الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

الفرع العلمي

المستوى الثالث

2017/2016

الأستاذ : عماد مسك

0795153669

التحـــدّي

* الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

* التطبيق الهندسي للمشتقة:

* ميل المماس هو المشتقة الأولى لنقطة على منحنى

$\text{م} = \text{ق}'(\text{س})$

* المماس هو ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$\Leftarrow$ م = ظا هـ

* معادلة المماس عند النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ وميله م هي:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}(\text{س} - \text{س}_1)$$

* معادلة العمودي على المماس هي:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{-1}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_1)$$

---

* ملاحظة: عند كتابة معادلة المماس أو معادلة العمودي يجب معرفة:

١) نقطة التماس

٢) ميل المماس

مثال: اكتب معادلة المماس والعمودي اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^2 + ٣\text{س}$ عندما $\boxed{\text{س} = ١}$

الحل: نجد ميل المماس $\Leftarrow \text{م} = \text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{س} + ٣$

$\Leftarrow \text{ق}'(١) = ٤ + ٣ = ٧$ | ميل العمودي $= \frac{-١}{٧}$

النقطة هي (١، ق(١))

$\text{ق}(١) = ٢(١)^2 + ٣(١) = ٥ \Leftarrow$ ∴ النقطة هي (١، ٥)

$\Leftarrow$ معادلة المماس هي: $\text{ص} - ٥ = ٧(\text{س} - ١) \Leftarrow \text{ص} = ٧\text{س} - ٢$

$\Leftarrow$ معادلة العمودي هي: $\text{ص} - ٥ = \frac{-١}{٧}(\text{س} - ١) \Leftarrow \text{ص} - ٥ = \frac{-\text{س}}{٧} + \frac{١}{٧}$

$\Leftarrow \text{ص} = \frac{-\text{س}}{٧} + \frac{٣٦}{٧}$

مثال: جد النقطة على منحنى $س^2 + ص^2 - 2ص = 67$ والتي يكون ميل المماس عندها يساوي 4

الحل: نشتق الطرفين ⇐ $2س + 2ص \times ص' - 2 \times ص' = 0$ نضع $\boxed{ص' = 4}$

⇐ $2س + 2ص(4) - 2(4) = 0$

⇐ $2س + 8ص - 8 = 0$ بالقسمة على (2)

⇐ $س + 4ص - 4 = 0$ ⇐ $س = 4 - 4ص$ نعوض في العلاقة الأصلية

⇐ $(4 - 4ص)^2 + ص^2 - 2ص = 67$

⇐ $16 - 32ص + 16ص^2 + ص^2 - 2ص = 67$ ⇐ $17ص^2 - 34ص - 51 = 0$ نقسم على 17

⇐ $ص^2 - 2ص - 3 = 0$ ⇐ $(ص - 3)(ص + 1) = 0$

⇐ $\boxed{ص = 3}$ أو $\boxed{ص = -1}$

عندما $\boxed{ص = 3}$ ⇐ $س = 4 - 12 = -8$ ∴ النقطة $(-8 ، 3)$

عندما $\boxed{ص = -1}$ ⇐ $س = 4 + 4 = 8$ ∴ النقطة $(8 ، -1)$

---

* **ملاحظة:** المنحنى يقطع محور السينات عندما $\boxed{ص = 0}$ ويقطع محور الصادات عندما $\boxed{س = 0}$

مثال: اكتب معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = س^2 - س - 6$ عند نقطة تقاطع $ق(س)$

أ) مع محور السينات ب) مع محور الصادات

الحل: أ) يقطع محور السينات عندما $س^2 - س - 6 = 0$ ⇐ $(س - 3)(س + 2) = 0$

$س = 3$ أو $س = -2$ ∴ النقاط هي $(3 ، 0)$ ، $(-2 ، 0)$

$ق'(س) = 2س - 1$

عندما $\boxed{س = 3}$ ⇐ $ق'(3) = 2(3) - 1 = 5$

معادلة المماس هي: $ص - 0 = 5(س - 3)$

عندما $\boxed{س = -2}$ ⇐ $ق'(-2) = 2(-2) - 1 = -5$

معادلة المماس هي: $ص = -5(س + 2)$

ب) يقطع محور الصادات عندما $س = 0$

∴ $ق(0) = 0 - 0 - 6 = -6$ النقطة $(0 ، -6)$

$م = ق'(0) = 0 - 1 = -1$ ∴ المماس: $ص + 6 = -(س - 0)$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* **ملاحظة:** تتقاطع المنحنيات ق(س) ، هـ(س) عندما ق(س) = هـ(س) حيث يكون الاحداثي السيني والصادي لهما مشترك عند نقطة التقاطع.

مثال: اكتب معادلة المماس لمنحنى (س+ص)^٣ − ٥س + ٧ص = ١٠ عند نقطة التقاطع مع المستقيم س + ص = ٢

الحل: من المستقيم س + ص = ٢ ⟸ ص = ٢ − س نعوض في معادلة المنحنى

⟸ (٢)^٣ − ٥س + ٧(٢ − س) = ١٠ ⟸ ٨ − ٥س + ١٤ − ٧س = ١٠

⟸ ٢٢ − ١٢س = ١٠ ⟸ ١٢ = ١٢س ⟸ $\boxed{\text{س} = ١}$

∴ ص = ٢ − ١ = ١ ∴ النقطة هي (١،١) نشتق لإيجاد الميل

⟸ ٣(س+ص)^٢ $\left(١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)$ − ٥ + ٧ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ نعوض عن (س،ص)

⟸ ٣(١+١)^٢ $\left(١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)$ − ٥ + ٧ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

⟸ ١٢ + ١٢ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٥ + ٧ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ⟸ ١٩ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ٧ = ٠ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٧}{١٩}$

∴ معادلة المماس هي: ص − ١ = $\frac{-٧}{١٩}$ (س − ١)

مثال: اكتب معادلة المماس لمنحنى س^٢ + ص^٢ = ٢٩ عند نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم ص = ٢س + ١

الحل: نعوض معادلة المستقيم في معادلة المنحنى

⟸ س^٢ + (٢س + ١)^٢ = ٢٩ ⟸ س^٢ + ٤س^٢ + ٤س + ١ = ٢٩

⟸ ٥س^٢ + ٤س + ١ = ٢٩ ⟸ ٥س^٢ + ٤س − ٢٨ = ٠

⟸ (س − ٢)(٥س + ١٤) = ٠

⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$ أو $\boxed{\text{س} = \frac{-١٤}{٥}}$

عند $\boxed{\text{س} = ٢}$ ⟸ ص = ٢(٢) + ١ = ٥ النقطة (٢،٥)

عند $\boxed{\text{س} = \frac{-١٤}{٥}}$ ⟸ ص = ٢$\left(\frac{-١٤}{٥}\right)$ + ١ = $\frac{-٢٣}{٥}$ النقطة $\left(\frac{-١٤}{٥} ، \frac{-٢٣}{٥}\right)$

نشتق معادلة المنحنى لإيجاد الميل ⟸ ٢س + ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س}}{٢\text{ص}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

عند $\boxed{\text{س} = ٢}$ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢}{٥}$ ⟸ المماس: ص − ٥ = $\frac{-٢}{٥}$ (س − ٢)

عند $\boxed{\text{س} = \frac{-١٤}{٥}}$ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{-١٤}{٥}}{\frac{-٢٣}{٥}} = \frac{١٤}{٢٣}$ ⟸ المماس: ص + $\frac{٢٣}{٥}$ = $\frac{١٤}{٢٣}$ $\left(\text{س} + \frac{١٤}{٥}\right)$

* ملاحظة: يكون المستقيمان متوازيان إذا كان ميل الأول = ميل الثاني
يكون المستقيمان متعامدان اذا كان ميل الأول × ميل الثاني = -١

مثال: اوجد النقاط على منحنى ق(س) = س³ - ٥س + ٩ والتي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم ص - ٧س = ٨

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

الحل: ميل المماس = ق'(س) = ٣س² - ٥

لايجاد ميل المستقيم نشتق ⟸ ص' - ٧ = ٠ ⟸ ص' = ٧

⟸ ٣س² - ٥ = ٧ لأنهما متوازيان ⟸ ٣س² = ١٢ ⟸ س = ±٢

عند $\boxed{\text{س} = ٢}$ ⟸ ق(٢) = ٨ - ١٠ + ٩ = ٧ النقطة (٢، ٧)

عند $\boxed{\text{س} = -٢}$ ⟸ ق(-٢) = -٨ + ١٠ + ٩ = ١١ النقطة (-٢، ١١)

مثال: اوجد النقاط على منحنى ق(س) = س² - ٣س + ٧ والتي يكون المماس عندها عمودياً على المستقيم ٥ص + س = ٢

الحل: ميل المماس = ق'(س) = ٢س - ٣

ميل المستقيم نشتق ⟸ ٥ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ١ = صفر ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{1}{5}$

∴ ٢س - ٣ = ٥ ⟸ ٢س = ٨ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٤}$

ق(٤) = ١٦ - ١٢ + ٧ = ١١ النقطة (٤، ١١)

مثال: جد النقطة على منحنى $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٦$ بحيث يكون المماس عندها موازياً للمستقيم ٣س + ٦ص = ٧

الحل: المستقيم ٣س + ٦ص = ٧ نشتق ⟸ ٣ + ٦ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ (ميل المستقيم)

⟸ نشتق معادلة المنحنى $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$ ، نضع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{1}{2}$

⟸ $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}} \times -\frac{1}{2} = ٠$ ⟸ $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} = \frac{1}{4\sqrt{\text{ص}}}$ ⟸ $4\sqrt{\text{ص}} = 2\sqrt{\text{س}}$ بالقسمة على (٢)

⟸ $\sqrt{\text{س}} = 2\sqrt{\text{ص}}$

نعوض في معادلة المنحنى ⟸ $2\sqrt{\text{ص}} + \sqrt{\text{ص}} = ٦$ ⟸ $3\sqrt{\text{ص}} = ٦$ ⟸ $\sqrt{\text{ص}} = ٢$
⟸ $\boxed{\text{ص} = ٤}$

∴ $\sqrt{\text{س}} = 2\sqrt{\text{ص}}$ ⟸ $\sqrt{\text{س}} = 2\sqrt{4}$ ⟸ $\sqrt{\text{س}} = ٤$ ⟸ س = ١٦
∴ النقطة (١٦، ٤)

* ملاحظة: يكون المماس موازياً لمحور السينات (أفقياً) إذا كان $\boxed{\text{ميل المماس} = 0}$

مثال: أوجد النقاط على منحنى ق(س) $= (س^2 - 2س)^4$ والتي يكون المماس عندها أفقياً.

الحل: ق'(س) $= 4(س^2 - 2س)^3 \times (2س - 2) =$ صفر (لأنه موازي لمحور السينات)

$\Leftarrow 4(س^2-2س)^3 = 0 \Leftarrow س^2 - 2س = 0 \Leftarrow س(س-2) =$ صفر

$\Leftarrow \boxed{س = 0}$ أو $\boxed{س = 2}$

أيضاً: $2س - 2 = 0 \Leftarrow 2س = 2 \Leftarrow \boxed{س = 1}$

ق(0) = 0 ، ق(1) = 1 ، ق(2) = 0 النقاط هي: (0،0) ، (1،1) ، (2،0)

مثال: أوجد قيم س على المنحنى ق(س) = س − جا2س ، س ∈ [0 ، 2π] والتي يكون العمودي على المماس عندها موازي لمحور الصادات.

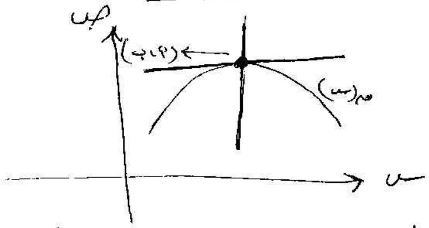
الحل: العمودي يوازي محور الصادات $\Leftarrow$ المماس يوازي محور السينات

ق'(س) = 1 − 2جتا2س $\Leftarrow$ 1 − 2جتا2س = 0 $\Leftarrow$ 1 = 2جتا2س

$\Leftarrow$ جتا2س $= \frac{1}{2} \Leftarrow$ 2س = 60° أو 2س = 300° (الربع الأول والرابع الجتا موجب)

$\Leftarrow \boxed{س = 30°}$ أو $\boxed{س = 150°}$ ∴ $\boxed{س = \frac{\pi}{6}}$ ، $\boxed{\frac{5\pi}{6}}$

ملاحظة: إذا كان المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (أ،ب) موازياً لمحور السينات (م = صفر) فإن معادلته هي $\boxed{ص = ب}$ ومعادلة العمودي على المماس هي $\boxed{س = أ}$



مثال: اكتب معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س) $= 4س - س^2$ عندما $\boxed{س = 2}$

الحل: ق(2) = 8 − 4 = 4 ، النقطة (2،4)

ق'(س) = 4 − 2س $\Leftarrow$ ق'(2) = 4 − 4 = 0 ∴ المماس يوازي محور السينات

معادلة المماس هي: $\boxed{ص = 4}$

معادلة العمودي هي: $\boxed{س = 2}$

الأستاذ عماد مسك
0795153669

مثال: بين أن منحنى الاقتران ق(س) = س² + 8 له مماسين مرسومين من النقطة (1، 5) والتي لا تقع عليه:

الحل: (1، 5) ليست نقطة تماس لذلك نفرض نقطة تماس ولتكن (س، ص).

ق'(س) = 2س

ق'(س) = (ص − ص1) / (س − س1) ⇐ 2س = (ص − 5) / (س − 1) ⇐ 2س² − 2س = ص − 5

⇐ 2س² − 2س = س² + 8 − 5 ⇐ س² − 2س − 3 = 0

⇐ (س − 3)(س + 1) = 0 ⇐ س = 3 أو س = −1

أي أنه هناك نقطتين تماس هما (3، 17)، (−1، 9) أي أن للاقتران مماسين.

ملاحظة: إذا كان ق(س) يمس هـ(س) عند س = م (نقطة التماس) فإن:

ق(م) = هـ(م) ، ق'(م) = هـ'(م)

مثال: إذا كان المستقيم ص = 3س + م يمس المنحنى ق(س) = (2س − 1) / (س + 1) جد نقاط التماس وجد قيمة م

الحل: دص/دس = 3 ، ق'(س) = ((س + 1)(2) − (2س − 1)(1)) / (س + 1)² = 3 / (س + 1)²

دص/دس = ق'(س) ⇐ 3 = 3 / (س + 1)² ⇐ 3(س + 1)² = 3 ⇐ (س + 1)² = 1

⇐ س² + 2س + 1 = 1 ⇐ س² + 2س = 0 ⇐ س(س + 2) = 0 ⇐ س = 0 أو س = −2

عند س = 0 ق(0) = −1 / (1 + 0) = −1 النقطة (0، −1) نعوض هذه النقطة في معادلة المستقيم

⇐ −1 = 0 + م ⇐ م = −1

عند س = −2 ق(−2) = (−4 − 1) / (−2 + 1) = 5 النقطة (−2، 5) نعوضها أيضاً

⇐ 5 = 3 × −2 + م ⇐ 5 = −6 + م ⇐ م = 11

سؤال: جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س² − 6س + 7 عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص − 3س + 1 = 0

إرشاد: عند نقطة التقاطع ق(س) = ص ⇐ س = 8 ، س = 1 (8، 23) معادلة ، (1، 2) معادلة

ثم نجد ميل المماس عند نقطة التماس = ق'(س)

ثم نجد معادلة المماس عند كل نقطة

مثال٤ اذا كان المستقيم ٤س - ٢ص + ٥ = صفر تمس منحنى م عند النقطة (٣،٢)
وكان المستقيم ٩ص + ٣س - ٤ = ٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل عند النقطة (٣،-١)
أوجد (م×ل)′(٣)

الحل: (م×ل)′(٣) = م(٣) × ل′(٣) + ل(٣) × م′(٣)   لكن م(٣) = ٢ ، ل(٣) = -١

المستقيم ٤س - ٢ص + ٥ = ٠ تمس منحنى م عند (٣،٢)
م′(٣) = دص/دس عندما س = ٣
٤ - ٢ دص/دس = ٠ ⟸ دص/دس = ٢ = م′(٣)

المستقيم ٩ص + ٣س - ٤ = ٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل عند النقطة (٣،-١)
ل′(٣) × دص/دس = -١ ⟸ س = ٣
٩ دص/دس + ٣ = ٠ ⟸ دص/دس = $-\frac{1}{3}$
∴ ل′(٣) × $-\frac{1}{3}$ = -١ ⟸ ل′(٣) = ٣

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

(م×ل)′(٣) = م(٣) × ل′(٣) + ل(٣) × م′(٣)
= (٢)(٣) + (-١)(٢) = ٤

مثال٤ اذا كان المستقيم ص = ٢س تمس منحنى م(س) = (س² - ٢)(أس + ب) عند س = ٢
جد أ، ب

الحل: ص(٢) = ٢×٢ = ٤ ، م(٢) = (٤-٢)(٢أ + ب) = ٢(٢أ + ب)
م(٢) = ص(٢) ⟸ ٢(٢أ + ب) = ٤ ⟸ $\boxed{\text{٢أ + ب = ٢}}$ —— (١)
ص′ = ٢ ، م′(س) = (س² - ٢)(أ) + (أس + ب)(٢س)
م′(٢) = (٤-٢)(أ) + (٢أ + ب)(٤) = ١٠أ + ٤ب
⟸ م′(٢) = ص′ ⟸ ١٠أ + ٤ب = ٢ ⟸ $\boxed{\text{٥أ + ٢ب = ١}}$ —— (٢)

٢أ + ب = ٢ (×-٢) ⟸ -٤أ - ٢ب = -٤
٥أ + ٢ب = ١ (×١) ⟸ ٥أ + ٢ب = ١

$\boxed{\text{أ = -٣}}$ وبالتعويض في (١)

٢(-٣) + ب = ٢ ⟸ -٦ + ب = ٢ ⟸ $\boxed{\text{ب = ٨}}$

مثال: اذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(0, 1)$ ، $(3, 4)$ يمس المنحنى $\text{ص}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^2 - 7\text{س} + 5$ جد أ .

الحل: ميل المستقيم $= \frac{4-1}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$

معادلة المستقيم : $\text{ص} - 1 = 1(\text{س} - 0) \Leftarrow \text{ص} = \text{س} + 1$

$\text{ص}'(\text{س}) = 2\text{أ}\text{س} - 7$ و $\text{ص}'(\text{س}) =$ ميل المستقيم $\Leftarrow 2\text{أ}\text{س} - 7 = 1$

$\Leftarrow 2\text{أ}\text{س} = 8 \Leftarrow \text{أ} = \frac{4}{\text{س}}$

وأيضاً يكون ص = ص $\Leftarrow \text{أ}\text{س}^2 - 7\text{س} + 5 = \text{س} + 1$ ونعوض عن قيمة أ

$\Leftarrow \frac{4}{\text{س}} \times \text{س}^2 - 7\text{س} + 5 = \text{س} + 1 \Leftarrow 4\text{س} - 7\text{س} + 5 = \text{س} + 1$

$\Leftarrow -4\text{س} = -4 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 1} \Leftarrow \text{أ} = \frac{4}{1} = 4 \quad \therefore \boxed{\text{أ} = 4}$

سؤال: اذا كان المستقيم $\text{ص} = 13\text{س} - 7$ يمس منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^3 + \text{ب}\text{س}^2$ عند $\text{س} = 1$

جد أ ، ب الإجابة : $\boxed{\text{أ} = 1}$ $\boxed{\text{ب} = 5}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{2 - 3\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = (\text{س} - 2)^8 (1 - 2\text{س})^3$ أثبت أن ق ، هـ متماسين عند $\boxed{\text{س} = 1}$

الحل: $\text{ق}(1) = \text{هـ}(1)$ لكي يكونا متماسين

$\text{ق}(1) = \frac{1}{2-3} = -1$ ، $\text{هـ}(1) = (1-2)^8 (1-2)^3 = 1 \times -1 = -1$

$\therefore \text{ق}(1) = \text{هـ}(1)$

أيضاً يجب أن يكون $\text{ق}'(1) = \text{هـ}'(1)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(2 - 3\text{س})(1) - (\text{س} \times -3)}{(2 - 3\text{س})^2} = \frac{2}{(2-3\text{س})^2} \Leftarrow \text{ق}'(1) = \frac{2}{(2-3)^2} = 2$

$\text{هـ}'(\text{س}) = (\text{س} - 2)^8 \times 3(1 - 2\text{س})^2 \times -2 + (1 - 2\text{س})^3 \times 8(\text{س} - 2)^7 \times 1$

$\text{هـ}'(1) = 1 \times 3 \times 1 \times -2 + (-1) \times 8 \times -1 = -6 + 8 = 2$

$\therefore \text{ق}'(1) = \text{هـ}'(1)$

هذا يعني أن ق(س) ، هـ(س) متماسين عند س = ١

مثال: $ق(س) = س^2 + أس + أ$ جد $أ$ اذا كان $ق(س)$ يمس محور السينات

الحل: $ق'(س) = 2س + أ = 0 \Leftarrow س = \frac{-أ}{2}$

$ق(\frac{-أ}{2}) = \frac{أ^2}{4} + أ(\frac{-أ}{2}) + أ = 0 \Leftarrow \frac{أ^2}{4} - \frac{أ^2}{2} + أ = 0$ بالضرب في 4

$\Leftarrow أ^2 - 2أ^2 + 4أ = 0 \Leftarrow 4أ - أ^2 = 0 \Leftarrow أ(4-أ) = 0 \Leftarrow أ = 0 ، 4$

---

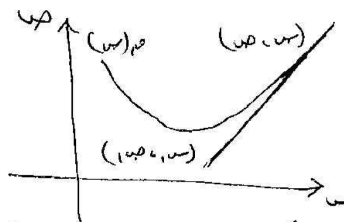
* ملاحظة: اذا كان $ق(س)$ يمس محور السينات عند $س = ب$ فإنه كل من:

$ق(ب) = 0$ ، $ق'(ب) = 0$

* اذا كانت النقطة $(س_1 ، ص_1)$ نقطة خارجية لا تقع على منحنى $ق(س)$ ورسم منها مماس للمنحنى وكانت نقطة التماس هي $(س ، ص)$ ففي هذه الحالة نجد ميل المماس بطريقتين: $م_1 = ق'(س)$

$م_2 = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ ونضع $م_1 = م_2$ ونستفيد من معادلة المنحنى الأصلية.

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩



مثال: اكتب معادلة المماس المرسوم لمنحنى $ق(س) = 4س - س^2$ من النقطة $(2 ، 5)$

الحل: $ق(2) = 8 - 4 = 4 \neq 5$ $\therefore$ $(2 ، 5)$ نقطة خارجية

نفرض نقطة التماس هي $(س ، ص)$

$م_1 = ق'(س) = 4 - 2س$ ، $م_2 = \frac{ص - 5}{س - 2}$ نضع $م_1 = م_2 \Leftarrow \frac{ص - 5}{س - 2} = 4 - 2س$

$\Leftarrow (ص - 5) = (4 - 2س)(س - 2)$ نضع مكان ص المقدار $4س - س^2$

$\Leftarrow 4س - س^2 - 5 = 4س - 8 - 2س^2 + 4س \Leftarrow س^2 - 4س + 3 = 0$

$\Leftarrow (س - 3)(س - 1) = 0 \Leftarrow س = 3 ، 1$

عند $\boxed{س = 3}$ $ق(3) = 4 \times 3 - (3)^2 = 3$ $\therefore$ النقطة $(3 ، 3)$

$م = ق'(3) = 4 - 2(3) = -2$ $\therefore$ المماس: $ص - 3 = -2(س - 3)$

عند $\boxed{س = 1}$ $ق(1) = 4(1) - 1 = 3$ $\therefore$ النقطة $(1 ، 3)$

$م = ق'(1) = 4 - 2(1) = 2$ $\therefore$ المماس: $ص - 3 = 2(س - 1)$

مثال: جد معادلة المماس والعمودي المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{\text{٢ - س}}{\text{س - ٣}}$ ، س ≠ ٣
من النقطة (١ ، $-\frac{١}{٢}$)

الحل: م = ق′(س) = $\frac{\text{(س - ٣)(-١) - (٢ - س)(١)}}{\text{(س - ٣)}^{٢}}$ ⟸ ق′(١) = $\frac{\text{(١ - ٣)(-١) - (٢ - ١)(١)}}{\text{(١ - ٣)}^{٢}}$

⟸ $\boxed{\text{م} = \frac{١}{٤}}$ ⟸ $\boxed{\text{ميل العمودي} = -٤}$

⟸ معادلة المماس هي: ص - ص١ = م(س - س١) ⟸ ص + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ س - $\frac{١}{٤}$ بالضرب في ٤

⟸ ٤ص + ٢ = س - ١ ⟸ ٤ص - س + ٣ = ٠

⟸ معادلة العمودي هي: ص + $\frac{١}{٢}$ = -٤(س - ١) ⟸ ص + $\frac{١}{٢}$ = -٤س + ٤ بالضرب في ٢

⟸ ٢ص + ١ = -٨س + ٨ ⟸ ٢ص + ٨س - ٧ = ٠

مثال: جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} من النقطة (٣ ، ٠)

الحل: لكن: (٣ ، ٠)
ق(٣) = (٣)^{٢} = ٩
∴ النقطة لا تقع على المنحنى

⟸ ق′(س) = ٢س ⟸ م (ميل المماس عند (س ، ص)) = ٢س

لكن م = $\frac{\text{ص - ٠}}{\text{س - ٣}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س - ٣}}$ ⟸ $\frac{\text{ص}}{\text{س - ٣}}$ = ٢س ⟸ $\boxed{\text{ص = ٢س(س - ٣)}}$

ومن معادلة المنحنى ⟸ ص = ق(س) = س^{٢}

⟸ س^{٢} = ٢س(س - ٣) ⟸ س^{٢} - ٢س(س - ٣) = ٠

⟸ س^{٢} - ٢س^{٢} + ٦س = ٠ ⟸ س(س - ٢س + ٦) = ٠

⟸ س(٦ - س) = ٠

⟸ $\boxed{\text{س = ٠}}$ أو $\boxed{\text{س = ٦}}$

ص = ق(٠) = ٠ (٠ ، ٠) ص = ق(٦) = ٣٦ (٦ ، ٣٦) ∴ يوجد مماسان

الأول عند النقطة (٠ ، ٠) حيث م = ٢(٠) = ٠ ومعادلته:

ص - ٠ = ٠(س - ٠) ⟸ $\boxed{\text{ص = ٠}}$ وهو محور السينات

الثاني عند النقطة (٦ ، ٣٦) حيث م = ٢(٦) = ١٢ ومعادلته:

ص - ٣٦ = ١٢(س - ٦) ⟸ ص - ١٢س + ٣٦ = ٠

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اكتب معادلة المماس المرسوم لمنحنى $س^2 + ص^2 = 5$ من النقطة (5، 0)

الحل: عند تعويض النقطة (5، 0) في معادلة المنحنى $(5)^2 + (0)^2 = 25 \neq 5$

∴ النقطة (5، 0) نقطة خارجية لذلك نفرض نقطة التماس (س، ص)

⇐ نشتق لإيجاد الميل الأول $م_1$ ⇐ $2س + 2ص \frac{دص}{دس} = 0$ ⇐ $2ص \frac{دص}{دس} = -2س$

⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$

ولإيجاد الميل الثاني ⇐ $م_2 = \frac{ص - 0}{س - 5} = \frac{ص}{س - 5}$

نساوي الميل الأول بالميل الثاني ⇐ $\frac{-س}{ص} = \frac{ص}{س - 5}$ ⇐ $ص^2 = -س^2 + 5س$

⇐ $\underbrace{ص^2 + س^2}_{5} = 5س$ ⇐ $5 = 5س$ ⇐ $\boxed{س = 1}$

⇐ نعوض س = 1 في معادلة المنحنى لإيجاد ص ⇐ $1 + ص^2 = 5$ ⇐ $ص^2 = 4$

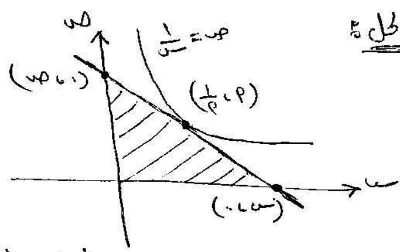
⇐ $ص = \pm 2$ ∴ النقاط (1، 2)، (1، −2) يوجد مماسان.

الأول عند (1، 2) ⇐ $م = \frac{-1}{2}$ ومعادلته: $ص - 2 = \frac{-1}{2}(س - 1)$

الثاني عند (1، −2) ⇐ $م = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ ومعادلته: $ص + 2 = \frac{1}{2}(س - 1)$

مثال: بين أن مساحة المثلث المكون من مماس المنحنى $ص = \frac{1}{س}$ عند $(أ، \frac{1}{أ})$ ومحوري السينات والصادات تساوي (2).

الحل: يجب معرفة النقاط (س، 0)، (0، ص) التي تعتبر نقاط خارجية



⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{-1}{س^2}$ ⇐ $\frac{دص}{دس}\Big|_{(أ، \frac{1}{أ})} = \frac{-1}{أ^2}$ (الميل الأول)

ولإيجاد الميل الثاني نأخذ أحد النقاط $\boxed{(س، 0)}$ أو (0، ص) مع نقطة التماس $(أ، \frac{1}{أ})$

$م_2 = \frac{\frac{1}{أ} - 0}{أ - س}$ ⇐ نساوي الميل الأول بالثاني $م_1 = م_2$ ⇐ $\frac{-1}{أ^2} = \frac{\frac{1}{أ}}{أ - س}$

⇐ $-أ + س = أ$ ⇐ $\boxed{س = 2أ}$

وعند أخذ النقطتين (0، ص)، $(أ، \frac{1}{أ})$ لإيجاد الميل الثاني أيضاً $م_2$ ⇐ $م_2 = \frac{ص - \frac{1}{أ}}{0 - أ}$

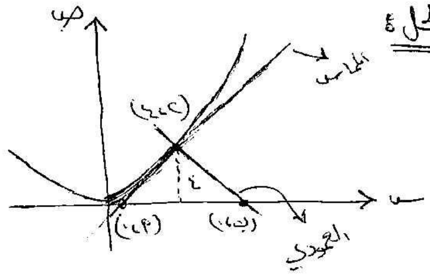
نساوي ميل المشتقة الأول بالميل الثاني $م_1 = م_2$ ⇐ $\frac{-1}{أ^2} = \frac{ص - \frac{1}{أ}}{-أ}$ ⇐ $ص - \frac{1}{أ} = \frac{1}{أ}$

⇐ $\boxed{ص = \frac{2}{أ}}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2} س \times ص = \frac{1}{2} \times 2أ \times \frac{2}{أ} = 2$

مثال: أوجد مساحة المثلث المكون من مماس المنحنى $ق(س) = س^2$ عند $(٢، ٤)$ والعمودي على المماس ومحور السينات.

الحل:



نلاحظ أن ارتفاع المثلث هو (٤) ولمعرفة طول القاعدة $\overline{أب}$ يجب معرفة $(أ، ٠)$ وهي نقطة خارجية عن المماس ويجب معرفة $(ب، ٠)$ وهي نقطة خارجية عن العمودي

⇐ ميل المماس $= ق'(س) = ٢س$ وعند $س = ٢$ ⇐ $\boxed{م_1 = ٤}$

نأخذ النقطتين $(أ، ٠)$، $(٢، ٤)$ فيكون $م_2 = \frac{٤ - ٠}{٢ - أ} = \frac{٤}{٢ - أ}$

نساوي $م_1 = م_2$ ⇐ $\frac{٤}{٢ - أ} = ٤$ ⇐ $٢ - أ = \frac{٤}{٤}$ ⇐ $٢ - أ = ١$ ⇐ $\boxed{أ = ١}$

ميل العمودي $= -\frac{١}{٤}$ ⇐ نأخذ النقطتين $(ب، ٠)$، $(٢، ٤)$ ⇐ $م_2 = \frac{٤ - ٠}{٢ - ب} = \frac{٤}{٢ - ب}$

نساوي ⇐ $م_1 = م_2$ ⇐ $\frac{٤}{٢ - ب} = -\frac{١}{٤}$ ⇐ $ب - ٢ = ١٦$ ⇐ $\boxed{ب = ١٨}$

∴ طول $\overline{أب} = ١٨ - ١ = ١٧$

∴ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع $= \frac{١}{٢}$ أب × ٤ $= \frac{١٧}{٢} \times ٤ = ٣٤$

مثال: اذا رسم من النقطة $(٠، \frac{٣}{٢})$ مستقيم عمودي على مماس المنحنى $ق(س) = س^2$ جد معادلة هذا العمودي.

الحل: $ق(٠) = (٠)^2 = ٠$ ⇐ ∴ النقطة $(٠، \frac{٣}{٢})$ خارجية لذلك نفرض لنقطة التماس $(س_1، ص)$

$م_1 = ق'(س) = ٢س$ ، ميل العمودي $= \frac{-١}{٢س}$ ، $م_2 = \frac{ص - \frac{٣}{٢}}{س - ٠} = \frac{ص - \frac{٣}{٢}}{س} = \frac{س^2 - \frac{٣}{٢}}{س}$

⇐ نضع $م_1 = م_2$ ⇐ $\frac{س^2 - \frac{٣}{٢}}{س} = \frac{-١}{٢س}$ ⇐ $٢س^3 - ٣س = -س$ ⇐ $٢س^3 - ٢س = ٠$

⇐ $٢س(س^2 - ١) = ٠$ ⇐ $س = ٠، ١، -١$ ⇐ عند $\boxed{س = ٠}$ $م = \frac{-١}{٢(٠)}$ (عمود رأسي عمودي على محور السينات)

وتكون معادلته $\boxed{س = ٠}$ هي نفسها معادلة محور الصادات

عند $\boxed{س = ١}$ ⇐ $م = \frac{-١}{٢(١)} = -\frac{١}{٢}$ ⇐ المعادلة: $\boxed{ص - ١ = -\frac{١}{٢}(س - ١)}$

$ق(١) = ١$ $(١، ١)$

وعند $\boxed{س = -١}$ ⇐ $ق(-١) = ١$ $(-١، ١)$ ⇐ $م = \frac{-١}{٢(-١)} = \frac{١}{٢}$ ⇐ المعادلة: $\boxed{ص - ١ = \frac{١}{٢}(س + ١)}$

مثال: اذا كان ق(س) = أس² + ٧س + جـ وكان المماس لمنحنى ق(س) عند (١ ، ٣) يمر بالنقطة (٣ ، ٥) جد أ ، جـ ؟

الحل: بما أن ق يمر بالنقطة (١ ، ٣) يعني أنها تحقق معادلة منحنى ق(س)

ق(١) = ٣ ⟸ ٣ = أ + ٧ + جـ ⟸ أ + جـ = -٤ ------ (*)

أيضاً: ق′(س) = ٢أس + ٧ ⟸ ميل المماس عند (١ ، ٣) = ق′(١) = ٢أ + ٧

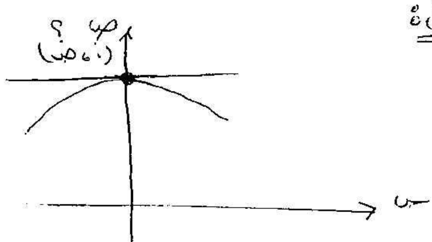
وأيضاً ميل المماس = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٥ - ٣}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١$

نساوي الميل الأول بالثاني ⟸ ٢أ + ٧ = ١ ⟸ ٢أ = -٦ ⟸ $\boxed{\text{أ} = -٣}$

نعوض في (*) -٣ + جـ = -٤ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = -١}$

مثال: جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الذي معادلته ٥س² - ٣س ص + ٢ص² - ٨ = ٠ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات .

الحل:



المنحنى يمر بنقطة التقاطع (٠ ، ص)

∴ (٠ ، ص) تحقق معادلة المنحنى

نعوض: ٥(٠)² - ٣(٠)ص + ٢ص² - ٨ = صفر

⟸ ٢ص² = ٨ ⟸ ص² = ٤ ⟸ ص = ±٢

⟸ يوجد نقطتان يقطع المنحنى محور الصادات عندهما وهما (٠ ، ٢) ، (٠ ، -٢)

نشتق بالنسبة إلى س لإيجاد الميل ⟸ ١٠س - (٣س(١) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ص × ٣) + ٤ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

⟸ ١٠س - ٣س $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ - ٣ص + ٤ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ (-٣س + ٤ص) = -١٠س + ٣ص

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-١٠\text{س} + ٣\text{ص}}{-٣\text{س} + ٤\text{ص}}$

وعند (٠ ، ٢) ⟸ م = $\frac{٠ + ٦}{٠ + ٨} = \frac{٣}{٤}$ ⟸ المعادلة: ص - ٢ = $\frac{٣}{٤}$ (س - ٠)

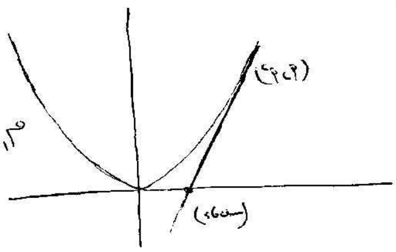
وعند (٠ ، -٢) ⟸ م = $\frac{٠ - ٦}{٠ - ٨} = \frac{٣}{٤}$ ⟸ المعادلة: ص + ٢ = $\frac{٣}{٤}$ (س - ٠)

مثال: أثبت أن المماس لمنحنى ق(س) = س² عند النقطة (أ، أ²) يقطع محور السينات في النقطة $(\frac{\text{أ}}{2} ، 0)$

الحل: نفرض نقطة التقاطع مع محور السينات (س، 0) وهي تعتبر نقطة خارجية على المماس

م = ق'(س) = 2س وعند النقطة (أ، أ²)

م₁ = ق'(أ) = 2أ



$\Leftarrow$ م₂ = $\frac{\text{أ}^2 - 0}{\text{أ} - \text{س}} = \frac{\text{أ}^2}{\text{أ} - \text{س}}$

نضع: م₁ = م₂ $\Leftarrow$ 2أ = $\frac{\text{أ}^2}{\text{أ} - \text{س}}$ $\Leftarrow$ 2أ² − 2أس = أ² $\Leftarrow$ أ² − 2أس = 0

$\Leftarrow$ أ(أ − 2س) = 0 $\Leftarrow$ $\boxed{\text{أ} = 0}$ أو أ = 2س $\Leftarrow$ $\boxed{\text{س} = \frac{\text{أ}}{2}}$ وهو المطلوب

مثال: اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند $\boxed{\text{س} = 2}$ هي ص + 3س = 10 وكان ل(س) = س² ق(س) + $\frac{16}{\text{ق(س)}}$ جد ل'(2)

الحل: يجب معرفة ق(2)، ق'(2) وذلك من معادلة المماس ص + 3س = 10

نعوض $\boxed{\text{س} = 2}$ $\Leftarrow$ ص + 6 = 10 $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ص} = 4}$ ∴ ق(2) = 4

نشتق $\Leftarrow$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 3 = 0$ $\Leftarrow$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -3$ ∴ ق'(2) = −3

$\Leftarrow$ ل'(س) = س² × ق'(س) + ق(س) × 2س + $\frac{-16 \times \text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}^2(\text{س})}$

ل'(2) = 4 × −3 + 4 × 4 − $\frac{16 \times -3}{16}$ = −12 + 16 + 3 = 7

سؤال: اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = 3 هي ص + 2س = 11 وكانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى هـ(س) عند س = 3 هي 4ص + س = 15 وكانت ل(س) = ق(س) × هـ(س) جد ل'(3)

إرشاد: يجب معرفة ق(3)، ق'(3)، هـ(3)، هـ'(3)

نجد ق(3) و ق'(3) وذلك بالرجوع إلى معادلة المماس كما في المثال السابق (منحنى ق(س))

نجد هـ(3)، هـ'(3) وذلك " " " العمودي على المماس (منحنى هـ(س))

ثم نجد ل'(س) = ق(س) × هـ'(س) + هـ(س) × ق'(س) ⟵ $\boxed{\text{الاجابة } 14}$

مثال: اذا كان لكل من المنحنيين م(س)، هـ(س) مماس أفقي عند (٢،٤) وكان:

ل(س) = $\frac{\text{١٦س + م(س)}}{\text{هـ(س)}}$ جد ل'(٢)

الحل: م ، هـ لهما مماس أفقي عند (٢،٤) ⇐ م(٢) = هـ(٢) = ٤

⇐ م'(٢) = هـ'(٢) = ٠

∴ ل'(س) = $\frac{\text{هـ(س)} \times (\text{١٦} + \text{م'(س)}) - (\text{١٦س} + \text{م(س)}) \times \text{هـ'(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٢}}$

⇐ ل'(٢) = $\frac{(٤)(١٦+٠) - (٣٢+٤) \times ٠}{(٤)^{٢}} = \frac{٤ \times ١٦}{١٦} = ٤$

مثال: رسم مماس لمنحنى م(س) = س^{٢} + أ من النقطة (١، ب) الواقعة على منحنى م(س) فقطع محور السينات عند س = -١ جد أ ، ب ؟

الحل: بما أن (١، ب) يمر بها منحنى م فهي تحقق معادلة المنحنى ⇐ م(١) = ب

⇐ ب = ١ + أ ——— (*)

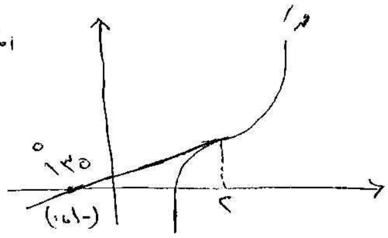
م'(س) = ٢س ⇐ م'(١) = ٢ ميل المماس

والمماس يقطع محور السينات عند $\boxed{\text{س = -١}}$ ∴ يمر بالنقطة (-١، ٠)

∴ ميل المماس = $\frac{\text{ب} - ٠}{١ - (-١)} = \frac{\text{ب}}{٢}$ ⇐ نساوي الميل الأول بالثاني ⇐ $\frac{\text{ب}}{٢}$ = ٢ ⇐ $\boxed{\text{ب = ٤}}$

نعوض في (*) ⇐ ٤ = ١ + أ ⇐ $\boxed{\text{أ = ٣}}$

مثال: جد ميل العمودي على منحنى م عند س = ٢ من خلال الشكل التالي:



المطلوب: $\frac{-١}{\text{م'(٢)}}$

الحل: ميل المماس لمنحنى م'(س) = ظا٤٥° = ١

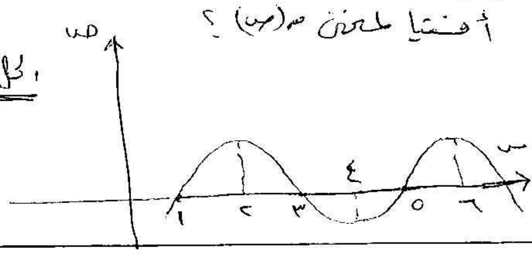
معادلة المماس هي: ص − ٠ = ١(س + ١)

⇐ ص = س + ١ وعند $\boxed{\text{س = ٢}}$ ⇐ ص = ٢ + ١ = ٣

∴ م'(٢) = ٣ ∴ ميل العمودي هو $\frac{-١}{٣}$

مثال ٤: بالاعتماد على الرسم الذي يمثل ق(س) جد قيم س التي يكون المماس عندها أفقيا لمنحنى ق(س) ؟

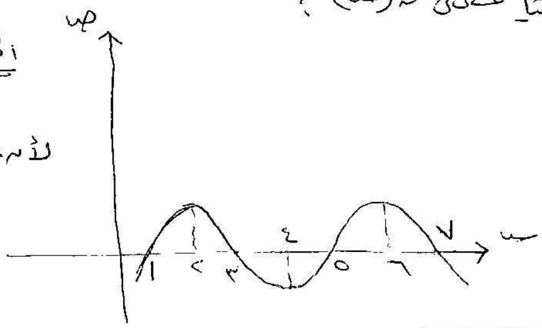
الحل: قيم س هي {٢، ٤، ٦}



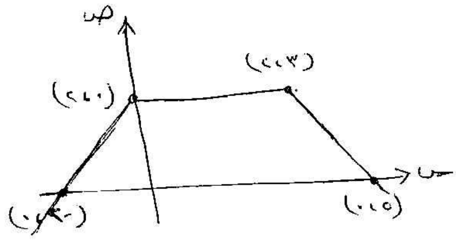
مثال ٥: بالاعتماد على الرسم الذي يمثل قَ(س) جد قيم س التي يكون المماس عندها أفقيا لمنحنى ق(س) ؟

الحل: قيم س هي {١، ٣، ٥، ٧}

لأن: قَ(١) = قَ(٣) = قَ(٥) = صفر



مثال ٦: من خلال الرسم الذي يمثل ق(س) أرسم قَ(س)



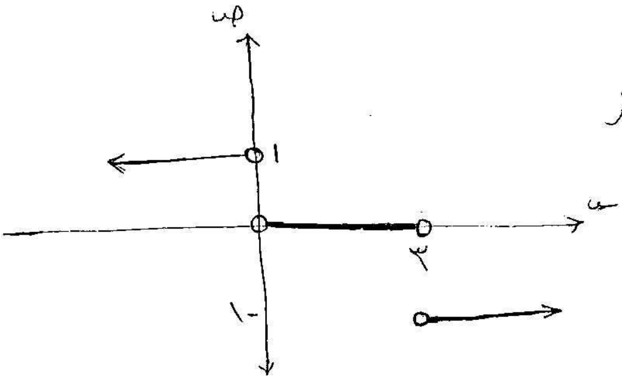
الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

الحل: قَ(س) = ميل ق(س) لذلك نجد الميل في الحالات الثلاث

١) س < ٠ ⟸ م = $\frac{٢ - ٠}{٠ - (-٢)}$ = ١

٢) ٠ < س < ٣ ⟸ م = $\frac{٢ - ٢}{٣ - ٠}$ = صفر

٣) س > ٣ ⟸ م = $\frac{٠ - ٢}{٥ - ٣}$ = -١



مثال: جد النقط على منحنى $9س^2 + 16ص^2 = 52$ والتي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم $9س - 8ص = 1$

الحل: المستقيم $9س - 8ص = 1$ نشتق ⇐ $9 - 8\frac{دص}{دس} = 0$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{9}{8}$ (ميل المستقيم)

نشتق معادلة المنحنى ⇐ $18س + 32ص\frac{دص}{دس} = 0$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{-18س}{32ص}$ (ميل المماس)

وبما أن المستقيم يوازي المنحنى فإن: ميل المستقيم = ميل المنحنى

$\frac{-18س}{32ص} = \frac{9}{8}$ ⇐ $\cancel{8} \times -\cancel{18}س = \cancel{9} \times \cancel{32}ص$ ⇐ $\boxed{س = -2ص}$

نعوض في معادلة المنحنى: $9(-2ص)^2 + 16ص^2 = 52$

⇐ $36ص^2 + 16ص^2 = 52$ ⇐ $52ص^2 = 52$ ⇐ $ص^2 = 1$ ⇐ $\boxed{ص = \pm 1}$

عند $ص = 1$ ⇐ $س = -2(1) = -2$ $(-2, 1)$
عند $ص = -1$ ⇐ $س = -2(-1) = 2$ $(2, -1)$
⇐ النقاط التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم

مثال: جد نقاط تعامد المنحنيين $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = س^2 + 2س + 1$

الحل: $ق'(س) = 2س$ ، $هـ'(س) = 2س + 2$

وبما أن المنحنيين متعامدين ⇐ $م_1 \times م_2 = -1$ ⇐ $ق'(س) \times هـ'(س) = -1$

⇐ $(2س)(2س + 2) = -1$ ⇐ $4س^2 + 4س + 1 = 0$ ⇐ $(2س + 1)(2س + 1) = 0$

⇐ $\boxed{س = \frac{-1}{2}}$ وإذا عوضنا $س = \frac{-1}{2}$ في كل من الاقترانين $ق(س)$ ، $هـ(س)$

⇐ $ق(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{4}$ ، $هـ(\frac{-1}{2}) = (\frac{-1}{2})^2 + 2(\frac{-1}{2}) + 1 = \frac{1}{4}$

∴ النقطة هي $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$

مثال: إذا كان العمودي على مماس منحنى $ق(س) = س^2 - 4$ عند $\boxed{س = 1}$ يقطع المنحنى مرة أخرى عند $\boxed{س = م}$ فجد م؟

الحل: $ق(1) = 1 - 4 = -3$ ∴ النقطة $(1, -3)$ ⇐ ميل المماس $= ق'(1) = 2(1) = 2$

⇐ ميل العمودي $= \frac{-1}{2}$ ⇐ معادلة العمودي: $ص + 3 = \frac{-1}{2}(س - 1)$ ⇐ $\boxed{ص = \frac{-1}{2}س - \frac{5}{2}}$

نجد نقطة التقاطع بين العمودي ومعادلة $ق(س)$ ⇐ $ق(س) = ص$

⇐ $س^2 - 4 = \frac{-1}{2}س - \frac{5}{2}$ ⇐ $2س^2 - 8 = -س - 5$ (ضربنا بـ 2)

⇐ $2س^2 + س - 3 = 0$ ⇐ $(2س + 3)(س - 1) = 0$ ⇐ $\boxed{س = \frac{-3}{2}}$ ، $\boxed{س = 1}$

∴ $\boxed{م = \frac{-3}{2}}$

مثال: أثبت أن المنحنيين ق(س) = س² − س + ٢ ، هـ(س) = ٣س − س² متماسان ثم جد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة التماس؟

الحل: نجد نقاط التقاطع عندما ق = هـ

س² − س + ٢ = ٣س − س² ⟸ ٢س² − ٤س + ٢ = ٠ بالقسمة على ٢

⟸ س² − ٢س + ١ = ٠ ⟸ (س − ١)(س − ١) = ٠ ∴ $\boxed{\text{س} = ١}$

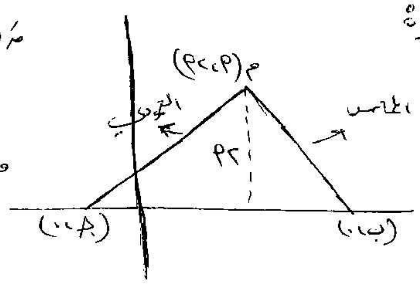
ق(١) = ٢ ، هـ(١) = ٢ ∴ يتقاطعان في (١، ٢)

ق'(س) = ٢س − ١ ⟸ ق'(١) = ١
هـ'(س) = ٣ − ٢س ⟸ هـ'(١) = ١
بما أن ق'(١) = هـ'(١) ∴ لهما نفس المماس وهما متماسان

∴ معادلة المماس: ص − ٢ = ١(س − ١)

مثال: اذا قطع المماس والعمودي لمنحنى ق(س) = $\frac{٨أ^٣}{٣أ^٢ + س^٢}$ عند النقطة م(أ، ٢أ) محور السينات في النقطتين ب، جـ على الترتيب جد مساحة المثلث م ب جـ ؟

الحل:



ق'(س) = $\frac{-٨أ^٣ \times ٢س}{(٣أ^٢ + س^٢)^٢}$

ق'(أ) = $\frac{-٨أ^٣ \times ٢أ}{(٣أ^٢ + أ^٢)^٢} = \frac{-١٦أ^٤}{١٦أ^٤} = -١$

∴ ميل المماس = −١ ⟸ أيضا ميل المماس = $\frac{٢أ - ٠}{أ - ب} = \frac{٢أ}{أ - ب}$

نساوي الميل الأول بالثاني ⟸ $\frac{٢أ}{أ - ب} = -١$ ⟸ ٢أ = −أ + ب ⟸ $\boxed{ب = ٣أ}$

ميل العمودي = ١ ⟸ أيضاً ميل العمودي = $\frac{٢أ - ٠}{أ - جـ} = \frac{٢أ}{أ - جـ}$

نساوي الميل الأول بالثاني ⟸ $\frac{٢أ}{أ - جـ} = ١$ ⟸ ٢أ = أ − جـ ⟸ $\boxed{جـ = -أ}$

∴ ب − جـ = ٣أ − (−أ) = ٤أ

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤أ × ٢أ = ٤أ²

* التطبيق الفيزيائي للمشتقة :-

ع : السرعة ت : التسارع ن : الزمن

ويمكن أن يرمز للمسافة بالرموز التالية : ف ، س ، ص ، ل ، م

السرعة: تعرف بأنها المسافة التي يقطعها الجسم في وحدة الزمن وهي نوعان :

أ) السرعة المتوسطة $\Leftarrow$ ع = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$

ب) السرعة اللحظية (المتغيرة) : $ع_ن = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{\Delta ف}{\Delta ن} \Leftarrow ع_ن = \frac{دف}{دن}$

* التسارع : يعرف بأنه مقدار التغير في السرعة في وحدة الزمن وهو نوعان :

أ) التسارع المتوسط $\Leftarrow$ ت = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن} \Leftarrow ت = \frac{ع(ن_2) - ع(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$

ب) التسارع اللحظي (المتغير) $\Leftarrow ت_ن = \frac{دع}{دن}$

صيغة ع

* استنتاج مهم مما تقدم : $ت_ن = \frac{دع}{دن} = \frac{د}{دن}(ع) = \frac{د}{دن}\left(\frac{دف}{دن}\right)$

$\Leftarrow \boxed{ت_ن = \frac{د^2ف}{دن^2}}$

مثال : يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^3 + ن^2$

1) احسب سرعة وتسارع الجسم عندما ن = 5

2) احسب السرعة المتوسطة والتسارع المتوسط في [1 ، 3]

الحل : ف = $ن^3 + ن^2$ ، ع = $3ن^2 + 2ن$ ، ت = 6ن + 2

1) ع(5) = $3(5)^2 + 2(5)$ = 75 + 10 = 85 م/ث

ت(5) = 6(5) + 2 = 32 م/ث^2

2) السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(3) - ف(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 2}{2}$ = 17 م/ث

التسارع المتوسط = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع(3) - ع(1)}{3 - 1} = \frac{33 - 5}{2}$ = 14 م/ث^2

* سؤال: يتحرك جسم في المستوى الديكارتي بحيث كانت المسافة التي يقطعها (ف) متر تعطى بدلالة الزمن (ن) ثانية حسب المعادلة $ف = ن^3 + 6ن^2 + 5ن$

جد ما يلي:

1) سرعة الجسم المتوسطة في الفترة [٢، ٥]
2) سرعة الجسم بعد أربع ثواني (عندن =٤)
3) تسارع الجسم المتوسط في الفترة [٢، ٥]
4) تسارع الجسم بعد (٣) ثواني (عند ن = ٣)

الحل: 1) السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1} = \frac{ف(5) - ف(2)}{5 - 2}$

$= \frac{\left((5)^3 + 6(5)^2 + 5(5)\right) - \left((2)^3 + 6(2)^2 + 5(2)\right)}{3} = \frac{300 - 42}{3} = \frac{258}{3} = 86$ م/ث

2) $ع(4) \Leftarrow ع_ن = \frac{دف}{دن} = 3ن^2 + 12ن + 5$

$\Leftarrow ع(4) = 3(4)^2 + 12(4) + 5 = 48 + 48 + 5 = 101$ م/ث

3) التسارع المتوسط $= \frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع(5) - ع(2)}{5 - 2} = \frac{\left(3(5)^2 + 12(5) + 5\right) - \left(3(2)^2 + 12(2) + 5\right)}{3}$

$\Leftarrow$ التسارع المتوسط $= \frac{99}{3} = 33$ م/ث^2

4) المطلوب ت(٣) $\Leftarrow ت_ن = \frac{دع}{دن} = 6ن + 12$

$\Leftarrow ت(3) = 6(3) + 12 = 30$ م/ث^2

سؤال: يتحرك جسم حسب العلاقة $ف = \frac{1}{3}ن^3 - 4ن^2 + 7ن + 12$، احسب التسارع عندما تنعدم السرعة.

إرشاد: عندما تنعدم السرعة تعني عندما $\boxed{ع = 0}$

نجد السرعة والتسارع ثم نساوي السرعة بالصفر لإيجاد قيمة (ن).

ثم نعوض: ت(٧) = -- = ——

ت(١) = - = ——

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = جا^4 ن احسب التسارع عندما تنعدم السرعة لأول مرة بعد بدء الحركة؟

الحل: ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٤ جا^3 ن جتا ن

ت = $\frac{دع}{دن}$ = ٤ جا^3 ن × -جا ن + جتا ن × ١٢ جا^2 ن × جتا ن

= -٤ جا^4 ن + ١٢ جا^2 ن جتا^2 ن

عندما تنعدم السرعة ⟸ ع = ٠ ⟸ ٤ جا^3 ن جتا ن = ٠

إما ٤ جا^3 ن = ٠ ⟸ جا ن = ٠ ⟸ ن = ٠ ، π ، ٢π ، ...

أو جتا ن = ٠ ⟸ ن = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، ...

نأخذ أصغر قيمة لـ(ن) بعد ن = ٠ فتكون $\boxed{ن = \frac{\pi}{2}}$

⟸ ت($\frac{\pi}{2}$) = -٤(١) + ١٢(١)(٠) = -٤ م/ث^2

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = أ جا ٣ن احسب تسارع الجسم عندما يكون قد قطع مسافة ٤ م؟

الحل: ع = $\frac{دف}{دن}$ = أ جتا ٣ن × ٣ = ٣أ جتا ٣ن

⟸ ت = $\frac{دع}{دن}$ = ٣أ × -جا ٣ن × ٣ = $\underbrace{-٩أ جا ٣ن}_{ف}$ = -٩ × ف = -٩ × ٤ = -٣٦ م/ث^2

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = جا ن + جتا ن ، ن ∈ [٠ ، ٢π] احسب المسافة والتسارع عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي؟

الحل: ع = $\frac{دف}{دن}$ = جتا ن - جا ن ، ت = $\frac{دع}{دن}$ = -جا ن - جتا ن

سكون لحظي (الحظي) تعني أن $\boxed{ع = ٠}$ ⟸ جتا ن - جا ن = ٠ ⟸ جتا ن = جا ن ⟸ ن = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

ف($\frac{\pi}{4}$) = جا $\frac{\pi}{4}$ + جتا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$

ف($\frac{5\pi}{4}$) = جا $\frac{5\pi}{4}$ + جتا $\frac{5\pi}{4}$ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{-2}{\sqrt{2}}$ = -$\sqrt{2}$ (الجيب والجتا في الربع الثالث سالبة)

ت($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{-2}{\sqrt{2}}$ = -$\sqrt{2}$

ت($\frac{5\pi}{4}$) = -($\frac{-1}{\sqrt{2}}$) - ($\frac{-1}{\sqrt{2}}$) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = أ ن^{2} + ب ن فإذا كانت سرعة الجسم الابتدائية هي ٦ م/ث وتسارع الجسم هو ١٤ م/ث^{2} جد المسافة المقطوعة بعد ٣ ثواني من الحركة ؟

الحل: ع$_{ن}$ = ٢أن + ب

تحدث السرعة الابتدائية عندما $\boxed{ن = ٠}$

ع(٠) = ٢أ(٠) + ب = ب ⇐ ومن السؤال ع(٠) = ٦

∴ $\boxed{ب = ٦}$

ت(ن) = $\frac{دع}{دن}$ = ٢أ ومن السؤال ت$_{ن}$ = ١٤ ⇐ ٢أ = ١٤ ⇐ $\boxed{أ = ٧}$

∴ ف = ٧ن^{2} + ٦ن ⇐ ف(٣) = ٧(٣)^{2} + ٦(٣) = ٨١ م

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ٦ن^{2} − ن^{3}

١) جد قيم ن التي تكون السرعة عندها موجبة

٢) جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته تساوي ٩ م/ث

الحل: ع$_{ن}$ = $\frac{دف}{دن}$ = ١٢ن − ٣ن^{2} ندرس اشارة السرعة

١٢ن − ٣ن^{2} = ٠ ⇐ ٣ن(٤ − ن) = ٠ ⇐ $\boxed{ن = ٠}$ أو $\boxed{ن = ٤}$

اشارة ع: − − − ٠ + + + ٤ − − −

تكون ع موجبة في (٠، ٤)

---

٢) ع$_{ن}$ = ٩ ⇐ ١٢ن − ٣ن^{2} = ٩ بالقسمة على ٣

⇐ ٤ن − ن^{2} = ٣ ⇐ ن^{2} − ٤ن + ٣ = ٠ ⇐ (ن − ٣)(ن − ١) = ٠

⇐ $\boxed{ن = ٣}$ أو $\boxed{ن = ١}$

⇐ ت = $\frac{دع}{دن}$ = ١٢ − ٦ن

⇐ ت(٣) = ١٢ − ٦(٣) = −٦ م/ث^{2}

⇐ ت(١) = ١٢ − ٦(١) = ١٢ − ٦ = ٦ م/ث^{2}

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٢} + ٣ن$ ، إذا كانت سرعة الجسم عندما $ن = ٥$ تساوي السرعة المتوسطة في $[٠، أ]$ جد $أ$ ؟

الحل: $ع(ن) = \frac{دف}{دن} = ٢ن + ٣ \Leftarrow ع(٥) = ٢(٥) + ٣ = ١٣$ م/ث

السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(أ) - ف(٠)}{أ - ٠} = \frac{أ^{٢} + ٣أ - ٠}{أ} = \frac{\cancel{أ}(أ+٣)}{\cancel{أ}}$

$= أ + ٣$

$\Leftarrow أ + ٣ = ١٣ \Leftarrow \boxed{أ = ١٠}$

ملاحظة: الجسم يعكس اتجاه حركته عندما تتغير إشارة سرعته.

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ١٢ن + ٤$ بين أن الجسم يتوقف لمرة واحدة فقط دون أن يغير اتجاه حركته.

الحل: $ع(ن) = \frac{دف}{دن} = ٣ن^{٢} - ١٢ن + ١٢$ وبما أن الجسم يتوقف $ع(ن) = ٠$

$\Leftarrow ٣ن^{٢} - ١٢ن + ١٢ = ٠$ بالقسمة على (٣) $\Leftarrow ن^{٢} - ٤ن + ٤ = ٠$

$\Leftarrow (ن - ٢)(ن - ٢) = ٠ \Leftarrow \boxed{ن = ٢}$

أي أن الجسم يتوقف مرة واحدة وهي عندما $\boxed{ن = ٢}$

ندرس إشارة السرعة: $+ + + \;|_{٢}\; + + +$ ع

وبما أن السرعة لم تتغير إشارتها حول $\boxed{ن = ٢}$ لذلك يبقى الجسم متحركاً في نفس الاتجاه.

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = \sqrt{ن}\,(٤٨ - ن)$ متى يبدأ الجسم بالعودة وجد المسافة المقطوعة عندئذ.

الحل: $ف(ن) = ن^{\frac{١}{٢}}(٤٨ - ن) = ٤٨ن^{\frac{١}{٢}} - ن^{\frac{٣}{٢}}$

$ع(ن) = \frac{دف}{دن} = ٤٨ \times \frac{١}{٢} ن^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٣}{٢} ن^{\frac{١}{٢}} = \frac{٤٨}{٢ن^{\frac{١}{٢}}} - \frac{٣}{٢} ن^{\frac{١}{٢}}$

يبدأ الجسم بالعودة عندما $ع(ن) = ٠ \Leftarrow \frac{٤٨}{٢ن^{\frac{١}{٢}}} - \frac{٣}{٢} ن^{\frac{١}{٢}} = ٠ \Leftarrow \frac{٤٨}{\cancel{٢}ن^{\frac{١}{٢}}} = \frac{٣}{\cancel{٢}} ن^{\frac{١}{٢}}$

$\Leftarrow ٤٨ = ٣ن \Leftarrow \boxed{ن = ١٦}$ ، $+ + + \;|_{١٦}\; - - -$ إشارة ع

وبما أن إشارة (ع) تتغير حول $\boxed{ن = ١٦}$ أي أن الجسم يبدأ بالعودة بعد ١٦ ثانية

$\Leftarrow ف(١٦) = \sqrt{١٦}\,(٤٨ - ١٦) = ٤ \times ٣٢ = ١٢٨$ م

مثال ٤: يتحرك جسيم في المستوى بحيث كانت المسافة التي يقطعها (س) بالأمتار ترتبط مع الزمن (ن) بالثواني حسب المعادلة: س = ٥ جا٢ن ، ن ∈ [٠، $\frac{\pi}{2}$] جد:

① سرعة الجسيم لحظة انعدام تسارعه

② تسارع الجسيم لحظة انعدام سرعته

③ جد العلاقة بين تسارع الجسيم والمسافة التي يقطعها س ومن ثم جد تسارع الجسيم عندما س = ٢,٥ متر.

الحل: ع(ن) = $\frac{دس}{دن}$ ⟸ ع(ن) = ١٠ جتا٢ن

ت(ن) = $\frac{دع}{دن}$ ⟸ ت(ن) = −٢٠ جا٢ن

① المطلوب: ع(ن) عندما ت(ن) = صفر ⟸ −٢٠ جا٢ن = ٠ ⟸ جا٢ن = ٠

⟸ ٢ن = ٠، π، ٢π، ... ⟸ ن = ٠، $\frac{\pi}{2}$ (لأن الفترة [٠، $\frac{\pi}{2}$])

∴ ينعدم التسارع مرتين الأولى عند $\boxed{ن = ٠}$

⟸ ع(٠) = ١٠ جتا٠ = ١٠(١) = ١٠ م/ث

والثانية عندما $\boxed{ن = \frac{\pi}{2}}$ ⟸ ع($\frac{\pi}{2}$) = ١٠ جتا π = ١٠(−١) = −١٠ م/ث

أي أن الجسم أصبح يسير بعكس اتجاه الحركة الأولى.

---

② المطلوب: ت(ن) عندما ع(ن) = ٠

⟸ ع(ن) = ٠ ⟸ ١٠ جتا٢ن = ٠ ⟸ جتا٢ن = ٠ ⟸ ٢ن = $\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$، ...

⟸ ن = $\frac{\pi}{4}$، $\cancel{\frac{3\pi}{4}}$، ... (لأن الفترة من [٠، $\frac{\pi}{2}$])

ت($\frac{\pi}{4}$) = −٢٠ جا $\frac{\pi}{2}$ = −٢٠ م/ث² (تباطؤ) أي أن الجسم يتباطأ

---

③ س = ٥ جا٢ن ، ت(ن) = −٢٠ جا٢ن

⟸ $\frac{س}{ت}$ = $\frac{٥ \cancel{جا٢ن}}{−٢٠ \cancel{جا٢ن}}$ ⟸ $\frac{س}{ت}$ = $-\frac{1}{4}$ ⟸ $\boxed{ت = −٤س}$

وعندما س = ٢,٥ فإن ت = −٤(٢,٥) = −١٠ م/ث²

<u>سؤال</u>: تتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = \sqrt{٢ن^٢ + ١٨}$ احسب المسافة عندما تكون السرعة ١م/ث وجد التسارع عندئذ.

<u>إرشاد</u>: نشتق المسافة لإيجاد السرعة ونساوي السرعة بالعدد (١) لإيجاد ن
$ن = ٣$ ، $\cancel{-٣}$ نأخذ $\boxed{ن = ٣}$ ثم نشتق لإيجاد التسارع ونجد $ت(٣)$

<u>مثال</u>: تحرك جسمان معاً من نقطة واحدة الأول حسب العلاقة $ف_١(ن) = ن^٣ + ٢ن + ١٢$ والثاني حسب العلاقة $ف_٢(ن) = \frac{٢}{٣}ن^٣ + ٦ن + ٥$ ، احسب تسارع كل من الجسمين عندما يكون لهما نفس السرعة.

<u>الحل</u>: $ع_١ = \frac{دف}{دن} = ٣ن^٢ + ٢$ ، $ع_٢ = \frac{دف}{دن} = ٢ن^٢ + ٦$

$ع_١(ن) = ع_٢(ن) \Leftarrow ٣ن^٢ + ٢ = ٢ن^٢ + ٦ \Leftarrow ن^٢ = ٤ \Leftarrow \boxed{ن = ٢}$

$ت_١(ن) = \frac{دع}{دن} = ٦ن \Leftarrow ت_١(٢) = ٦(٢) = ١٢ م/ث^٢$

$ت_٢(ن) = \frac{دع}{دن} = ٤ن \Leftarrow ت_٢(٢) = ٤(٢) = ٨ م/ث^٢$

<u>مثال</u>: من سطح بناية سقط جسم حسب العلاقة $ف_١(ن) = ٥ن^٢$ وبعد ثانية واحدة قذف جسم آخر رأسياً لأسفل من نفس المكان حسب العلاقة $ف_٢(ن) = ١٥ن + ٥ن^٢$ فوصل الجسمان معاً إلى الأرض جد سرعة كل من الجسمين لحظة وصول الأرض وجد ارتفاع البناية.

<u>الحل</u>: اذا احتاج الجسم الثاني ن ثانية للوصول إلى الأرض فإن الأول يحتاج $ن + ١$
وبما أن الجسمين قطعا نفس المسافة $\Leftarrow ف_١(ن+١) = ف_٢(ن)$

$\Leftarrow ٥(ن+١)^٢ = ١٥ن + ٥ن^٢ \Leftarrow ٥(ن^٢ + ٢ن + ١) = ١٥ن + ٥ن^٢$

$\Leftarrow ٥ن^٢ + ١٠ن + ٥ = ١٥ن + ٥ن^٢ \Leftarrow ٥ن = ٥ \Leftarrow \boxed{ن = ١}$

$\therefore$ زمن الجسم الأول $ن + ١ = ١ + ١ = ٢$ ثانية ، زمن الجسم الثاني هو (١) ثانية

$ف_١(٢) = ٥(٢)^٢ = ٢٠ م$ ، $ف_٢(١) = ١٥(١) + ٥(١)^٢ = ٢٠ م$

$\therefore$ ارتفاع البناية $= ٢٠ م$

$ع_١(ن) = ١٠ن \Leftarrow ع_١(٢) = ١٠(٢) = ٢٠ م/ث$ سرعة الجسم الأول

$ع_٢(ن) = ١٥ + ١٠ن \Leftarrow ع_٢(١) = ١٥ + ١٠(١) = ٢٥ م/ث$ سرعة الجسم الثاني

سؤال: من سطح بناية سقط جسم حسب العلاقة ف١(ن) = ١٦ ن² وفي نفس اللحظة رمى شخص ثاني جسماً رأسياً لأسفل حسب العلاقة ف٢(ن) = ٢٠ ن + ١٦ ن² فإذا وصل الجسم الأول بعد ½ ثانية من وصول الجسم الثاني جد ارتفاع البناية وجد سرعة كل من الجسمين لحظة وصول الأرض.

إرشاد: اذا وصل الجسم الثاني بعد (ن) ثانية فإن الأول يصل بعد (ن + ½) ثانية

⇐ ف١(ن + ½) = ف٢(ن) ثم نجد (ن) ---- $\boxed{\text{ن} = ١}$ الجسم الثاني

$\boxed{\text{ن} = ١ + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}}$ الجسم الأول

ثم نجد ف١(ن) ، ف٢(ن) (ارتفاع البناية)

ثم نجد ع١(ن) ، ع٢(ن) بعد اشتقاق المسافة الأولى والثانية.

مثال: يتحرك جسم في المستوى بحيث كانت سرعته (ع) م/ث ترتبط مع المسافة التي يقطعها ف بالأمتار حسب المعادلة ع² = ٨١ - ٢٠ ف جد تسارع الجسم وسجل ملاحظاتك.

الحل: المطلوب: ت(ن) ؟؟ $\text{ت(ن)} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

ع² = ٨١ - ٢٠ ف نشتق الطرفين بالنسبة إلى (ن) (اشتقاق ضمني)

$٢\text{ع} \underbrace{\frac{\text{دع}}{\text{دن}}}_{\text{ت}} = ٠ - ٢٠ \underbrace{\frac{\text{دف}}{\text{دن}}}_{\text{ع}}$ ⇐ ٢ع ت = -٢٠ع

⇐ $\text{ت} = \frac{-٢٠\text{ع}}{٢\text{ع}} = -١٠$ م/ث² (نلاحظ أن الجسم يتحرك بتسارع ثابت لأنه لا يعتمد)

مثال: من ارتفاع ١٠٠م سقط جسم حسب العلاقة ف١(ن) = ٥ ن² وفي نفس الوقت قذف جسم من سطح الأرض رأسياً للأعلى حسب العلاقة ف٢(ن) = ٥٠ ن - ٥ ن² جد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما نفس الارتفاع عن سطح الأرض؟

الحل: بما أن هما بنفس الارتفاع عن سطح الأرض يكون مجموع المسافتين = المسافة الكلية:

أي أن ف١ + ف٢ = ١٠٠ ⇐ ٥ن² + ٥٠ن - ٥ن² = ١٠٠ ⇐ ٥٠ن = ١٠٠ ⇐ $\boxed{\text{ن} = ٢}$

$\text{ع}_١\text{(ن)} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ١٠\text{ن}$ ⇐ ع١(٢) = ١٠(٢) = ٢٠ م/ث

$\text{ع}_٢\text{(ن)} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٥٠ - ١٠\text{ن}$ ⇐ ع٢(٢) = ٥٠ - ١٠(٢) = ٥٠ - ٢٠ = ٣٠ م/ث

* ملاحظة: يصل الجسم المقذوف رأسياً لأعلى أقصى ارتفاع عندما تصبح سرعته تساوي صفر ثم يعود إلى الأرض

مثال: قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن^2

١) جد أقصى ارتفاع يصله الجسم

٢) جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٦٠ م

٣) متى تصبح سرعة الجسم مساوية لنصف سرعته الابتدائية

٤) جد قيم ن التي تكون السرعة عندها موجبة

٥) متى يعود الجسم إلى الأرض

الحل: ١) عند أقصى ارتفاع ع(ن) = ٠ ⇐ ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن

٤٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٤٠ = ١٠ن ⇐ $\boxed{\text{ن = ٤}}$

∴ أقصى ارتفاع هو ف(٤) = ٤٠(٤) − ٥(٤)^2 = ١٦٠ − ٨٠ = ٨٠ م

---

٢) ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن^2 ⇐ وعلى ارتفاع ٦٠ فإن ٦٠ = ٤٠ن − ٥ن^2

⇐ ٥ن^2 − ٤٠ن + ٦٠ = ٠ ÷٥⇐ ن^2 − ٨ن + ١٢ = ٠ ⇐ (ن − ٦)(ن − ٢) = ٠

⇐ $\boxed{\text{ن = ٦}}$ أو $\boxed{\text{ن = ٢}}$

⇐ ع(٦) = ٤٠ − ١٠(٦) = −٢٠ م/ث ، ع(٢) = ٤٠ − ١٠(٢) = ٢٠ م/ث

---

٣) السرعة الابتدائية عند $\boxed{\text{ن = ٠}}$ ⇐ ع(٠) = ٤٠ − ١٠(٠) = ٤٠

السرعة الابتدائية

⇐ تكون سرعة الجسم مساوية لنصف سرعته الابتدائية تعني:

ع(ن) = ½ × ٤٠ ⇐ ٤٠ − ١٠ن = ٢٠ ⇐ ٢٠ = ١٠ن ⇐ $\boxed{\text{ن = ٢}}$ ثانية

---

٤) ندرس إشارة السرعة ⇐ ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن ⇐ ٤٠ − ١٠ن = ٠

⇐ $\boxed{\text{ن = ٤}}$

إشارة ع: + + + ٤ − − − − −

قيم ن

⇐ ع > ٠ في [٠، ٤)

---

٥) عندما يعود الجسم إلى الأرض تصبح ف(ن) = ٠

⇐ ٤٠ن − ٥ن^2 = ٠ ⇐ ٥ن(٨ − ن) = ٠ ⇐ $\boxed{\text{ن = ٠}}$ (لا مرفوضة) أو $\boxed{\text{ن = ٨}}$

∴ يعود الجسم إلى الأرض عندما $\boxed{\text{ن = ٨}}$

سؤال: من قمة برج ارتفاعه ٢٢٥م قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن^{2}

١) جد أقصى ارتفاع يصله الجسم عن قمة البرج وعن سطح الأرض. ف = ١٨٠ ، ف = ١٨٠ + ٢٢٥

٢) جد الزمن اللازم حتى يصل الجسم إلى الأرض ــــــ $\boxed{ن = ١٥}$

٣) جد سرعة الجسم لحظة وصوله الأرض ــــــ ع(١٥) = −٩٠ م/ث

مثال: من قمة برج ارتفاعه ١٠٠م قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = م ن − ٥ن^{2} حيث م > ٢ ، وكانت سرعة الجسم لحظة الوصول إلى الأرض تساوي −٦٠ م/ث جد م ؟

الحل: المسافة عن الأرض ⇐ ف(ن) = م ن − ٥ن^{2} + ١٠٠

⇐ ع(ن) = دف/دن = م − ١٠ن ⇐ م − ١٠ن = −٦٠ ⇐ م = ١٠ن − ٦٠

وعند الوصول إلى الأرض تكون ف(ن) = ٠

⇐ م ن − ٥ن^{2} + ١٠٠ = صفر ⇐ (١٠ن − ٦٠) ن − ٥ن^{2} + ١٠٠ = ٠

⇐ ١٠ن^{2} − ٦٠ن − ٥ن^{2} + ١٠٠ = ٠ ⇐ ٥ن^{2} − ٦٠ن + ١٠٠ = ٠ نقسم على ٥

⇐ ن^{2} − ١٢ن + ٢٠ = ٠ ⇐ (ن − ١٠)(ن − ٢) = ٠ ⇐ $\boxed{ن = ١٠}$ أو $\boxed{ن = ٢}$

عندما $\boxed{ن = ١٠}$ ⇐ م = ١٠(١٠) − ٦٠ = ٤٠

عندما $\boxed{ن = ٢}$ ⇐ م = ١٠(٢) − ٦٠ = −٤٠ نأخذ قيمة $\boxed{م = ٤٠}$

مثال: من قمة بناية قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن^{2} فإذا وصل الجسم إلى الأرض بسرعة ٥٠م/ث جد ارتفاع البناية.

الحل: نفرض ارتفاع البناية هو م ⇐ ف عن الأرض ⇐ ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن^{2} + م

ع(ن) = دف/دن = ٤٠ − ١٠ن ⇐ ٤٠ − ١٠ن = −٥٠ ⇐ ٩٠ = ١٠ن ⇐ $\boxed{ن = ٩}$

(وضعنا ع(ن) = −٥٠ لأن الجسم وصل الأرض وهو هابط بعكس اتجاه الحركة الأصلي للأعلى)

∴ ف(٩) = صفر ⇐ ٤٠(٩) − ٥(٩)^{2} + م = ٠

⇐ ٣٦٠ − ٤٠٥ + م = ٠ ⇐ −٤٥ = −م ⇐ $\boxed{م = ٤٥}$

مثال: من قمة برج ارتفاعه ٦٠ م قذف جسم رأسياً للأعلى حسب العلاقة $\text{ف}_1(\text{ن}) = ٢٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢$ ومن سطح الأرض قذف جسم آخر رأسياً للأعلى حسب العلاقة $\text{ف}_2(\text{ن}) = \text{أ}\text{ن} - ٥\text{ن}^٢$، فإذا كان لهما نفس أقصى ارتفاع جد أ؟

الحل: $\text{ع}_1(\text{ن}) = ٢٠ - ١٠\text{ن} \Leftarrow ٢٠ - ١٠\text{ن} = ٠ \Leftarrow ٢٠ = ١٠\text{ن} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٢}$

أقصى ارتفاع عن قمة البرج $\text{ف}_1(٢) = ٢٠(٢) - ٥(٢)^٢ = ٢٠$ م

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض $= ٦٠ + ٢٠ = ٨٠$ م

أما للجسم الثاني: $\text{ع}_2(\text{ن}) = \text{أ} - ١٠\text{ن} \Leftarrow \text{أ} - ١٠\text{ن} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ١٠\text{ن}}$

$\Leftarrow \text{ف}_2(\text{ن}) = \text{أ}\text{ن} - ٥\text{ن}^٢ \Leftarrow \text{أ}\text{ن} - ٥\text{ن}^٢ = ٨٠$ نعوض قيمة أ

$\Leftarrow (١٠\text{ن})(\text{ن}) - ٥\text{ن}^٢ = ٨٠ \Leftarrow ١٠\text{ن}^٢ - ٥\text{ن}^٢ = ٨٠ \Leftarrow ٥\text{ن}^٢ = ٨٠ \Leftarrow \text{ن}^٢ = ١٦$

$\Leftarrow \text{ن} = ٤ ، \cancel{-٤} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٤}$ $\therefore \boxed{\text{أ} = ١٠ \times ٤ = ٤٠}$

مثال: يتحرك جسم بحيث أن $\text{ع}^٢ = \text{ف}^٣$ احسب التسارع عندما تكون السرعة = ٨ م/ث

الحل: نشتق ضمنياً $\Leftarrow ٢\text{ع} \overset{\text{ت}}{\frac{\text{دع}}{\text{دن}}} = ٣\text{ف}^٢ \overset{\text{ع}}{\frac{\text{دف}}{\text{دن}}}$

$\Leftarrow ٢\cancel{\text{ع}}\text{ت} = ٣\text{ف}^٢\cancel{\text{ع}} \Leftarrow ٢\text{ت} = ٣\text{ف}^٢ \Leftarrow \boxed{\text{ت} = \frac{٣}{٢}\text{ف}^٢}$

وعندما ع = ٨ $\Leftarrow (٨)^٢ = \text{ف}^٣$ من السؤال $\Leftarrow \text{ف}^٣ = ٦٤ \Leftarrow \boxed{\text{ف} = ٤}$

$\therefore \text{ت} = \frac{٣}{٢}\text{ف}^٢ \Leftarrow \text{ت} = \frac{٣}{٢}(١٦) = ٢٤$ م/ث^٢

مثال: يتحرك جسم بحيث أن $\text{ع}^٢ = ١ - \text{ف}^٣$ جد تسارع الجسم في حالة السكون اللحظي

الحل: نشتق ضمنياً $\Leftarrow ٢\text{ع} \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -٣\text{ف}^٢ \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \Leftarrow ٢\cancel{\text{ع}}\text{ت} = -٣\text{ف}^٢\cancel{\text{ع}}$

$\Leftarrow ٢\text{ت} = -٣\text{ف}^٢ \Leftarrow \boxed{\text{ت} = \frac{-٣\text{ف}^٢}{٢}}$

وعندما تكون الجسم في حالة سكون لحظي $\Leftarrow \text{ع}(\text{ن}) = ٠$ نعوض في معادلة السؤال

$\Leftarrow (٠)^٢ = ١ - \text{ف}^٣ \Leftarrow \text{ف}^٣ = ١ \Leftarrow \boxed{\text{ف} = ١}$

$\therefore \boxed{\text{ت} = \frac{-٣}{٢}(١)^٢ = \frac{-٣}{٢}}$

مثال: قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = أن + ب ن² بسرعة ابتدائية ٤٠ م/ث، فإذا كان أقصى ارتفاع وصله الجسم هو ٨٠ م، جد أ، ب

الحل: ع(ن) = أ + ٢ب ن

سرعة الابتدائية ٤٠ م/ث ⟸ ع(٠) = ٤٠

⟸ أ + ٢ب(٠) = ٤٠

⟸ $\boxed{أ = ٤٠}$

∴ ف(ن) = ٤٠ن + ب ن²

وعند أقصى ارتفاع تكون ع(ن) = ٠ ⟸ ٠ = ٤٠ + ٢ب ن

⟸ ٢ب ن = −٤٠ ⟸ $\boxed{ب = \frac{-٢٠}{ن}}$

∴ ف(ن) = ٤٠ن + $\left(\frac{-٢٠}{ن}\right)$ن² ⟸ ٨٠ = ٤٠ن − ٢٠ن

⟸ ٨٠ = ٢٠ن ⟸ $\boxed{ن = ٤}$

∴ ب = $\frac{-٢٠}{٤}$ ⟸ $\boxed{ب = -٥}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩