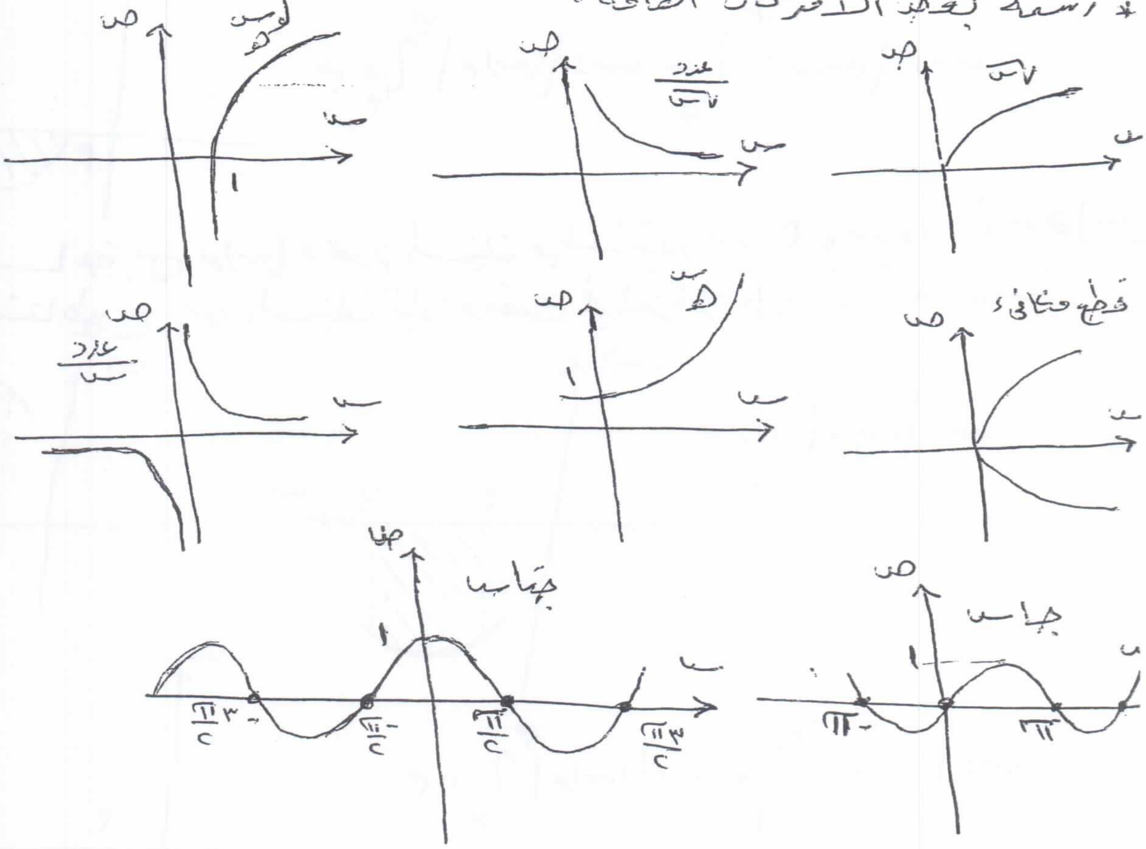
* حساب المساحة باستخدام التكامل:

مبادئ لحساب المساحة:

* نعتبر كل مستقيم على صورة ص = عدد هو اقتران و أهمهم محور السينات ص = ٠
* نعتبر كل مستقيم على صورة س = عدد هو عمود و أهمهم محور الصادات س = ٠
* رسمة بعض الاقترانات الهامة:

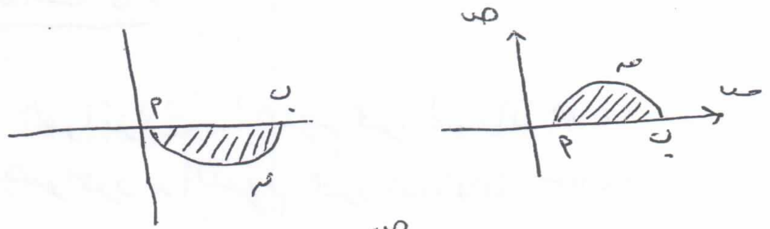


قانون المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ (الأعلى - الأدنى) دس

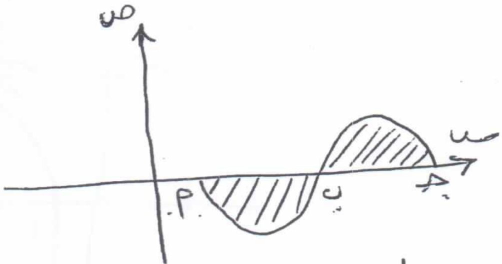
* خطوات الحل:

١) نحدد ما لدينا من أعمدة واقترانات
٢) نساوي كل اقترانين ببعض لإيجاد نقاط التقاطع والتي تعتبر حدود التكامل
٣) نرسم الأعمدة ثم الاقترانات ونظلل المنطقة المطلوبة
٤) نجد المساحة باستخدام التكامل
٥) اذا كان لدينا ٣ اقترانات فإنه يوجد أكثر من منطقة
٦) نقط التقاء الاقترانات يجب أن تكون أعمدة .

* مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات:

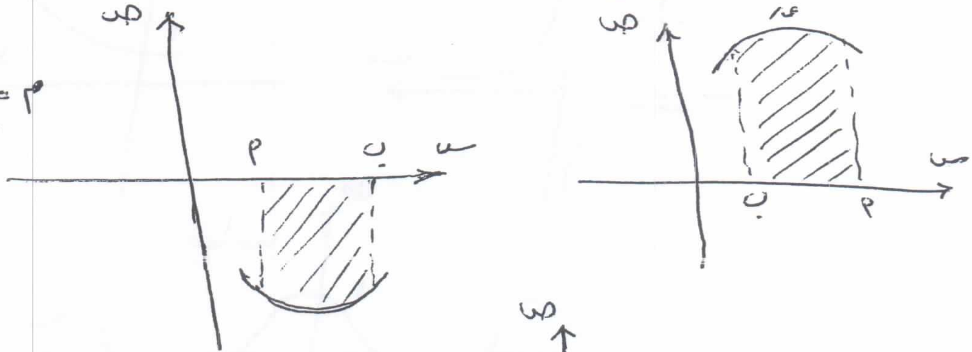


$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\ \text{دس}$$

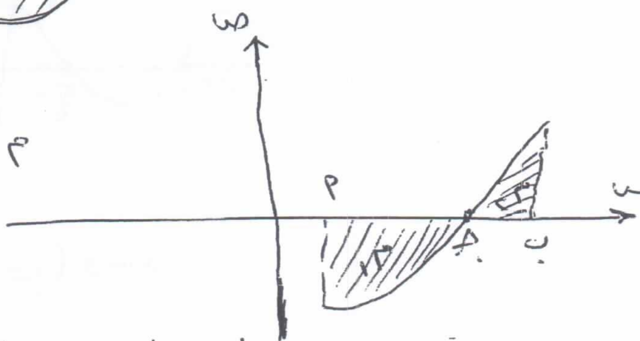


$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\ \text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} |\text{ق(س)}|\ \text{دس}$$

إذا طلبت المساحة بين ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ و س = ب أو س ∈ [أ، ب]
نجد نقاط التقاطع مع محور السينات فإذا وقعت في الفترة (أ، ب) نجزأ المساحة:



$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\ \text{دس}$$



$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} |\text{ق(س)}|\ \text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\ \text{دس}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = س² − ٤س ومحور السينات

الحل: س² − ٤س = ٠ لايجاد حدود التكامل ⟸ س(س − ٤) = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\boxed{\text{س} = ٤}$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٤} |\text{س}^٢ - ٤\text{س}|\ \text{دس} = \int_{٠}^{٤} ٤\text{س} - \text{س}^٢\ \text{دس} = ٢\text{س}^٢ - \frac{\text{س}^٣}{٣} \Big|_{٠}^{٤}$$

$$= \left(٣٢ - \frac{٦٤}{٣}\right) - ٠ = \frac{٩٦ - ٦٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد المساحة المحصورة بين ص = س^٣ − س ومحور السينات

الحل: س^٣ − س = ٠ ⟸ س(س^٢ − ١) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = −١ ، س = ١

$$\text{م} = \int_{-١}^{٠} |\text{س}^٣ - \text{س}|\,\text{دس} + \int_{٠}^{١} |\text{س}^٣ - \text{س}|\,\text{دس}$$

$$= \int_{-١}^{٠} (\text{س}^٣ - \text{س})\,\text{دس} + \int_{٠}^{١} \text{س} - \text{س}^٣\,\text{دس} = \left.\frac{\text{س}^٤}{٤} - \frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{-١}^{٠} + \left.\frac{\text{س}^٢}{٢} - \frac{\text{س}^٤}{٤}\right]_{٠}^{١}$$

$$= (٠) - \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤}\right) - (٠) = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

سؤال: جد المساحة المحصورة بين ص = ٢س − ٦ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٦

$\boxed{\text{الإجابة ١٣}}$

سؤال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = ٣س − س^٢ ومحور السينات حيث س ∈ [١ ، ٥]

$\boxed{\text{الإجابة ١٢}}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ص = ٢ − $\sqrt{\text{س}}$ ومحوري السينات والصادات.

الحل: محور الصادات س = ٠

نجد نقطة التقاطع مع السينات ⟸ ٢ − $\sqrt{\text{س}}$ = ٠ ⟸ ٢ = $\sqrt{\text{س}}$ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٤}$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٤} |٢ - \sqrt{\text{س}}|\,\text{دس} = \int_{٠}^{٤} ٢ - \sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = \int (٢ - \text{س}^{\frac{١}{٢}})\,\text{دس} = \left.٢\text{س} - \frac{٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\right]_{٠}^{٤}$$

$$= \left(٨ - \frac{٢}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}}\right) - (٠) = ٨ - \frac{٢}{٣}(٢^٢)^{\frac{٣}{٢}} = ٨ - \frac{١٦}{٣} = \frac{٨}{٣}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ص = جاس − $\frac{١}{٢}$ ومحور السينات في $\left[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right]$

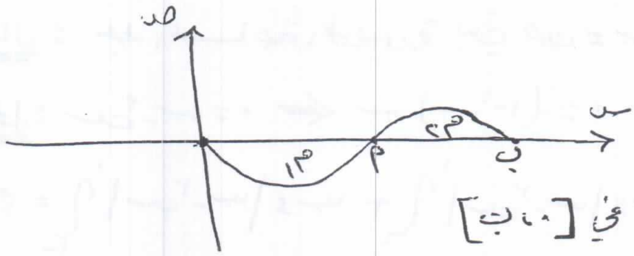
الحل: جاس − $\frac{١}{٢}$ = ٠ ⟸ جاس = $\frac{١}{٢}$ ⟸ س = $\frac{\pi}{٦}$

$$\text{م} = \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} |\text{جاس} - \tfrac{١}{٢}|\,\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} |\text{جاس} - \tfrac{١}{٢}|\,\text{دس}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} \tfrac{١}{٢} - \text{جاس}\,\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس} - \tfrac{١}{٢}\,\text{دس} = \left.\tfrac{١}{٢}\text{س} + \text{جتاس}\right]_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} + \left.\left(-\text{جتاس} - \tfrac{١}{٢}\text{س}\right)\right]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{١٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) - \left(-\frac{\pi}{٤} + ٠\right) + \left(٠ - \frac{\pi}{٤}\right) - \left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\pi}{١٢}\right) = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣}$$

مثال: بالاعتماد على الرسم:



إذا كانت $م_1 = ٧$ ، $م_2 = ١٢$ جد:

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس

٢) المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في [٠، ب]

الحل: ١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = $\int_{\text{أ}}^{\text{م}}$ ق(س) دس + $\int_{\text{م}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس

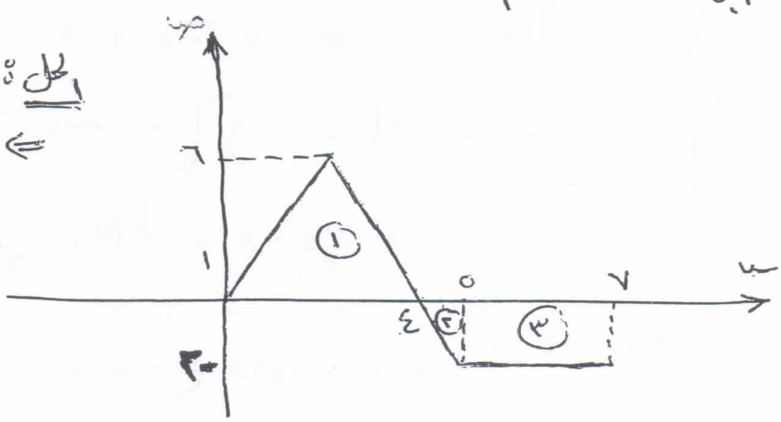
= -٧ + ١٢ = ٥

٢) م = $\int_{\text{أ}}^{\text{م}}$ |ق(س)| دس + $\int_{\text{م}}^{\text{ب}}$ |ق(س)| دس = ٧ + ١٢ = ١٩

مثال: معتمداً على الرسم الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد:

١) $\int_{0}^{7}$ ق(س) دس　　　٢) $\int_{0}^{7}$ |ق(س)| دس

٣) $\left|\int_{0}^{7}\right.$ ق(س) دس $\left.\right|$　　　٤) المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في [٠، ٧]



الحل: $م_1 = \frac{1}{2} \times ٤ \times ٦ = ١٢$ (مساحة المثلث)

⇐ $\int_{0}^{4}$ ق(س) دس = ١٢

$م_2 = \frac{1}{2} \times ١ \times ٢ = ١$

⇐ $\int_{4}^{5}$ ق(س) دس = -١ (لأنه تحت محور السينات)

$م_3 = ٢ \times ٢ = ٤$ ⇐ $\int_{5}^{7}$ ق(س) دس = -٤ (لأنها تحت محور السينات)

١) $\int_{0}^{7}$ ق(س) دس = ١٢ + (-١) + (-٤) = ٧

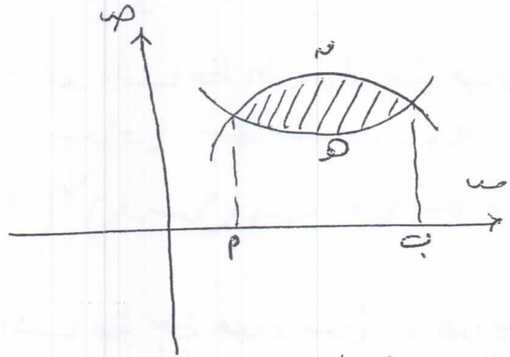
٢) $\int_{0}^{7}$ |ق(س)| دس = ١٢ + ١ + ٤ = ١٧

٣) $\left|\int_{0}^{7}\right.$ ق(س) دس $\left.\right|$ = |١٢ + (-١) + (-٤)| = ٧

٤) م = $م_1 + م_2 + م_3$ = ١٧

" طريق النجاح مليء بالأشواك "

* ثانياً : المساحة بين منحنيين :



في هذه الحالة نقوم بـ :

1) ايجاد نقاط التقاطع بوضع ع = هـ

2) نأخذ تكامل لـ س بين نقاط التقاطع فإذا كان ص مثلاً ع > هـ فإن م = $\int_{أ}^{ب} (ع - هـ)$ د س

مثال : أوجد المساحة المحصورة بين ع(س) = $س^2 + س$ ، هـ(س) = $2س + 6$

الحل : نضع ع = هـ لإيجاد نقاط التقاطع ⇐ $س^2 + س = 2س + 6$ ⇐ $س^2 - س - 6 = 0$

⇐ (س − 3)(س + 2) = 0 ⇐ $\boxed{س = 3}$ ، $\boxed{س = -2}$

لمعرفة أي الاقترانين أكبر نأخذ عدداً في الفترة (−2، 3) ليكن (1)

ع(1) = 1 + 1 = 2
هـ(1) = 2 + 6 = 8 ⇐ هـ > ع

∴ م = $\int_{-2}^{3}$ (هـ − ع) دس ⇐ م = $\int_{-2}^{3} (2س + 6) - (س^2 + س)$ دس

= $\int_{-2}^{3} س + 6 - س^2$ دس = $\frac{س^2}{2} + 6س - \frac{س^3}{3} \Big|_{-2}^{3}$

= $\left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right) = \frac{125}{6}$

سؤال : جد المساحة المحصورة بين ع(س) = $-س^2 + 3س + 7$ ، هـ(س) = $س^2 + س + 3$

$\boxed{\text{الإجابة } 9}$

مثال : أوجد المساحة المحصورة بين ع(س) = $س^3$ ، هـ(س) = 4س

الحل : نضع ع = هـ ⇐ $س^3 = 4س$ ⇐ $س^3 - 4س = 0$ ⇐ س($س^2 - 4$) = 0

⇐ س = 0 ، س = 2 ، س = −2

م = م1 + م2 ⇐ م = $\int_{-2}^{0} س^3 - 4س$ دس + $\int_{0}^{2} 4س - س^3$ دس

= $\frac{س^4}{4} - 2س^2 \Big|_{-2}^{0} + 2س^2 - \frac{س^4}{4} \Big|_{0}^{2}$

= (0) − (4 − 8) + (8 − 4) − (0)

= 4 + 4

= 8

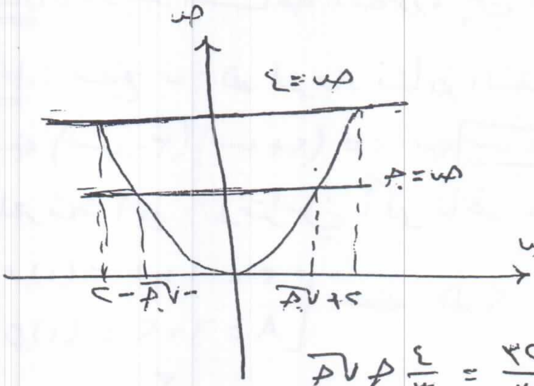
مثال: إذا كان المستقيم $ص = جـ$ يقسم المساحة المحصورة بين $ص = س^2$ ، $ص = ٤$ إلى قسمين متساويين، جد جـ

الحل: نجد المساحة المحصورة بين $ص = س^2$ ، $ص = ٤$ حيث:

$س^2 = ٤ \Leftarrow س = -٢ ، ٢$

$$م = \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^2)\, دس = ٤س - \frac{س^3}{٣} \Big|_{-٢}^{٢} = \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) = \frac{٣٢}{٣}$$

نجد المساحة بين $ص = س^2$ ، $ص = جـ$ حيث:



$س^2 = جـ \Leftarrow س = \pm\sqrt{جـ}$

$$م = \int_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}} (جـ - س^2)\, دس = جـ س - \frac{س^3}{٣} \Big|_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}}$$

$$= \left(جـ\sqrt{جـ} - \frac{جـ\sqrt{جـ}}{٣}\right) - \left(-جـ\sqrt{جـ} + \frac{جـ\sqrt{جـ}}{٣}\right)$$

$$= \frac{٢}{٣} جـ\sqrt{جـ} + \frac{٢}{٣} جـ\sqrt{جـ} = \frac{٤}{٣} جـ\sqrt{جـ} \Leftarrow \frac{١}{٢} \times \frac{٣٢}{٣} = \frac{٤}{٣} جـ\sqrt{جـ}$$

$\Leftarrow جـ\sqrt{جـ} = ٤$ بالتربيع $\Leftarrow جـ^2 \times جـ = ١٦ \Leftarrow جـ^3 = ١٦$

$\Leftarrow \boxed{جـ = \sqrt[3]{١٦}}$

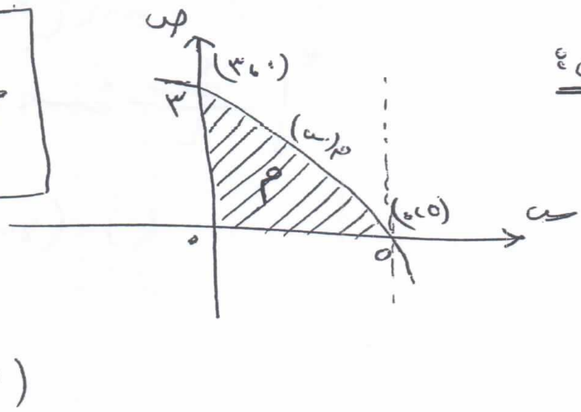
ثالثاً: المساحة بين أكثر من منحنيين:

في هذه الحالة يجب اتباع ما يلي:

١) رسم المنحنيات
٢) تحديد المنطقة المطلوبة
٣) إيجاد نقاط التقاطع اللازمة
٤) إيجاد مساحة كل منطقة ثم جمع المساحات.

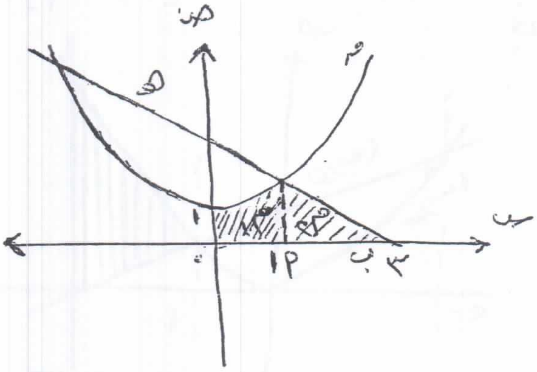
الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثل:



$$\boxed{م = \int_{٠}^{٥} \underbrace{ص}_{ع(س)}\, دس}$$ أو $$م = \int_{٠}^{٣} س\, دص$$

مثال ٤: أوجد المساحة المحصورة بين م(س) = س² + ١ ، هـ(س) = ٣ - س ومحوري السينات والصادات



الحل: نرسم المنحنيات المنطقة المطلوبة

لإيجاد (أ)

نضع م = هـ

$س^2 + ١ = ٣ - س$

$س^2 + س - ٢ = ٠$

$(س - ١)(س + ٢) = صفر$

$\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = ١}$ ← النقطة المطلوبة

لإيجاد (ب)

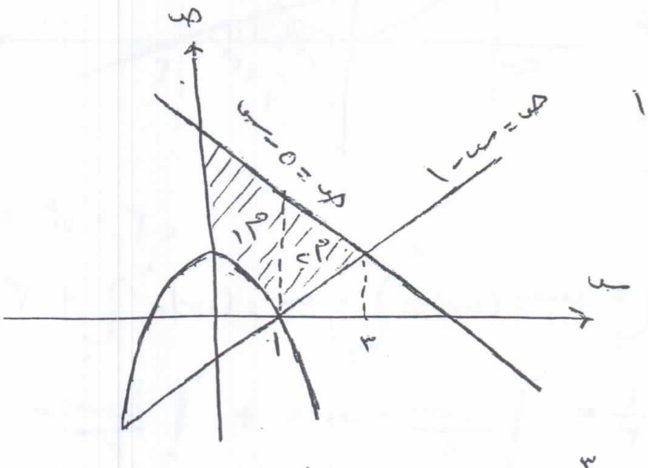
نضع هـ = ٠ ⟸ ٣ - س = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٣}$

$م = م_١ + م_٢ = \int_٠^١ م \, دس + \int_١^٣ هـ \, دس = \int_٠^١ (س^2 + ١) \, دس + \int_١^٣ (٣ - س) \, دس$

$= \left[\frac{س^3}{٣} + س\right]_٠^١ + \left[٣س - \frac{س^2}{٢}\right]_١^٣$

$= \left(\frac{١}{٣} + ١\right) - (٠) + \left(٩ - \frac{٩}{٢}\right) - \left(٣ - \frac{١}{٢}\right) = ٣\frac{١}{٣}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين م(س) = ١ - س² ومحور الصادات والمستقيم س + ص = ٥ والمستقيم ص = س - ١



م = ص

$١ - س^2 = س - ١$

$س^2 + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = ١}$

ص = ص

$٥ - س = س - ١$

$٢س = ٦$

$\boxed{س = ٣}$

$م = م_١ + م_٢ = \int_٠^١ (٥ - س) - (١ - س^2) \, دس + \int_١^٣ (٥ - س) - (س - ١) \, دس$

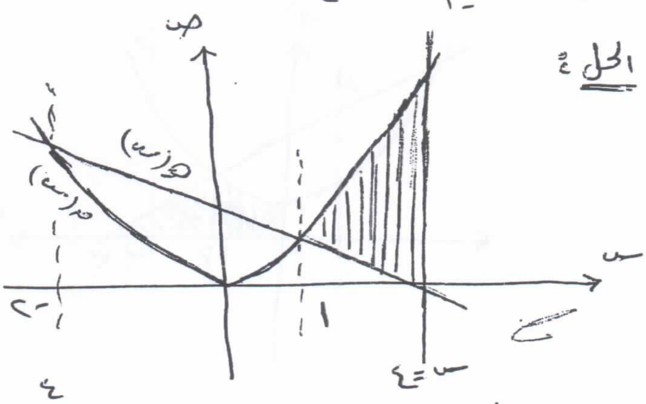
$= \int_٠^١ ٤ - س + س^2 \, دس + \int_١^٣ ٦ - ٢س \, دس$

$= ٤س - \frac{س^2}{٢} + \frac{س^3}{٣} \Big|_٠^١ + ٦س - س^2 \Big|_١^٣$

$= \left(٤ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}\right) - (٠) + (١٨ - ٩) - (٦ - ١) = ٧\frac{٥}{٦}$

مثال: ما مساحة المنطقة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2$ والمستقيم $\text{هـ}(\text{س}) = ٢ - \text{س}$ والمستقيم $\text{س} = ٤$

الحل:



نجد نقطة التقاطع بين ق ، هـ

$\text{س}^2 = ٢ - \text{س} \Leftarrow \text{س}^2 + \text{س} - ٢ = \text{صفر}$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = \text{صفر}$

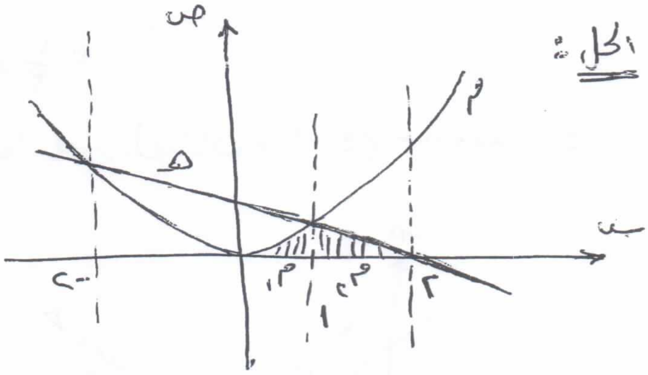
$\text{س} = -٢$ أو $\boxed{\text{س} = ١}$

$$\text{م} = \int_{١}^{٤} \left(\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\right) د\text{س} = \int_{١}^{٤} (\text{س}^2 + \text{س} - ٢)\, د\text{س} = \frac{\text{س}^3}{٣} + \frac{\text{س}^2}{٢} - ٢\text{س} \Big|_{١}^{٤}$$

$$= \left(\frac{٦٤}{٣} + \frac{١٦}{٢} - ٨\right) - \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢\right) = ٢٢{,}٥$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2$ والمستقيم $\text{هـ}(\text{س}) = ٢ - \text{س}$ ومحور السينات.

الحل:



نجد نقاط تقاطع ق مع محور السينات

$\text{س}^2 = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$

نجد نقاط تقاطع هـ مع محور السينات

$٢ - \text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢$

نجد نقاط تقاطع ق مع هـ

$\text{س}^2 = ٢ - \text{س} \Leftarrow \text{س}^2 + \text{س} - ٢ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = -٢$ أو $\boxed{\text{س} = ١}$

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

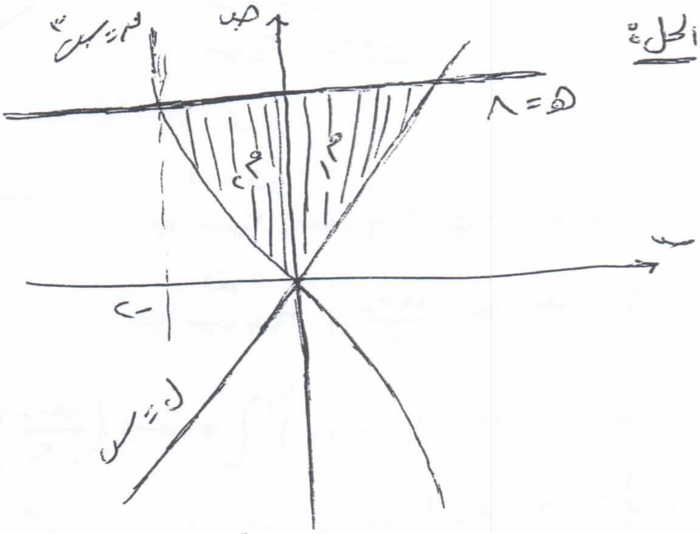
$$\Leftarrow \text{م} = \int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\, د\text{س} + \int_{١}^{٢} \text{هـ}(\text{س})\, د\text{س} = \int_{٠}^{١} \text{س}^2\, د\text{س} + \int_{١}^{٢} (٢ - \text{س})\, د\text{س}$$

$$= \frac{\text{س}^3}{٣} \Big|_{٠}^{١} + ٢\text{س} - \frac{\text{س}^2}{٢} \Big|_{١}^{٢} = \frac{١}{٣} + (٤ - ٢) - \left(٢ - \frac{١}{٢}\right)$$

$$= \frac{١}{٣} + ٢ - \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٦}$$

مثال : اذا كانت ق(س) = $-س^{٣}$ ، هـ(س) = ٨ ، ل(س) = س جد المساحة المحصورة بين الاقترانات الثلاثة .

الحل :



نجد جميع نقاط التقاطع

ق = هـ

$-س^{٣} = ٨ \Leftarrow س^{٣} = -٨$

$\Leftarrow \boxed{س = -٢}$

ق = ل

$-س^{٣} = س \Leftarrow س - س^{٣} = ٠$

$\Leftarrow س(١ - س^{٢}) = ٠$

$\Leftarrow$ س = ٠ ، س = ١ ، س = -١

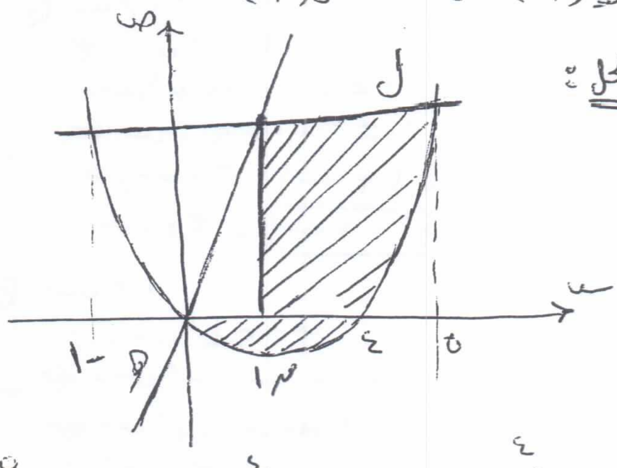
م = م١ + م٢ $\Leftarrow$ م = $\int_{-٢}^{٠} ٨ - (-س^{٣})\, دس + \int_{٠}^{٨} ٨ - س\, دس$

$= ٨س + \frac{س^{٤}}{٤} \Big|_{-٢}^{٠} + ٨س - \frac{س^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{٨} = (٠) - (-١٦ + ٤) + (٦٤ - ٣٢) - (٠)$

$= ١٢ + ٣٢ = ٤٤$

مثال : جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث : ق(س) = $س^{٢} - ٤س$ ، هـ(س) = ٥س ، ل(س) = ٥

الحل :



نجد نقاط التقاطع

ق = هـ

$س^{٢} - ٤س - ٥س = ٠$

$س^{٢} - ٩س = ٠ \Leftarrow$ س = ٠ ، س = ٩

ق = ل

$س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$

س = ٥ ، س = -١

هـ = ل

$٥س = ٥ \Leftarrow س = ١$

$م = \int_{١}^{٤} (٠ - ق)\, دس + \int_{١}^{٤} (ل - ٠)\, دس + \int_{٤}^{٥} (ل - ق)\, دس$

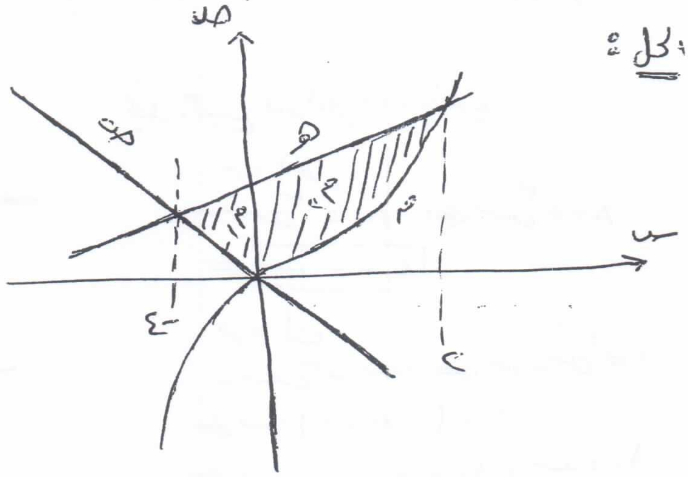
$= \int_{١}^{٤} -س^{٢} + ٤س\, دس + \int_{١}^{٤} ٥\, دس + \int_{٤}^{٥} ٥ - س^{٢} + ٤س\, دس$

$= -\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٤س^{٢}}{٢} \Big|^{٤} + ١٥ + ٥س - \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٤س^{٢}}{٢} \Big|_{٤}^{٥} = -\frac{٦٤}{٣} + ٣٢ + ١٥$

$+ \frac{٣٢}{٣} + ١٥ + \frac{٨}{٣} = \frac{٨٥}{٣}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ع}(\text{س}) = \text{س}^3$ ، $\text{ص} = \frac{-\text{س}}{2}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} + 6$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ع = ص

$$\text{س}^3 = \frac{-\text{س}}{2}$$

$\text{س} = 0$

ع = هـ $\Leftarrow \text{س}^3 = \text{س} + 6 \Leftarrow \text{س} = 2$

هـ = ص $\Leftarrow \text{س} + 6 = \frac{-\text{س}}{2} \Leftarrow \text{س} = -4$

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 \Leftarrow \text{م} = \int_{-4}^{0} (\text{س}+6) - \left(\frac{-\text{س}}{2}\right) \, د\text{س} + \int_{0}^{2} (\text{س}+6) - \text{س}^3 \, د\text{س}$$

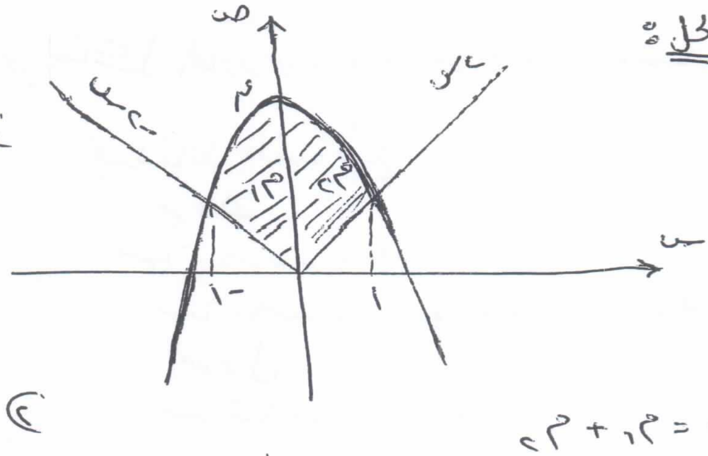
$$= \int_{-4}^{0} \frac{3}{2}\text{س} + 6 \, د\text{س} + \int_{0}^{2} \text{س} + 6 - \text{س}^3 \, د\text{س} = \frac{3}{2} \times \frac{\text{س}^2}{2} + 6\text{س} \Big|_{-4}^{0} + \frac{\text{س}^2}{2} + 6\text{س} - \frac{\text{س}^4}{4} \Big|_{0}^{2}$$

$$= (0) - (12 - 24) + (2 + 12 - 4) - (0) = 22$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ع}(\text{س}) = 3 - \text{س}^2$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = |2\text{س}|$

الحل:

نعرف $|2\text{س}|$ $\Leftarrow 2\text{س} = 0 \Leftarrow \text{س} = 0$



① $\text{س} < 0$

$$3 - \text{س}^2 = -2\text{س}$$

$$-\text{س}^2 + 2\text{س} + 3 = 0$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0$$

$$\Leftarrow (\text{س} - 3)(\text{س} + 1) = 0$$

$$\text{س} = 3 \text{ ، } \boxed{\text{س} = -1}$$

② $\text{س} > 0$

$$3 - \text{س}^2 = 2\text{س}$$

$$\Leftarrow -\text{س}^2 - 2\text{س} + 3 = 0$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 0$$

$$\Leftarrow (\text{س} + 3)(\text{س} - 1) = 0$$

$$\Leftarrow \text{س} = -3 \text{ ، } \boxed{\text{س} = 1}$$

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$$

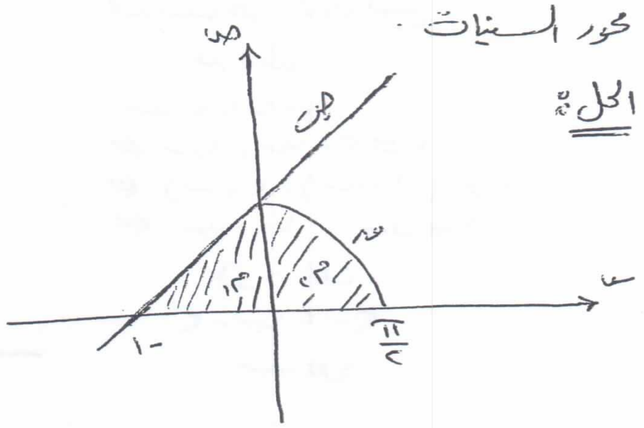
$$= \int_{-1}^{0} (3 - \text{س}^2) - (-2\text{س}) \, د\text{س} + \int_{0}^{1} (3 - \text{س}^2) - (2\text{س}) \, د\text{س}$$

$$= 3\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3} + \text{س}^2 \Big|_{-1}^{0} + 3\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3} - \text{س}^2 \Big|_{0}^{1}$$

$$= (0) - \left(-3 + \frac{1}{3} + 1\right) + \left(3 - \frac{1}{3} - 1\right) - (0) = \frac{10}{3}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} + 1$ ، والواقعة فوق محور السينات.

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$\text{ق} = \text{هـ}$

$\text{جتا}\,\text{س} = \text{س} + 1$

$\text{س} = 0$

$\text{هـ} = 0$

$\Leftarrow \text{س} + 1 = 0$

$\Leftarrow \text{س} = -1$

$\text{ق} = 0$

$\text{جتا}\,\text{س} = 0$

$\text{س} = \frac{\pi}{2}$

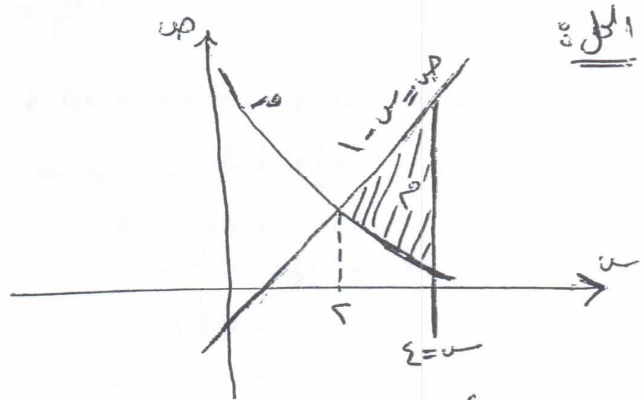
$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$

$$\Leftarrow \text{م} = \int_{-1}^{0} (\text{س} + 1)\,\text{دس} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}\,\text{س}\,\text{دس} = \left. \frac{\text{س}^2}{2} + \text{س} \right|_{-1}^{0} + \left. \text{جا}\,\text{س} \right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + (1 - 0) = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \frac{2}{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} - 1$ والمستقيم $\text{س} = 4$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$\text{ق} = \text{هـ}$

$\frac{2}{\text{س}} = \text{س} - 1$

$\text{س}^2 - \text{س} = 2 \Leftarrow \text{س}^2 - \text{س} - 2 = 0$

$\Leftarrow (\text{س} - 2)(\text{س} + 1) = 0$

$\Leftarrow \text{س} = 2$ ، $\text{س} = -1$

$$\text{م} = \int_{2}^{4} \left((\text{س} - 1) - \left(\frac{2}{\text{س}}\right) \right) \text{دس} = \left. \frac{\text{س}^2}{2} - \text{س} - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| \right|_{2}^{4}$$

$$= (8 - 4 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}4) - (2 - 2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2) = 4 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$$

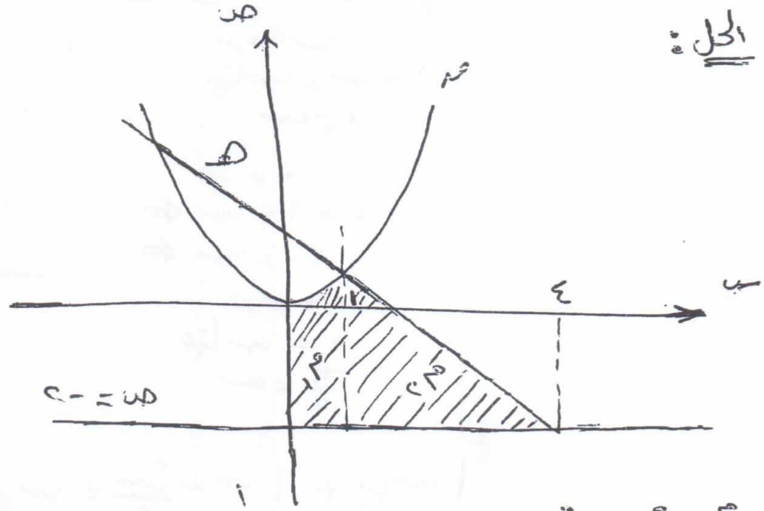
سؤال: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ص} = \text{س}^3$ والمستقيمات $\text{ص} = 1$ ، $\text{ص} = 8$ ومحور الصادات

الأستاذ عماد مسك

٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد المساحة المحصورة بين $ع(س) = س^2$ ، $هـ(س) = 2 - س$ والمحور السينات والمستقيم $ص = -2$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$ع = هـ$

$س^2 = 2 - س$

$\Leftarrow س^2 + س - 2 = 0$

$\Leftarrow (س + 2)(س - 1) = 0$

$\Leftarrow س = -2$ ، $س = 1$

$هـ = ص$

$2 - س = -2$

$س = 4$

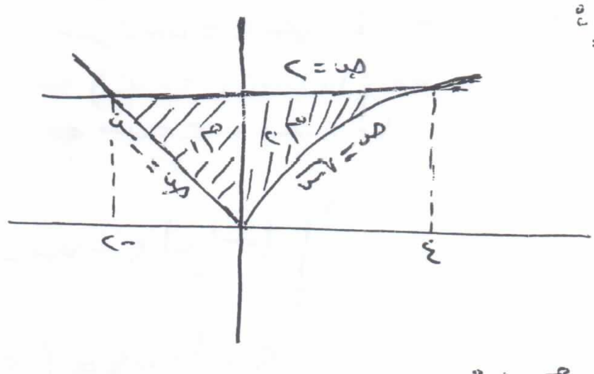
$م = م_1 + م_2 \Leftarrow م = \int_0^1 \left(س^2 - (-2)\right) ds + \int_1^4 \left((2 - س) - (-2)\right) ds$

$= \int_0^1 (س^2 + 2)\, ds + \int_1^4 (4 - س)\, ds = \left[\frac{س^3}{3} + 2س\right]_0^1 + \left[4س - \frac{س^2}{2}\right]_1^4$

$= \left(\frac{1}{3} + 2\right) - (0) + (16 - 8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 6\frac{5}{6}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $ص = \sqrt{س}$ ، $ص + س = 0$ ، $ص - 2 = 0$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$ص_1 = ص_2$

$-س = 2 \Leftarrow س = -2$

$ص_1 = ص_3$

$-س = \sqrt{س}$

$س = 0$

$ص_2 = ص_3$

$2 = \sqrt{س}$

$س = 4$

$م = م_1 + م_2$

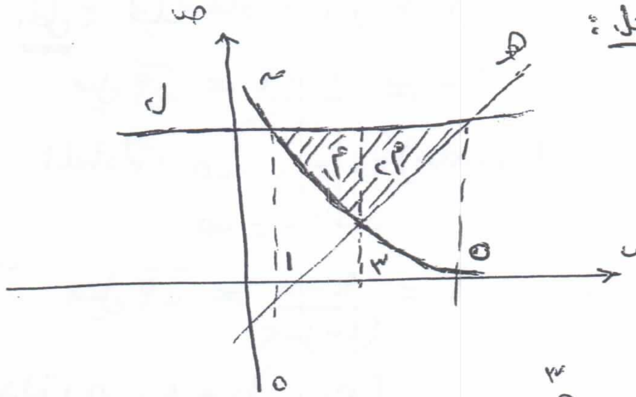
$\Leftarrow م = \int_{-2}^{0} \left(2 - (-س)\right) ds + \int_0^4 \left(2 - \sqrt{س}\right) ds$

$= \left[2س + \frac{س^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[2س - \frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4$

$= (0) - (-4 + 2) + \left(8 - \frac{16}{3}\right) - (0) = 4\frac{2}{3}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $ص(س) = \frac{3}{س}$ ، $هـ(س) = س - 2$ ، $ل(س) = 3$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ص = ل

$\frac{3}{س} = 3 \Leftarrow 3 = 3س \Leftarrow س = 1$

هـ = ل

$س - 2 = 3 \Leftarrow س = 5$

ص = هـ

$\frac{3}{س} = س - 2 \Leftarrow س^2 - 2س = 3$

$\Leftarrow س^2 - 2س - 3 = 0$

$\Leftarrow (س - 3)(س + 1) = 0$

$\Leftarrow س = 3 \quad ، \quad س = -1$

$$م = \int_1^3 (ل - ص)\, دس + \int_3^5 (ل - هـ)\, دس$$

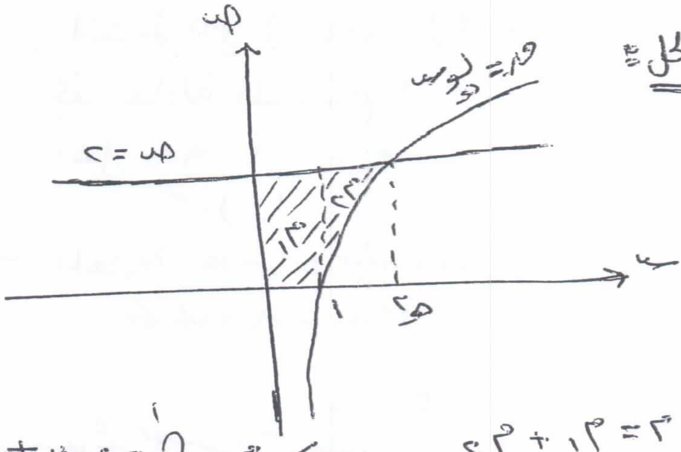
$$= \int_1^3 \left(3 - \frac{3}{س}\right) دس + \int_3^5 \left(3 - (س - 2)\right) دس$$

$$= 3س - 3\,لو_{هـ}|س| \Big|_1^3 + 5س - \frac{س^2}{2} \Big|_3^5$$

$$= (9 - 3\,لو_{هـ} 3) - (3 - 3\,لو_{هـ} 1) + \left(25 - \frac{25}{2}\right) - \left(15 - \frac{9}{2}\right) = 8 - 3\,لو_{هـ} 3$$

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين $ص(س) = لو_{هـ} س$ ومحور الصادات ومحور السينات والمستقيم $ص = 2$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$لو_{هـ} س = 0$

$س = 1$

$لو_{هـ} س = 2$

$س = هـ^2$

$$م = م_1 + م_2 \Leftarrow م = \int_0^1 2\, دس + \int_1^{هـ^2} 2 - \underbrace{لو_{هـ} س}_{ع}\ \underbrace{دس}_{دهـ}$$

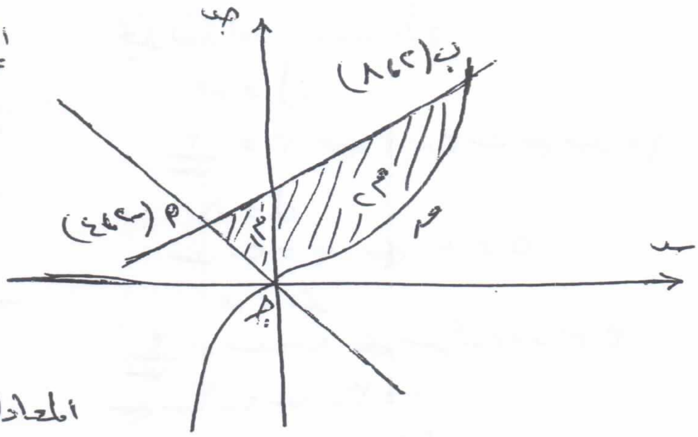
$$= 2س \Big|_0^1 + 2س \Big|_1^{هـ^2} - \left(لو_{هـ} س \times س - \int س \times \frac{1}{س}\, دس\right) \Big|_1^{هـ^2}$$

$$= (2 - 0) + (2هـ^2 - 2) - \left(س\,لو_{هـ} س - س\right) \Big|_1^{هـ^2}$$

$$= 2هـ^2 - \left((هـ^2\,لو_{هـ} هـ^2 - هـ^2) - (لو_{هـ} 1 - 1)\right)$$

$$= 2هـ^2 - (2هـ^2 - هـ^2 - 0 + 1) = هـ^2 - 1$$

مثال: معتمداً على الرسم أوجد المساحة المظللة حيث ق(س) = س^{٣}



الحل: نجد معادلة $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$

ميل $\overline{\text{م أ}}$ = $\dfrac{٤ - ٠}{-٢ - ٠} = -٢$

المعادلة: ص - ٠ = -٢(س - ٠)

ص = -٢س

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = $\dfrac{٨ - ٤}{٢ - (-٢)} = ١$

المعادلة: ص - ٨ = ١(س - ٢)

⇐ ص = س + ٦

م = م١ + م٢

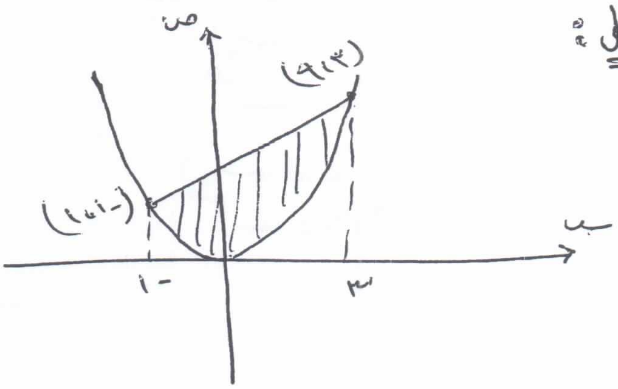
⇐ م = $\int_{-٢}^{٠} (\text{س} + ٦) - (-٢\text{س})\, د\text{س} + \int_{٠}^{٢} \text{س} + ٦ - \text{س}^{٣}\, د\text{س}$

$= \dfrac{٣\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} \Big|_{-٢}^{٠} + \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} - \dfrac{\text{س}^{٤}}{٤} \Big|_{٠}^{٢}$

$= (٠) - (٦ - ١٢) + (٢ + ١٢ - ٤) = ٦ + ١٠ = ١٦$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = س^{٢} ومستقيم الواصل بين النقطتين على منحنى ق(س) والتي احداثياتها السينية س = -١ ، س = ٣

الحل:



النقاط هي (-١،١) ، (٣،٩)

نجد معادلة المستقيم:

الميل = $\dfrac{٩ - ١}{٣ - (-١)} = ٢$

المعادلة: ص - ١ = ٢(س + ١)

⇐ ص = ٢س + ٣

م = $\int_{-١}^{٣} (٢\text{س} + ٣) - (\text{س}^{٢})\, د\text{س} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - \dfrac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big|_{-١}^{٣}$

$= (٩ + ٩ - ٩) - (١ - ٣ + \dfrac{١}{٣}) = ١٠ \dfrac{٢}{٣}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* ملاحظة ٤: اذا وجد مثل الحرف ص في المعادلات يكون التكامل بدلالة ص وذلك أسهل من التكامل بدلالة س

مثال: جد المساحة المحصورة بين ص² = ٤س ، ص = س − ٣

الحل: ص² = ٤س ⇐ س = $\frac{\text{ص}^2}{4}$ ، ص = س − ٣ ⇐ س = ص + ٣

نجد نقاط التقاطع ⇐ $\frac{\text{ص}^2}{4}$ = ص + ٣ ⇐ ص² = ٤ص + ١٢ ⇐ ص² − ٤ص − ١٢ = ٠

(ص − ٦)(ص + ٢) = صفر ⇐ $\boxed{\text{ص} = 6}$ ، $\boxed{\text{ص} = -2}$

$$\therefore \text{م} = \int_{-2}^{6} (\text{ص} + 3) - \left(\frac{\text{ص}^2}{4}\right) \text{دص} = \frac{\text{ص}^2}{2} + 3\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{12} \Big|_{-2}^{6}$$

$$= (18 + 18 - 18) - \left(2 - 6 + \frac{8}{12}\right) = 21\frac{1}{3}$$

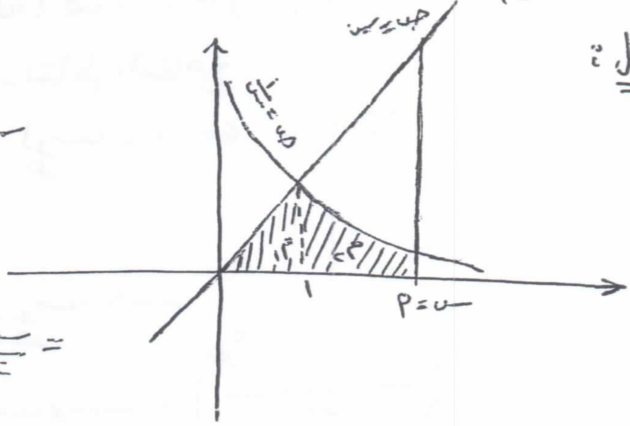
مثال: جد المساحة المحصورة بين س = ص² ، س = ٤

الحل: نجد نقاط التقاطع ⇐ ص² = ٤ ⇐ ص = ±٢

$$\Leftarrow \text{م} = \int_{-2}^{2} 4 - \text{ص}^2 \, \text{دص} = 4\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3} \Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

مثال: اذا كانت المساحة المحصورة بين محور السينات ومنحنى ص = س ومنحنى ص = $\frac{1}{\text{س}}$ والمستقيم س = م حيث م > ١ تساوي ١,٥ جد م

الحل:



نجد نقاط التقاطع

س = $\frac{1}{\text{س}}$ ⇐ س² = ١ ⇐ س = ±١

$$\text{م} = \int_{0}^{1} \text{س} \, \text{دس} + \int_{1}^{\text{م}} \frac{1}{\text{س}} \, \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{2} \Big|_{0}^{1} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| \Big|_{1}^{\text{م}}$$

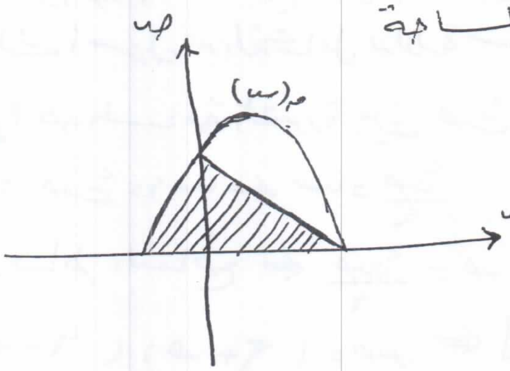
$$\Leftarrow \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{م} - \text{لو}_{\text{هـ}}1\right) = 1{,}5$$

$$\Leftarrow \frac{1}{2} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{م} = 1{,}5$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{م} = 1$$

$$\therefore \boxed{\text{م} = \text{هـ}}$$

مثال: بالاعتماد على الرسم إذا كان ق(س) = (١ + س) (جـ − س) وكانت مساحة المثلث تساوي (٨) وحدات، جد المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات.



الحل: يجب معرفة قيمة جـ: ليقطع محور السينات
عندما (١ + س) (جـ − س) = ٠ ⟸ س = −١ ، جـ
ويقطع محور الصادات عندما س = ٠،
أي أن ق(٠) = (١ + ٠) (جـ − ٠) = جـ

⟸ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × جـ × جـ = $\frac{1}{2}$ جـ² ⟸ $\frac{1}{2}$ جـ² = ٨ ⟸ جـ² = ١٦ ⟸ جـ = ٤ ، −٤

نأخذ $\boxed{\text{جـ} = 4}$ ⟸ ق(س) = (١ + س) (٤ − س) = ٤ − س + ٤س − س²

∴ ق(س) = ٤ + ٣س − س²

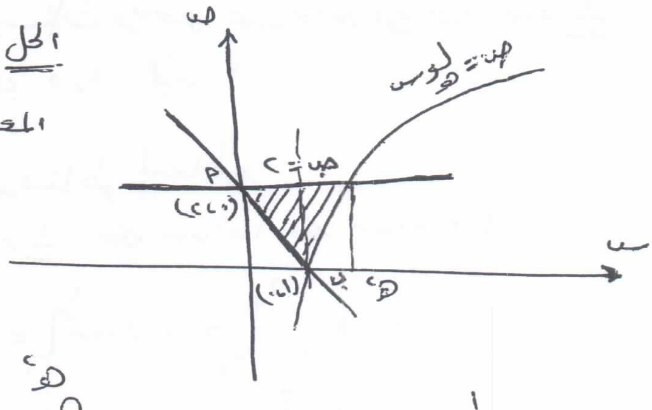
$$\Leftarrow \text{م} = \int_{-1}^{4} (4 + 3\text{س} - \text{س}^2)\,\text{ءس} = 4\text{س} + \frac{3\text{س}^2}{2} - \frac{\text{س}^3}{3}\Big|_{-1}^{4}$$

$$= \left(16 + 24 - \frac{64}{3}\right) - \left(-4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{125}{6}$$

مثال: معتمداً على الرسم المجاور جد مساحة المنطقة المظللة

الحل: نجد معادلة أب ⟸ م = $\frac{2-0}{0-1}$ = −٢

المعادلة: ص − ٠ = −٢(س − ١) ⟸ ص = −٢س + ٢



نجد نقاط التقاطع:
لوهـ س = ٢ ⟸ س = هـ²

$$\therefore \text{م} = \int_{0}^{1} 2 - (-2\text{س} + 2)\,\text{ءس} + \int_{1}^{\text{هـ}^2} 2 - \text{لوهـ س}\,\text{ءس}$$

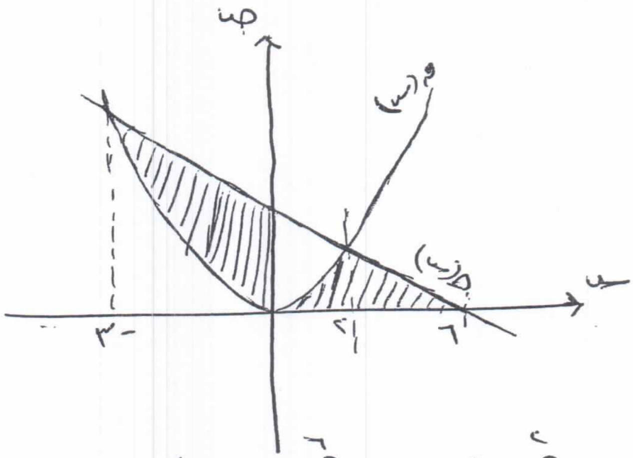
$$= \int_{0}^{1} 2\text{س}\,\text{ءس} + 2(\text{هـ}^2 - 1) - \left(\text{لوهـ س} \times \text{س} - \int_{1}^{\text{هـ}^2} \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس}\right)$$

$$= \text{س}^2\Big|_{0}^{1} + 2\text{هـ}^2 - 2 - \left(\text{س لوهـ س} - \text{س}\right)\Big|_{1}^{\text{هـ}^2}$$

$$= 1 - 0 + 2\text{هـ}^2 - 2 - \left((\text{هـ}^2 \text{لوهـ هـ}^2 - \text{هـ}^2) - (1\,\text{لوهـ}\,1 - 1)\right) = \text{هـ}^2 - 2$$

مثال: معتمداً على الشكل المجاور جد المساحة المظللة

حيث $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = 6 - س$



الحل: نجد نقاط التقاطع:

$ق = هـ$

$\Leftarrow س^2 = 6 - س \Leftarrow س^2 + س - 6 = 0$

$\Leftarrow (س + 3)(س - 2) = 0 \Leftarrow س = -3 ، 2$

$هـ = 0$

$\Leftarrow 6 - س = 0 \Leftarrow س = 6$

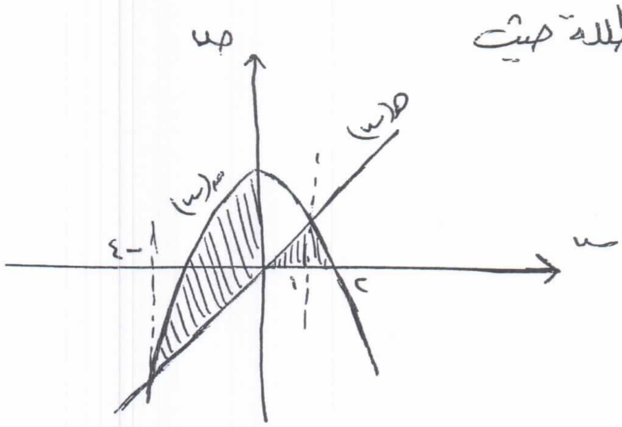
$$م = م_1 + م_2 + م_3 = \int_{-3}^{0} (6 - س) - (س^2)\, دس + \int_{0}^{2} س^2\, دس + \int_{2}^{6} (6 - س)\, دس$$

$$= 6س - \frac{س^2}{2} - \frac{س^3}{3} \Big|_{-3}^{0} + \frac{س^3}{3} \Big|_{0}^{2} + 6س - \frac{س^2}{2} \Big|_{2}^{6}$$

$$= (0) - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9\right) + \left(\frac{8}{3} - 0\right) + (36 - 18) - (12 - 2) = \frac{145}{6}$$

مثال: معتمداً على الرسم جد المساحة المظللة حيث

$ق(س) = 4 - س^2$ ، $هـ(س) = 3س$



نجد نقاط التقاطع:

$هـ = ق \Leftarrow 3س = 4 - س^2$

$\Leftarrow س^2 + 3س - 4 = 0 \Leftarrow (س + 4)(س - 1) = 0$

$\Leftarrow س = -4 ، 1$

$ق = 0$ تقطع محور السينات

$4 - س^2 = 0 \Leftarrow س = 2 ، -2$

$$م = م_1 + م_2 + م_3 = \int_{-4}^{0} (4 - س^2) - (3س)\, دس + \int_{0}^{1} 3س\, دس + \int_{1}^{2} 4 - س^2\, دس$$

$$= 4س - \frac{س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \Big|_{-4}^{0} + \frac{3س^2}{2} \Big|_{0}^{1} + 4س - \frac{س^3}{3} \Big|_{1}^{2}$$

$$= (0) - \left(-16 + \frac{64}{3} - 24\right) + \left(\frac{3}{2} - 0\right) + \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{131}{6}$$

الاستاذ عماد مسك
0795153669