الوحدة الأولى

التكامـــل

" العلمي"

المستوى الرابع

الأستاذ : عماد مسك

٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

التحـــــدّي

* الاقتران البدائي :

سنتعرف على العملية العكسية للاشتقاق وهي إذا علمت مشتقة الاقتران فكيف علينا أن نجد الاقتران الأصلي؟

وعندنا $\int (س^2 + 2)\, د س$ هو ايجاد الاقتران الذي مشتقته هي $س^2 + 2$

$د س$ تعني أن التكامل بدلالة المتغير $س$

$\int (س^2 + 3)\, د س = \frac{س^3}{3} + 3س + ج$ حيث $ج$ ثوابت التكامل

وأيضاً هذا يسمى بالاقتران البدائي حيث أن $م(س) = ه(س)$

* **تعريف** : اذا كان $ه$ اقتراناً متصلاً على مجاله فإن $م(س)$ اقتران بدائي لـ $ه(س)$ إذا كان : $م'(س) = ه(س)$

مثال: بين أن $م$ الذي قاعدته $م(س) = س^2 + 1$ اقتراناً بدائياً للاقتران $ه$ الذي قاعدته $ه(س) = 2س$

الحل: $م'(س) = 2س$ ∴ $م$ اقتران بدائي لـ $ه$

مثال: جد الاقتران البدائي للاقتران $ه(س) = جتاس$

الحل: نبحث عن الاقتران الذي مشتقته جتاس ⇐ $م(س) = جا س + ج$

مثال: جد اقتراناً بدائياً للاقتران الذي قاعدته $ه(س) = 4س^3 + قاس$

الحل: $م(س) = س^4 + ظاس + ج$

مثال: اذا كان $م(س) = س^3 - س^2 + 5س + ج$ اقتران بدائي للاقتران $ه(س)$ جد $ه(2)$.

الحل: $م'(س) = ه(س) = 3س^2 - 2س + 5$

∴ $ه(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 5$

$= 13$

سؤال: جد الاقتران البدائي للاقتران $م(س) = ٢س + ٦$

مثال: بين أن $م(س) = \sqrt{س^٢ + ٦س}$ هو اقتران بدائي للاقتران $هـ = \frac{س + ٣}{\sqrt{س^٢ + ٦س}}$

الحل: $م'(س) = \frac{٢س + ٦}{٢\sqrt{س^٢ + ٦س}} = \frac{س + ٣}{\sqrt{س^٢ + ٦س}}$

مثال: جد اقتران بدائي م للاقتران $ل(س) = \frac{-١}{س^٢}$ ، $س \neq ٠$ ، $م(٣) = ١$

الحل: $م(س) = \frac{١}{س} + ﺟ$

$م(٣) = \frac{١}{٣} + ﺟ \Leftarrow ١ = \frac{١}{٣} + ﺟ \Leftarrow ﺟ = \frac{٢}{٣}$

$\therefore م(س) = \frac{١}{س} + \frac{٢}{٣}$

* يسمى الاقتران البدائي م(س) بالتكامل غير المحدود لـ هـ(س)

$\int هـ(س)\, دس$ وهو تكامل الاقتران هـ(س) بالنسبة للمتغير س

* متطابقات هامة يجب مراعاتها:

١) $جتا^٢س + جا^٢س = ١$

٢) $ظا^٢س = قا^٢س - ١$

٣) $جا^٢س = \frac{١}{٢}(١ - جتا٢س)$

٤) $جتا^٢س = \frac{١}{٢}(١ + جتا٢س)$

٥) $جا٢س = ٢ جاس جتاس$

٦) $جتا٢س = جتا^٢س - جا^٢س$
$= ٢جتا^٢س - ١$
$= ١ - ٢جا^٢س$

٧) $جاأ جتاب = \frac{١}{٢}[جتا(أ+ب) + جتا(أ-ب)]$

٨) $جاأ جاب = \frac{١}{٢}[جتا(أ-ب) - جتا(أ+ب)]$

٩) $جتاأ جتاب = \frac{١}{٢}[جا(أ-ب) + جا(أ+ب)]$

* تجهيز الجذور إلى أبسط نسبة
* عك الأقواس في حالة الضرب
* توزيع البسط على المقام إن أمكن
* الضرب بالمرافق عند وجود $١ \pm جاس$ أو $١ \pm جتاس$
* نحاول رفع المقام إن أمكن

* قواعد التكامل غير المحدود :

① $\int p \, ds = ps + c$ حيث p ثابت

② $\int s^n \, ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} + c$

③ $\int \sin s \, ds = -\cos s + c$

④ $\int \cos s \, ds = \sin s + c$

⑤ $\int \sec^2 s \, ds = \tan s + c$

⑥ $\int \sec s \tan s \, ds = -\sec s + c$

⑦ $\int \csc^2 s \, ds = -\cot s + c$

⑧ $\int \csc s \cot s \, ds = -\csc s + c$

مثال : جد كلاً من التكاملات التالية :

① $\int s^4 \, ds = s^4 + c$

② $\int s \, ds = s + c$

③ $\int (s^3 + 2s - 8) \, ds = \frac{s^4}{4} + \frac{2s^2}{2} - 8s + c$

④ $\int y^2 \, dy = \frac{y^3}{3} + c$

⑤ $\int (s^3 + 3s^2 + 2s + 6) \, ds = \frac{s^4}{4} + \frac{3s^3}{3} + \frac{2s^2}{2} + 6s + c$

$= \frac{s^4}{4} + s^3 + s^2 + 6s + c$

الابداع
الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

⑥ $\int \frac{1}{س^{ن}}\,ds$ نقوم بتجزيئها أولاً

$\Rightarrow \int \frac{1}{س^{ن}}\,ds = \int س^{-ن}\,ds = \frac{س^{-ن+1}}{-ن+1} + جـ = \frac{-1}{(ن-1)س^{ن-1}} + جـ$

⑦ $\int \sqrt{س}\,ds = \int س^{\frac{1}{2}}\,ds = \frac{س^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + جـ = \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + جـ = \frac{2\sqrt{س^3}}{3} + جـ$

⑧ $\int (س^{2}+1)\,ds = \frac{س^{5}}{5} + س + جـ$

⑨ $\int (1+ظا^{2}س)\,ds$ نستخدم متطابقة حيث: $قا^{2}س = 1+ظا^{2}س$

$\Rightarrow \int قا^{2}س\,ds = ظاس + جـ$

⑩ $\int (\sqrt{س}+2)^{2}\,ds = \int (س+4\sqrt{س}+4)\,ds = \int (س+4س^{\frac{1}{2}}+4)\,ds$

$= \frac{س^{2}}{2} + \frac{4س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4س + جـ$

$= \frac{س^{2}}{2} + \frac{8}{3}س^{\frac{3}{2}} + 4س + جـ$

⑪ $\int \sqrt{س}\left(\sqrt{س} + \frac{8}{\sqrt{س}}\right)ds = \int س + 8\,ds = \frac{س^{2}}{2} + 8س + جـ$

⑫ $\int \frac{8س^{2}-5}{س^{2}}\,ds = \int 8 - 5س^{-2}\,ds$

$= 8س - \frac{5س^{-1}}{-1} + جـ = 8س + \frac{5}{س} + جـ$

سؤال: جد $\int \frac{س^{2}+5س^{3}-4}{س^{2}}\,ds$

$\int \frac{\sqrt{س}}{س^{2}-3س}\,ds$

* جد كلاً من التكاملات التالية ؟

① $\int \frac{ds}{5} = \int \frac{1}{5}\, ds = \frac{1}{5}s + c$

② $\int (3s^3 - 1)^2\, ds = \int 9s^6 - 6s^3 + 1\, ds$

$= \frac{9}{7}s^7 - \frac{6}{4}s^4 + s + c$

③ $\int (\frac{1}{2}s - 5)^7\, ds$ ⇐ في حالة أن يكون ما داخل القوس خطي نكامل القوس فقط ثم نقسم على معامل س

$\Leftarrow \int (\frac{1}{2}s - 5)^7\, ds = \frac{(\frac{1}{2}s - 5)^8}{\frac{1}{2} \times 8} = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}s - 5)^8 + c$

④ $\int (4s - 1)^6\, ds$ ⇐ ما داخل القوس خطي

$\Leftarrow \int (4s - 1)^6\, ds = \frac{(4s-1)^7}{4 \times 7} + c = \frac{1}{28}(4s - 1)^7 + c$

⑤ $\int \frac{s^2 - 5s + 6}{s - 3}\, ds$ ⇐ نحلل البسط $= \int \frac{(s-3)(s-2)}{s-3}\, ds$

$= \int (s - 2)\, ds = \frac{s^2}{2} - 2s + c$

⑥ $\int (2 - 3s^2 + \frac{1}{s^3})\, ds = \int (2 - 3s^2 + s^{-3})\, ds$

$= 2s - \frac{3}{3}s^3 + \frac{s^{-2}}{-2} + c$

⑦ $\int (\text{قتا}\, s\, \text{ظتا}\, s + 1)\, ds = -\text{قتا}\, s + s + c$

⑧ $\int \frac{1}{\text{جا}^2 s}\, ds = \int \text{قتا}^2 s\, ds = -\text{ظتا}\, s + c$

⑨ $\int ق^2 س \, ds = \frac{1}{3} ظا 3س + جـ$ (بجب الانتباه للزاوية)

⑩ $\int (قتا^5 س ظتا س) \, ds = -\frac{1}{5} قتا^5 س + جـ$

⑪ $\int س^2 - 3 \underbrace{ظتا^2 س}_{\text{متطابقة}} \, ds = \int س^2 - 3(قتا^2 س - 1) \, ds$

$= \int س^2 - 3 ق^2 س + 3 \, ds$

$= س^3 + ظتا س + 3س + جـ$

سؤال: جد كلاً من التكاملات التالية:

④ $\int (جا س - 3 جتا س) \, ds$

⑤ $\int (ق^2 س - \underbrace{ظا^2 س}_{\text{متطابقة}}) \, ds$

⑥ $\int (قتا س ظتا س + 2س^3 - 5) \, ds$

⑫ $\int \frac{ds}{1 + جا س}$ نضرب بالمرافق $\Leftarrow \int \frac{ds}{1 + جا س} \times \frac{1 - جا س}{1 - جا س}$

$= \int \frac{1 - جا س}{1 - جا^2 س} \, ds = \int \frac{1 - جا س}{جتا^2 س} \, ds$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س} - \frac{جا س}{جتا س جتا س} \, ds$

$= \int (ق^2 س - ظا س ق س) \, ds$

$= ظا س - ق س + جـ$

سؤال: جد $\int \sqrt{س^3} + \frac{4}{س^5} - 1 \, ds$

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int (\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س)\, د س = \int 1 \, د س = س + ج$

٢) $\int \text{قا}^2 س (\text{قا}^2 س + \text{ظا}^2 س)\, د س = \int \text{قا}^4 س + \text{قا}^2 س \text{ظا}^2 س \, د س$

$= \text{ظا} س + \text{قا} س + ج$

٣) $\int (\text{جا} س + \text{جتا} س)^2 د س = \int \text{جا}^2 س + 2 \text{جا} س \text{جتا} س + \text{جتا}^2 س \, د س$

$= \int (1 + 2 \text{جا} س \text{جتا} س)\, د س = \int (1 + \text{جا} 2س)\, د س$

$= س - \frac{1}{2} \text{جتا} 2س + ج$

٤) $\int \frac{\text{جا} س}{\text{جتا}^2 س}\, د س = \int \text{قا} س \times \text{قا}^2 س \, د س = \int \text{قا}^3 س \, د س = \text{ظا} س + ج$

٥) $\int \text{جا}(2س)\, د س = -\frac{1}{2} \text{جتا} 2س + ج$

٦) $\int \text{جتا}(2س + 1)\, د س = \frac{1}{2} \text{جا}(2س + 1) + ج$

٧) $\int \text{قا}^2 س \text{ظا}^2 س \, د س = \frac{1}{2} \text{قا}^2 س + ج$

٨) $\int \frac{\text{جا}^2 س}{\text{جا}^2 س \times \text{جتا}^2 س}\, د س = \int \frac{2 \text{جا} س \text{جتا} س}{\text{جا}^2 س \times \text{جتا}^2 س}\, د س = \int \frac{2}{\text{جا} 2س}\, د س$

$= \int 2 \text{قتا} 2س \, د س$

$= -2 \text{ظتا} 2س + ج$

٩) $\int \frac{\text{جا} س}{1 - \text{جتا} س}\, د س = \int \frac{1 - \text{جتا} س}{1 - \text{جتا}^2 س}\, د س = \int \frac{(1 - \text{جتا} س)(1 + \text{جتا} س)}{1 - \text{جتا}^2 س}\, د س$

$= \int 1 + \text{جتا} س \, د س$

$= س + \text{جا} س + ج$

(١٠) $\int \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}س \times \text{جتا}س} \, د س = \int \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{\text{جا}س \, \text{جتا}س} \, د س = \int \frac{\text{جتا}س}{\text{جا}س \, \text{جتا}س} - \frac{\text{جا}س}{\text{جا}س \, \text{جتا}س} \, د س$

$= \int \frac{1}{\text{جا}س} - \frac{1}{\text{جتا}س} \, د س = \int \text{قتا}س - \text{قا}س \, د س = - \text{ظتا}س - \text{ظا}س + ج$

(١١) $\int \frac{1 - \text{جا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س} \, د س = \int \frac{\text{جا}س + \text{جتا}س - ٢ \text{جا}س \text{جتا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س} \, د س$ نعيد ترتيب

$= \int \frac{\text{جا}س - ٢ \text{جا}س \text{جتا}س + \text{جتا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س} \, د س = \int \frac{(\text{جا}س - \text{جتا}س)(\text{جا}س - \text{جتا}س)}{\text{جا}س - \text{جتا}س} \, د س$

$= \int \text{جا}س - \text{جتا}س \, د س = - \text{جتا}س - \text{جا}س + ج$

(١٢) $\int \frac{\text{جا}^2 س - ٤}{١ - \text{جتا}س} \, د س = \int \frac{\text{جا}^2 س - ٤}{\text{جا}س} \, د س = \int \frac{\text{جا}^2 س}{\text{جا}س} - \frac{٤}{\text{جا}س} \, د س$

$= \int \text{جا}س - ٤ \, \text{قتا}س \, د س = - \text{جتا}س + ٤ \, \text{ظتا}س + ج$

(١٣) $\int \frac{٤}{١ - \text{جتا}^2 س} \, د س = \int \frac{٤}{١ - (١ - ٢ \text{جا}^2 س)} \, د س = \int \frac{٤}{٢ \text{جا}^2 س} \, د س$

$= \int \frac{١}{\text{جا}^2 س} \, د س = \int \text{قتا}^2 س \, د س = - \text{ظتا}س + ج$

* ملاحظة: عندما نجد أن ظا س أو ظتا س لوحدها في التكامل يفضل استخدام المتطابقة: ظا س = قا س - ١ ، ظتا س = قتا س - ١

مثال: جد التكاملات التالية:

(١) $\int ٥ \, \text{ظا}^2 س \, د س = \int ٥ (\text{قا}^2 س - ١) \, د س = \int ٥ \, \text{قا}^2 س - ٥ \, د س$

$= ٥ \, \text{ظا}س - ٥ س + ج$

(٢) $\int ٥ س^٤ - ٣ \, \text{ظتا}^2 س \, د س = \int ٥ س^٤ - ٣ (\text{قتا}^2 س - ١) \, د س = \int ٥ س^٤ - ٣ \, \text{قتا}^2 س + ٣ \, د س$

$= \frac{٥ س^٥}{٣} + ٣ \, \text{ظتا}س + ٣ س + ج$

③ $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^2 \, \text{د}س = \int \text{قا}^2 س + 2 \text{قاس ظاس} + \text{ظا}^2 س \, \text{د}س$

$= \int \text{قا}^2 س + 2 \text{قاس ظاس} + \text{قا}^2 س - 1 \, \text{د}س$

$= 2 \int \text{قا}^2 س + 2 \text{قاس ظاس} - 1 \, \text{د}س$

$= 2 \text{ظاس} + 2 \text{قاس} - س + \text{ج}$

④ $\int \frac{1}{1 - \text{جاس}} \, \text{د}س$ حيث المرافق $\Leftarrow \int \frac{1}{1 - \text{جاس}} \times \frac{1 + \text{جاس}}{1 + \text{جاس}} \, \text{د}س$

$= \int \frac{1 + \text{جاس}}{1 - \text{جا}^2 س} \, \text{د}س = \int \frac{1 + \text{جاس}}{\text{جتا}^2 س} \, \text{د}س = \int \frac{1}{\text{جتا}^2 س} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2 س} \, \text{د}س$

$= \int \text{قا}^2 س + \text{قاس ظاس} \, \text{د}س = \text{ظاس} + \text{قاس} + \text{ج}$

سؤال: جد: ① $\int \frac{1}{1 + \text{جاس}} \, \text{د}س$ ② $\int \frac{1}{1 - \text{جتاس}} \, \text{د}س$ ③ $\int \frac{1}{1 + \text{جتاس}} \, \text{د}س$

* ملاحظة: عند وجود $\text{جا}^2 س$ أو $\text{جتا}^2 س$ حيث ن زوجي فستخدم المتطابقات $\text{جا}^2 س = \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2س)$ ، $\text{جتا}^2 س = \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2س)$

مثال: جد التكاملات التالية:-

① $\int \text{جا}^2 س \, \text{د}س = \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2س) \, \text{د}س = \frac{1}{2}(س - \frac{1}{2} \text{جا}2س) + \text{ج}$

② $\int \text{جا}^4 س \, \text{د}س = \int \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}6س) \, \text{د}س = \frac{1}{2}(س + \frac{1}{6} \text{جا}6س) + \text{ج}$

③ $\int \text{جتا}^4 س \, \text{د}س = \int (\text{جتا}^2 س)^2 \, \text{د}س = \int (\frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2س))^2 \, \text{د}س$

$= \int \frac{1}{4}(1 + 2\text{جتا}2س + \text{جتا}^2 2س) \, \text{د}س = \frac{1}{4} \int \frac{3}{2} + 2\text{جتا}2س + \frac{1}{2}\text{جتا}4س \, \text{د}س$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}س + \text{جا}2س + \frac{1}{8}\text{جا}4س) + \text{ج}$

$= \frac{3}{8}س + \frac{1}{4}\text{جا}2س + \frac{1}{32}\text{جا}4س + \text{ج}$

٤) $\int \frac{٥}{\text{ظتا}^٢ س}\, دس = \int ٥\, \text{جا}^٢ س\, دس = \int ٥ \times \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢س)\, دس$

$= \frac{٥}{٢}(س - \frac{١}{٢}\text{جا}٢س) + ج$

* ملاحظة: في حالات وجود تكامل لحالة ضرب بين جا ، جتا نستخدم المتطابقات:

* $\text{جا}أ\,\text{جتا}ب = \frac{١}{٢}[\text{جا}(أ-ب) + \text{جا}(أ+ب)]$

* $\text{جتا}أ\,\text{جتا}ب = \frac{١}{٢}[\text{جتا}(أ-ب) + \text{جتا}(أ+ب)]$

* $\text{جا}أ\,\text{جا}ب = \frac{١}{٢}[\text{جتا}(أ-ب) - \text{جتا}(أ+ب)]$

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int \text{جا}٥س\,\text{جتا}٣س\, دس = \int \frac{١}{٢}[\text{جا}(٥س-٣س) + \text{جا}(٥س+٣س)]\, دس$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جا}٢س + \text{جا}٨س)\, دس$

$= \frac{١}{٢}(-\frac{١}{٢}\text{جتا}٢س - \frac{١}{٨}\text{جتا}٨س) + ج$

٢) $\int \text{جا}٨س\,\text{جا}٣س\, دس = \int \frac{١}{٢}[\text{جتا}(٨س-٣س) - \text{جتا}(٨س+٣س)]\, دس$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا}٥س - \text{جتا}١١س)\, دس$

$= \int \frac{١}{٢}(\frac{١}{٥}\text{جا}٥س - \frac{١}{١١}\text{جا}١١س) + ج$

٣) $\int \text{جتا}٦س\,\text{جتا}س\, دس = \int \frac{١}{٢}[\text{جتا}(٦س+س) + \text{جتا}(٦س-س)]\, دس$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا}٧س + \text{جتا}٥س)\, دس$

$= \frac{١}{٢}(\frac{١}{٧}\text{جا}٧س + \frac{١}{٥}\text{جا}٥س) + ج$

مثال: اذا كانت $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٤$ وكان $ق(س)$ يمر بالنقطة $(١، ٧)$، جد قاعدة الاقتران $ق(س)$.

الحل: $ق(س) = \int ق'(س)\,د س = \int ٣س^{٢} + ٤\,د س = س^{٣} + ٤س + جـ$

ولايجاد جـ $\Leftarrow ق(١) = ٧$

$\Leftarrow ٧ = (١)^{٣} + ٤(١) + جـ \Leftarrow ٧ = ٥ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٢}$

$\therefore ق(س) = س^{٣} + ٤س + ٢$ قاعدة الاقتران

مثال: اذا كانت $ق'(س) = ٤س^{٢} + ٦س$ فجد $ق(٢) - ق(١)$

الحل: $ق(س) = \int ق'(س)\,د س = \int ٤س^{٢} + ٦س\,د س = س^{٤} + ٣س^{٢} + جـ$

$\Leftarrow ق(٢) - ق(١) = (١٦ + ١٢ + جـ) - (١ + ٣ + جـ) = ٢٨ - ٤ = ٢٤$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ يعطى بالعلاقة $٦س^{٢} + ٨س$ وكان $ق(١) = ٣$ فجد $ق(س)$.

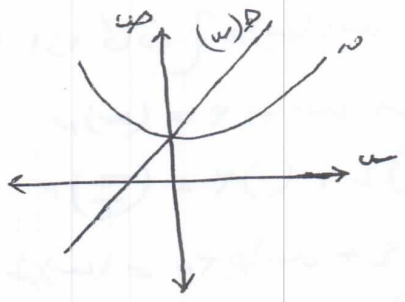
الحل: ميل المماس $= ق'(س) = ٦س^{٢} + ٨س$

$\Leftarrow ق(س) = \int ق'(س)\,د س = \int ٦س^{٢} + ٨س\,د س = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + جـ$

لكن: $ق(١) = ٣ \Leftarrow ٣ = ٢ + ٤ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٣}$

$\therefore ق(س) = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٣$

مثال: بالاعتماد على الشكل المجاور اذا كان $هـ(س) = ٣س + ٥$ وكانت $ق'(س) = ٢س + ٤$ فجد $ق(٢)$.



الحل: $ق(س) = \int ق'(س)\,د س = \int ٢س + ٤\,د س$

$= س^{٢} + ٤س + جـ$

$ق(٠) = هـ(٠) = ٥$

$\Leftarrow ٥ = ٠ + ٠ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٥}$

$\therefore ق(س) = س^{٢} + ٤س + ٥ \Leftarrow ق(٢) = ٤ + ٨ + ٥ = ١٣$

مثال: اذا كان $\int (م'(س) + ٣س^٢)\,دس = س^٤ + ٢س^٣ + ١٢$ وكان $م'(١) = ٧$

$م(١) = ٣$ فجد قيمة $م$ ② $م'(٠)$ ③ $م(٠)$

الحل: $\int (م'(س) + ٣س^٢)\,دس = س^٤ + ٢س^٣ + ١٢$ نشتق الطرفين

$\Leftarrow م'(س) + ٣س^٢ = ٤س^٣ + ٦م س^٢$ نضع $\boxed{س = ١}$

$\Leftarrow م'(١) + ٣ = ٤ + ٦م \Leftarrow ٧ + ٣ = ٤ + ٦م \Leftarrow ١٠ = ٤ + ٦م$

$\Leftarrow ٦م = ٦ \Leftarrow \boxed{م = ١}$

② $م'(س) + ٣س^٢ = ٤س^٣ + ٦س^٢ \Leftarrow م'(س) = ٤س^٣ + ٦س^٢ - ٣س^٢$

$= ٤س^٣ + ٣س^٢$

$\Leftarrow م'(ج) = ٤(ج)^٣ + ٣(ج)^٢ = ٣٢ + ١٢ = ٤٤$

③ $م(س) = \int م'(س)\,دس = \int (٤س^٣ + ٣س^٢)\,دس = س^٤ + س^٣ + ب$

لكن: $م(١) = ٣ \Leftarrow ١ + ١ + ب = ٣ \Leftarrow \boxed{ب = ١}$

$\Leftarrow م(س) = س^٤ + س^٣ + ١ \Leftarrow م(ج) = ١٦ + ٨ + ١ = ٥ج$

مثال: اذا كان $\int م(س)\,دس = ٥س^ج + جتاس + ب$ فجد $م'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: $م(ب)\,دس = ١٠س + ٢جاس جتاس$ متطابقة

$م(س)\,دس = ١٠س + جاس$

$م'(س) = ١٠ + ٢ جتا٢س$

$م'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ١٠ + ٢ جتا\frac{\pi}{٢} = ١٠ + ٠ = ١٠$

مثال: اذا كان $\int م(س)\,دس = ٣ جاس - ٤ جتاس + ب$ فجد $م\left(\frac{\pi}{٢}\right) - م'\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل: $م(س) = ٣ جتاس + ٤ جاس$

$م\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٣(٠) + ٤(١) = ٤$

$م'(س) = -٣ جاس + ٤ جتاس$

$م'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = -٣(١) + ٤(٠) = -٣$

$\Leftarrow م\left(\frac{\pi}{٢}\right) - م'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٤ - (-٣) = ٤ + ٣ = ٧$

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:-

١) $\int \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جتا}^2 س \text{ جا}^2 س} \, د س = \int \frac{\text{جتا}^2 س}{(\text{جتا} س \text{ جا} س)^2} \, د س = \int \frac{\text{جتا}^2 س}{(\frac{1}{2} \text{جا}^2 س)^2} \, د س$

$= \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\frac{1}{4} \text{جا}^4 س} \, د س = \int \frac{4 \text{ جتا}^2 س}{\text{جا}^4 س} \, د س = 4 \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} \times \frac{1}{\text{جا}^2 س} \, د س$

$= 4 \int \text{ظتا}^2 س \times \text{قتا}^2 س \, د س = -\frac{4 \text{ قتا}^3 س}{3} + د = -\frac{4}{3} \text{قتا}^3 س + د$

٢) $\int \frac{1 - \text{جتا} س}{1 + \text{جتا} س} \, د س$ نضرب بالمرافق للمقام $= \int \frac{1 - \text{جتا} س}{1 + \text{جتا} س} \times \frac{1 - \text{جتا} س}{1 - \text{جتا} س} \, د س$

$= \int \frac{(1 - \text{جتا} س)^2}{1 - \text{جتا}^2 س} \, د س = \int \frac{1 - 2 \text{جتا} س + \text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} \, د س$ توزيع البسط على المقام

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2 س} \, د س - 2 \int \frac{\text{جتا} س}{\text{جا}^2 س} \, د س + \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} \, د س$

$= \int \text{قتا}^2 س \, د س - 2 \int \text{ظتا} س \text{ قتا} س \, د س + \int \text{ظتا}^2 س \, د س$

$= -\text{ظتا} س + 2 \text{قتا} س + \int \text{قتا}^2 س - 1 \, د س$

$= -\text{ظتا} س + 2 \text{قتا} س - \text{ظتا} س - س + د$

$= -2 \text{ظتا} س + 2 \text{قتا} س - س + د$

٣) $\int \frac{1 - \text{جا} س}{\text{جا} س - \text{جتا} س} \, د س$ مرفوض بقاء $= \int \frac{\text{جا} س + \text{جتا}^2 س - \text{جا} س \text{ جتا} س}{\text{جا} س - \text{جتا} س} \, د س$ نضير الترتيب

$= \int \frac{\text{جا}^2 س - 2 \text{ جا} س \text{ جتا} س + \text{جتا}^2 س}{\text{جا} س - \text{جتا} س} \, د س = \int \frac{(\text{جا} س - \text{جتا} س)^2}{\text{جا} س - \text{جتا} س} \, د س$

$= \int \text{جا} س - \text{جتا} س \, د س = -\text{جتا} س - \text{جا} س + د$

* التكامل المحدود :

قاعدة : $\int_{أ}^{ب} جـ \, دس = جـ (ب - أ)$ حيث جـ ثابت

مثال : $\int_{-٣}^{١} ٥ \, دس = ٥ (١ + ٣) = ٢٠$ ، $\int_{٢}^{٤} ٧ \, دس = ٧ (٤ - ٢) = ١٤$

مثال : جد قيمة م إذا كان $\int_{م+٢}^{م+٤} ٨ \, دس = ٥٦$

الحل : $٨ ((م+٤)^٢ - (م+٢)^٢) = ٥٦ \Leftarrow ٨ (م^٢ + ٤م + ٣ - م^٢ - ٤م - ٤) = ٥٦$

$\Leftarrow ٨ (٢م + ١) = ٥٦ \Leftarrow ١٦م + ٨ = ٥٦ \Leftarrow ١٦م = ٤٨ \Leftarrow \boxed{م = ٣}$

مثال : إذا كان $\int_{م}^{٥} ٣م^٢ \, دس = ١٨$ فجد م

الحل : $٣م^٢ (٥ - م) = ١٨ \Leftarrow ١٥م^٢ - ٣م^٣ = ١٨$

$\Leftarrow ٣م^٣ - ١٥م^٢ + ١٨ = ٠ \Leftarrow م^٣ - ٥م^٢ + ٦ = ٠$

$\Leftarrow (م - ٣)(م - ٢) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{م = ٣}$ أو $\boxed{م = ٢}$

خاصية : $\int_{م}^{م} ق(س) \, دس =$ صفر

$\int_{م}^{ب} ق(س) \, دس = - \int_{ب}^{م} ق(س) \, دس$

مثال : $\int_{٤}^{٤} \frac{٦س}{س^٢ + ٣} \, دس =$ صفر ، $\int_{١}^{٤} \sqrt{س^٢ - ٣} \, دس =$ صفر

مثال : إذا كان $\int_{٢}^{٣} ق(س) \, دس = -١٢$ فإن $\int_{٣}^{٣} ق(س) \, دس = ١٢$

$\int_{-٢}^{٥} ق(س) \, دس = ١٣$ فإن $\int_{٥}^{-٢} ق(س) \, دس = -١٣$

مثال: اذا كان $\int_1^{جـ} (س^2 + 4س)\,دس$ = صفر فجد قيمة جـ

الحل: اوجد قيم جـ ثم (١) لذلك نبحث عن قيم أخرى إن وجدت

$$\int_1^{جـ} (س^2 + 4س)\,دس = \frac{س^3}{3} + 2س^2 \Big|_1^{جـ} = \left(\frac{جـ^3}{3} + 2جـ^2\right) - \left(\frac{1}{3} + 2\right) = \text{صفر}$$

$$= \frac{جـ^3}{3} + 2جـ^2 - \frac{7}{3} = 0 \quad \text{بالضرب في (٣)} \Leftarrow جـ^3 + 6جـ^2 - 7 = 0$$

وعند جـ = ١ فإن $1 + 6 - 7 = 7 - 7 = $ صفر

∴ نقسم على (جـ - ١) ← عامل ضمني $جـ^2 + 7جـ + 7 = 0$ نحل بالقانون العام

$$جـ = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ} = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \therefore \text{جـ هي } \left\{1 \text{ ، } \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$$

* الخاصية الخطية: $\int_أ^{ب} جـ م(س)\,دس = جـ \int_أ^{ب} م(س)\,دس$

$$\int_أ^{ب} (م \pm هـ)\,دس = \int_أ^{ب} م\,دس \pm \int_أ^{ب} هـ\,دس$$

مثال: اذا كان $\int_1^4 م(س)\,دس = 10$ ، $\int_1^4 هـ(س)\,دس = -12$ فجد ما يلي:

١) $\int_1^4 [م(س) + هـ(س)]\,دس = 10 + (-12) = -2$

٢) $\int_1^4 [3م(س) - 2هـ(س)]\,دس = 3(10) - 2(-12) = 30 + 24 = 54$

٣) $\int_1^4 (2م(س) + 2س)\,دس = 2(10) + س^2 \Big|_1^4 = 20 + (16 - 1) = 35$

٤) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2}هـ(س) - 7\right)\,دس = \frac{1}{2}(-12) - 7(4-1) = -6 - 21 = -27$

٥) $\int_1^4 \left(م(س) - \frac{1}{2}هـ(س)\right)\,دس = 4(10) - \frac{1}{2}(-12)$

$$= 40 + 6$$

$$= 46$$

مثال: اذا كان $\int_1^3 (2م(س) - 4س)\,د س = -4$ فجد $\int_1^3 (3م(س) + 1)\,د س$

الحل: $\int_1^3 2م(س)\,د س - \int_1^3 4س\,د س = -4 \Leftarrow \int_1^3 2م(س)\,د س - 2س^2 \Big|_1^3 = -4$

$\Leftarrow \int_1^3 2م(س)\,د س - [18 - 2] = -4 \Leftarrow \int_1^3 2م(س)\,د س = 16 - 4$

$\Leftarrow \int_1^3 2م(س)\,د س = -4 + 16 \Leftarrow \int_1^3 م(س)\,د س = 12 \Leftarrow \int_1^2 م(س)\,د س = 6$

$\therefore \int_1^3 (3م(س) + 1)\,د س = 3(6) + 1(3-1) = 18 + 2 = 20$

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

① $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (5 جاس + 4 جتاس)\,د س = -5 جتاس + 4 جاس \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$

$= (-5(0) + 4(1)) - (-5(1) + 4(0)) = 4 + 5 = 9$

② $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (3 + 3 ظاس)\,د س = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 3(1 + ظاس)\,د س = 3 قاس\,د س = 3 ظاس \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$

$= 3(0 - 1) = 3$

③ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + جاس}\,د س = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جاس + جتاس + 2 جاس جتاس}\,د س$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جاس + 2 جاس جتاس + جتاس}\,د س = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(جاس + جتاس)^2}\,د س$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |جاس + جتاس|\,د س$ وذلك لأن س زاوية تقع في الربع الأول

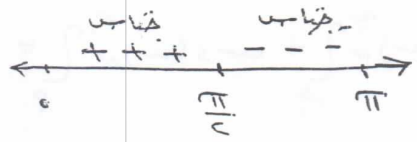
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (جاس + جتاس)\,د س$

$= جتاس - جاس \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= (0 + 1) - (-1 + 0) = 2$

④ $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\text{جتا}2س}{2}}\, د س = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+(2\text{جتا}^2 س - 1)}{2}}\, د س = \int_0^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س}\, د س$

$= \int_0^{\pi} |\text{جتا} س|\, د س$

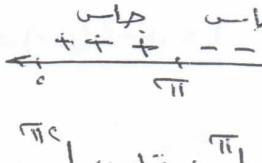


$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا} س\, د س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتا} س\, د س = \text{جا} س \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \text{جا} س \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= (1-0) - (0-1) = 1+1 = 2$

⑤ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\text{جتا}2س}{2}}\, د س = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-(1-2\text{جا}^2 س)}{2}}\, د س = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جا}^2 س}\, د س$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\text{جا} س|\, د س$



$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} س\, د س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جا} س\, د س = -\text{جتا} س \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \text{جتا} س \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= -(-1-1) + (1-(-1)) = 2+2 = 4$

مثال: اذا كانت $م = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^2 س\, د س$ ، $ن = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^2 س\, د س$ جد $م + ن$

الحل: $م + ن = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^2 س\, د س + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^2 س\, د س$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س)\, د س = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, د س = \frac{\pi}{2}$

مثال: اذا كانت $ا = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س\, د س$ ، $ب = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2 س\, د س$ جد $ا - ب$

الحل: $ا - ب = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س\, د س - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2 س\, د س = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س\, د س$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, د س = \frac{\pi}{4}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

خاصية الإضافة:

اذا كانت م قابلة للتكامل على فترة تحتوي العداد أ، ب، جـ فإن:

$$\int_{أ}^{ب} م(س)\,د س = \int_{أ}^{جـ} م(س)\,د س + \int_{جـ}^{ب} م(س)\,د س$$ وليس شرطاً أن تقع جـ بين أ، ب

مثال: اذا كان $\int_{١}^{٧} م(س)\,د س = ٣٠$ ، $\int_{١}^{٣} م(س)\,د س = ١٢$ جد $\int_{٣}^{٧} م(س)\,د س$

الحل: $\int_{٣}^{٧} م(س)\,د س = \int_{٣}^{١} م(س)\,د س + \int_{١}^{٧} م(س)\,د س = -١٢ + ٣٠ = ١٨$

$\therefore \int_{١}^{٧} م(س)\,د س = ٢ \times ١٨ = ٣٦$

مثال: اذا كان $\int_{أ}^{ب} \frac{١}{٣} م(س)\,د س = ٦$ ، $\int_{جـ}^{ب} ٤ م(س)\,د س = ٢٠$ جد $\int_{أ}^{جـ} ٣ م(س)\,د س$

الحل: $\int_{أ}^{ب} \frac{١}{٣} م(س)\,د س = ٦ \Leftarrow \int_{أ}^{ب} م(س)\,د س = ٦ \times ٣ = ١٨$

$\int_{جـ}^{ب} ٤ م(س)\,د س = ٢٠ \Leftarrow \int_{جـ}^{ب} م(س)\,د س = \frac{٢٠}{٤} = ٥$

$\Leftarrow \int_{أ}^{جـ} م(س)\,د س = \int_{أ}^{ب} م(س)\,د س + \int_{ب}^{جـ} م(س)\,د س = ١٨ + (-٥) = ١٣$

$\therefore \int_{أ}^{جـ} ٣ م(س)\,د س = ٣(١٣) = ٣٩$

ملاحظة: تستخدم خاصية الإضافة في إيجاد تكاملات الاقترانات المتشعبة

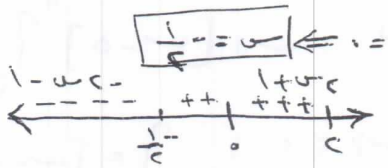
وإقترانات المطلق والصحيح.

سؤال: $م(س) = \begin{cases} س^٢ & ، ١ \le س < ٣ \\ ٣س - ١ & ، ٣ \le س < ٦ \end{cases}$ جد $\int_{١}^{٦} م(س)\,د س$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

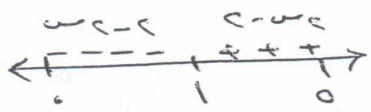
مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

① $\int_{-1}^{2} |2س+1|\, د س$ نعيد تعريف $|2س+1|$ $\Leftarrow 2س+1=0 \Leftarrow س=-\frac{1}{2}$



$\Rightarrow \int_{0}^{2} (2س+1)\, د س = س^2+س \Big|_{0}^{2} = (4+2)-0 = 6$

② $\int_{0}^{5} |2س-2|\, د س$ نعيد تعريف $|\ |$ $\Leftarrow 2س-2=0 \Leftarrow س=1$



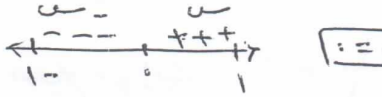
$\Rightarrow \int_{0}^{1} (-2س+2)\, د س + \int_{1}^{5} (2س-2)\, د س$

$= 2س - س^2 \Big|_{0}^{1} + س^2-2س \Big|_{1}^{5}$

$= (2-1)-(0)+(25-10)-(1-2)$

$= 1+15+1 = 17$

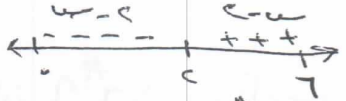
③ $\int_{-1}^{1} س^2 |س|\, د س$ $\quad س=0$



$\Rightarrow \int_{-1}^{0} س^2 \times -س\, د س + \int_{0}^{1} س^2 \times س\, د س = \int_{-1}^{0} -س^3\, د س + \int_{0}^{1} س^3\, د س$

$= -\frac{س^4}{4} \Big|_{-1}^{0} + \frac{س^4}{4} \Big|_{0}^{1} = (0-(-\frac{1}{4})) + (\frac{1}{4}-0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

④ $\int_{0}^{6} \sqrt{س^2-4س+4}\, د س = \int_{0}^{6} \sqrt{(س-2)^2}\, د س$



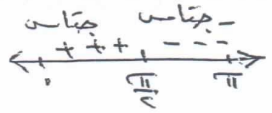
$\Rightarrow \int_{0}^{6} |س-2|\, د س$ $\quad س-2=0 \Leftarrow س=2$

$= \int_{0}^{2} (2-س)\, د س + \int_{2}^{6} (س-2)\, د س = 2س - \frac{س^2}{2} \Big|_{0}^{2} + \frac{س^2}{2} - 2س \Big|_{2}^{6}$

$= (4-2)-(0)+(18-12)-(2-4)$

$= 2+6+2 = 10$

سؤال: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |جتاس|\, د س$ $\quad س=\frac{\pi}{2}$



الإجابة (د)

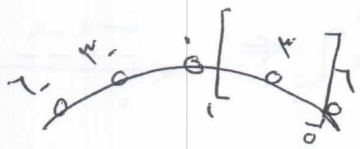
مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int_{-3}^{0} [0-س]\, دس$ نجد تعريف $[0-س]$ طول الدرجة $= \frac{1}{|-1|} = 1$

$$[0-س] = \begin{cases} 1 & ، -3 \le س < -2 \\ 0 & ، -2 \le س < 0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \int_{-3}^{0} [0-س]\, دس = \int_{-3}^{-2} 1\, دس + \int_{-2}^{0} صفر\, دس = 1(-2-(-3)) + 0 = 1$$

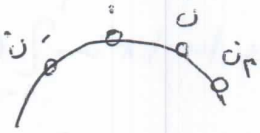
② $\int_{1}^{6} [\frac{1}{3}س + 1]\, دس$ $\quad ل = \frac{1}{|\frac{1}{3}|} = 3$



$$\Leftarrow [\frac{1}{3}س + 1] = \begin{cases} 1 & ، 0 \le س < 3 \\ 2 & ، 3 \le س < 6 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \int_{1}^{6} [\frac{1}{3}س + 1]\, دس = \int_{1}^{3} 1\, دس + \int_{3}^{6} 2\, دس = 2 + 4 = 6$$

③ $\int_{0}^{ن} [\frac{س}{ن}]\, دس$ حيث ن عدد صحيح موجب $\quad ل = \frac{1}{|\frac{1}{ن}|} = ن$

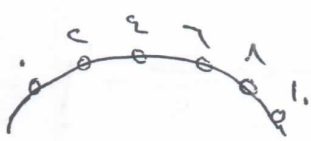


$$[\frac{س}{ن}] = \begin{cases} 0 & ، 0 \le س < ن \\ 1 & ، ن \le س < 2ن \end{cases} \Leftarrow \int_{0}^{ن} [\frac{س}{ن}]\, دس = \int_{ن}^{2ن} 0\, دس + \int_{ن}^{2ن} 1\, دس$$

$$= 0 + 1(2ن - ن) = ن$$

مثال: اذا كان $\int_{1}^{ب} [\frac{1}{2}س + 1]\, دس = 17$ فجد قيمة ب حيث ب > 1

الحل: $ل = 2$



$$[\frac{1}{2}س + 1] = \begin{cases} 1 & ، 0 \le س < 2 \\ 2 & ، 2 \le س < 4 \\ 3 & ، 4 \le س < 6 \\ 4 & ، 6 \le س < 8 \\ 5 & ، 8 \le س < 10 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{2} 1\, دس + \int_{2}^{4} 2\, دس + \int_{4}^{6} 3\, دس + \int_{6}^{ب} 4\, دس = 17$$

$$\Leftarrow 1 + 4 + 6 + 4(ب - 6) = 17 \Leftarrow 11 + 4ب - 24 = 17 \Leftarrow 4ب = 30$$

$$\Leftarrow ب = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

* خاصية المقارنة:

إذا كان م ، هـ قابلين للتكامل على [أ، ب] وكان م(س) ≥ هـ(س) في [أ، ب]

فإن: $\int_{أ}^{ب} م(س)\,دس \geq \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس$ ونعرف نتيجة:

① اذا كان م(س) ≥ ٠ في [أ، ب] فإن $\int_{أ}^{ب} م(س)\,دس \geq$ صفر

② اذا كان م(س) ≤ ٠ في [أ، ب] فإن $\int_{أ}^{ب} م(س)\,دس \leq$ صفر

هذا يعني أن تكامل الاقتران الموجب يكون موجباً والاقتران السالب سالباً

مثال: دون أن تجد التكامل ماذا تشاهد:

① $\int_{٢}^{٤} \frac{٣-س^{٢}}{٦س^{٣}+١}\,دس$ ② $\int_{-٤}^{-١} \sqrt{س^{٤}+٥}\,دس$

الحل: ① $\frac{٣-س^{٢}}{٦س^{٣}+١} < ٠ \Rightarrow \int_{٢}^{٤} \frac{٣-س^{٢}}{٦س^{٣}+١}\,دس <$ صفر

② $\sqrt{س^{٤}+٥} > ٠$ في $[-٤، -١] \Rightarrow \int_{-٤}^{-١} \sqrt{س^{٤}+٥}\,دس >$ صفر

مثال: بين أن $\int_{١}^{٣} جا^{٤}\frac{\pi}{س}\,دس \leq \int_{١}^{٣} \sqrt{س^{٤}+١}\,دس$

الحل: بما أن $جا^{٤}\frac{\pi}{س} \leq \sqrt{س^{٤}+١}$ في $[١، ٣]$

$\therefore \int_{١}^{٣} جا^{٤}\frac{\pi}{س}\,دس \leq \int_{١}^{٣} \sqrt{س^{٤}+١}\,دس$

مثال: اذا كان م(س) ≤ ٨ في [١، ٦] فجد أصغر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{١}^{٦} م(س)\,دس$

الحل: م(س) ≤ ٨ في [١، ٦] $\Rightarrow \int_{١}^{٦} م(س)\,دس \leq \int_{١}^{٦} ٨\,دس$

≤ ٤٠

$\therefore$ أصغر قيمة هي ٤٠

مثال: اذا كان $م(س) \leq ٧$ لا $\forall س \in [١، ٥]$ فجد أكبر قيمة ممكنة للمقدار

$\int_{١}^{٥} (٣ م(س) + ٤) \, دس$

الحل: $م(س) \leq ٧$ بالضرب في ٣ $\Rightarrow ٣ م(س) \leq ٢١$ بجمع ٤

$\Rightarrow ٣ م(س) + ٤ \leq ٢٥$ نأخذ التكامل

$\Rightarrow \int_{١}^{٥} (٣ م(س) + ٤) \, دس \leq \int_{١}^{٥} ٢٥ \, دس$

≤ ١٠٠ $\therefore$ أكبر قيمة هي ١٠٠

مثال: اذا كان $-٢ \leq م(س) \leq ٦$ في $[١، ٦]$ وكان $م \leq \int_{١}^{٦} م(س) \, دس \leq ن$ فجد م، ن

الحل: $-٢ \leq م(س) \leq ٦$ نأخذ التكامل في $\int_{١}^{٦}$

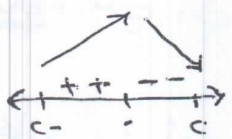
$\Rightarrow \int_{١}^{٦} -٢ \, دس \leq \int_{١}^{٦} م(س) \, دس \leq \int_{١}^{٦} ٦ \, دس \Rightarrow -١٠ \leq \int_{١}^{٦} م(س) \, دس \leq ٣٠$

$\Rightarrow م = -١٠ \; ، \; ن = ٣٠$

مثال: $م(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ بين أن $\int_{-٢}^{٢} م(س) \, دس$ يأخذ أصغر قيمة ممكنة

الحل: نجد القيم الصغرى والعظمى للاقتران $م(س)$

$م'(س) = \frac{-٢س}{\sqrt{٤ - س^٢}} \Rightarrow م'(س) = ٠ \Rightarrow -٢س = ٠ \Rightarrow \boxed{س = ٠}$



$م'$ غير موجودة عند $س = -٢ ، ٢$ أطراف فترة

$م(٠) = \sqrt{٤ - ٠} = ٢$ عظمى $(٢، ٠)$ نقطة عظمى

$م(-٢) = ٠$
$م(٢) = ٠$ القيمة الصغرى هي صفر

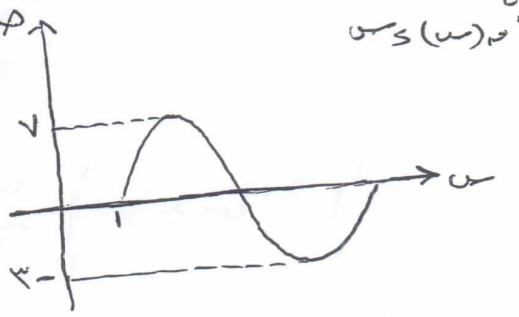
$\Rightarrow ٠ \leq م(س) \leq ٢$ في $[-٢، ٢]$

$\therefore \int_{-٢}^{٢} صفر \, دس \leq \int_{-٢}^{٢} م(س) \, دس \leq \int_{-٢}^{٢} ٢ \, دس$

$صفر \leq \int_{-٢}^{٢} م(س) \, دس \leq ٨$

"الإرادة تصنع التفوق"

مثال: بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل $م(س)$، جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار $\int_{1}^{5} م(س)\,د س$



الحل: أكبر قيمة للاقتران هي ٧ ⇐ أكبر قيمة للتكامل $\int_{1}^{5} ٧\,د س = ٨$

أصغر قيمة للاقتران هي -٣ ⇐ أصغر قيمة $= \int_{1}^{5} -٣\,د س = -١٢$

سؤال: اذا كان $\int_{١}^{P} (٢س + ٧)\,د س = ٥$ حيث P ——— الاجابة $P = -١٢ ، ٥$

مثال: $م(س) = \begin{cases} س & ، \ ٠ < س \leq P \\ P \times \frac{(١-س)}{P-١} & ، \ P < س \leq ١ \end{cases}$ حيث $٠ < P < ١$ جد $\int_{١}^{١} م(س)\,د س$

الحل: $\int_{١}^{١} م(س)\,د س = \int_{P}^{١} \frac{(١-س)}{P-١} \times P\,د س + \int_{٠}^{P} س\,د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} \Big|_{P}^{١} + \frac{P}{P-١} \left(س - \frac{س^{٢}}{٢}\right) \Big|_{P}^{١} = \left(\frac{P^{٢}}{٢} - ٠\right) + \frac{P}{P-١} \times \left(١ - \frac{١}{٢}\right) - \left(P - \frac{P^{٢}}{٢}\right)$

$= \frac{P^{٢}}{٢} + \frac{P}{P-١} \left(١ - P + \frac{P^{٢}}{٢}\right) = \frac{P^{٢}}{٢} + \frac{P}{P-١} \times \frac{١}{٢} \left(P^{٢} - ٢P + ٢\right)$

$= \frac{P^{٢}}{٢} + \frac{P}{\cancel{P-١}} \times \frac{١}{٢} \times \cancel{(P-١)}(P-١) = \frac{P^{٢}}{٢} - \frac{P}{٢} (P-١)$

$= \frac{P^{٢}}{٢} - \frac{P^{٢}}{٢} + \frac{P}{٢} = \frac{P}{٢}$

مثال: بين أن $\int_{١}^{١} س^{ن} \,د س + \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{ن}} \,د س = ١$

الحل: $\int_{١}^{١} س^{ن} \,د س + \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{ن}} \,د س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} \Big|_{١}^{١} + \frac{س^{\frac{١}{ن}+١}}{\frac{١}{ن}+١} \Big|_{٠}^{١}$

$= \left(\frac{١}{ن+١} - ٠\right) + \left(١ - \frac{١}{\frac{١}{ن}+١}\right) = \frac{١}{ن+١} + \frac{١}{\frac{ن+١}{ن}}$

$= \frac{١}{ن+١} + \frac{ن}{ن+١} = \frac{١+ن}{ن+١} = ١$

مثال: اذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً أثبت أن:

$$\int_{-1}^{1} س^{ن} \, د س = \begin{cases} 1 & ن \text{ زوجية} \\ صفر & ن \text{ فردية} \end{cases}$$

الحل:

$$\int_{-1}^{1} س^{ن} \, د س = \frac{1}{ن+1} \times س^{ن+1} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{ن+1} س^{ن+1} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{ن+1} (1)^{ن+1} - (-1)^{ن+1} = \begin{cases} \frac{1}{ن+1}(1-(-1)) = \frac{1}{ن+1} \times 2 = 1 & \text{حيث ن زوجية} \\ \frac{1}{ن+1}(1-1) = \frac{1}{ن+1} \times صفر = صفر & \text{حيث ن فردية} \end{cases}$$

مثال: اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانان بدائيان للاقترانين م(س) ، هـ(س) على الترتيب وكان $\int_{1}^{7} م(س) - هـ(س) \, د س = 28$

جد $\int_{1}^{5} (م(س) - هـ(س)) \, د س$

الحل: م(س) - هـ(س) = أ ثابت

$$\therefore \int_{1}^{7} م(س) - هـ(س) \, د س = \int_{1}^{7} أ \, د س = 28 \Leftarrow 6أ = 28 \Leftarrow \boxed{أ = 4}$$

$$\Leftarrow \int_{1}^{5} (م(س) - هـ(س)) \, د س = \int_{1}^{5} 4 \, د س = 4س \Big|_{1}^{5} = 20 - 4 = 16$$

مثال: أوجد كثير حدود من الدرجة الأولى م(س) حيث $\int_{1}^{3} م(س) \, د س = 6$ ، م(1) = 5

الحل: نفرض م(س) = أس + ب

$$\int_{1}^{3} (أس + ب) \, د س = \frac{أ س^2}{2} + ب س \Big|_{1}^{3} = (\frac{9}{2}أ + 3ب) - (\frac{1}{2}أ + ب)$$

$$= \boxed{4أ + ب = 6}$$

$$م(1) = \boxed{أ + ب = 5}$$

وبالطرح $\Leftarrow \frac{3}{2}أ = 1 \Leftarrow \boxed{أ = 2}$

بالتعويض $\Leftarrow 2 + ب = 5 \Leftarrow \boxed{ب = 3}$

$\therefore$ م(س) = 2س + 3

مثال: إذا كان $م(س) = \int_{1}^{س} (ن^2 + 7ن)\, د ن$ فجد $م'(2)$ فيما يلي:

أ) $م(س) = \int_{1}^{س^3} (ن^2 + 7ن)\, د ن$

$م'(س) =$ صفر لأنه تكامل محدود

$م'(2) =$ صفر

ب) $م(س) = \int_{س}^{2} (ن^2 + 7ن)\, د ن$

$م'(س) = س^2 + 7س$

$م'(2) = 4 + 14 = 18$

ج) $م(س) = \int_{1}^{س^2} (3ن^2 + \int_{1}^{ن^3} 2ن\, د ن)\, د ن$

الحل: $\int_{1}^{ن^3} 2ن\, د ن = ن^2 \Big|_{1}^{ن^3} = 9 - 1 = 8$

$م(س) = \int_{1}^{س^2} (3ن^2 + 8)\, د ن$

$م'(س) = 3س^2 + 8 \Rightarrow م'(2) = 12 + 8 = 20$

د) $\int م(س)\, د س = س^3 + س^2 + 6$

$م(س) = 3س^2 + 2س$

$م'(س) = 6س + 2 \Rightarrow م'(2) = 6(2) + 2 = 14$

الأستاذ: عادل سماك
0795153669

* المعادلات التفاضلية:

هي معادلة تحتوي على مشتقات وحلها يعني ايجاد علاقة تربط بين المتغير ص والمتغير س ويتم ذلك بفصل المتغير س مع تفاضله (دس) عن المتغير ص مع تفاضله (دص) فنصبح: $\int هـ(ص)\,دص = \int ل(س)\,دس$ ثم

مثال: حل المعادلة $\frac{دص}{دس} = \frac{٤س + ٥}{٣ص^{٢}}$ علماً بأن ص = ٣ عندما س = ٢

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{٤س + ٥}{٣ص^{٢}} \Leftarrow ٣ص^{٢}\,دص = (٤س + ٥)\,دس$

$\Leftarrow \int ٣ص^{٢}\,دص = \int (٤س + ٥)\,دس \Leftarrow ص^{٣} = س^{٢} + ٥س + ٨$

ص = ٣ عند س = ٢ $\Leftarrow (٣)^{٣} = (٢)^{٢} + ٥(٢) + ٨$

$\Leftarrow ٢٧ = ١٨ + ب \Leftarrow \boxed{ب = ١٣}$ $\therefore ص^{٣} = س^{٢} + ٥س + ١٣$

$\Leftarrow ص = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٥س + ١٣}$

مثال: حل المعادلة $\frac{دص}{دس} = \sqrt{س ص}$ حيث س > ٠ ، ص > ٠

الحل: $دص = س^{\frac{١}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}}\,دس$ بالقسمة على $ص^{\frac{١}{٢}}$

$\Leftarrow \frac{دص}{ص^{\frac{١}{٢}}} = س^{\frac{١}{٢}}\,دس \Leftarrow ص^{\frac{-١}{٢}}\,دص = س^{\frac{١}{٢}}\,دس$

$\Leftarrow \int ص^{\frac{-١}{٢}}\,دص = \int س^{\frac{١}{٢}}\,دس \Leftarrow \frac{٢ص^{\frac{١}{٢}}}{١} = \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ب$

سؤال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\frac{دص}{ص^{٢}} = \frac{دس}{س^{٣}}$ ——— الاجابة: $\frac{-١}{ص} = \frac{-١}{٢س^{٢}} + ب$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $س^2 \frac{دص}{دس} - ص^2 دص = جا ص دص + 8 ص دس$

الحل: $-ص^2 دص - جا ص دص = 8 س دص - س^2 دس$

$\Leftarrow (-ص^2 - جا ص) دص = (8س - س^2) دس$

$\Leftarrow \int (-ص^2 - جا ص) دص = \int (8س - س^2) دس$

$\Leftarrow -\frac{ص^3}{3} + جتا ص = 4 س^2 - \frac{س^3}{3} + ث$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = جتا^2 ص \, جا 3س$

الحل: $دص = جتا^2 ص \, جا 3س \, دس$ نقسم على $جتا^2 ص$

$\frac{دص}{جتا^2 ص} = جا 3س \, دس \Leftarrow قا^2 ص \, دص = جا 3س \, دس$

$\Leftarrow \int قا^2 ص \, دص = \int جا 3س \, دس \Leftarrow ظا ص = -\frac{1}{3} جتا 3س + ث$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $3 \frac{دص}{دس} - ص^3 دص = 3 جتا^2 س \, دص$

الحل: $3 دص - 3 جتا^2 س \, دص = ص^3 دس$

$\Leftarrow (3 - 3 جتا^2 س) دص = ص^3 دس \Leftarrow \frac{دص}{ص^3} = \frac{دس}{3 - 3 جتا^2 س}$

$ص^{-3} دص = \frac{دس}{3(1 - جتا^2 س)} \Leftarrow ص^{-3} دص = \frac{دص}{3 جا^2 س}$

$ص^{-3} دص = \frac{1}{3} قتا^2 س \, دس \Leftarrow \int ص^{-3} دص = \int \frac{1}{3} قتا^2 س \, دس$

$\Leftarrow \frac{ص^{-2}}{-2} = -\frac{1}{3} ظتا س + ث$

$\Leftarrow -\frac{1}{2ص^2} = -\frac{1}{3} ظتا س + ث$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى م(س) عند أي نقطة هو $٥س^{٤}+٦س$ وكان م(١) = ٣ فجد م(س).

الحل: $م'(س) = ٥س^{٤}+٦س \Leftarrow م(س) = \int (٥س^{٤}+٦س)\, د س$

$\Leftarrow م(س) = س^{٥}+٣س^{٢}+ب$ لكن: $م(١) = ١+٣+ب$ $\Leftarrow \boxed{ب = ٣}$

$\therefore م(س) = س^{٥}+٣س^{٢}+٣$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة (س، ص) هو $\frac{٤س^{٣}+٢س}{ص}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (١، ٣) جد معادلة هذا المنحنى.

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س^{٣}+٢س}{ص} \Leftarrow ص\, د ص = (٤س^{٣}+٢س)\, د س$

$\Leftarrow \int ص\, د ص = \int (٤س^{٣}+٢س)\, د س \Leftarrow ص^{٢} = س^{٤}+س^{٢}+ب$

يمر بالنقطة (١، ٣) $\Leftarrow ٩ = ١+١+ب \Leftarrow \boxed{ب = ٧}$

$\therefore ص^{٢} = س^{٤}+س^{٢}+٧$

مثال: اذا كانت النقطة (١، ٧) نقطة حرجة لمنحنى الدالة م(س) وكانت $م'(س) = ١٢س-١٠$ فجد م(س)

الحل: $م'(س) = \int م''(س)\, د س \Leftarrow م'(س) = \int (١٢س-١٠)\, د س = ٦س^{٢}-١٠س+ب$

لكن: (١، ٧) نقطة حرجة $\Leftarrow م'(١) =$ صفر

$\Leftarrow$ صفر $= ٦-١٠+ب \Leftarrow \boxed{ب = ٤}$

$\Leftarrow م'(س) = ٦س^{٢}-١٠س+٤ \Leftarrow م(س) = \int م'(س)\, د س$

$\Leftarrow م(س) = \int (٦س^{٢}-١٠س+٤)\, د س = ٢س^{٣}-٥س^{٢}+٤س+ب$

لكن: م تمر بـ (١، ٧) $\Leftarrow م(١) = ٧ \Leftarrow ٧ = ٢-٥+٤+ب$

$\Leftarrow ب = ٧-١ = ٦$ $\boxed{ب = ٦}$

$\therefore م(س) = ٢س^{٣}-٥س^{٢}+٤س+٦$

مثال: اذا كان تسارع جسم ما ع = ٦ن + ٦ فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ثانيتين علما بأن السرعة الابتدائية هي ٣ م/ث والجسم قطع مسافة ١٥ م بعد ١ث .

الحل: ت = ٦ن + ٦ ⇐ ع = ٦ن + ٦ن = ٣ن^٢ + ٦ن + أ

لكن: ع(٠) = ٣ ⇐ ٣ = ٠ + ٠ + أ ⇐ أ = ٣

∴ ع = ٣ن^٢ + ٦ن + ٣

ف = ن^٣ + ٣ن^٢ + ٣ن + ب = ن^٣ + ٣ن^٢ + ٣ن + ب

لكن: ف(١) = ١٥ ⇐ ١ + ٣ + ٣ + ب = ١٥ ⇐ ٧ + ب = ١٥ ⇐ ب = ٨

∴ ف = ن^٣ + ٣ن^٢ + ٣ن + ٨ ⇐ ف(٢) = ٨ + ١٢ + ٦ + ٨ = ٣٤

مثال: قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٥٠ م/ث بتسارع مقداره -١٠ م/ث^٢ وكان ارتفاع الجسم عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة يساوي ٧٠ م . فجد معادلة الحركة

الحل: ت = -١٠ ⇐ ع = -١٠ن + أ

لكن: ع(٠) = ٥٠ ⇐ ٠ + أ = ٥٠ ⇐ أ = ٥٠

∴ ع = -١٠ن + ٥٠

ف = -٥ن^٢ + ٥٠ن + ب

لكن: ف(١) = ٧٠ ⇐ -٥ + ٥٠ + ب = ٧٠ ⇐ ب = ٢٥

∴ ف = -٥ن^٢ + ٥٠ن + ٢٥

سؤال: جد حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{ص د}{س د}$ - س^٢ = ٥ حيث س = ٢

عندما ص = -١

-- المعادلة: ص = س^٣ - ٥س + ٥

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩