناقص بؤرتاه ب$_١$(-١، ٠)، ب$_٢$(٩، ٠) والنقطة ن(س، ص) تقع على منحنى القطع بحيث أن محيط المثلث ن ب$_١$ ب$_٢$ = ٢٦ جد معادلته.

الحل: المركز $\left(\frac{-1+9}{2} ، 0\right)$ = (٤، ٠)   ٢جـ = ٩ - (-١) = ١٠ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = 5}$

محيط المثلث = ٢أ + ٢جـ ⟸ ٢٦ = ٢أ + ١٠ ⟸ ٢أ = ١٦ ⟸ $\boxed{\text{أ} = 8}$

جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ ⟸ ٢٥ = ٦٤ - ب^٢ ⟸ ب^٢ = ٦٤ - ٢٥ = ٣٩

∴ المعادلة: $\frac{(\text{س} - 4)^2}{64} + \frac{\text{ص}^2}{39} = 1$

مثال: اذا كان طول المحور الأكبر لقطع ناقص يساوي مثلي طول محوره الأصغر جد الاختلاف المركزي لهذا القطع.

الحل: $2\text{أ} = 2 \times 2\text{ب} \Leftarrow \text{أ} = 2\text{ب}$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow \text{جـ}^2 = (2\text{ب})^2 - \text{ب}^2 = 4\text{ب}^2 - \text{ب}^2 = 3\text{ب}^2$

$\Leftarrow \text{جـ} = \sqrt{3}\,\text{ب} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{3}\,\text{ب}}{2\text{ب}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال: في القطع الناقص $\frac{(\text{س}-1)^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{ص}-1)^2}{16} = 1$ اذا كانت البؤرتان هما $(4، 1)$ ، $(-2، 1)$ فجد أ.

الحل: بما أن البؤرتان $(4، 1)$ ، $(-2، 1)$ فإن القطع سيني

$2\text{جـ} = 4 - (-2) = 6 \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = 3}$ $\quad \text{ب}^2 = 16$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow 9 = \text{أ}^2 - 16 \Leftarrow \text{أ}^2 = 25 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 5}$

مثال: في القطع الناقص $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\frac{3}{4}\text{أ}^2} = 1$ أثبت أن البعد بين رأسيه يساوي مثلي البعد بين بؤرتيه.

الحل: $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \frac{3}{4}\text{أ}^2 \Leftarrow \text{جـ}^2 = \frac{1}{4}\text{أ}^2 \Leftarrow \text{جـ} = \frac{1}{2}\text{أ} \Leftarrow 2\text{جـ} = \text{أ}$

البعد بين الرأسين $= 2\text{أ}$

البعد بين البؤرتين $= 2\text{جـ} = \text{أ}$

$\therefore$ البعد بين الرأسين = مثلي البعد بين البؤرتين

مثال: في القطع $4\text{س}^2 + \text{ك}\,\text{ص}^2 = 8$ جد ك بحيث يكون القطع صادي

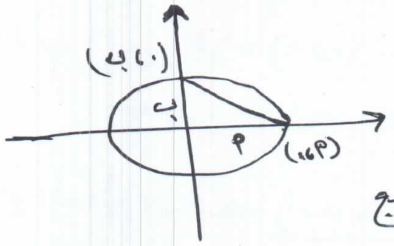
الحل: $\frac{\text{س}^2}{2} + \frac{\text{ص}^2}{\frac{8}{\text{ك}}} = 1$

يجب أن تكون $\frac{8}{\text{ك}} > 2 \Leftarrow 8 > 2\text{ك}$

$2\text{ك} < 8 \Leftarrow \text{ك} < 4$

$\therefore 0 < \text{ك} < 4$

مثال: قطع ناقص البعد بين بؤرتيه يساوي نصف البعد بين طرفي محوره الأصغر والأكبر جد الاختلاف المركزي.



الحل: البعد بين البؤرتين $= 2\text{ج}$

البعد بين الطرفين $= \sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$

$2\text{ج} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2} \Leftarrow 4\text{ج} = \sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ بالتربيع

$\Leftarrow 16\text{ج}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$ --- (1)

لكن: $\text{ج}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$ --- (2) بالجمع

$\Leftarrow 17\text{ج}^2 = 2\text{أ}^2 \Leftarrow \frac{\text{ج}^2}{\text{أ}^2} = \frac{2}{17} \Leftarrow \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \sqrt{\frac{2}{17}}$

$\therefore \text{ف} = \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \sqrt{\frac{2}{17}}$

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٢، ٠)، (−٨، ٠) وطول محوره الأصغر (٤) أمثال المسافة بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة.

الحل: المركز $\left(\frac{-8+2}{2}, 0\right) = (-3, 0)$

$2\text{أ} = 2 - (-8) = 10 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 5}$

$2\text{ب} = 4(\text{أ} - \text{ج}) \Leftarrow \text{ب} = 2(5 - \text{ج}) \Leftarrow \text{ب} = 10 - 2\text{ج}$ —— (*)

$\Leftarrow \text{ج}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow \text{ج}^2 = 25 - (10 - 2\text{ج})^2 \Leftarrow \text{ج}^2 = 25 - (100 - 40\text{ج} + 4\text{ج}^2)$

$\Leftarrow 5\text{ج}^2 - 40\text{ج} + 75 = 0$ $\div 5$ $\Leftarrow \text{ج}^2 - 8\text{ج} + 15 = 0 \Leftarrow (\text{ج} - 5)(\text{ج} - 3) = 0$

$\Leftarrow \boxed{\text{ج} = 5}$ أو $\boxed{\text{ج} = 3}$ نأخذ $\text{ج} = 3$ لأن $\text{ج} < \text{أ}$

$\Leftarrow \text{ج}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \Leftarrow 9 = 25 - \text{ب}^2 \Leftarrow \text{ب}^2 = 16$

$\therefore$ المعادلة: $\frac{(\text{س} + 3)^2}{25} + \frac{\text{ص}^2}{16} = 1$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اكتب معادلة القطع الناقص الذي أحد رأسيه (-٦،٢) والبؤرة البعيدة عن هذا الرأس (-٣،٢) والبعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر = $\sqrt{٧}$

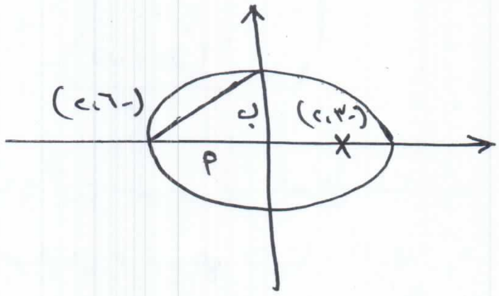
الحل: $\text{م} + \text{جـ} = -٣ - (-٦) = ٣ \Leftarrow \text{جـ} = ٣ - \text{م}$

$\sqrt{\text{م}^{٢} + \text{ب}^{٢}} = \sqrt{٧}$ (فيثاغورس) $\Leftarrow \text{م}^{٢} + \text{ب}^{٢} = ٧ \Leftarrow \text{ب}^{٢} = ٧ - \text{م}^{٢}$

$\text{جـ}^{٢} = \text{م}^{٢} - \text{ب}^{٢} \Leftarrow (٣ - \text{م})^{٢} = \text{م}^{٢} - (٧ - \text{م}^{٢}) \Leftarrow ٩ - ٦\text{م} + \text{م}^{٢} = \text{م}^{٢} - ٧ + \text{م}^{٢}$

$\Leftarrow \text{م}^{٢} + ٦\text{م} - ١٦ = ٠ \Leftarrow (\text{م} + ٨)(\text{م} - ٢) = ٠ \Leftarrow \text{م} = -٨ ، \text{م} = ٢$ نأخذ $\boxed{\text{م} = ٢}$

$\text{جـ} = ٣ - ٢ = ١$ $\qquad$ $\text{ب}^{٢} = ٧ - ٤ = ٣$



المركز: $(-٦ + ٢ ، ٢) = (-٤ ، ٢)$

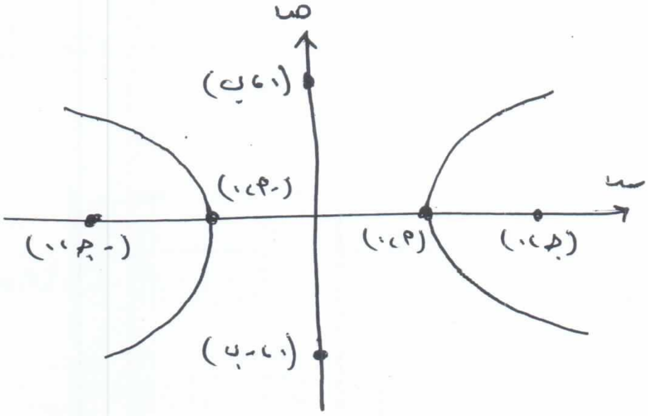
المعادلة: $\frac{(\text{س} + ٤)^{٢}}{٤} + \frac{(\text{ص} - ٢)^{٢}}{٣} = ١$

* القطع الزائد: هو الشكل الهندسي الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى بشرط أن تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً.

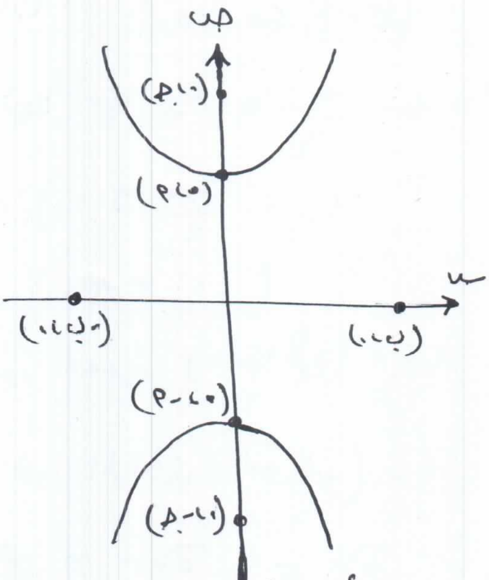
تسمى النقطتين الثابتتين بؤرتي القطع

ويسمى المقدار الثابت طول المحور القاطع (الحقيقي) للقطع ويرمز له ٢م

* استنتاج: معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل (٠،٠)

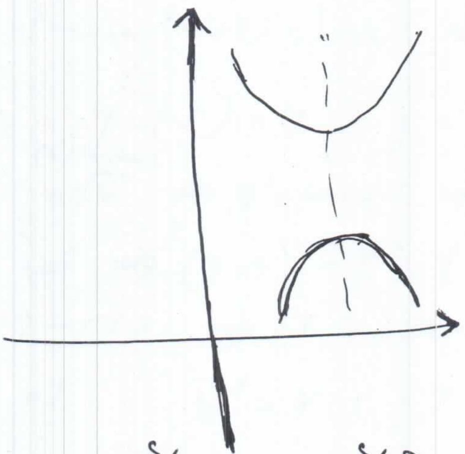


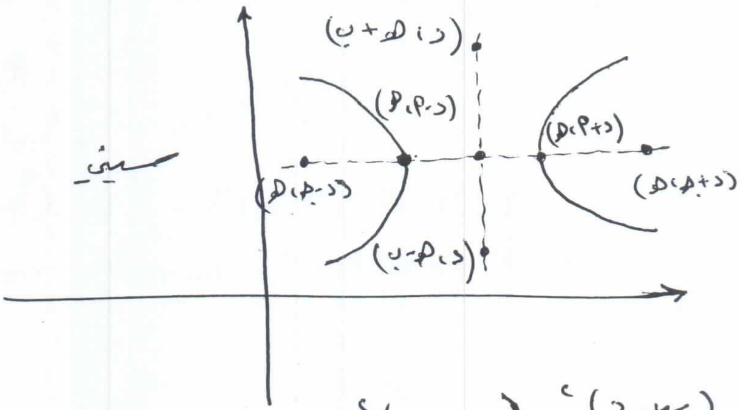
$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{م}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$



$\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{م}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

* عندما يكون المركز (د ، هـ)





$$\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^2}{\text{م}^2} - \frac{(\text{س}-\text{د})^2}{\text{ب}^2} = 1 \qquad\qquad \frac{(\text{س}-\text{د})^2}{\text{م}^2} - \frac{(\text{ص}-\text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = 1$$

* ملاحظة: كما سبق في القطع الناقص وجود حالتان: قطع ناقص سيني وقطع ناقص صادي ويوجد هنا أيضاً قطع زائد صادي نميز بينهما حسب الإشارة الموجبة تسبق (س²) أو تسبق (ص²) وليس العبرة أسفل ذلك الحد الموجب م² بصرف النظر عن كونها كبيرة أم صغيرة

مثال: للقطع الزائد فيما يلي عين احداثيات المركز والرأسين والبؤرتين وطرفي المرافق وجد طول كل من المحورين والبعد البؤري والاختلاف المركزي

① س² - ٤ص² = ٩

الحل: $\text{س}^2 - 4\text{ص}^2 = 9 \quad \times\frac{1}{9} \Leftarrow \frac{\text{س}^2}{9} - \frac{\text{ص}^2}{\frac{9}{4}} = 1$ قطع زائد سيني

المركز (٠ ، ٠) $\text{م}^2 = 9 \Leftarrow \boxed{\text{م} = 3}$ $\text{ب}^2 = \frac{9}{4} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = \frac{3}{2}}$

$\text{جـ}^2 = \text{م}^2 + \text{ب}^2 \Leftarrow \text{جـ}^2 = 9 + \frac{9}{4} \Leftarrow \text{جـ}^2 = \frac{45}{4} \Leftarrow \text{جـ} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

* البؤرتان $(0 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ ، } 0)$

* الرأسان $(0 \pm 3 \text{ ، } 0)$

* طول المحور الحقيقي (القاطع) = ٢م = ٦ ⇐ معادلته $\boxed{\text{ص} = 0}$

* طول المحور المرافق (التخيلي) = ٢ب = ٣ ⇐ معادلته $\boxed{\text{س} = 0}$

$\text{ف} = \frac{\text{جـ}}{\text{م}} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$

٢) $\frac{(\text{ص}-٣)^٢}{٣٦} - \frac{(\text{س}-٢)^٢}{٦٤} = ١$

الحل: المركز (٢، ٣)   القطع صادي

$\text{أ}^٢ = ٣٦ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٦}$ $\text{ب}^٢ = ٦٤ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٨}$ $\text{جـ}^٢ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ١٠}$

طول المحور القاطع = ١٢ ومعادلته $\boxed{\text{س} = ٢}$

طول المحور المرافق = ١٦ ومعادلته $\boxed{\text{ص} = ٣}$

البعد البؤري = ٢٠ $\Leftarrow$ $\text{ف} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{٣}$

* الرأسان (٢، ٣ ± ٦) = (٢، ٩)، (٢، -٣)
* البؤرتان (٢، ٣ ± ١٠) = (٢، ١٣)، (٢، -٧)
* طرفي المرافق (٢ ± ٨، ٣) = (١٠، ٣)، (-٦، ٣)

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

٣) $٢\text{س}^٢ - ٣\text{ص}^٢ + ١٢\text{س} - ٦\text{ص} - ١٠ = \text{صفر}$

$٢(\text{س}^٢ + ٦\text{س}) - ٣(\text{ص}^٢ + ٢\text{ص}) = ١٠$

$\Leftarrow ٢(\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩ - ٩) - ٣(\text{ص}^٢ + ٢\text{ص} + ١ - ١) = ١٠$

$\Leftarrow ٢((\text{س}+٣)^٢ - ٩) - ٣((\text{ص}+١)^٢ - ١) = ١٠$

$\Leftarrow ٢(\text{س}+٣)^٢ - ١٨ - ٣(\text{ص}+١)^٢ + ٣ = ١٠$

$\Leftarrow ٢(\text{س}+٣)^٢ - ٣(\text{ص}+١)^٢ = ٢٥ \quad \times \frac{١}{٢٥}$

$\Leftarrow \frac{(\text{س}+٣)^٢}{\frac{٢٥}{٢}} - \frac{(\text{ص}+١)^٢}{\frac{٢٥}{٣}} = ١$ قطع زائد سيني

المركز (-٣، -١) $\text{أ}^٢ = \frac{٢٥}{٢} \Leftarrow \text{أ} = \frac{٥}{\sqrt{٢}}$ $\text{ب}^٢ = \frac{٢٥}{٣} \Leftarrow \text{ب} = \frac{٥}{\sqrt{٣}}$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{جـ}^٢ = ٢٥(\frac{٥}{٦}) \Leftarrow \text{جـ} = \frac{٥\sqrt{٥}}{\sqrt{٦}}$

* البؤرتان $(-٣ \pm \frac{٥\sqrt{٥}}{\sqrt{٦}}، -١)$ * الرأسان $(-٣ \pm \frac{٥}{\sqrt{٢}}، -١)$
* طول المحور القاطع = ٢أ = $٥\sqrt{٢}$ $\Leftarrow$ معادلته $\boxed{\text{ص} = -١}$
* طول المحور المرافق = ٢ب = $\frac{١٠}{\sqrt{٣}}$ $\Leftarrow$ معادلته $\boxed{\text{س} = -٣}$

$\text{ف} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\frac{٥\sqrt{٥}}{\sqrt{٦}}}{\frac{٥}{\sqrt{٢}}} = \sqrt{\frac{٥}{٣}}$

٤) $٧ص^{٢} - ٩س^{٢} - ٢٨ص - ١٨س = ٤٤$

$\Leftarrow ٧ص^{٢} - ٢٨ص - ٩س^{٢} - ١٨س = ٤٤$

$\Leftarrow ٧(ص^{٢} - ٤ص) - ٩(س^{٢} + ٢س) = ٤٤$

$\Leftarrow ٧(ص^{٢} - ٤ص + ٤) - ٩(س^{٢} + ٢س + ١) = ٤٤ + ٧ \times ٤ - ٩ \times ١$

$\Leftarrow ٧(ص - ٢)^{٢} - ٩(س + ١)^{٢} = ٦٣$ $\div ٦٣$

$$\Leftarrow \frac{(ص - ٢)^{٢}}{٩} - \frac{(س + ١)^{٢}}{٧} = ١$$

المركز (−١، ٢) القطع صادي

$أ^{٢} = ٩ \Leftarrow أ = ٣$ $ب^{٢} = ٧ \Leftarrow ب = \sqrt{٧}$ $جـ^{٢} = ٩ + ٧ = ١٦ \Leftarrow جـ = ٤$

* طول المحور القاطع = ٦ $\Leftarrow$ معادلة $\boxed{س = -١}$
* طول المحور المرافق = $٢\sqrt{٧}$ $\Leftarrow$ معادلة $\boxed{ص = ٢}$
* البعد البؤري = ٨ ، $ف = \frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٣}$
* الرأسان $(-١، ٢ \pm ٣) = (-١، ٥)، (-١، -١)$
* البؤرتان $(-١، ٢ \pm ٤) = (-١، ٦)، (-١، -٢)$
* طرفي المرافق $(-١ \pm \sqrt{٧}، ٢)$

مثال: جد معادلة القطع المخروطي الذي بؤرتاه (٢، −٣)، (٢، ٧) واختلافه المركزي ف = ١,٢٥

الحل: القطع زائد صادي   لأنه ف > ١

المركز $(٢، \frac{-٣ + ٧}{٢}) = (٢، ٢)$

$٢جـ = ٧ - (-٣) = ١٠ \Leftarrow \boxed{جـ = ٥}$

$\Leftarrow ف = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow ١,٢٥ = \frac{٥}{أ} \Leftarrow أ = \frac{٥}{١,٢٥} \Leftarrow أ = \frac{٥٠٠}{١٢٥} \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} \Leftarrow ٢٥ = ١٦ + ب^{٢} \Leftarrow \boxed{ب^{٢} = ٩}$

$$\therefore \text{المعادلة: } \frac{(ص - ٢)^{٢}}{١٦} - \frac{(س - ٢)^{٢}}{٩} = ١$$

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي رأساه (±٤ ، ٠) واختلافه المركزي $\frac{3}{2}$

الحل: المركز: (٠ ، ٠) $\text{أ} = 4$

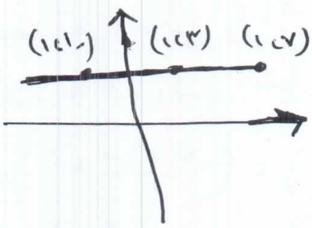
$\Leftarrow \text{ف} = \frac{\text{ج}}{\text{أ}} \Leftarrow \frac{3}{2} = \frac{\text{ج}}{4} \Leftarrow 2\text{ج} = 12 \Leftarrow \boxed{\text{ج} = 6}$

$\text{ج}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \Leftarrow 36 = 16 + \text{ب}^2 \Leftarrow \text{ب}^2 = 20 \Leftarrow \text{ب} = \sqrt{20}$

المعادلة: $\frac{\text{س}^2}{16} - \frac{\text{ص}^2}{20} = 1$

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (-١ ، ١) ، (٧ ، ١) والبعد البؤري له مثلي طول محوره القاطع

الحل: المركز: $\left(\frac{-1+7}{2} ، 1\right) = (3 ، 1)$



$2\text{ج} = 7 - (-1) = 8 \Leftarrow \text{ج} = 4$

$2\text{ج} = 2(2\text{أ}) \Leftarrow \text{ج} = 2\text{أ} \Leftarrow 4 = 2\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = 2$

$\text{ج}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \Leftarrow 16 = 4 + \text{ب}^2 \Leftarrow \text{ب}^2 = 12$

المعادلة: $\frac{(\text{س} - 3)^2}{4} - \frac{(\text{ص} - 1)^2}{12} = 1$

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي رأساه (±٤ ، ٠) ويمر بالنقطة (٨ ، ٢)

الحل: المركز (٠ ، ٠) $\text{أ} = 4$

المعادلة: $\frac{\text{س}^2}{16} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$

يمر بـ (٨ ، ٢) $\Leftarrow \frac{64}{16} - \frac{4}{\text{ب}^2} = 1$

$\Leftarrow 4 - 1 = \frac{4}{\text{ب}^2} \Leftarrow 3\text{ب}^2 = 4 \Leftarrow \text{ب}^2 = \frac{4}{3}$

المعادلة: $\frac{\text{س}^2}{16} - \frac{3\text{ص}^2}{4} = 1$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي رأساه محوره المرافق $(\pm٣ ، ٠)$ ويمر بـ $(٣ ، ٢)$

الحل: المركز $(٠ ، ٠)$ $\text{ب} = ٣$

المعادلة: $\dfrac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} - \dfrac{\text{ص}^٢}{٩} = ١$

يمر بـ $(٣ ، ٢) \Leftarrow \dfrac{٩}{\text{أ}^٢} - \dfrac{٤}{٩} = ١ \Leftarrow \dfrac{٩}{\text{أ}^٢} = ١ + \dfrac{٤}{٩} \Leftarrow \dfrac{٩}{\text{أ}^٢} = \dfrac{١٣}{٩}$

$\Leftarrow \text{أ}^٢ = \dfrac{٩ \times ٩}{١٣} = \dfrac{٨١}{١٣}$

$\Leftarrow$ المعادلة: $\dfrac{١٣\,\text{س}^٢}{٨١} - \dfrac{\text{ص}^٢}{٩} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(١ ، ١٢)$ ، $(١ ، -٤)$ وطول محوره القاطع ينقص بمقدار ٤ عن البعد البؤري له

الحل: المركز $\left(١ ، \dfrac{-٤ + ١٢}{٢}\right) = (١ ، ٤)$

$٢\text{جـ} = ١٢ - (-٤) = ١٦ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٨}$

$٢\text{أ} = ٢\text{جـ} - ٤ \Leftarrow ٢\text{أ} = ١٦ - ٤ \Leftarrow ٢\text{أ} = ١٢ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٦}$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow ٦٤ = ٣٦ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢ = ٢٨$

المعادلة: $\dfrac{(\text{ص} - ٤)^٢}{٣٦} - \dfrac{(\text{س} - ١)^٢}{٢٨} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm٧ ، ٠)$ ويمر بالنقطة $(٥ ، ٠)$

الحل: المركز $(٠ ، ٠)$ $\text{جـ} = ٧$

بما أن $(٥ ، ٠)$ تقع على المحور البؤري

$\therefore$ $(٥ ، ٠)$ هي أحد الرأسين

$\therefore \text{أ} = ٥$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow ٤٩ = ٢٥ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢ = ٢٤$

المعادلة: $\dfrac{\text{س}^٢}{٢٥} - \dfrac{\text{ص}^٢}{٢٤} = ١$

مثال ٤: اكتب معادلة القطع الزائد الذي معادلتا محوريه هما س = -١ ، ص = ٢
واحدى بؤرتيه (٣، ٢) وطول محوره المرافق يساوي ٦

الحل: المركز (-١، ٢) البؤرة (٣، ٢) القطع سيني

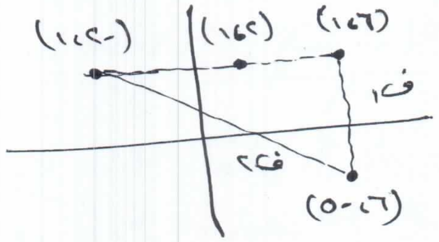
جـ = ٣ - (-١) = ٤ ⟸ ٢ب = ٦ ⟸ $\boxed{\text{ب} = ٣}$

جـ² = أ² + ب² ⟸ ١٦ = أ² + ٩ ⟸ أ² = ٧

المعادلة: $\frac{(\text{س}+١)^٢}{٧} - \frac{(\text{ص}-٢)^٢}{٩} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (-٢، ١)، (٦، ١) والقطع يمر بـ (٦، -٥)

الحل: المركز $\left(\frac{-٢+٦}{٢} ، ١\right)$ = (٢، ١)



٢جـ = ٦ - (-٢) = ٨ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = ٤}$

ف١ = $\sqrt{(٦-٦)^٢ + (-٥-١)^٢} = \sqrt{٠+٣٦} = ٦$

ف٢ = $\sqrt{(٦+٢)^٢ + (-٥-١)^٢} = \sqrt{٦٤+٣٦} = ١٠$

ف٢ - ف١ = ٢أ ⟸ ١٠ - ٦ = ٢أ ⟸ ٢أ = ٤ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ٢}$

جـ² = أ² + ب² ⟸ ١٦ = ٤ + ب² ⟸ ب² = ١٢

المعادلة: $\frac{(\text{س}-٢)^٢}{٤} - \frac{(\text{ص}-١)^٢}{١٢} = ١$

* **ملاحظة:** في القطع الناقص أو القطع الزائد اذا علمت البؤرتان ونقطة يمر بها
القطع نستخدم ١) ف١ + ف٢ = ٢أ (القطع الناقص)
٢) |ف١ - ف٢| = ٢أ (القطع الزائد)

مثال: جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه (١، ٢) ورأسه البعيد (١٠، ٢) واختلافه
المركزي يساوي (٢).

الحل: ه = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ⟸ ٢ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ⟸ جـ = ٢أ

أ + جـ = ١٠ - ١ = ٩ ⟸ أ + ٢أ = ٩ ⟸ ٣أ = ٩ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ٣}$

جـ = ٢ × ٣ = ٦

جـ² = أ² + ب² ⟸ ٣٦ = ٩ + ب² ⟸ ب² = ٢٧

المركز (١٠ - ٣، ٢) = (٧، ٢)

المعادلة: $\frac{(\text{س}-٧)^٢}{٩} - \frac{(\text{ص}-٢)^٢}{٢٧} = ١$

* **ملاحظة:** في القطع الناقص أو الزائد اذا علمت:

١) البؤرة والرأس البعيد تكون المسافة بينهما = أ + جـ

٢) البؤرة والرأس القريب تكون المسافة بينهما = أ - جـ (القطع الناقص)

= جـ - أ (القطع الزائد)

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه (٥، -١) واحدى طرفي محوره المرافق (٢، ٤) ومحوره المرافق يوازي السينات.

الحل: القطع صادي (لأن المرافق يوازي السينات)

المركز (٥، ٤)   ب = ٥ - ٢ = ٣   جـ = ٤ - (-١) = ٥

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟸ ٢٥ = أ^2 + ٩ ⟸ أ^2 = ١٦

المعادلة: $\frac{(ص-٤)^2}{١٦} - \frac{(س-٥)^2}{٩} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع المخروطي الذي اختلافه المركزي $\frac{٥}{٤}$ والذي يزيد فيه البعد بين بؤرتيه عن البعد بين رأسيه بمقدار (٤) واحدى بؤرتيه (٥، ٣) ومحوره القاطع يوازي السينات.

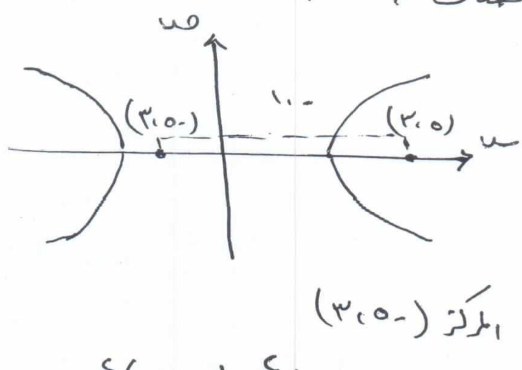
الحل: ف = $\frac{٥}{٤}$ > ١ ∴ القطع زائد

٢جـ = ٢أ + ٤ ⟸ جـ = أ + ٢   لكن: ف = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ $\frac{٥}{٤} = \frac{أ+٢}{أ}$ ⟸ ٥أ = ٤أ + ٨

⟸ $\boxed{أ = ٨}$ ∴ $\boxed{جـ = ١٠}$

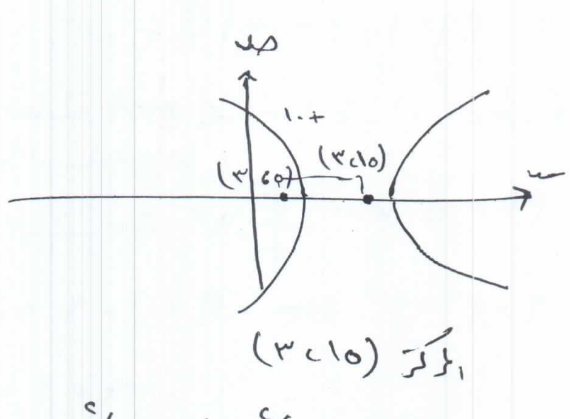
جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟸ ١٠٠ = ٦٤ + ب^2 ⟸ ب^2 = ٣٦ ⟸ $\boxed{ب = ٦}$

هناك حالتان:



المركز (-٥، ٣)

المعادلة: $\frac{(س+٥)^2}{٦٤} - \frac{(ص-٣)^2}{٣٦} = ١$



المركز (١٥، ٣)

المعادلة: $\frac{(س-١٥)^2}{٦٤} - \frac{(ص-٣)^2}{٣٦} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠،٠) وبؤرتاه على محور السينات ويمس المستقيم ص = $\sqrt{٣}$ س − ٢ عند النقطة ($٢\sqrt{٣}$، ٤)

الحل: المعادلة: $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

يمر بـ ($٢\sqrt{٣}$، ٤) ⟸ $\frac{١٢}{أ^2} - \frac{١٦}{ب^2} = ١$ ——— (١)

ميل المستقيم ص' = $\sqrt{٣}$

نجد ميل المماس ⟸ م : $\frac{٢س}{أ^2} - \frac{٢ص}{ب^2}\frac{دص}{دس} = ٠$

وعند ($٢\sqrt{٣}$، ٤) ⟸ $\frac{٢\times ٢\sqrt{٣}}{أ^2} - \frac{٢\times ٤}{ب^2} \times \sqrt{٣} = ٠$ $\div\sqrt{٣}$

⟸ $\frac{٤}{أ^2} - \frac{٨}{ب^2} = ٠$ ——— (٢)

$\frac{١٢}{أ^2} - \frac{١٦}{ب^2} = ١$ ١

$\frac{٤}{أ^2} - \frac{٨}{ب^2} = ٠$ −٢

⟸ $\frac{١٢}{أ^2} - \cancel{\frac{١٦}{ب^2}} = ١$

$-\frac{٨}{أ^2} + \cancel{\frac{١٦}{ب^2}} = ٠$

⟸ $\frac{٤}{أ^2} = ١$ ⟸ $أ^2 = ٤$

بالتعويض: $\frac{٤}{٤} - \frac{٨}{ب^2} = ٠$ ⟸ $١ = \frac{٨}{ب^2}$ ⟸ $ب^2 = ٨$

المعادلة: $\frac{س^2}{٤} - \frac{ص^2}{٨} = ١$

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه (١،٠) وطول محوره القاطع $٢\sqrt{٣}$ ويوازي السينات والقطع يمر بالنقطة (٤، $\sqrt{٢}$).

الحل: ٢أ = $٢\sqrt{٣}$ ⟸ أ = $\sqrt{٣}$ المعادلة: $\frac{(س-١)^2}{٣} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

يمر بـ (٤، $\sqrt{٢}$) ⟸ $\frac{(٤-١)^2}{٣} - \frac{٢}{ب^2} = ١$ ⟵ $٣ - \frac{٢}{ب^2} = ١$ ⟸ $٢ = \frac{٢}{ب^2}$

⟸ $ب^2 = ١$

المعادلة: $\frac{(س-١)^2}{٣} - \frac{ص^2}{١} = ١$

الاستاذ عماد مبيك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي طرفا محوره المرافق هما (١،-١) ، (١،٥) واختلافه المركزي يساوي (٢)

الحل: المركز $\left(١ ، \frac{-١+٥}{٢}\right) = (١،٢)$

$٢\text{ب} = ٥ - (-١) = ٦ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٣}$

$\text{ف} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow ٢ = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow ٤ = \frac{\text{جـ}^٢}{\text{أ}^٢} \Leftarrow ٤\text{أ}^٢ = \text{جـ}^٢$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow ٤\text{أ}^٢ = \text{أ}^٢ + ٩ \Leftarrow ٣\text{أ}^٢ = ٩ \Leftarrow \text{أ}^٢ = ٣$

المعادلة: $\frac{(\text{س}-١)^٢}{٣} - \frac{(\text{ص}-٢)^٢}{٩} = ١$

مثال: النقطة ن(س،ص) تقع على القطع الزائد $٤\text{س}^٢ - ٩\text{ص}^٢ + ٣٦ = ٠$ أوجد الفرق المطلق لبعدي النقطة عن بؤرتي القطع.

الحل: الفرق المطلق = ٢أ لذلك نجد أ

$٤\text{س}^٢ - ٩\text{ص}^٢ + ٣٦ = ٠ \Leftarrow ٣٦ = ٩\text{ص}^٢ - ٤\text{س}^٢$ ÷٣٦

$\frac{\text{ص}^٢}{٤} - \frac{\text{س}^٢}{٩} = ١ \Leftarrow \text{أ}^٢ = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٢}$ $\therefore ٢\text{أ} = ٤$

مثال: جد نهايتي المحور المرافق للقطع $(٣\text{س}+٦)^٢ - (٢\text{ص}-٢)^٢ = ٣٦$

الحل: $(٣(\text{س}+٢))^٢ - (٢(\text{ص}-١))^٢ = ٣٦$

$\Leftarrow ٩(\text{س}+٢)^٢ - ٤(\text{ص}-١)^٢ = ٣٦$ ÷٣٦

$\frac{(\text{س}+٢)}{٤} - \frac{(\text{ص}-١)^٢}{٩} = ١$ المركز (-٢،١) $\text{ب}^٢ = ٩ \Leftarrow \text{ب} = ٣$

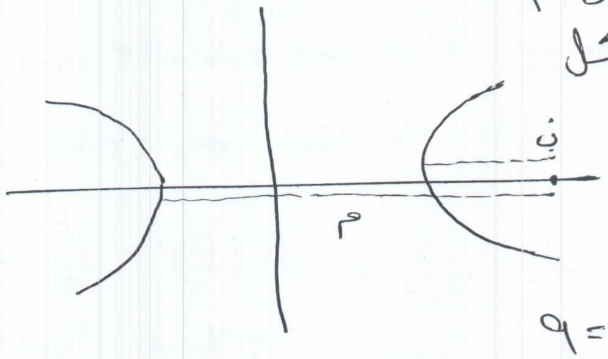
طرفي المرافق $(-٢ ، ١\pm٣) = (-٢،٤) ، (-٢،-٢)$

مثال: المعادلة $\frac{(\text{س}-٢)^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{(\text{ص}+١)^٢}{\text{ب}^٢} = ١$ تمثل قطع زائد يمر بـ (١،-١) واختلافه المركزي $= \frac{٣}{٢}$ جد أ ، ب.

الحل: $(١،-١) \Leftarrow \frac{(١-٢)^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{(-١+١)^٢}{\text{ب}^٢} = ١ \Leftarrow \frac{١}{\text{أ}^٢} - ٠ = ١ \Leftarrow \frac{١}{\text{أ}^٢} = ١ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ١}$

$\text{ف} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \frac{٣}{٢} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \frac{٩}{٤} = \frac{\text{جـ}^٢}{\text{أ}^٢} \Leftarrow \frac{٩}{٤} = \frac{\text{جـ}^٢}{١} \Leftarrow \text{جـ}^٢ = \frac{٩}{٤}$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \frac{٩}{٤} = ١ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢ = \frac{٥}{٤} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}}$



مثال: معتمداً على الشكل اذا كانت $م \times ن = ٩$ وكان الاختلاف المركزي $= \sqrt{٢}$ اكتب معادلة الشكل

الحل: المركز (٠،٠) $ن = جـ - أ$

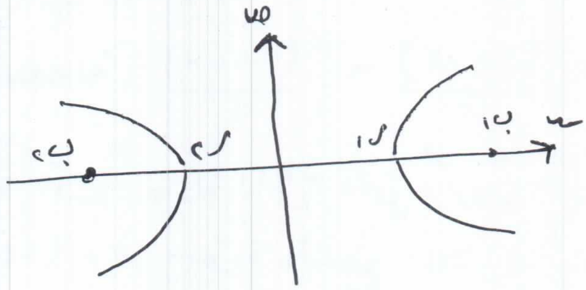
$م = جـ + أ$

$م \times ن = (جـ - أ)(جـ + أ) = جـ^٢ - أ^٢ = ب^٢ = ٩$

$ف = \sqrt{٢} \Leftarrow \sqrt{٢} = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow ٢ = \frac{جـ^٢}{أ^٢} \Leftarrow ٢أ^٢ = جـ^٢$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow ٢أ^٢ = أ^٢ + ٩ \Leftarrow أ^٢ = ٩$

المعادلة: $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$



مثال: معتمداً على الشكل $\frac{ب١ر١}{ب١ب٢} = \frac{١}{٥}$

الحل: $ب١ر١ = جـ - أ$

$ب١ب٢ = ٢جـ$

$\therefore \frac{ب١ر١}{ب١ب٢} = \frac{جـ - أ}{٢جـ} \Leftarrow \frac{جـ - أ}{٢جـ} = \frac{١}{٥}$

$\Leftarrow ٥جـ - ٥أ = ٢جـ \Leftarrow ٥جـ - ٢جـ = ٥أ \Leftarrow ٣جـ = ٥أ \Leftarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$

مثال: اذا كان طول المحور القاطع لقطع زائد يساوي مثلي طول محوره المرافق فجد الاختلاف المركزي لهذا القطع.

الحل: $٢أ = ٢(٢ب) \Leftarrow أ = ٢ب$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow جـ^٢ = (٢ب)^٢ + ب^٢ = ٤ب^٢ + ب^٢ = ٥ب^٢$

$جـ = \sqrt{٥}\,ب$

$ف = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٥}\,ب}{٢ب} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال ٤ اكتب معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي يساوي $\frac{\sqrt{\text{٢١}}}{\text{٣}}$ ويمر بالنقطة (-٤،-٣) ومركزه يقع على المستقيم س=٢ وبؤرتاه على المستقيم ص=٣

الحل: المركز (٢،٣) ⇐ المعادلة $\frac{(\text{س}-\text{٢})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{ص}-\text{٣})^2}{\text{ب}^2} = \text{١}$

لكن: $\text{ف} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{\text{٢١}}}{\text{٣}}$ ⇐ $\text{جـ} = \frac{\sqrt{\text{٢١}}}{\text{٣}}\text{أ}$ ⇐ $\text{جـ}^2 = \frac{\text{٧}}{\text{٣}}\text{أ}^2$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$ ⇐ $\frac{\text{٧}}{\text{٣}}\text{أ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$ ⇐ $\text{ب}^2 = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{أ}^2$

المعادلة: $\frac{(\text{س}-\text{٢})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{ص}-\text{٣})^2}{\text{ب}^2} = \text{١}$

⇐ يمر بـ (-٤،-٣) ⇐ $\frac{\text{٣٦}}{\text{أ}^2} - \frac{\text{١٠٨}}{\text{٤أ}^2} = \text{١}$ ⇐ $\frac{\text{٩}}{\text{أ}^2} = \text{١}$ ⇐ $\text{أ}^2 = \text{٩}$

$\text{ب}^2 = \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \text{٩} = \text{١٢}$

∴ المعادلة: $\frac{(\text{س}-\text{٢})^2}{\text{٩}} - \frac{(\text{ص}-\text{٣})^2}{\text{١٢}} = \text{١}$

مثال ٤ اكتب معادلة الدائرة التي مركزها هو مركز القطع الزائد الذي بؤرتاه (-٣،٢)، (٥،٢) وتمر ببؤرة القطع المكافئ ص² - ٦ص = ٤س + ٣

الحل: مركز القطع الزائد $\left(\frac{-\text{٣}+\text{٥}}{\text{٢}} ، \text{٢}\right)$ = (١،٢) = مركز الدائرة

القطع المكافئ: ص² - ٦ص + ٩ = ٤س + ٣ + ٩ (أكملنا المربع)

⇐ (ص-٣)² = ٤(س+٣) ⇐ رأس القطع المكافئ هو (-٣،٣)

⇐ ٤جـ = ٤ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = \text{١}}$

بؤرة القطع المكافئ (-٣+١ ، ٣) = (-٢،٣)

⇐ معادلة الدائرة: (س-١)² + (ص-٢)² = ر²

يمر بـ (-٢،٣) ⇐ (-٢-١)² + (٣-٢)² = ر²

⇐ ٩+١ = ر² ⇐ ر² = ١٠

∴ المعادلة: (س-١)² + (ص-٢)² = ١٠

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه هو مركز الدائرة ٥س² + ٥ص² − ١٠س + ٢٠ص − ١٥ = ٠ ، وإحدى بؤرتيه هي مركز القطع الناقص ٤(س − ١)² + ٥(ص − ٤)² = ١٠٠ وطول محوره المرافق = ٨

الحل: الدائرة: ٥س² + ٥ص² − ١٠س + ٢٠ص − ١٥ = ٠ ÷٥

⇐ س² + ص² − ٢س + ٤ص − ٣ = ٠

مركز الدائرة = (١، −٢) = مركز القطع الزائد

الناقص: ٤(س − ١)² + ٥(ص − ٤)² = ١٠٠ المركز (١، ٤) ⇐ (بؤرة القطع الزائد)

القطع صادي جـ = ٤ − (−٢) = ٦

٢ب = ٨ ⇐ $\boxed{\text{ب = ٤}}$

جـ² = أ² + ب² ⇐ ٣٦ = أ² + ١٦ ⇐ أ² = ٢٠

∴ المعادلة: $\frac{(\text{ص} + ٢)^2}{٢٠} - \frac{(\text{س} - ١)^2}{١٦} = ١$

* أسئلة عامة على الحل الهندسي وتمييز القطوع من المعادلة:

مثال: النقطة جـ(س، ص) تتحرك بحيث أن س = جاهـ ، ص = جتا٢هـ ، جد معادلة المنحنى وما نوعه

الحل: جتا٢هـ = ١ − ٢جا²هـ (متطابقة)

ص = ١ − ٢س² (بالتعويض)

⇐ ٢س² = ١ − ص تمثل معادلة قطع مكافئ صادي موجب

مثال: اكتب معادلة المنحنى بحيث أن و(س، ص) نقطة تتحرك ، س = جاهـ − جتاهـ
ص = جا٢هـ

ص = جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ

الحل: س² = (جاهـ − جتاهـ)²

س² = جا²هـ + جتا²هـ − ٢جاهـ جتاهـ

س² = ١ − ص

تمثل قطع مكافئ صادي موجب

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اذا كان المستقيم ص = س + م مماساً للقطع المكافئ ص² = ٨س

جد قيمة م ؟

الحل: ميل المستقيم ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١

م (ميل المماس) ⟸ ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٨ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٨}{\text{٢ص}} = \frac{٤}{\text{ص}}$

⟸ نساوي الميلين ١ = $\frac{٤}{\text{ص}}$ ⟸ $\boxed{\text{ص} = ٤}$

لايجاد س نعوض في معادلة المماس ⟸ ١٦ = ٨س ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$

النقطة (٢،٤) تحقق المستقيم والقطع

نعوض في معادلة المستقيم ⟸ ٤ = ٢ + م ⟸ $\boxed{\text{م} = ٢}$

مثال: أثبت أن النقطة ط(١٢ك²، ٥ - ٣ك) تقع على منحنى قطع مكافئ لجميع قيم ك الحقيقية، ك ∈ ح ؟

الحل: س = ١٢ك² ---- ①

ص = ٥ - ٣ك ---- ②

من ② ⟸ ك = $\frac{\text{ص} - ٥}{-٣}$ بالتعويض في ①

⟸ س = ١٢ $\left(\frac{\text{ص} - ٥}{-٣}\right)^2$ ⟸ س = $\cancel{١٢}^{٤} \times \frac{(\text{ص} - ٥)^2}{\cancel{٩}\ ٣}$

⟸ (ص - ٥)² = $\frac{٣}{٤}$ س تمثل معادلة قطع مكافئ سيني موجب

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: أثبت أن النقط التالية تتحرك على منحنى القطع المشار إليه أمامها

① ط(٢ - ٣قاهـ ، ١ + ٤ظاهـ) ---- قطع زائد

② ط(٣جتاهـ - ٢ ، ٤ - ٣جاهـ) ---- دائرة

③ ط(١ + ٥جتاهـ ، ٢ - ٤جاهـ) ---- قطع ناقص

الحل: (١) $\text{س} = ٢ - ٣\,\text{قا ن}$

$٣\,\text{قا ن} = ٢ - \text{س}$

$\text{قا ن} = \frac{٢ - \text{س}}{٣}$

$\text{ص} = ١ + ٤\,\text{ظا ن}$

$\text{ص} - ١ = ٤\,\text{ظا ن}$

$\text{ظا ن} = \frac{\text{ص} - ١}{٤}$

لكن: $\text{قا}^2\text{ن} - ١ = \text{ظا}^2\text{ن} \Leftarrow \frac{(٢ - \text{س})^2}{٩} - ١ = \frac{(\text{ص} - ١)^2}{١٦}$

$\Leftarrow \frac{(\text{س} - ٢)^2}{٩} - \frac{(\text{ص} - ١)^2}{١٦} = ١$ وهي تمثل قطع زائد

(٢) $\text{س} = ٣\,\text{جتا ن} - ٢$

$\text{س} + ٢ = ٣\,\text{جتا ن}$

$\text{جتا ن} = \frac{\text{س} + ٢}{٣}$

$\text{ص} = ٤ - ٣\,\text{جا ن}$

$٣\,\text{جا ن} = ٤ - \text{ص}$

$\text{جا ن} = \frac{٤ - \text{ص}}{٣}$

لكن: $\text{جتا}^2\text{ن} + \text{جا}^2\text{ن} = ١ \Leftarrow \frac{(\text{س} + ٢)^2}{٩} + \frac{(٤ - \text{ص})^2}{٩} = ١$

$\Leftarrow$ بالضرب في (٩) $\Leftarrow (\text{س} + ٢)^2 + (\text{ص} - ٤)^2 = ٩$

وهي تمثل معادلة دائرة بإحداثي مركزي = صفر

(٣) $\text{س} = ١ + ٥\,\text{جتا ن}$

$\text{س} - ١ = ٥\,\text{جتا ن}$

$\text{جتا ن} = \frac{\text{س} - ١}{٥}$

$\text{ص} = ٢ - ٤\,\text{جا ن}$

$٤\,\text{جا ن} = ٢ - \text{ص}$

$\text{جا ن} = \frac{٢ - \text{ص}}{٤}$

الاستاذ عماد مبيك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

لكن: $\text{جا}^2\text{ن} + \text{جتا}^2\text{ن} = ١$

$\frac{(\text{س} - ١)^2}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٢)^2}{١٦} = ١$ تمثل معادلة قطع ناقص

سؤال: أثبت أن النقطة ل (٢ - ٣ قا ن ، ١ + ٤ ظا ن) التي تتحرك على قطع مخروطي تمثل معادلة قطع زائد

إرشاد: $\text{قا}^2\text{ن} - \text{ظا}^2\text{ن} = ١$

مثال: أثبت أن الاختلاف المركزي للقطع الزائد المتساوي المحورين هو $\sqrt{2}$ دائماً

الحل: $$\frac{(\text{س}-\text{د})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{ص}-\text{هـ})^2}{\text{أ}^2} = 1$$

$$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \Leftarrow \text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{أ}^2 \Leftarrow \text{جـ}^2 = 2\text{أ}^2 \Leftarrow \text{جـ} = \sqrt{2}\,\text{أ}$$

$$\text{ق} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \frac{\sqrt{2}\,\cancel{\text{أ}}}{\cancel{\text{أ}}} = \sqrt{2}$$

مثال: أثبت أن معادلة المماس المرسوم للقطع المخروطي الذي معادلته $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$ من النقطة ط$(\text{س}_1, \text{ص}_1)$ الواقعة عليه هي

$$\frac{\text{س}\,\text{س}_1}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}\,\text{ص}_1}{\text{ب}^2} = 1$$

الحل: من معادلة المنحنى $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$ نشتق بالنسبة لـ س

$$\Leftarrow \frac{2\text{س}}{\text{أ}^2} - \frac{2\text{ص}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}}{\text{ب}^2} = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{س}}{\text{أ}^2} = \frac{\text{ص}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}}{\text{ب}^2} \Leftarrow \text{أ}^2\,\text{ص}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{ب}^2\,\text{س}$$

$$\Leftarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{\text{ب}^2\,\text{س}}{\text{أ}^2\,\text{ص}} \Leftarrow \text{م}\,(\text{ميل المماس عند } (\text{س}_1, \text{ص}_1)) = \frac{\text{ب}^2\,\text{س}_1}{\text{أ}^2\,\text{ص}_1}$$

$\Leftarrow$ معادلة المماس هي $\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}(\text{س} - \text{س}_1)$

$$\Leftarrow \text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{\text{ب}^2\,\text{س}_1}{\text{أ}^2\,\text{ص}_1}(\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\Leftarrow \text{أ}^2\,\text{ص}\,\text{ص}_1 - \text{أ}^2\,\text{ص}_1^2 = \text{ب}^2\,\text{س}\,\text{س}_1 - \text{ب}^2\,\text{س}_1^2$$

$$\text{ب}^2\,\text{س}_1^2 - \text{أ}^2\,\text{ص}_1^2 = \text{ب}^2\,\text{س}\,\text{س}_1 - \text{أ}^2\,\text{ص}\,\text{ص}_1$$ بالقسمة على $\text{أ}^2\,\text{ب}^2$

$$\Leftarrow \frac{\text{س}_1^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}_1^2}{\text{ب}^2} = \frac{\text{س}\,\text{س}_1}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}\,\text{ص}_1}{\text{ب}^2}$$

لكن النقطة $(\text{س}_1, \text{ص}_1)$ تحقق المعادلة $\Leftarrow \frac{\text{س}_1^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}_1^2}{\text{ب}^2} = 1$

$$\therefore 1 = \frac{\text{س}\,\text{س}_1}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}\,\text{ص}_1}{\text{ب}^2}$$

مثال: النقطة ن(س، ص) تتحرك في المستوى بحيث أن بعدها عن النقطة (٢، ٣) يساوي ٧، اكتب معادلة المحل الهندسي وما نوع القطع المخروطي.

الحل: المحل الهندسي هو دائرة مركزها (٢، ٣) ونصف قطرها يساوي (٧)

ومعادلتها $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٤٩$

مثال: النقطة ن(س، ص) تتحرك في المستوى بحيث أن بعدها عن النقطة (٥، ١) يساوي بعدها عن المستقيم س = -١، اكتب معادلة المحل الهندسي وما نوع القطع

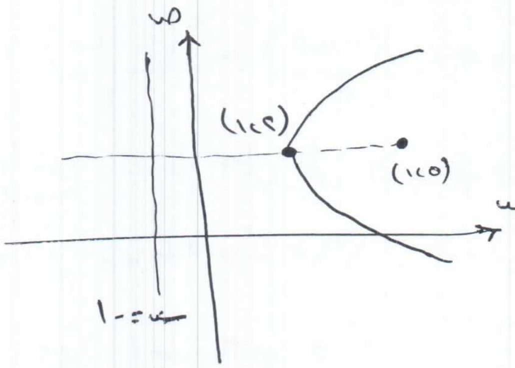
الحل: المحل الهندسي هو قطع مكافئ بؤرته (٥، ١) ودليله س = -١

الرأس $\left(\frac{-١+٥}{٢}، ١\right) = (٢، ١)$

$جـ = ٥ - ٢ = ٣$

المعادلة: $(ص - هـ)^٢ = ٤جـ(س - د)$

$(ص - ١)^٢ = ١٢(س - ٢)$



مثال: النقطة ن(س، ص) تتحرك في المستوى بحيث أن مجموع بعديها عن النقطتين (١، -٢)، (١، ٦) يساوي (١٠) اكتب معادلة المحل الهندسي وما نوع القطع.

الحل: المحل الهندسي هو قطع ناقص بؤرتاه (١، -٢)، (١، ٦) وطول محوره الأكبر = ١٠

$٢أ = ١٠ \Leftarrow \boxed{أ = ٥}$

المركز $\left(١، \frac{-٢+٦}{٢}\right) = (١، ٢)$

$٢جـ = ٦ - (-٢) = ٨ \Leftarrow \boxed{جـ = ٤}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ١٦ = ٢٥ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٩$

المعادلة: $\frac{(س - ١)^٢}{٩} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٢٥} = ١$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: ن(س، ص) نقطة تتحرك في المستوى بحيث أن الفرق المطلق لبعديها عن النقطتين (-١، ٣) ، (٥، ٣) يساوي (٤) اكتب معادلة المحل الهندسي وما نوعه ، للقطع

الحل: المحل الهندسي هو قطع زائد بؤرتاه (-١، ٣) ، (٥، ٣) وطول محوره القاطع = ٤

٢أ = ٤ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ٢}$

المركز $\left(\frac{-١+٥}{٢} ، ٣\right) = (٢، ٣)$

٢جـ = ٥ - (-١) = ٦ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٣}$

جـ² = أ² + ب² ⇐ ٩ = ٤ + ب² ⇐ ب² = ٥

المعادلة: $\frac{(\text{س}-٢)^2}{٤} - \frac{(\text{ص}-٣)^2}{٥} = ١$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: ما نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة فيما يلي:

١) ٣س² - ٥ص + ٧س = ١٦

٢) ٢س² - ٤ص + ٣س = ٧ - ٣ص²

٣) ٢س² - ٢ص² - ٧س - ٣ص = ١٠

٤) ٣س² + ٣ص² - ٥س = ١١

الحل: ١) يوجد س² فقط ∴ قطع مكافئ

٢) س²، ص² لهما نفس الإشارة ∴ قطع ناقص

٣) س²، ص² مختلفين في الإشارة ∴ قطع زائد

٤) س²، ص² لهما نفس الإشارة أ = ب = ٣ ∴ دائرة

مثال: في المعادلة ٣س² + (ل-٢)ص² - ٧س + ٤ص = ٣٠ جد قيمة ل بحيث تمثل هذه المعادلة: أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص جـ) قطع زائد د) دائرة

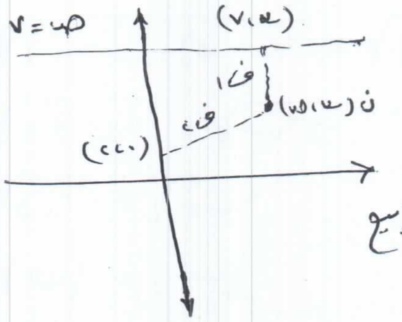
الحل: أ) ل - ٢ = ٠ ⇐ ل = ٢ (لأنه التربيع فقط لـ س أو ص في المكافئ)

ب) ل - ٢ > ٠ ⇐ ل > ٢ ⇐ ل ∈ (٢، ∞)

جـ) ل - ٢ < ٠ ⇐ ل < ٢ ⇐ ل ∈ (-∞، ٢)

د) ل - ٢ = ٣ ⇐ ل = ٥

مثال: النقطة ن(س،ص) تتحرك في المستوى بحيث أن بعدها عن المستقيم ص = ٧ يساوي ٣ أمثال بعدها عن النقطة (٠،٢)، اكتب معادلة المحل الهندسي وما نوع القطع



الحل: ف١ = ٣ ف٢

$\sqrt{(س-س)^2+(ص-٧)^2} = ٣\sqrt{(س-٠)^2+(ص-٢)^2}$

$\Leftarrow \sqrt{٠+ص^2-١٤ص+٤٩} = ٣\sqrt{س^2+ص^2-٤ص+٤}$ بالتربيع

$\Leftarrow ص^2-١٤ص+٤٩ = ٩(س^2+ص^2-٤ص+٤)$

$\Leftarrow ص^2-١٤ص+٤٩ = ٩س^2+٩ص^2-٣٦ص+٣٦$

$\Leftarrow ٤٩-٣٦ = ٩س^2+٩ص^2-ص^2-٣٦ص+١٤ص$

$\Leftarrow ١٣ = ٩س^2+٨ص^2-٢٢ص$ قطع ناقص لأن $س^2$، $ص^2$ موجودين ومتشابهين في الاشارة

مثال: النقطة ن(س،ص) تتحرك في المستوى بحيث أن بعدها عن النقطة (٣،٨) يساوي مثلي بعدها عن النقطة (-١،٢)، اكتب معادلة المحل الهندسي وما نوع القطع.

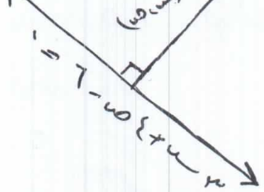
الحل: ف١ = ٢ف٢

$\sqrt{(س-٣)^2+(ص-٨)^2} = ٢\sqrt{(س+١)^2+(ص-٢)^2}$ ثم نكمل

$\Leftarrow ٥٣ = ٣س^2+٣ص^2+١٤س$ تمثل معادلة دائرة لأن $س^2$، $ص^2$ لها نفس المعاملات ونفس الاشارة

مثال: جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) في المستوى بحيث أن بعدها عن المستقيم ٣س+٤ص-٦=٠ يساوي ٣ وتمر في أثناء حركتها بالنقطة (٣،٣)

الحل: $\frac{|٣س+٤ص-٦|}{\sqrt{(٣)^2+(٤)^2}} = ٣ \Leftarrow \frac{|٣س+٤ص-٦|}{٥} = ٣$



$\Leftarrow |٣س+٤ص-٦| = ١٥$

$\Leftarrow ٣س+٤ص-٦ = ١٥$ أو $٣س+٤ص-٦ = -١٥$

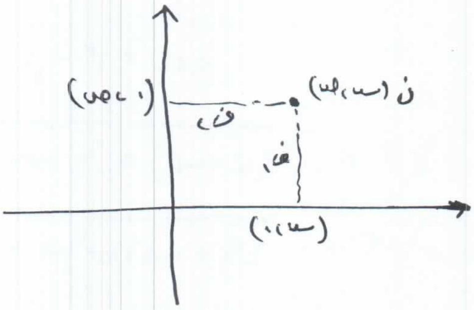
$٣س+٤ص = ٢١$ $\quad$ $٣س+٤ص = -٩$

وبما أن (٣،٣) تحقق المعادلة $\Leftarrow ٣س+٤ص = ٢١$

∴ المعادلة هي $٣س+٤ص = ٢١$ وهي معادلة خط مستقيم

مثال: جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعدين متساويين من المحورين.

الحل: ف١ = ف٢



$\sqrt{(\text{س}-\text{س})^٢+(\text{ص}-٠)^٢} = \sqrt{(\text{س}-٠)^٢+(\text{ص}-\text{ص})^٢}$

$\Leftarrow \sqrt{٠+\text{ص}^٢} = \sqrt{\text{س}^٢+٠}$

$\Leftarrow \sqrt{\text{ص}^٢} = \sqrt{\text{س}^٢}$

$\Leftarrow |\text{ص}| = |\text{س}|$

$\Leftarrow$ ص = س أو ص = −س

مثال: النقطة ن(س، ص) تتحرك في المستوى، اكتب معادلة الحركة بدلالة س، ص وما نوع القطع المخروطي.

١) س = ن² + ٥ ، ص = ٢ن − ٣

الحل: ص + ٣ = ٢ن $\Leftarrow$ $\text{ن} = \frac{\text{ص}+٣}{٢}$

$\Leftarrow \text{ن}^٢ = \frac{(\text{ص}+٣)^٢}{٤}$ نعوض

$\therefore \text{س} = \frac{(\text{ص}+٣)^٢}{٤} + ٥ \Leftarrow (\text{س}-٥) = \frac{(\text{ص}+٣)^٢}{٤} \Leftarrow (\text{ص}+٣)^٢ = ٤(\text{س}-٥)$

تمثل معادلة قطع مكافئ سيني موجب

٢) س = جاهـ + جتاهـ ، ص = $٢\sqrt{\text{جاهـ جتاهـ}}$

س² = (جاهـ + جتاهـ)²

س² = جا²هـ + ٢جاهـ جتاهـ + جتا²هـ

س² = ١ + ٢جاهـ جتاهـ

ص² = ٤ جاهـ جتاهـ

$\frac{\text{ص}^٢}{٢}$ = ٢ جاهـ جتاهـ

الاستاذ عماد مبيك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

$\Leftarrow \text{س}^٢ - \frac{\text{ص}^٢}{٢} = ١$ تمثل معادلة قطع زائد

③ $س = ن + \frac{1}{ن}$ $\qquad$ $ص = ن - \frac{1}{ن}$

$س^2 = ن^2 + 2 + \frac{1}{ن^2}$ $\qquad$ $ص^2 = ن^2 - 2 + \frac{1}{ن^2}$ بالطرح

$\Leftarrow$ $س^2 - ص^2 = 4$ تمثل معادلة قطع زائد

④ $س = أ\,(جاهـ + جتاهـ)$

$\frac{س}{أ} = جاهـ + جتاهـ$

$\frac{س^2}{أ^2} = جا^2هـ + 2\,جاهـ\,جتاهـ + جتا^2هـ$

$\frac{س^2}{أ^2} = 1 + 2\,جاهـ\,جتاهـ$

$ص = ب\,(جاهـ - جتاهـ)$

$\frac{ص}{ب} = جاهـ - جتاهـ$

$\frac{ص^2}{ب^2} = جا^2هـ - 2\,جاهـ\,جتاهـ + جتا^2هـ$

$\frac{ص^2}{ب^2} = 1 - 2\,جاهـ\,جتاهـ$

بالجمع: $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 2$ تمثل معادلة قطع ناقص

الاستاذ عماد ميبك
0795153669