الوحدة

الأولى النهايات والاتصال

الفرع الأدبي

المستوى الثالث

2017/2016

الأستاذ : عماد مسك

0795153669

التحـــــدّي

برعاية

مراجعة بعض المواضيع المهمة :-

① **إشارة الاقتران** :- نجد أصفار الاقتران ق(س) ونضعها على خط الأعداد ونختبر إشارة هذا الاقتران

مثال :- ادرس إشارة كل من الاقترانات التالية :-

أ) ق(س) = س + ٢

ب) ق(س) = ٢س − ١٠

جـ) ق(س) = ٣س − س^{2}

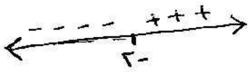
د) ق(س) = س^{2} − س − ٦

هـ) ق(س) = س^{3} − ٤س

و) ق(س) = $\frac{\text{س} - ٣}{٥ - \text{س}}$

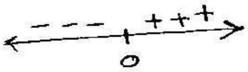
الحل :- أ) ق(س) = س + ٢

س + ٢ = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = -٢}$



ب) ق(س) = ٢س − ١٠

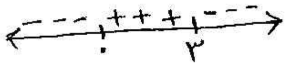
٢س − ١٠ = صفر ⟸ ٢س = ١٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٥}$



جـ) ق(س) = ٣س − س^{2}

٣س − س^{2} = صفر ⟸ س(٣ − س) = صفر

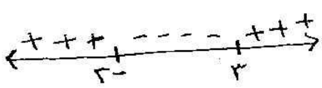
$\boxed{\text{س} = ٠}$ أو $\boxed{\text{س} = ٣}$



د) ق(س) = س^{2} − س − ٦

س^{2} − س − ٦ = صفر ⟸ (س − ٣)(س + ٢) = صفر

$\boxed{\text{س} = ٣}$ أو $\boxed{\text{س} = -٢}$

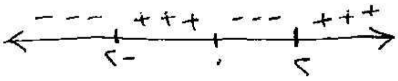


هـ) $\text{ق(س)} = \text{س}^3 - 4\text{س}$

$\text{س}^3 - 4\text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}(\text{س}^2 - 4) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{س}(\text{س} - 2)(\text{س} + 2) = \text{صفر}$

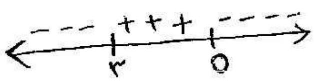
$\boxed{\text{س} = 0}$ أو $\boxed{\text{س} = 2}$ أو $\boxed{\text{س} = -2}$



و) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س} - 3}{5 - \text{س}}$

$\text{س} - 3 = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{س} = 3}$

$5 - \text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{س} = 5}$



2) التحليل إلى العوامل:

أ) إخراج عامل مشترك:

مثال: $\text{س}^2 - 8\text{س} = \text{س}(\text{س} - 8)$

$6\text{س}^3 + 24\text{س}^2 = 6\text{س}^2(\text{س} + 4)$

ب) الفرق بين مربعين: القاعدة ← $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

مثال: $\text{س}^2 - 9 = (\text{س} - 3)(\text{س} + 3)$

$4\text{س}^2 - 49 = (2\text{س} + 7)(2\text{س} - 7)$

جـ) الفرق بين مكعبين: القاعدة ← $\text{أ}^3 - \text{ب}^3 = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^2 + \text{أب} + \text{ب}^2)$

مثال: $\text{س}^3 - 8 = (\text{س} - 2)(\text{س}^2 + 2\text{س} + 4)$

$27\text{س}^3 - 125 = (3\text{س} - 5)(9\text{س}^2 + 15\text{س} + 25)$

٤) **مجموع مكعبين** :- القاعدة ← $أ^{3} + ب^{3} = (أ + ب)(أ^{2} - أب + ب^{2})$

مثال :- $س^{3} + 27 = (س + 3)(س^{2} - 3س + 9)$

$8س^{3} + 1 = (2س + 1)(4س^{2} - 2س + 1)$

٥) **العبارة التربيعية** $أس^{2} + ب س + جـ$:-

عندما نفتح الأقواس يجب أن تكون الإشارات كما يلي :-

إشارة الحد الأوسط	إشارة الحد الأخير	
+	+	= (+)(+)
−	+	= (−)(−)
+	−	= (+)(−)
−	−	= (+)(−)

* وللتحقق من صحة التحليل نقوم بضرب الحدين البعيدين وجمعهم مع حاصل ضرب الحدين القريبين ⇐ يجب أن يكون الناتج يساوي الحد الأوسط

أمثلة :- $س^{2} - 3س + 2 = (س - 2)(س - 1)$

$س^{2} - س - 6 = (س - 3)(س + 2)$

$س^{2} + 5س + 6 = (س + 2)(س + 3)$

$3س^{2} - س - 2 = (3س + 2)(س - 1)$

٣) **اقتران القيمة المطلقة** :- $|أ| = أ$ $\quad |-أ| = أ$

نعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة $|ق(س)|$ بإيجاد أصفار الاقتران وبحث الإشارة :

$$\Leftarrow \quad |ق(س)| = \begin{cases} ق(س) & : س \geq 0 \\ -ق(س) & : س < 0 \end{cases}$$

٥) التمثيل البياني لبعض الاقترانات :-

أ) الاقتران الخطي : ق(س) = أ س + ب

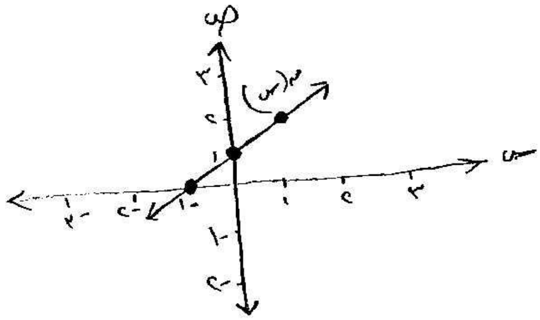
مثال: أ) ارسم الاقتران ق(س) = س + ١

ب) ق(س) = ٣ − ٢س ——— واجب

جـ) ق(س) = { س + ٣ ، س < ١
　　　　　　 ٣ − ٢س ، س ≥ ١

الحل:- أ)

س	٠	١	−١
ق(س)	١	٢	٠



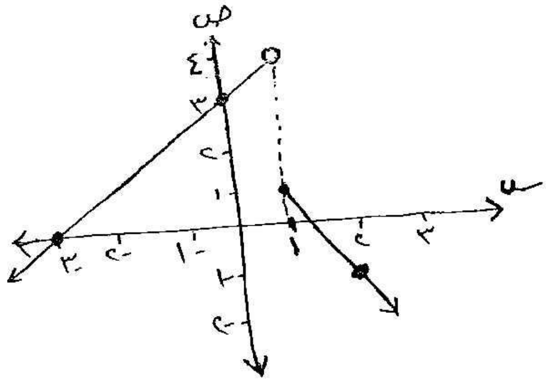
جـ) نأخذ كل قاعدة لوحدها

١) ق(س) = س + ٣ ، س < ١

س	١	٠	−٣
ق(س)	٤	٣	٠

٢) ق(س) = ٣ − ٢س ، س ≥ ١

س	١	٢
ق(س)	١	−١



٢) الاقتران التربيعي: ق(س) = أ س² + ب س + جـ

يكون على شكل قطع مكافئ، مفتوح للأعلى إذا كانت إشارة معامل س² موجبة ومفتوحة للأسفل إذا كانت إشارة معامل س² سالبة

نجد نقطة رأس القطع عن طريق العلاقة س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ، حيث: أ معامل س²

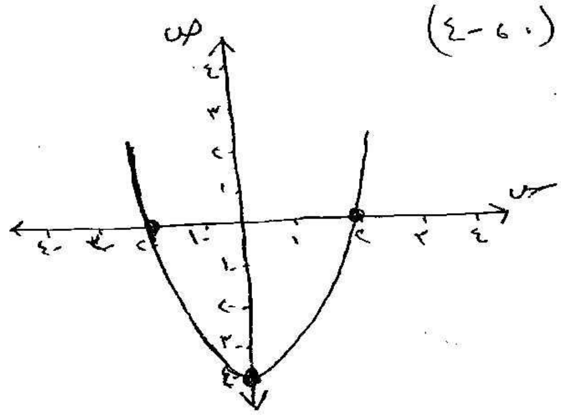
ب معامل س

مثال: ارسم الاقتران $ق(س) = س^2 - 4$

الحل: لايجاد نقطة الرأس $س = \frac{-ب}{2أ} \Leftarrow س = \frac{-صفر}{2(1)} = صفر$

النقطة هي: $(0 ، -4)$

مفتوحاً للأعلى لأن (أ) معامل $س^2$ موجب



س	0	2	-2
ق(س)	-4	0	0

سؤال: ارسم كلاً من الاقترانات: أ) $ق(س) = 2س - س^2$

ب) $ق(س) = س^2 + 2س - 3$

3) رسم اقتران القيمة المطلقة $|س|$.

مثال: مثل بيانياً الاقتران $ق(س) = |س - 1|$

الحل: $س - 1 = صفر$

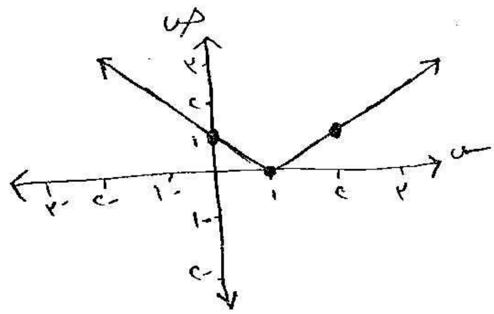
$\boxed{س = 1}$

1 - س ، س - 1

- - - - | + + + +

1

س	1	0	2
ق(س)	0	1	1



سؤال: ارسم كلاً من الاقترانات

أ) $ق(س) = 2 - |س|$

ب) $ق(س) = |2س + 2|$

(٦) خاصية التوزيع في حالة الضرب والقسمة :-

$\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ مثل: $\frac{\text{س}+١}{٣} = \frac{\text{س}}{٣} + \frac{١}{٣}$

$\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} - \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ مثل: $\frac{\text{س}-١}{٣} = \frac{\text{س}}{٣} - \frac{١}{٣}$

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}+\text{ب}} \neq \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ مثل: $\frac{٣}{\text{س}+١} \neq \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٣}{١}$

$\frac{\text{أ}\times\text{ب}}{\text{جـ}} \neq \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

$\frac{\text{أ}\times\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{أ} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \text{ب}$ مثل: $\frac{\text{س}\times٢}{٣} = \text{س}\times\frac{٢}{٣} = \frac{\text{س}}{٣}\times ٢$

$\frac{\text{أ}\times\text{ب}}{\text{جـ}^٢} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \Leftarrow$ مثل: $\frac{\text{س}\times٢}{٣^٢} = \frac{\text{س}}{٣} \times \frac{٢}{٣}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* نهاية الاقتران عند نقطة :-

مثال: ق(س) = ٣س - ١

نها ق(س) = ٣(١) - ١ = ٢ أي أن الاقتران ق(س) يأخذ قيماً قريبة من العدد ٢
س←١

ويتم ايجاد النهاية عن طريق التعويض المباشر .

مثال: أوجد النهاية في كل مما يلي :-

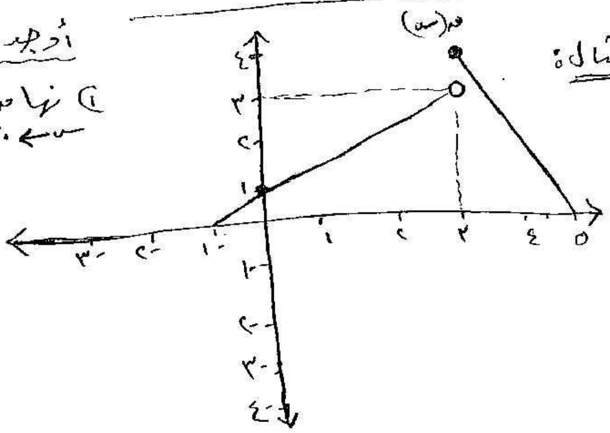
أ) نها س³ + ١ = (٢)³ + ١ = ٩
س←٢

ب) نها ٤ - س² = ٤ - (-٢)² = صفر
س←-٢

ج) نها س - س² + ١ = ٥ - (٥)² + ١ = -١٩
س←٥

* ايجاد النهاية عن طريق الرسم :-

مثال:



أوجد:

١) نها ق(س) = ١
س←٠⁺

٢) نها ق(س) = ١
س←٠⁻

٣) نها ق(س) = ٢
س←٢

٤) نها ق(س) = ٣
س←٣⁻

٥) نها ق(س) = ٤
س←٣⁺

٦) نها ق(س) = غ م لأن :
س←-١

نها ق(س) ≠ نها ق(س)
س←-١⁻　　س←-١⁺

* نهاية الاقتران المتشعب :-

مثال :- $ق(س) = \begin{cases} س^2 + ٤ & ، س < ١ \\ ٥س & ، س \geq ١ \end{cases}$ جد $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ ؟

الحل :- $\lim\limits_{س \to ١^-} ق(س) = (١)^2 + ٤ = ٥$

$\lim\limits_{س \to ١^+} ق(س) = ٥ \times ١ = ٥$

وبما أن $\lim\limits_{س \to ١^-} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^+} ق(س) = ٥$ $\therefore \lim\limits_{س \to ١} ق(س) = ٥$

مثال :- $ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، س < ٢ \\ ٢س & ، س \geq ٢ \end{cases}$ جد $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$ ؟

الحل :- $\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س) = (٢)^2 = ٤$ $\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س) = ٢ \times ٢ = ٤$ $\therefore \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

مثال :- $ق(س) = \begin{cases} س^3 + ٢ & ، س < -١ \\ س^2 + س & ، س \geq -١ \end{cases}$ جد $\lim\limits_{س \to -١} ق(س)$ ؟

الحل :- $\lim\limits_{س \to -١^-} ق(س) = (-١)^3 + ٢ = -١ + ٢ = ١$

$\lim\limits_{س \to -١^+} ق(س) = (-١)^2 + (-١) = ١ - ١ =$ صفر

وبما أن $\lim\limits_{س \to -١^+} ق(س) \neq \lim\limits_{س \to -١^-} ق(س)$ فإن $\lim\limits_{س \to -١} ق(س)$ غير موجودة .

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

سؤال : أوجد $\lim\limits_{س \to ٤} ق(س)$ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^2 - ٢س & ، س < ٤ \\ ٢س + ٣ & ، س \geq ٤ \end{cases}$

مثال :- إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^2 + ٥ & ، س < ٣ \\ أس + ٢ & ، س \geq ٣ \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{س \to ٣} هـ(س)$ موجودة ، فما قيمة أ ؟

الحل :- بما أن $\lim\limits_{س \to ٣} هـ(س)$ موجودة $\therefore \lim\limits_{س \to ٣^-} هـ(س) = \lim\limits_{س \to ٣^+} هـ(س)$

$\lim\limits_{س \to ٣^-} هـ(س) = (٣)^2 + ٥ = ٩ + ٥ = ١٤$ و $\lim\limits_{س \to ٣^+} هـ(س) = ٣أ + ٢$

$\Leftarrow ٣أ + ٢ = ١٤ \Leftarrow ٣أ = ١٢ \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

سؤال: ق(س) = $\begin{cases} \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{١} \text{ ، س} < \text{-٢} \\ \text{س + م ، س} \geq \text{-٢} \end{cases}$ وكانت $\underset{\text{س} \to \text{-٢}}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة م ؟

الحل: $\underset{\text{س} \to \text{-٢}}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة $\therefore$ $\underset{\text{س} \to \text{-٢}^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \to \text{-٢}^+}{\text{نهـا}}$ ق(س)

$\underset{\text{س} \to \text{-٢}^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣(-٢)² + ١ = ١٣

$\underset{\text{س} \to \text{-٢}^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -٢ + م

$\Leftarrow$ -٢ + م = ١٣ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{م = ١٥}}$

سؤال: ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} - \text{٥ ، س} < \text{٣} \\ \text{أس} - \text{٢ ، س} \geq \text{٣} \end{cases}$ وكانت نهـا ق(س) موجودة ، فما قيمة أ ؟

---

* نهاية خارج قسمة اقترانين:-

تقديم:- الأصل في إيجاد النهاية هو التعويض ولكن ينتج عند التعويض أربع حالات هي:

١) الناتج هو $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ تكون النهاية موجودة ويكون الناتج هو $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$

٢) الناتج هو $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ تكون النهاية موجودة ويكون الناتج هو صفر

٣) الناتج هو $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ تكون النهاية غير موجودة ويكون الناتج غير موجود (يتم دراستها لاحقاً)

٤) الناتج هو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ لا نقبل النتيجة هكذا إلا بعد استخدام قاعدة (حلل - إختصر - عوض)

أمثلة محلولة:-

مثال: $\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س + ٢}}{\text{س + ٥}} = \frac{\text{٢ + ٢}}{\text{٢ + ٥}} = \frac{\text{٤}}{\text{٧}}$

$\underset{\text{ع} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع} - \text{٣}}{\text{٥ع} - \text{١}} = \frac{\text{٣} - \text{٣}}{\text{٥(٣)} - \text{١}} = \frac{\text{صفر}}{\text{١٤}} = \text{صفر}$

$\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}{\text{٣س} - \text{٢}} = \frac{\text{(١)}^{\text{٢}} - \text{١}}{\text{٣(١)} - \text{٢}} = \frac{\text{صفر}}{\text{١}} = \text{صفر}$

$\underset{\text{س} \to \text{-٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٤ + ٣س}}{\text{س} - \text{٥}} = \frac{\text{٤ + ٣(-٢)}}{\text{-٢} - \text{٥}} = \frac{\text{٤} - \text{٦}}{\text{-٧}} = \frac{\text{-٢}}{\text{-٧}} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}}$

$\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}}{\text{س}} = \frac{\text{٥}}{\text{٠}} = $ النهاية غير موجودة

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٢٦٦٩

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}+\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٩}} = \frac{\text{٣}+\text{٢}}{(\text{٣})^{\text{٢}}-\text{٩}} = \frac{\text{٥}}{\text{٠}}\ \text{غير موجودة}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٧}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢س}-\text{١٠}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤٩}} = \frac{\text{٢}\times\text{٧}-\text{١٠}}{\text{٤٩}-\text{٤٩}} = \frac{\text{٤}}{\text{٠}}\ \text{غير موجودة}$$

---

* أمثلة على الحالة الرابعة (التحليل باستخدام إخراج عامل مشترك) :-

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = (\text{حلل - اختصر - عوض}) = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س}+\text{١})}{\cancel{\text{س}}} = (\text{٠}+\text{١}) = \text{١}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٥س}^{\text{٢}}+\text{٥س}}{\text{٥س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{\text{٥س}}(\text{س}+\text{١})}{\cancel{\text{٥س}}} = (\text{٠}+\text{١}) = \text{١}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}-\text{٣}}{\text{٣س}^{\text{٢}}-\text{٩س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{\text{س}-\text{٣}}}{\text{٣س}\cancel{(\text{س}-\text{٣})}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}\times\text{٣}} = \frac{\text{١}}{\text{٩}}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٥س}-\text{٢٠}}{\text{س}-\text{٤}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = (\text{حلل - اختصر - عوض}) = \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٥}\cancel{(\text{س}-\text{٤})}}{\cancel{\text{س}-\text{٤}}} = \text{٥}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٧س}-\text{٢١}}{\text{٣}-\text{س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = (\text{حلل - اختصر - عوض}) = \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٧}\overset{-\text{١}}{\cancel{(\text{س}-\text{٣})}}}{\cancel{\text{٣}-\text{س}}} = \frac{-\text{٧}}{\text{١}} = -\text{٧}$$

---

* (فرق بين مربعين) :-

$$\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}-\text{١}}{\text{س}-\text{١}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = (\text{حلل - اختصر - عوض}) = \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(\text{س}-\text{١})}(\text{س}+\text{١})}{\cancel{\text{س}-\text{١}}} = \text{١}+\text{١} = \text{٢}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٩}-\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}-\text{٣}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\overset{-\text{١}}{\cancel{(\text{٣}-\text{س})}}(\text{٣}+\text{س})}{\cancel{\text{س}-\text{٣}}} = -(\text{٣}+\text{٣}) = -\text{٦}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{١٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}-\text{١٠٠}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{١٠س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to\text{١٠}}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(\text{س}-\text{١٠})}(\text{س}+\text{١٠})}{\text{س}\cancel{(\text{س}-\text{١٠})}} = \frac{\text{١٠}+\text{١٠}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{١٠}} = \text{٢}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٦}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٦}-\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٣٦}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to\text{٦}}{\text{نها}}\ \frac{\overset{-\text{١}}{\cancel{\text{٦}-\text{س}}}}{\cancel{(\text{س}-\text{٦})}(\text{س}+\text{٦})} = \frac{-\text{١}}{\text{٦}+\text{٦}} = \frac{-\text{١}}{\text{١٢}}$$

(تحليل العبارة التربيعية التي على الصورة س² + ب س + جـ) :-

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = (\text{حلل - اختصر - عوض}) = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ٣)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٢ - ٣ = -١$$

$$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}{\text{س} + ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ٢)\cancel{(\text{س} + ٣)}}{\cancel{\text{س} + ٣}} = -٣ + ٢ = -١$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} - ٤)}(\text{س} - ٣)}{\cancel{\text{س} - ٤}} = ٤ - ٣ = ١$$

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٢}{\text{س}^{٢} - ٩} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٤)}{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٣)} = \frac{٧}{٦}$$

$$\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ١٤}{٧ - \text{س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \frac{\overset{-١}{\cancel{(\text{س} - ٧)}}(\text{س} + ٢)}{\cancel{٧ - \text{س}}} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} -(\text{س} + ٢) = -(٧ + ٢) = -٩$$

سؤال: أوجد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{\text{س} - ٢}$

(تحليل فرق وجمع عددين مكعبين على صورة س³ ± أ³) :-

$$\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \ (\text{حلل - اختصر - عوض})$$

$$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} + ٢)}(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤)}{\cancel{(\text{س} + ٢)}} = ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$$

$$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{\text{س} + ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} + ٣)}(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٩)}{\cancel{\text{س} + ٣}} = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$$

$$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٣} - ١٢٥} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ ——— $\boxed{\text{واجب}}$

$$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} + ٣)}(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٩)}{(\text{س} + ١)\cancel{(\text{س} + ٣)}} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٩}{\text{س} + ١}$$

$$= \frac{(-٣)^{٢} - ٣(-٣) + ٩}{-٣ + ١}$$

$$= \frac{٢٧}{-٢} = -\frac{٢٧}{٢}$$

$$\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\overbrace{\text{س}^3 + 8}^{\text{مجموع مكعبين}}}{\underbrace{\text{س}^2 + 3\text{س} + 2}_{\text{عبارة تربيعية}}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ (حلل - اختصر - عوض)

$$= \lim_{\text{س} \to -2} \frac{\cancel{(\text{س} + 2)}(\text{س}^2 - 2\text{س} + 4)}{(\text{س} + 1)\cancel{(\text{س} + 2)}} = \lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} + 4}{(\text{س} + 1)} = \frac{(-2)^2 - 2(-2) + 4}{(-2 + 1)} = -12$$

---

* (الضرب بالمرافق ما يميزه وجود $\sqrt{}$)

مثال: $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (نضرب بالمرافق)

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + 1}{\sqrt{\text{س}} + 1} = \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\cancel{\text{س} - 1}}{\cancel{(\text{س} - 1)}(\sqrt{\text{س}} + 1)} = \lim_{\text{س} \to 1} \frac{1}{\sqrt{\text{س}} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt{\text{س} + 2} - 2}{\text{س} - 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (نضرب بالمرافق)

$$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt{\text{س} + 2} - 2}{\text{س} - 2} \times \frac{\sqrt{\text{س} + 2} + 2}{\sqrt{\text{س} + 2} + 2} = \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س} + 2 - 4}{(\text{س} - 2)(\sqrt{\text{س} + 2} + 2)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\cancel{\text{س} - 2}}{\cancel{(\text{س} - 2)}(\sqrt{\text{س} + 2} + 2)} = \lim_{\text{س} \to 2} \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

سؤال: - أوجد النهاية لكل مما يلي :-

1) $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س} - 3}{\sqrt{\text{س} + 1} - 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ———— $\boxed{\text{واجب}}$ الاجابة (4)

2) $\lim_{\text{س} \to 5} \frac{\sqrt{\text{س} + 4} - 3}{\text{س} - 5} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ———— $\boxed{\text{اكمل}}$ الاجابة $\left(\frac{1}{6}\right)$

3) $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\overbrace{\text{س}^2 - \text{س} - 6}^{\text{عبارة تربيعية}}}{\sqrt{\text{س} + 1} - 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ———— $\boxed{\text{اكمل}}$ الاجابة (20)

4) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{\text{س} + 1} - 1}{\text{س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ———— $\boxed{\text{اكمل}}$ الاجابة $\left(\frac{1}{2}\right)$

* (توحيد المقامات إذا كان لدينا كسور في البسط أو المقام):-

$$\frac{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \pm \frac{\text{جـ}}{\text{د}}}{\text{هـ}} = \frac{\text{أ} \times \text{د} \pm \text{ب} \times \text{جـ}}{\text{هـ}\,(\text{ب} \times \text{د})}$$

مثال:-

$$\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{س}}}{\text{س} - 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{س} - 2}{2\text{س}}}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{س} - 2}}{2\text{س}\,\cancel{(\text{س} - 2)}}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{1}{2\text{س}} = \frac{1}{4}$$

سؤال:

$$\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نهـا}} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{\text{س}}}{\text{س} - 3} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \text{ ——— } \boxed{\text{أكمل}}$$

الإجابة $\left(\frac{1}{9}\right)$

مثال:

$$\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{\frac{1}{\text{س} + 1} - \frac{1}{3}}{\text{س} - 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{\frac{3 - (\text{س} + 1)}{3\text{س} + 3}}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{3 - \text{س} - 1}{3(\text{س} - 2)(\text{س} + 1)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{-\cancel{(\text{س} - 2)}}{3\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 1)} = \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \frac{-1}{3(\text{س} + 1)} = \frac{-1}{9}$$

سؤال:- أوجد نهاية كل مما يلي:

1) $\underset{\text{س} \leftarrow 5}{\text{نهـا}} \frac{\frac{1}{\text{س} + 2} - \frac{1}{7}}{\text{س} - 5} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

2) $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}} \frac{\frac{2}{\text{س} - 3} + \frac{4}{\text{س} + 6}}{\text{س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

* **الاتصال**: تعريف: يكون الاقتران ق(س) متصل عند النقطة س = أ إذا كانت:

نها ق(س) = ق(أ)   (النهاية = الصورة)
س ← أ

---

* **مثال**: ابحث الاتصال في كل من الاقترانات التالية:

① ق(س) = س² + ٢س - ١ عند س = ١

الحل: نها ق(س) = (١)² + ٢(١) - ١ = ٢
س ← ١

ق(١) = (١)² + ٢(١) - ١ = ٢

∴ ق(س) متصل عند س = ١

ملاحظة: اقتران كثير الحدود دائماً متصل عند أي عدد

* ② م(س) = { س² + ٢س + ١ ، س ≠ ٠ ؛ ٣س + ١ ، س = صفر } ابحث في الاتصال عند س = ٠

الحل :- $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = (٠)² + ٢(٠) + ١ = ١

م(٠) = ٣(٠) + ١ = ١

∴ م(س) متصل عند النقطة $\boxed{\text{س = صفر}}$

سؤال :- ابحث في الاتصال ع(س) = { $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ ؛ ٢س ، س = ٢ } عند س = ٢

---

* مثال :- ابحث الاتصال في كل من الاقترانات التالية :-

① م(س) = { $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣ ؛ س ، س = ٣ } عند س = ٣

الحل :- $\lim_{س \to ٣}$ م(س) = $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

= $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)}{\cancel{س - ٣}}$ = ٣ + ٣ = ٦

م(٣) = ٣

∴ $\lim_{س \to ٣}$ م(س) ≠ م(٣) غير متصل عند س = ٣

---

* سؤال :- ابحث الاتصال للاقتران هـ(س) = { س² ، س > ٢ ؛ ٢س ، س ≤ ٢ } عند س = ٢

* **مثال**: ابحث الاتصال ق(س) = { (س³ − ٢٧)/(س − ٣) ، س < ٣ ؛ ٣س² ، س > ٣ ؛ س + ٢٤ ، س = ٣ } عند س = ٣

الحل: نها (س → ٣⁻) (س³ − ٢٧)/(س − ٣) = نها (س → ٣) ~~(س − ٣)~~ (س² + ٣س + ٩) / ~~(س − ٣)~~ = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧

نها (س → ٣⁺) ٣س² = ٣(٣)² = ٢٧

ق(٣) = ٣ + ٢٤ = ٢٧

∴ نها (س → ٣⁻) ق(س) = نها (س → ٣⁺) ق(س) = ق(٣)

متصل عند س = ٣

---

* **سؤال**: ابحث الإتصال ق(س) = { س² + ٢ ، س < −١ ؛ س² + س ، س ≥ −١ } عند س = −١

سؤال: ق(س) = { س² + ٧ ، س < −٢ ؛ أس + ١ ، س ≥ −٢ } وكان ق(س) متصلاً عند س = −٢ فما قيمة الثابت أ ؟

الحل: بما أن ق(س) متصل فإن نها (س → −٢) ق(س) = ق(−٢)

نها (س → −٢⁻) ق(س) = (−٢)² + ٧ = ١١

نها (س → −٢⁺) ق(س) = −أ + ١

−أ + ١ = ١١ ⇐ −أ = ١٠

⇐ $\boxed{\text{أ} = -١٠}$

سؤال: واجب

ق(س) = { أس² + ب ، س < ٢ ؛ ٣أس + ٤ ، س > ٢ ؛ ١٦ ، س = ٢ }

وكان ق(س) متصلاً عند س = ٢ فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

* الاتصال على فترة [أ ، ب] :-

ملاحظات :-

يكون الاتصال دائماً على كثير الحدود : (كثير الحدود دائماً متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية)

* يكون الاقتران متصلاً على الفترة [أ ، ب] اذا كان :-

1) متصلاً على الفترة المفتوحة (أ ، ب) القواعد
2) متصلاً على نقاط التحول (نقاط التشعب)
3) متصلاً على أطراف الفترة

مثال :-

$$ق(س) = \begin{cases} 9 - 2س &، -1 \le س < 3 \\ 3 &، س = 3 \end{cases}$$

ابحث الاتصال على الفترة [-1 ، 3] ؟؟

الحل :- القواعد (-1 ، 3) متصل لأنه كثير حدود

لا يوجد نقاط تحول

الأطراف : بداية الفترة س = -1

$$\lim_{س \to -1^+} ق(س) = 9 - 2(-1) = 11$$

$$ق(-1) = 9 - 2(-1) = 11$$

متصل عند س = -1

نهاية الفترة س = 3

$$\lim_{س \to 3^-} ق(س) = 9 - 2(3) = 3$$

$$ق(3) = 3$$

متصل عند س = 3

∴ الاقتران ق متصل على الفترة [-1 ، 3]

سؤال :

$$ق(س) = \begin{cases} 3 &، س = 3 \\ 9 - 2س &، 3 < س < 5 \\ -1 &، س = 5 \end{cases}$$

ابحث اتصال الاقتران على الفترة [3 ، 5] ؟

سؤال :-

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 &، 0 \le س < 2 \\ 2س - 2 &، 2 \le س \le 4 \end{cases}$$

ابحث الاتصال على الفترة [0 ، 4] ؟

مثال: $م(س) = \begin{cases} 1 + 4س & ، \ 1 \leq س < 4 \\ س^2 + 1 & ، \ 4 \leq س \leq 6 \end{cases}$ ابحث اتصال م على الفترة $[1 ، 6]$

الحل: ① القواعد: $(1 ، 4)$ متصل كثير حدود

$(4 ، 6)$ متصل كثير حدود

② نقاط التحول عند $س = 4$

$\lim\limits_{س \to 4^-} م(س) = 1 + 4(4) = 17$

$\lim\limits_{س \to 4^+} م(س) = (4)^2 + 1 = 17$

$م(4) = (4)^2 + 1 = 17$ متصل عند $س = 4$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

③ الأطراف: بداية الفترة عند $س = 1$

$\lim\limits_{س \to 1^+} م(س) = 1 + 4(1) = 5$

$م(1) = 1 + 4(1) = 5$

متصل عند $س = 1$

نهاية الفترة عند $س = 6$

$\lim\limits_{س \to 6^-} م(س) = (6)^2 + 1 = 37$

$م(6) = (6)^2 + 1 = 37$

∴ الاقتران م متصل على الفترة $[1 ، 6]$

سؤال: $م(س) = \begin{cases} 3 + 5س & ، \ 1 \leq س < 4 \\ س^2 + 2 & ، \ 4 \leq س \leq 5 \end{cases}$ ابحث الاتصال على الفترة $[1 ، 5]$

سؤال: $م(س) = \begin{cases} 2 - 3س & ، \ 0 \leq س < 2 \\ س^2 - 2 & ، \ 2 \leq س \leq 4 \end{cases}$ ابحث الاتصال على الفترة $[0 ، 4]$

* الاتصال على الأعداد الحقيقية (ح) :-

مثال :- $ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، س < ٢ \\ ٢س & ، س \geq ٢ \end{cases}$ ابحث الاتصال على ح ؟

الحل :- ١) القواعد $(-\infty ، ٢)$ متصل لأنه كثير حدود
$(٢ ، \infty)$ 〃 〃 〃 〃

٢) نقاط التحول عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = (٢)^2 = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٢(٢) = ٤$ ، $ق(٢) = ٢(٢) = ٤$

$\Leftarrow$ متصل عند $\boxed{س = ٢}$

∴ ق متصل على ح

مثال :- $ق(س) = \begin{cases} س^2 + ٢س & ، س < -٢ \\ ٢س^2 + ٥ & ، س \geq -٢ \end{cases}$ ابحث الاتصال على ح ؟

الحل :- ١) القواعد $(-\infty ، -٢)$ متصل لأنه كثير حدود
$(-٢ ، \infty)$ 〃 〃 〃 〃

٢) نقاط التحول عند $س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^-} ق(س) = (-٢)^2 + ٢(-٢) = ٠$

$\lim_{س \to -٢^+} ق(س) = ٢(-٢)^2 + ٥ = ١٣$

غير متصل عند $س = -٢$ (منفصل)

∴ ق(س) متصل على ح ماعدا $\{-٢\}$ أو $ح / \{-٢\}$

سؤال :- $ق(س) = \begin{cases} س^3 - ٩ & ، س < ٣ \\ ٢س + ٥ & ، س \geq ٣ \end{cases}$ ابحث الاتصال على مجموعة الأعداد الحقيقية ح

* نظريات على الاتصال :

اذا كان كل من الاقترانين ق ، هـ متصلان عند س = أ فإن :

1) ق + هـ
2) ق − هـ
3) ق × هـ
4) ق ÷ هـ (أ ≠ ٠)

متصلات عند س = أ

مثال : ق(س) = { س^٢ ، س < ٢ ؛ ٢س ، س ≥ ٢ }   هـ(س) = س^٢ + ٥س

ابحث في اتصال ق + هـ عند س = ٢

الحل : هـ(س) متصل لأنه كثير حدود عند س = ٢

نبحث اتصال ق(س) عند س = ٢

القواعد (−∞ ، ٢) متصل كثير حدود
(٢ ، ∞) = = =

عند نقطة التحول س = ٢

نهـا ق(س) (س ← ٢^−) = نهـا ق(س) (س ← ٢^+) = ق(٢) = ٤   متصل عند س = ٢

∴ بما أن ق ، هـ متصلان فإن ق + هـ متصلان عند س = ٢

سؤال : ق(س) = { س^٢ + ٥ ، س < ٣ ؛ س^٢ + ٨ ، س ≥ ٣ }   هـ(س) = س^٣ − ٣س

ابحث في اتصال ق × هـ عند س = ٣ ؟

ملاحظة : اذا كان احد الاقترانين غير متصل عند س = م فلا نستطيع الحكم على الاقترانات الناتجة عن العمليات (+ ، − ، × ، ÷) ونحتاج الى تكوين اقتران جديد للحكم على الاتصال .

مثال :- $م(س) = \begin{cases} س^2 & ، س < 2 \\ 2س + 3 & ، س \geq 2 \end{cases}$ $هـ(س) = س^2 - 4$

وكان $ل(س) = م(س) \times هـ(س)$ بين أن $ل(س)$ متصل عند $س = 2$

الحل :- $م(س)$ غير متصل عند $س = 2$

$\Leftarrow ل(س) = م(س) \times هـ(س) = \begin{cases} س^2(س^2 - 4) & ، س < 2 \\ (2س + 3)(س^2 - 4) & ، س \geq 2 \end{cases}$ ثم نبحث الاتصال عند $س = 2$

$\Leftarrow ل(س) = \begin{cases} س^4 - 4س^2 & ، س < 2 \\ 2س^3 + 3س^2 - 8س - 12 & ، س \geq 2 \end{cases}$

متصل عند القواعد كثيرات حدود

وعند نقطة التحول $س = 2$

$\lim_{س \to 2^-} ل(س) = (2)^4 - 4(2)^2 = 16 - 16 = 0$

$\lim_{س \to 2^+} ل(س) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 8(2) - 12 = 0$

$ل(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 8(2) - 12 = 0$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = 2$

* نقاط عدم الاتصال (الانفصال) :-

هي النقاط التي تجعل المقام = صفر أو أصفار المقام

مثال :- جد نقاط الانفصال

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س} - 1}$$

الحل :- $\text{س} - 1 = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = 1$

$\text{ق}(\text{س})$ متصل على $\text{ح} / \{1\}$

مثال: جد نقاط الانفصال

1) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س}^2 - 4}$

الحل: $\text{س}^2 - 4 = \text{صفر} \Leftarrow (\text{س} - 2)(\text{س} + 2) = 0 \Leftarrow \text{س} = \pm 2$

سؤال: جد نقاط عدم الاتصال في كل ما يلي:

1) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - 3}{\text{س}^2 - \text{س} - 6}$

2) $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + 4}{\text{س}^2 - 7\text{س} + 12}$

3) $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 - 7\text{س} + 10}$

نهايـة الوحدة الأولى