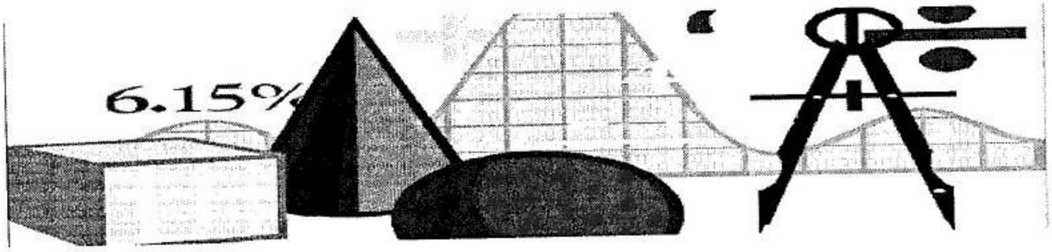
بسم الله الرحمن الرحيم

الأدهم في الرياضيات



التكامل وتطبيقاته

2016

المستوى : الرابع

للفرع : (الأدبي . الصناعي)

إعداد الأستاذ : جهاد الكساسبه 0779002042

اللهم اجعلني خيرا مما يظنون واغفر لي مالا يعلمون

بسم الله الرحمن الرحيم

* تذكير ببعض القوانين والمشتقات :-

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}$ ، حيث أ ثابت $\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}\,\text{س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س}$.

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -\text{جا}\,\text{س}$.

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}\,\text{س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}^2\text{س}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

هـ

$$\boxed{\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} = 1 + \frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$$

* بعض قوانين الأسس

① $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{(\text{م}+\text{ن})}$

② $\frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{(\text{م}-\text{ن})}$

③ $\text{أ}^{0} = 1$

④ $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}} = \text{أ}^{\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)}$

⑤ $\text{أ}^{-\text{م}} = \frac{1}{\text{أ}^{\text{م}}}$

* تذكير

$$\boxed{\text{قا}^2\text{س} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}}$$

$$\boxed{\text{ظا}\,\text{س} = \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{جتا}\,\text{س}}}$$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* $\frac{\cancel{(\text{أ}-\text{ب})}}{\cancel{(\text{أ}-\text{ب})}} = 1$

* $\frac{\cancel{(\text{ب}-\text{أ})}}{\cancel{(\text{أ}-\text{ب})}} = -1$

* $(\text{أ}-\text{ب})^2 = \text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{ب} + \text{ب}^2$

* $(\text{أ}+\text{ب})^2 = \text{أ}^2 + 2\text{أ}\text{ب} + \text{ب}^2$

* $\text{أ}^3 - \text{ب}^3 = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}^2 + \text{أ}\text{ب} + \text{ب}^2)$

* $\text{أ}^3 + \text{ب}^3 = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}^2 - \text{أ}\text{ب} + \text{ب}^2)$

$(\text{أ}-\text{ب})^3 = \text{أ}^3 - \text{ب}^3 - 3\text{أ}^2\text{ب} + 3\text{أ}\text{ب}^2$

$(\text{أ}+\text{ب})^3 = \text{أ}^3 + \text{ب}^3 + 3\text{أ}^2\text{ب} + 3\text{أ}\text{ب}^2$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* الدرس الاول : التكامل غير المحدود وقواعده

* مفهوم التكامل : هو ايجاد قاعدة الاقتران ق(س) ، اذا علمت المشتقة الاولى قَ(س)

فمثلاً :-

* تكامل ($٤س^{٢} + ٣س^{٤}$) ، يعني ايجاد قاعدة الاقتران ق(س) الذي مشتقته تساوي ($٤س^{٢} + ٣س^{٤}$) ونكتب على النحو التالي :-

$\int ٤س^{٢} + ٣س^{٤} \ دس$ ، حيث $\int$ ⇐ رمز التكامل

دس ⇐ تعني أن التكامل بالنسبة لـ س .

* هناك عدد لا نهائي من الاقترانات التي مشتقتها ($٤س^{٢} + ٣س^{٤}$) ومنها :-

$ق(س) = س^{٤} + س^{٢} + ٦$

$ق(س) = س^{٤} + س^{٢} - ٣$

$ق(س) = س^{٤} + س^{٢} - \frac{١}{٢}$

$ق(س) = س^{٤} + س^{٢} - \sqrt{٣}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* نلاحظ أن جميع الاقترانات السابقة مشتقتها الاولى $قَ(س) = ٤س^{٢} + ٣س^{٤}$
* نلاحظ ايضاً أن جميع الاقترانات السابقة مختلفة فقط بقيم الثوابت $\{٦ ، -٣ ، -\frac{١}{٢} ، -\sqrt{٣}\}$ ويسمى هذا الثابت ثابت التكامل ويرمز له بالرمز جـ

* الصورة العامة للتكامل غير المحدود هي :-

$$\boxed{\int قَ(س) \ دس = ق(س) + جـ}$$ ، حيث

(جـ) ثابت التكامل غير المحدود يضاف فقط في الجواب النهائي في حالة أن يكون التكامل غير محدود .

(فائدة) مشتقة التكامل غير المحدود هي ما داخل التكامل وهذا يعني

أنّ $\frac{د}{دس} \int ق(س)\, دس = ق(س)$.

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال أوجد $\frac{د}{دس}$ لكل مما يلي :

① $\int (٢س + ٣)\, دس$

② $\int (\frac{٢}{س} + ١)\, دس$

③ $\int هـ^{س}\, دس$

④ $\int (ظاس + ٣)\, دس$

⑤ $\int دس$

فلاحظ عند أخذ المشتقة الأولى للتكامل غير المحدود فإن تأثير التكامل ينتهي

الحل :

① $\frac{د}{دس} \int (٢س + ٣)\, دس = ٢س + ٣$

② $\frac{د}{دس} \int (\frac{٢}{س} + ١)\, دس = \frac{٢}{س} + ١$

③ $\frac{د}{دس} \int هـ^{س}\, دس = هـ^{س}$

④ $\frac{د}{دس} \int (ظاس + ٣)\, دس = ظاس + ٣$

⑤ $\frac{د}{دس} \int دس = ١$

مثال إذا كان $ق(س) = \int (٢س^{٣} - ٣)\, دس$ ، أوجد $قَ(٢)$

الحل : باشتقاق الطرفين

$\Leftarrow قَ(س) = ٢س^{٣} - ٣$

$\Leftarrow قَ(٢) = ١٦ - ٣$

$= ١٣$

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال إذا كان $\int$ ق(س) دس = ٤ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٢

أوجد قَ(١)

الحل: باشتقاق الطرفين

$\Leftarrow$ $\frac{د}{دس}$ $\int$ ق(س) دس = $\frac{د}{دس}$ (٤ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٢)

$\Leftarrow$ ق(س) = ١٢ س^{٢} - ١٢ س

$\Leftarrow$ ق(١) = ١٢ - ١٢ = صفر

مثال إذا كان $\int$ قَ(س) دس = جاس + هـ^{س} + ٢

أوجد قَ(س).

الحل: باشتقاق الطرفين.

$\frac{د}{دس}$ $\int$ قَ(س) دس = $\frac{د}{دس}$ (جاس + هـ^{س} + ٢)

$\Leftarrow$ قَ(س) = جتاس + هـ^{س}

مثال إذا كان ص = $\int$ ((١ - جا ٥س + قا(٥س - ١)) دس

أوجد $\frac{دص}{دس}$.

الحل: باشتقاق الطرفين

$\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = ((١ - جا ٥س) + قا(٥س - ١))

مثال إذا كان $\int$ ق(س) دس = س$^{\frac{2}{3}}$ + جـ

حيث جـ عدد ثابت أوجد ق(س).

الحل : باشتقاق الطرفين

$\frac{د}{دس}$ $\int$ ق(س) دس = $\frac{د}{دس}$ (س$^{\frac{2}{3}}$ + جـ)

⇐ ق(س) = $\frac{2}{3}$ س$^{-\frac{1}{3}}$

= $\frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

مثال إذا كان $\int$ (ق(س) + س^2 + جا س) دس = هـ^س + لو$_{هـ}$ س

أوجد ق(س).

الحل: باشتقاق الطرفين

⇐ ق(س) + س^2 + جا س = هـ^س + $\frac{1}{س}$

⇐ ق(س) = هـ^س + $\frac{1}{س}$ − س^2 − جا س

مثال أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي :

① ص = $\int$ جا(س^2 + 1) دس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = جا(س^2 + 1)

② ص = $\int$ س(س^2 − 4)^5 دس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = س(س^2 − 4)^5

③ ص = $\int$ (ظا^3(5س) − قا^3(5س − 1)) دس

⇐ $\frac{دص}{دس}$ = (ظا^3(5س) − قا^3(5س − 1))

مثال اذا كان ∫ ق(س) دس = هـ^س + ٣ ، اوجد ق(٠)

الحل: باشتقاق الطرفين

⇐ د/دس ∫ ق(س) دس = د/دس (هـ^س + ٢)

⇐ ق(س) = هـ^س ⇐ ق(٠) = هـ^٠
= ١

مثال اذا كان ق(س) = ∫ (جاس + ظاس) دس اوجد قَ(س)

مثال اذا كان ق(س) = ∫ (١ − ٢ س^٢) دس اوجد قَ(−١)

مثال اذا كان ∫ (ق(س) + س^٢ + س) دس = س^٣ + ٢س
اوجد ق(−١)

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال: اذا كان $\int (ق(س) + ٤س + ٥)\, دس = س^٣ + جا٣س$
اوجد ق(س) .

الحل: نأخذ $\frac{د}{دس}$ للطرفين

$$\frac{د}{دس} \int (ق(س) + ٤س + ٥)\, دس = \frac{د}{دس} (س^٣ + جا٣س)$$

$$\Leftarrow ق(س) + ٤س + ٥ = ٣س^٢ + ٣جتا٣س$$

$$\Leftarrow ق(س) = ٣س^٢ + ٣جتا٣س - ٤س - ٥$$

$$\Leftarrow ق(س) = ٣جتا٣س + ٣س^٢ - ٤س - ٥$$

★ قواعد التكامل غير المحدود :-

قاعدة (١) :-

$\int أ\, دس = أس + جـ$ ، حيث أ ثابت ، جـ ثابت التكامل

مثال: اوجد التكاملات الآتية :-

① $\int ٤\, دس = ٤س + جـ$

② $\int \frac{١}{٢}\, دس = \frac{١}{٢}س + جـ$

③ $\int \sqrt{٥}\, دس = \sqrt{٥}\, س + جـ$

④ $\int \frac{دس}{٣} = \frac{١}{٣}س + جـ$

⑤ $\int \frac{دس}{\sqrt{٧}} = \frac{١}{\sqrt{٧}}\, س + جـ$

⑥ $\int -٥\, دس = -٥س + جـ$

⑦ $\int دص = ص + جـ$

⑧ $\int دهـ = هـ + جـ$

⑨ $\int \frac{١}{٤}\, دع = \frac{١}{٤}ع + جـ$

⑩ $\int ل\, دس = ل س + جـ$
حيث ل ثابت .

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

قاعدة (٢):

$$\int س^{ن}\, دس = \frac{س^{ن+1}}{(ن+1)} + جـ$$ ، ن $\neq -1$ ، جـ ثابت التكامل .

مثال: اوجد التكاملات الاتية:

① $\int س^{٣}\, دس = \frac{س^{٣+١}}{٣+١} + جـ = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

② $\int س^{-٢}\, دس = \frac{س^{-٢+١}}{-٢+١} + جـ = \frac{س^{-١}}{-١} + جـ = \frac{-١}{س} + جـ$

③ $\int \sqrt{س}\, دس = \int س^{\frac{١}{٢}}\, دس = \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + جـ = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

④ $\int \sqrt[٣]{س^{-٤}}\, دس = \int س^{\frac{-٤}{٣}}\, دس = \frac{س^{\frac{-٤}{٣}+١}}{\frac{-٤}{٣}+١} + جـ = \frac{س^{\frac{-١}{٣}}}{\frac{-١}{٣}} + جـ = -٣ س^{\frac{-١}{٣}} + جـ$

⑤ $\int \frac{١}{س^{-٤}}\, دس = \int س^{٤}\, دس = \frac{س^{٥}}{٥} + جـ$

⑥ $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٢}}}\, دس = \int \frac{١}{س^{\frac{٢}{٥}}}\, دس = \int س^{\frac{-٢}{٥}}\, دس = \frac{س^{\frac{-٢}{٥}+١}}{\frac{-٢}{٥}+١} + جـ = \frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}} + جـ$

⑦ $\int \frac{١}{س^{٣}}\, دس = \int س^{-٣}\, دس = \frac{س^{-٢}}{-٢} + جـ$ ، حيث

قاعدة (٣):

١) $\int هـ^{س}\, دس = هـ^{س} + جـ$

٢) $\int \frac{١}{س}\, دس = لو_{هـ} |س| + جـ$

٣) $\int جاس\, دس = -جتاس + جـ$

٤) $\int جتاس\, دس = جاس + جـ$

٥) $\int قا^{٢}س\, دس = ظاس + جـ$

ملاحظة

التكامل يوزع على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب والقسمة .

* خواص التكامل غير المحدود :-

① $\int$ أ ق(س) دس = أ $\int$ ق(س) دس ، حيث أ ثابت .

وهذا يعني :- (أنه يمكن اخراج الثابت خارج التكامل ثم نكمل الحل) .

② $\int$ (ق(س) ± هـ(س) ± ع(س) ± ...) دس

= $\int$ ق(س) دس ± $\int$ هـ(س) دس ± $\int$ ع(س) دس ± ......

وهذا يعني أنه يمكن توزيع التكامل على عملية الجمع والطرح .

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال: اوجد قيمة التكاملات الاتية :

① $\int$ (٥ $س^٤$ + $هـ^س$ + جاس + ٣) دس

الحل = $\int$ ٥ $س^٤$ دس + $\int$ $هـ^س$ دس + $\int$ جاس دس + $\int$ ٣ دس ،

= ٥ $\int$ $س^٤$ دس + $هـ^س$ + (- جتاس) + ٣س + جـ

= $\frac{٥ س^٥}{٥}$ + $هـ^س$ - جتاس + ٣س + جـ

= $س^٥$ + $هـ^س$ - جتاس + ٣س + جـ

ملاحظة: يمكن حل المثال السابق مباشرة بدون التوزيع .

② $\int$ (٣ جتا س + ٥ $هـ^س$ + $\frac{٤}{س}$) دس

= ٣ جاس + ٥ $هـ^س$ + ٤ $لو_هـ$ |س| + جـ

* تفاءلوا فالهموم مثل الغيوم ..
ما تراكمت إلا .. لتمطر ......

مثال جد التكاملات الآتية :-

① $\int (\text{قا}^2\text{س} - ٢\,\text{جتا س} + \frac{1}{\text{س}})\,\text{دس}$

$= \text{ظا س} - ٢\,\text{جا س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

② $\int \text{س}^2(\text{س} - ٤)\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}^3 - ٤\,\text{س}^2)\,\text{دس}$

$= \frac{1}{٤}\text{س}^٤ - \frac{٤}{٣}\text{س}^٣ + \text{ث}$

تذكير

$$أ^{-م} = \frac{1}{أ^{م}}$$

$$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{(م+ن)}$$

③ $\int (٥\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)\,\text{دس}$

$= \int (٥\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢\text{س} - ٢)\,\text{دس}$

$= \int (٥\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٢)\,\text{دس}$

$= \frac{٥}{٣}\text{س}^٣ - \frac{٣}{٢}\text{س}^٢ - ٢\text{س} + \text{ث}$

④ $\int \left(\frac{\text{س}^٢ + ٢}{\text{س}^٥}\right)\text{دس} = \int \text{س}^{-٥}(\text{س}^٢ + ٢)\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}^{-٣} + ٢\,\text{س}^{-٥})\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} - \frac{٢}{٤}\text{س}^{-٤} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٢}\text{س}^{-٢} - \frac{٢}{٤}\text{س}^{-٤} + \text{ث}$

تذكير

$$\frac{أ}{ب} + ١ = \frac{أ + ب}{ب}$$

$$\frac{أ}{ب} - ١ = \frac{أ - ب}{ب}$$

٥) $\int (٣س^{٥} - \sqrt[٥]{س} + ٤)\, دس$

$= \int (٢س^{٥} - س^{\frac{١}{٥}} + ٤)\, دس$

$= \frac{٢}{٦}س^{٦} - \frac{٥}{٦}س^{(\frac{١}{٥}+١)} + ٤س + جـ$

$= \frac{١}{٢}س^{٦} - \frac{٥}{٦}س^{\frac{٦}{٥}} + ٤س + جـ$

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

٦) $\int (\frac{-٤}{س} + قا^{٢}س + ٥هـ^{س})\, دس$

$= -٤ لو_{هـ}|س| + ظاس + ٥هـ^{س} + جـ$

* الاستبدال :-

هناك بعض الاقترانات تحتاج الى استبدال **ظاس** بـ $(\frac{جاس}{جتاس})$

وكذلك نستبدل $(\frac{١}{جتا^{٢}س})$ بـ $قا^{٢}س$

مثال: جد التكاملات الآتية:

① $\int ظاس\, جتاس\, دس$ ،

الاستبدال

$= \int (\frac{جاس}{\cancel{جتاس}}\, \cancel{جتاس})\, دس$

$= \int جاس\, دس$

$= -جتاس + جـ$

② $\int \sqrt{٣}\, جتاس\, ظاس\, دس$ ،

الاستبدال

$= \int (\sqrt{٢}\, \cancel{جتاس}\, \frac{جاس}{\cancel{جتاس}})\, دس$

$= \int \sqrt{٢}\, جاس\, دس$

$= -\sqrt{٢}\, جتاس + جـ$

③ $\int \frac{-٤}{جتا^٢ س} \, دس = -٤ \int \frac{١}{جتا^٢ س} \, دس$

استبدال

$= -٤ \int قا^٢ س \, دس$

$= -٤ \, ظاس + ج$

④ $\int \frac{-٢}{٣ \, جتا^٢ س} \, دس = \frac{-٢}{٣} \int \frac{١}{جتا^٢ س} \, دس$

استبدال

$= \frac{-٢}{٣} \int قا^٢ س \, دس = \frac{-٢}{٣} \, ظاس + ج$

⑤ $\int \left(\frac{١}{\sqrt{٢} \, جتا^٢ س} \right) دس$

⑥ $\int \left(\frac{ظاس \, جتاس}{\sqrt{٣}} \right) دس$

مثال: اوجد التكاملات الآتية:

(١) $\int (س^{٥} - ٢)\, س^{(-\frac{١}{٢})}\, دس$

$= \int \left(س^{٥} \times س^{(-\frac{١}{٢})} - ٢\, س^{-\frac{١}{٢}}\right) دس$

$= \int \left(س^{(٥ - \frac{١}{٢})} - ٢\, س^{-\frac{١}{٢}}\right) دس$

$= \int \left(س^{\frac{١٤}{٣}} - ٢\, س^{-\frac{١}{٢}}\right) دس$

$= \frac{س^{(\frac{١٤}{٢} + ١)}}{(\frac{١٤}{٢} + ١)} - ٢\, \frac{س^{(-\frac{١}{٢} + ١)}}{(-\frac{١}{٢} + ١)} + ث$

$= \frac{٣}{١٧}\, س^{\frac{١٧}{٢}} - ٣ \times \frac{٢}{١}\, س^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٣}{١٧}\, س^{\frac{١٧}{٢}} - \frac{٩}{٣}\, س^{\frac{١}{٢}} + ث$

(٢) $\int \left(\frac{س^{٦} - ٥}{\sqrt{س}}\right) دس \quad ، \quad س \neq ٠$

$= \int (س^{٦} - ٥)\left(س^{-\frac{١}{٢}}\right)$

$= \int \left(س^{(٦ - \frac{١}{٢})} - ٥\, س^{-\frac{١}{٢}}\right) دس$

$= \int س^{(\frac{١٧}{٢})} - ٥\, س^{(-\frac{١}{٢})}\, دس$

$= \left(\frac{٣}{٢٠}\right) س^{\frac{٢٠}{٢}} - \left(\frac{١٥}{٢}\right) س^{\frac{٢}{٢}} + ث$

تذكير

$\boxed{\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{(\frac{م}{ن})}}$

③ $\int \left(\frac{قا^2 س}{5} - \frac{هـ^{س}}{4} + \frac{2}{س} \right) دس$

$= \frac{1}{5} ظاس - \frac{1}{4} هـ^{س} + 2 لو_{هـ} |س| + جـ$

④ $\int (س^2 - 1)(1 - س) \, دس$.

⑤ $\int \left(3 قا^2 س + \frac{5}{س} - جاس \right) دس$.

مثال: جد التكاملات الآتية:

$$\sqrt{\text{س}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$$

$$①\ \int \frac{\text{س}^{٢} - \sqrt{\text{س}}\ \text{جا س}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{د س} \qquad \text{س} \neq ٠$$

الحل:

$$\int \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{جا س}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}\ \text{د س} \rightarrow \text{توزيع البسط على المقام}$$

$$= \int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}\ \text{د س} - \int \frac{\cancel{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}\ \text{جا س}}{\cancel{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}}\ \text{د س} \rightarrow \text{توزيع التكامل}$$

$$= \int (\text{س}^{٢} \times \text{س}^{-\frac{١}{٢}})\ \text{د س} - \int \text{جا س د س}$$

$$\text{جمع الأسس} \quad \text{س}^{٢-\frac{١}{٢}} = \text{س}^{\frac{٣}{٢}}$$

$$= \int \text{س}^{\frac{٣}{٢}}\ \text{د س} - \int \text{جا س د س}$$

$$= \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}+١}}{\frac{٣}{٢}+١} + \text{جتا س} + \text{ث}$$

$$= \frac{٢}{٥}\ \text{س}^{\frac{٥}{٢}} + \text{جتا س} + \text{ث}$$

$$②\ \int \frac{\text{س}^{٥} - \text{س}^{٢}\ \text{جتا س}}{\text{س}^{٢}}\ \text{د س} \qquad \text{س} \neq ٠$$

$$= \int \frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٢}}\ \text{د س} - \int \frac{\cancel{\text{س}^{٢}}\ \text{جتا س}}{\cancel{\text{س}^{٢}}}\ \text{د س}$$

$$= \int \text{س}^{٣}\ \text{د س} - \int \text{جتا س د س}$$

$$= \frac{١}{٢}\ \text{س}^{٢} - \text{جا س} + \text{ث}$$

مثال: إذا كان $\int ق(س)\,دس = هـ^{(1-س^2)} + 4هـ$ ، وكان $قَ(أ) = -2أ$ ، $أ \neq 0$. فجد قيمة (قيم) الثابت أ .

الحل:

$\int ق(س)\,دس = هـ^{(1-س^2)} + 4هـ$ باشتقاق الطرفين

$\frac{د}{دس} \int ق(س)\,دس = \frac{د}{دس}\left(هـ^{1-س^2} + 4هـ\right)$

$\Leftarrow ق(س) = -2س\,هـ^{(1-س^2)} + صفر$

$\Leftarrow قَ(س) = -2س\,هـ^{(1-س^2)}$

لكن $قَ(أ) = -2أ$

$\Leftarrow -2أ\,هـ^{(1-أ^2)} = -2أ$ بالقسمة على $-2أ$

$\frac{\cancel{-2أ}}{\cancel{-2أ}}\,هـ^{(1-أ^2)} = \frac{\cancel{-2أ}}{\cancel{-2أ}}$

$هـ^{(1-أ^2)} = 1$ جميع القيم التي ترفع للأس صفر تعطي (1)

$\Leftarrow هـ^{(1-أ^2)} = هـ^{0}$

$\Leftarrow$ الأساس متساوي

$\Leftarrow$ الأس متساوي.

$\Leftarrow 1 - أ^2 = 0 \Leftarrow أ^2 = 1$

$\Leftarrow أ = \pm 1$

مثال إذا كانت $\int$ ق(س) دس = لو$_{هـ}$ (س^{2} - ٣) + ١٠٠

وكانت ق(أ) = ٢أ ، أ ≠ ٠ فأوجد قيمة (قيم) الثابت أ .

الحل :

__باشتقاق الطرفين__

ق(س) = $\frac{٢س}{س^{2} - ٣}$

لكن ق(أ) = ٢أ

⇐ $\frac{٢أ}{أ^{2} - ٣}$ = ٢أ

⇐ ٢أ = (أ^{2} - ٣) (٢أ) بالقسمة على (٢أ)

⇐ أ^{2} - ٣ = ١

⇐ أ^{2} - ٤ = ٠ ⇐ (أ - ٢) (أ + ٢)

⇐ أ = ± ٢

مثال إذا كانت $\int$ ق(س) دس = $\frac{س^{3}}{٣}$ - ٥ $\frac{س^{2}}{٢}$ + ٦س

وكانت ق(أ) = صفر ، أ ≠ ٠ فأوجد قيمة (قيم) الثابت أ

الحل: باشتقاق الطرفين

⇐ ق(س) = $\frac{\cancel{٣}}{\cancel{٣}}$ س^{2} - $\frac{٥ \times ٢}{\cancel{٢}}$ س + ٦

⇐ ق(س) = س^{2} - ٥س + ٦

لكن ق(أ) = صفر

⇐ أ^{2} - ٥أ + ٦ = ٠

(أ - ٢) (أ - ٣) = ٠ ⇐ أ = ٢ ، ٣

مثال: جد التكاملات الآتية:-

① $\int \frac{س^2-1}{(س-1)}\, دس$ ② $\int \frac{٥س+٥}{س+1}\, دس$ ③ $\int \frac{٦س+٣}{٢س+1}\, دس$

④ $\int \frac{س^2+س-٦}{س-٢}\, دس$ ⑤ $\int \frac{س^3-٨}{س-٢}\, دس$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

الحل:

① $\int \frac{(س+1)\cancel{(س-1)}}{\cancel{(س-1)}}\, دس = \int س+1\, دس = \frac{1}{٢}س^2 + س + جـ$

② $\int \frac{\cancel{(س+1)}٥}{\cancel{س+1}}\, دس = \int ٥\, دس = ٥س + جـ$

③ $\int \frac{\cancel{(٢س+1)}٣}{\cancel{٢س+1}}\, دس = \int ٣\, دس = ٣س + جـ$

④ $\int \frac{(س+٣)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{(س-٢)}}\, دس = \int س+٣\, دس = \frac{1}{٢}س^2 + ٣س + جـ$

⑤ $\int \frac{(س^2+٢س+٤)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{(س-٢)}}\, دس = \int س^2+٢س+٤\, دس$
$= \frac{1}{٣}س^3 + س^2 + ٤س + جـ$

مثال: اذا كانت $ص = \int س^2\, دس$ ،
اوجد قيمة $ص''$.

الحل: $ص' = س^2 \Leftarrow ص'' = ٢س$.

مثال: اذا كانت $ق(س) = \int (س^2+٢س+1)\, دس$ ، اوجد $ق''(-1)$.

الحل: $ق'(س) = س^2 + ٢س + 1$ باشتقاق الطرفين
$ق''(س) = ٢س+٢ \Leftarrow ق''(-1) = ٢(-1) + ٢ = صفر$

مثال: اذا كانت $ق(س) = \int س^3 - 1\, دس$ اوجد $ق''(٢)$

الحل: $ق'(س) = س^3 - 1$ باشتقاق الطرفين
$ق''(س) = ٣س^2 \Leftarrow ق''(٢) = ٣(٢)^2$
$= ١٢$

* تطبيقات على التكامل غير المحدود :-

١) المسافة = ∫ السرعة ⟸ ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

٢) السرعة = ∫ التسارع ⟸ ع(ن) = ∫ ت(ن) دن

٣) ق(س) = ∫ ق'(س) دس .

٤) ميل المماس = ق'(س) .

مثال: اذا كان ق'(س) = ($٣س^{٢}$ - ٣) ، اوجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق(١) = ٥

الحل: ق(س) = ∫ ق'(س) دس .

= ∫ ($٣س^{٢}$ - ٣) دس

= $\frac{٣س^{٣}}{٣}$ - ٣س + جـ

∴ ق(س) = $س^{٣}$ - ٣س + جـ

ولكن ق(١) = ٥

⟸ $(١)^{٣}$ - ٣(١) + جـ = ٥

-٢ + جـ = ٥

⟸ $\boxed{جـ = ٧}$

∴ ق(س) = $س^{٣}$ - ٣س + ٧ #

*** إن الله لا يخذل**
عبداً .... بكى
عبداً .... شكى
عبداً ... حنى رأسه
ثم دعا
اللهم يا رب ......

مثال: اذا كان ق اقتران قابل للاشتقاق وكان ق'(س) = $٣س^{٢}$ - ٤س + ١

اوجد ق(-١) علماً بأن ق(٣) = ٢ .

الحل: ق(س) = ∫ ق'(س) دس ،

ق(س) = ∫ ($٣س^{٢}$ - ٤س + ١) دس

ق(س) = $س^{٣}$ - $٢س^{٢}$ + س + جـ

ولكن ق(٣) = ٢

⟸ $(٣)^{٣}$ - $٢(٣)^{٢}$ + ٣ + جـ = ٢

٢٧ - ١٨ + ٣ + جـ = ٢

١٢ + جـ = ٢

⟸ $\boxed{جـ = -١٠}$

∴ ق(س) = $س^{٣}$ - $٢س^{٢}$ + س - ١٠

⟸ ق(-١) = $(-١)^{٣}$ - $٢(-١)^{٢}$ - ١ - ١٠

ق(-١) = -١ - ٢ - ١١

ق(-١) = -١٤

#

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٤س^{3} + ٦س^{2} − ٣) فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (−٢، ٠)

الحل: الميل = المشتقة الاولى

⇐ ميل = ٤س^{3} + ٦س^{2} − ٣ = ق'(س) .

ولكن ق(س) = ∫ ق'(س) دس .

ق(س) = ∫ ٤س^{3} + ٦س^{2} − ٣ دس

ق(س) = س^{4} + ٢س^{3} − ٣س + جـ

لكن ق يمر بالنقطة (−٢، ٠) وهذا يعني أن

ق(−٢) = ٠

(−٢)^{4} + ٢(−٢)^{3} − ٣(−٢) + جـ = ٠

$\cancel{16 - 16}$ + ٦ + جـ = ٠

⇐ $\boxed{\text{جـ} = -6}$

من قاعدة الاقتران

ق(س) = س^{4} + ٢س^{3} − ٣س − ٦

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال (واجب): اذا كان ق'(س) = ٣س^{2} − ١٠س ، فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن النقطة (٢،٣) تقع على منحنى الاقتران ق .

مثال (واجب): اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي هـ^{س} فاكتب قاعدة الاقتران ق علماً بأنه يمر بالنقطة (١،٠)

مثال (واجب): اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) هو (٦ − ٢س) فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(١) = ٣

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند أي نقطة (س، ص) يساوي (٣س−١)(س+٥)
فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(٢) = −٣

الحل: الميل = ق′(س) = (٣س−١)(س+٥)

⇐ ق(س) = ∫ ق′(س) دس

ق(س) = ∫ (٣س−١)(س+٥) دس = ∫ (٣س² + ١٥س − س − ٥) دس

ق(س) = ∫ (٣س² + ١٤س − ٥) دس

ق(س) = س³ + ٧س² − ٥س + جـ

لكن ق(٢) = −٣

⇐ (٢)³ + ٧(٢)² − ٥(٢) + جـ = −٣

٨ + ٢٨ − ١٠ + جـ = −٣

٢٦ + جـ = −٣ ⇐ جـ = −٢٩

∴ ق(س) = س³ + ٧س² − ٥س − ٢٩

الحياة مستمرة سواء ضحكت أم بكيت
لا تحمل نفسك هموماً لن تستفيد منها
وابتسم

مثال ٤: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة $\text{ع}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^{٢} - ٤\text{ن}$ ، اوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٢) ثانية علماً بأن موقعه الابتدائي $\text{ف}(٠) = ٤$

الحل: $\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\, \text{دن}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \int (٣\text{ن}^{٢} - ٤\text{ن})\, \text{دن}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} - ٢\text{ن}^{٢} + \text{جـ}$

* لايجاد قيمة جـ

$\text{ف}(٠) = ٤$ من المعطيات

$\Leftarrow (٠)^{٣} - ٢(٠)^{٢} + \text{جـ} = ٤$

$\Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٤}$

$\therefore \text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} - ٢\text{ن}^{٢} + ٤$

$\Leftarrow \text{ف}(٢) = (٢)^{٣} - ٢(٢)^{٢} + ٤$

$= \cancel{٨} - \cancel{٨} + ٤$

$= ٤$ م

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال ٤: يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره $\text{ت}(\text{ن}) = ٨$ م/ث^{٢} اوجد سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة منذ بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم هي $\text{ع}(٠) = ٥$

الحل: $\text{ع}(\text{ن}) = \int \text{ت}(\text{ن})\, \text{دن}$

$\text{ع}(\text{ن}) = \int ٨\, \text{دن}$

$\text{ع}(\text{ن}) = ٨\text{ن} + \text{جـ}$

* نجد قيمة جـ ، وذلك من خلال $\text{ع}(٠) = ٥$

$\Leftarrow ٨(٠) + \text{جـ} = ٥$

$\Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٥}$

$\therefore \text{ع}(\text{ن}) = ٨\text{ن} + ٥$ ، نجد قيمة السرعة بعد ١ ث

$\Leftarrow \text{ع}(١) = ٨(١) + ٥$

$= ١٣$ م/ث

مثال ٤: تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره $\text{ت}(\text{ن}) = ١٢$ م/ث^{٢} اوجد سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين منذ بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم $\text{ع}(٠) = ٧$ م/ث . (واجب)

مثال: يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣(ن + ١)^{2} م/ث اوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين منذ بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١ م .

الحل:

ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن

ف(ن) = $\int$ ٣(ن + ١)^{2} دن

ف(ن) = $\int$ ٣(ن^{2} + ٢ن + ١) دن

ف(ن) = $\int$ (٣ن^{2} + ٦ن + ٣) دن

ف(ن) = ن^{3} + ٣ن^{2} + ٣ن + جـ

(أ + ب)^{2} = أ^{2} + ٢أب + ب^{2}

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* نجد قيمة جـ ، وذلك من خلال ف(٠) = ١

⟸ $\cancel{(٠)^{3}}$ + ٣$\cancel{(٠)^{2}}$ + ٣$\cancel{(٠)}$ + جـ = ١

⟸ $\boxed{\text{جـ} = ١}$

⟸ ف(ن) = ن^{3} + ٣ن^{2} + ٣ن + ١

* المسافة بعد مرور ثانيتين

⟸ ف(٢) = (٢)^{3} + ٣(٢)^{2} + ٣(٢) + ١

= ٨ + ١٢ + ٦ + ١

= ٢٧ م

مثال واجب: يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع معطاه بالعلاقة ع(ن) = (٤ن + ٦) م/ث ، اوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني منذ بدء الحركة علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف(٠) = ١٠

مثال واجب: يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت يعطى بالقاعدة ت(ن) = ٦ سم/ث^{2} ، ن > ٠ . اوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين منذ بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٤ سم/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ١٠ سم

مثال: اذا كان تسارع جسيم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت(ن) = ٦ ن م/ث^{2} فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية منذ بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٣ م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٥

الحل: نجد اولاً السرعة ومن ثم نجد المسافة.

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن

ع(ن) = ∫ ٦ن دن

ع(ن) = ٣ن^{2} + جـ

* نجد قيمة جـ من خلال ع(٠) = ٢

⇐ ٣(٠)^{2} + جـ = ٢

⇐ جـ = ٢

∴ ع(ن) = ٣ن^{2} + ٢

* نجد المسافة

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ (٣ن^{2} + ٢) دن

ف(ن) = ن^{2} + ٢ن + جـ

* نجد قيمة جـ من خلال ف(٠) = ٥

⇐ ~~(٠)^{2} + ٢(٠)~~ + جـ = ٥

⇐ جـ = ٥

∴ ف(ن) = ن^{2} + ٢ن + ٥

(واجب)

مثال: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣ن^{2} - ٢ن ، اوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثوانٍ علماً بأن موقعه الابتدائي عند(٠) = ٥

(واجب)

مثال: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تساوي ع(ن) = (٦ن + ٢) م/ث ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوانٍ علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧

(واجب)

مثال: يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت ت مقداره ت(ن) = ٨ م/ث^{2} اوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية منذ بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٢ م/ث وموضعه الابتدائي ف(٠) = ١٠ م

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* الدرس الثاني : التكامل المحدود

تعريف : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{قَ}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ق}(\text{س})\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$ ، حيث أن

العدد أ : يمثل الحد السفلي للتكامل المحدود .
العدد ب : يمثل الحد العلوي للتكامل المحدود .

ملاحظة : في حالة التكامل المحدود لا نضيف ثابت التكامل (جـ) في الجواب النهائي .

* قواعد التكامل المحدود :-

قاعدة (١) :-

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{دس} = \text{جـ}(\text{ب} - \text{أ})$ ، حيث جـ عدد ثابت .

قاعدة (٢) :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = \left[\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \frac{(\text{ب})^{(\text{ن}+1)}}{(\text{ن}+1)} - \frac{\text{أ}^{(\text{ن}+1)}}{(\text{ن}+1)}$$

$$= \frac{\text{ب}^{(\text{ن}+1)} - \text{أ}^{(\text{ن}+1)}}{(\text{ن}+1)}$$ ، ن $\neq -1$ ، ن $\in$ ح .

مثال : اذا كان ق(٣) = ٨ ، ق(٢) = ٥ ، اوجد $\int_{2}^{3} \text{قَ}(\text{س})\,\text{دس}$.

الحل : $\int_{2}^{3} \text{قَ}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ق}(\text{س})\Big]_{2}^{3} = \text{ق}(3) - \text{ق}(2) = 8 - 5 = 3$

مثال : اذا كان ق(٥) = -١٧ ، ق(-١) = ١٢ ، اوجد $\int_{-1}^{5} \text{قَ}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل : $\int_{-1}^{5} \text{قَ}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ق}(\text{س})\Big]_{-1}^{5} = \text{ق}(5) - \text{ق}(-1) = (-17) - 12 = -29$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(١١) $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}}\Big]_{٠}^{٢} = \text{هـ}^{٢} - \text{هـ}^{٠} = \text{هـ}^{٢} - ١$

(١٢) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس} = \int_{١}^{٢} \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{دس} = -\text{هـ}^{-\text{س}}\Big]_{١}^{٢} = \text{هـ}^{-١} - \text{هـ}^{-٢}$

(١٣) $\int_{١}^{٤} \sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = \int_{١}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\Big]_{١}^{٤} = \frac{٢}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣}(١)^{\frac{٣}{٢}}$

$= \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{٤^{٣}} - \sqrt{١^{٣}}\right)$

$= \frac{٢}{٣}\left((٢)^{٣} - (١)^{٣}\right)$

$= \frac{٢}{٣}(٨ - ١) = \frac{١٤}{٣}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(١٤) $\int_{١}^{٤} \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big]_{١}^{٤}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٤ - \text{لو}_{\text{هـ}}١ = \text{لو}_{\text{هـ}}٤ - \text{صفر} = \text{لو}_{\text{هـ}}٤$

مثال: اذا كان $\int_{٠}^{\text{ج}} \text{س}\,\text{دس} = ٨$ ، فما قيم ج

الحل: $\int_{٠}^{\text{ج}} \text{س}\,\text{دس} = ٨$

$\Leftarrow \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\Big]_{٠}^{\text{ج}} = ٨$

$\Leftarrow \frac{\text{ج}^{٢}}{٢} - \frac{(٠)^{٢}}{٢} = ٨$

$\Leftarrow \frac{\text{ج}^{٢}}{٢} = ٨$

$\Leftarrow \text{ج}^{٢} = ١٦$

$\Leftarrow \text{ج} = \pm ٤$.

مثال: اذا كان $\int_{٠}^{\text{ج}} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{صفراً}$

فما قيمة ج

الحل: $\int_{٠}^{\text{ج}} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{صفراً}$

$\text{هـ}^{\text{س}}\Big]_{٠}^{\text{ج}} = \text{صفراً}$

$\text{هـ}^{\text{ج}} - \text{هـ}^{٠} = \text{صفراً}$

$\text{هـ}^{\text{ج}} = \text{هـ}^{٠}$ ، من خلال الاسس

$\Leftarrow$ الاساسات متساوية

$\Leftarrow \boxed{\text{ج} = ٠}$

$(-\text{عدد})^{\text{فردي}} = $ تبقى السالب

$(-\text{عدد})^{\text{زوجي}} = $ تلغى السالب

$هـ^{(٠)} = ١$

$لو_{هـ}\,١ = $ صفر

مثال: جد التكاملات الآتية:-

١) $\int_{-١}^{٣} -٤\, دس = -٤(٣ - -١) = -٤(٤) = -١٦$

٢) $\int_{١}^{٣} ٧\, دس = ٧(٣ - ١) = ٧(٢) = ١٤$

٣) $\int_{٠}^{٥} \sqrt{٢}\, دس = \sqrt{٢}(٥ - ٠) = ٥\sqrt{٢}$

٤) $\int_{٢}^{٤} \frac{٥}{٦}\, دس = \frac{٥}{٦}(٤ - ٢) = \frac{٥}{٦}(٢) = \frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{٣}$

٥) $\int_{-١}^{٤} -١٢\, دس = -١٢(٤ - -١) = -١٢(٥) = -٦٠$

٦) $\int_{٠}^{٣} س\, دس = \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٣} = \frac{(٣)^٢}{٢} - \cancel{\frac{(٠)^٢}{٢}} = \frac{٩}{٢}$

٧) $\int_{-١}^{٢} س^٥\, دس = \left[\frac{س^٦}{٦}\right]_{-١}^{٢} = \frac{(٢)^٦}{٦} - \frac{(-١)^٦}{٦} = \frac{٦٤}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{٦٣}{٦}$

٨) $\int_{١}^{٦} \frac{١}{س}\, دس = \left[لو_{هـ}|س|\right]_{١}^{٦} = لو_{هـ}|٦| - لو_{هـ}\,١ = لو_{هـ}\,٦ - \text{صفر} = لو_{هـ}\,٦$

٩) $\int_{-٣}^{٠} هـ^{س}\, دس = \left[هـ^{س}\right]_{-٣}^{٠} = هـ^{٠} - هـ^{-٣} = ١ - هـ^{-٣} = ١ - \frac{١}{هـ^{٣}}$

١٠) $\int_{١}^{٨} \frac{١}{س^{\frac{٤}{٣}}}\, دس = \int_{١}^{٨} س^{\frac{-٤}{٣}}\, دس = \left[\frac{س^{\frac{-٤}{٣}+١}}{\frac{-٤}{٣}+١}\right]_{١}^{٨} = \left[-٣\, س^{\frac{-١}{٣}}\right]_{١}^{٨}$

$= \left[\frac{-٣}{س^{\frac{١}{٣}}}\right]_{١}^{٨} = \left[\frac{-٣}{\sqrt[٣]{س}}\right]_{١}^{٨} = \frac{-٣}{\sqrt[٣]{٨}} - \frac{-٣}{\sqrt[٣]{١}}$

$= \frac{-٣}{٢} + \frac{٣}{١}$

$= \frac{-٣ + ٦}{٢} = \frac{٣}{٢}$

$= ١,٥$

مثال: إذا كانت $\int_{-2}^{ب} 8\, دس = 24$ فما قيمة ب ؟

الحل: $\int_{-2}^{ب} 8\, دس = 24$

$8(ب - -2) = 24$

$8(ب + 2) = 24 \quad \boxed{\div 8}$

$\Leftarrow \frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}(ب + 2) = \frac{24}{8}$

$ب + 2 = 3$

$ب = 3 - 2$

$ب = 1$

مثال: إذا كانت $\int_{1}^{ب} س\, دس = \frac{3}{2}$ فما قيمة ب

الحل: $\frac{س^2}{2}\Big]_1^{ب} = \frac{3}{2}$

$\frac{ب^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{ب^2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$

$\frac{ب^2}{2} = 2$

$ب^2 = 4$ ، اخذ الجذر التربيعي للطرفين.

$\Leftarrow ب = \pm 2$

مثال: إذا كانت $\int_{1}^{5} ك\, دس = -48$ ، فما قيمة ك ؟
حيث ك ثابت

الحل: $ك(5 - 1) = -48$

$4ك = -48$

$ك = \frac{-48}{4}$

$ك = -12$

مثال: إذا كانت $\int_{3}^{ج} 3س^2\, دس = -35$ ، فما قيمة ج ؟

الحل: $س^3\Big]_3^{ج} = -35$

$ج^3 - (3)^3 = -35$

$ج^3 - 27 = -35$

$ج^3 = -35 + 27$

$ج^3 = -8$

$ج = -2$

مثال: إذا كانت $\int_{م}^{3} 5\, دس = 12$

فجد قيمة م.

الحل:

$5(3 - م) = 12$

$15 - 5م = 12$

$-5م = 12 - 15$

$-5م = -3$

$م = \frac{-3}{-5} \Leftarrow م = \frac{3}{5}$

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال ٤: اذا كان $\int ق(س)\,دس = س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$ ،

فجد $\int_{-١}^{٨} ق(س)\,دس$.

والحل ٤ نجد اولاً ق(س) .

ناخذ $\frac{د}{دس}$ للطرفين

$$\Leftarrow \cancel{\frac{د}{دس}} \int ق(س)\,دس = \frac{د}{دس}\left(س^{\frac{٢}{٣}} + جـ\right)$$

$$ق(س) = \frac{٢}{٣}\, س^{\left(\frac{٢}{٣} - ١\right)}$$

$$\Leftarrow ق(س) = \frac{٢}{٣}\, س^{\frac{-١}{٣}}$$

$$\Leftarrow \int_{-١}^{٨} ق(س)\,دس = \int_{-١}^{٨} \frac{٢}{٣}\, س^{\frac{-١}{٣}}\,دس$$

$$= \cancel{\frac{٢}{٣}} \times \cancel{\frac{٣}{٢}} \Big[س^{\frac{٢}{٣}} \Big]_{-١}^{٨}$$

$$= \Big[س^{\frac{٢}{٣}} \Big]_{-١}^{٨}$$

$$= \Big[\left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٢} \Big]_{-١}^{٨} = \left(\sqrt[٣]{٨}\right)^{٢} - \left(\sqrt[٣]{-١}\right)^{٢}$$

$$= \left(\sqrt[٣]{٨}\right)^{٢} - \left(\sqrt[٣]{-١}\right)^{٢}$$

$$= (٢)^{٢} - (-١)^{٢}$$

$$= ٤ - ١$$

$$= ٣$$

ملاحظة: مشتقة التكامل المحدود صفراً.

مثال: اوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل من التكاملات الآتية.

① $ص = \int_{3}^{2} (س^2 + 3س + 1)\, دس \Leftarrow \frac{دص}{دس} = $ صفراً

② $ص = \int_{3}^{2} \sqrt{3س^2+5}\, دس + \int_{2}^{4} \sqrt{4س^2+5}\, دس \Leftarrow \frac{دص}{دس} = $ صفراً.

③ $ص = \int_{0}^{1} هـ^{س}\, دس \Leftarrow \frac{دص}{دس} = $ صفراً.

مثال: اذا كانت $ق(س) = \int_{0}^{1} (\frac{2}{س} + 2س)\, دس + \int (هـ^{س} + 1)\, دس$

اوجد $ق'(0)$.

الحل: باشتقاق الطرفين

$ق'(س) = $ صفر $+ هـ^{س} + 1$

$\Leftarrow ق'(0) = هـ^{0} + 1$

$= 1 + 1$

$= 2$

مثال تمارين: اذا كانت $ق(س) = \int_{-1}^{2} (1 - \frac{1}{2}س)\, دس + \int (جاس + جتاس)\, دس$

اوجد $ق'(س)$.

* الدرس الثالث : خواص التكامل المحدود :-

خاصية (1) :-

$\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = صفراً$ ، (وهذا يعني أنه قيمة التكامل تساوي صفراً إذا تساوت حدود التكامل)

مثال :- جد التكاملات الآتية :

① $\int_{2}^{2} (س^2 - 2س + 1)\,دس = صفراً$.

② $\int_{3}^{3} (3س^3 + \frac{6}{س^2})\,دس = صفراً$.

③ $\int_{0}^{0} (\sqrt{س} + \frac{3}{س^2} - س^5)\,دس = صفراً$.

④ $\int_{-1}^{-1} (1 - 5س)\,دس = صفراً$.

خاصية (2) :

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = - \int_{ب}^{أ} ق(س)\,دس$.

(وهذا يعني أنه في حالة قلب حدود التكامل تنقلب اشارة التكامل).

مثال : إذا كانت $\int_{2}^{5} ق(س)\,دس = 7$ ، فإن $\int_{5}^{2} ق(س)\,دس = -7$

مثال : إذا كانت $\int_{-3}^{4} ق(س)\,دس = -4$ ، فإن $\int_{4}^{-3} ق(س)\,دس = 4$

خاصية (٣) ٤ $\int_{أ}^{ب} ج\, ق(س)\, دس = ج \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$ ، حيث ج ثابت

مثال ٤ اذا كان $\int_{١}^{٤} ق(س)\, دس = ٦$ ، اوجد ما يلي .

① $\int_{١}^{٤} ٣\, ق(س)\, دس = ٣ \int_{١}^{٤} ق(س)\, دس = ٣(٦) = ١٨$

② $\int_{١}^{٤} \frac{١}{٢} ق(س)\, دس = \frac{١}{٢} \int_{١}^{٤} ق(س)\, دس = \frac{١}{٢}(٦) = ٣$

③ $\int_{١}^{٤} \frac{ق(س)}{٣}\, دس = \frac{١}{٣} \int_{١}^{٤} ق(س)\, دس = \frac{١}{٣}(٦) = ٢$

④ $\int_{٤}^{١} -ق(س)\, دس = -١ \int_{٤}^{١} ق(س)\, دس = -١(-٦) = ٦$

خاصية (٤) ٤ -

$$\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) \pm هـ(س)\right) دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, دس$$

وهذا يعني انه يمكننا توزيع التكامل المحدود على عملية الجمع والطرح ولكن لا يمكننا توزيعه على عملية الضرب والقسمة .

ملاحظة خاصية (٤) يمكننا حل السؤال دونما استخدامها اي بدون توزيع .

مثال : اوجد قيمة $\int_{٠}^{٣} (٣س^٢ + ٤س)\, دس$.

الحل :

$= [س^٣ + ٢س^٢]_{٠}^{٣}$

$= \left((٣)^٣ + ٢(٣)^٢\right) - \left(\cancel{(٠)^٣ + ٢(٠)^٢}\right)$

$= ٢٧ + ١٨$

$= ٤٥$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال: اوجد التكاملات الآتية:-

① $\int_{1}^{2} (3\text{س}^2 - 2\text{س} + 4)\, d\text{س}$

$= \left[\frac{3\text{س}^3}{3} - \frac{2\text{س}^2}{2} + 4\text{س} \right]_1^2 = \left[\text{س}^3 - \text{س}^2 + 4\text{س} \right]_1^2$

$= \left((2)^3 - (2)^2 + 4(2) \right) - \left((1)^3 - (1)^2 + 4(1) \right)$

$= (8 - 4 + 8) - (1 - 1 + 4)$

$= (12) - (4) = 8$

② $\int_{0}^{1} 3\text{س}^2(\text{س}+2)\, d\text{س} = \int_{0}^{1} (3\text{س}^3 + 6\text{س}^2)\, d\text{س}$

$= \left[\frac{3\text{س}^4}{4} + \frac{6\text{س}^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{3}{4}\text{س}^4 + 2\text{س}^3 \right]_0^1$

$= \left(\frac{3}{4}(1)^4 + 2(1)^3 \right) - \left(\cancel{\frac{3}{4}(0)^4 + 2(0)^3} \right)$

$= \left(2 + \frac{3}{4} \right) - (0) = \frac{11}{4}$

③ $\int_{3}^{4} \frac{-5}{\text{س}}\, d\text{س} = -5 \int_{3}^{4} \frac{1}{\text{س}}\, d\text{س}$

$= -5 \left[\text{لو}_{هـ} |\text{س}| \right]_3^4 = -5 \left(\text{لو}_{هـ} 4 - \text{لو}_{هـ} 3 \right)$

④ $\int_{1}^{2} \frac{-3}{\text{س}}\, d\text{س} = -3 \int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}}\, d\text{س} = -3 \left[\text{لو}_{هـ} |\text{س}| \right]_1^2$

$= -3 \left(\text{لو}_{هـ} 2 - \text{لو}_{هـ} 1 \right)$

$= -3 \left(\text{لو}_{هـ} 2 - \text{صفر} \right)$

$= -3\, \text{لو}_{هـ} 2$

ملاحظة

$\text{لو}_{هـ} 1 = \text{صفر}$

٥) $\int_{1}^{3} \left(٤هـ^{س} + \frac{٣}{س} - ٢\right) دس$

$= \left[٤هـ^{س} + ٣\,لوهـ|س| - ٢س \right]_{1}^{3}$

$= \left(٤هـ^{٣} + ٣\,لوهـ٣ - ٦\right) - \left(٤هـ + \cancel{٣\,لوهـ١} - ٢\right)$

$= ٤هـ^{٣} + ٣\,لوهـ٣ - ٦ - ٤هـ + ٢$

$= ٤هـ^{٣} + ٣\,لوهـ٣ - ٤هـ - ٤$

ملاحظة

$\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

ملاحظة

$\sqrt[ن]{س^{م}} = \left(\sqrt[ن]{س}\right)^{م}$

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

٦) $\int_{-1}^{-8} \frac{1}{\sqrt[3]{س^{2}}} دس = \int_{-1}^{-8} س^{\frac{-2}{3}} دس$

$= \left[\frac{س^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} \right]_{-1}^{-8} = \left[٣س^{\frac{1}{3}} \right]_{-1}^{-8}$

$= \left[٣\sqrt[3]{س} \right]_{-1}^{-8} = \left(٣\sqrt[3]{-8} - ٣\sqrt[3]{-1}\right)$

$= ٣(-٢) - ٣(-١)$

$= -٦ + ٣ = -٣$

٧) $\int_{0}^{1} \left(٣\sqrt{س} - ٤\sqrt[3]{س}\right) دس$

$= \int_{0}^{1} ٣س^{\frac{1}{2}} - ٤س^{\frac{1}{3}} دس$

$= \left[٣\frac{س^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - ٤\frac{س^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right]_{0}^{1} = \left[\cancel{٣} \times \frac{٢}{\cancel{٣}} س^{\frac{3}{2}} - \cancel{٤} \times \frac{٣}{\cancel{٤}} س^{\frac{4}{3}} \right]_{0}^{1}$

$= \left[٢س^{\frac{3}{2}} - ٣س^{\frac{4}{3}} \right]_{0}^{1} = \left[٢\sqrt{س^{3}} - ٣\sqrt[3]{س^{4}} \right]_{0}^{1} = \left(٢\sqrt{(1)^{3}} - ٣\sqrt[3]{(1)^{4}}\right) - (0)$

$= ٢ - ٣ = -١$

⑧ $\int_{٠}^{١} (٣س^{٢} + \sqrt{س})\, دس = \int_{٠}^{١} (٣س^{٢} + س^{\frac{١}{٢}})\, دس$

$= \left[\frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{س^{١+\frac{١}{٢}}}{١+\frac{١}{٢}} \right]_{٠}^{١} = \left[س^{٣} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١}$

$= \left[س^{٣} + \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} \right]_{٠}^{١} = \left((١)^{٣} + \frac{٢}{٣} \sqrt{(١)^{٣}} \right) - \cancel{(٠)}$

$= \left(١ + \frac{٢}{٣}(١) \right) = \frac{٥}{٣}$

⑨ $\int_{-٢}^{٢} (٦س^{٢} - ٨س + ٢)\, دس$

$= \left[\frac{٦س^{٣}}{٣} - \frac{٨س^{٢}}{٢} + ٢س \right]_{-٢}^{٢}$

$= \left[٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٢س \right]_{-٢}^{٢}$

$= \left(٢(٢)^{٣} - ٤(٢)^{٢} + ٢(٢) \right) - \left(٢(-٢)^{٣} - ٤(-٢)^{٢} + ٢(-٢) \right)$

$= (٦ + \cancel{١٦} - \cancel{١٦}) - (-١٦ - ١٦ - ٦)$

$= (٦) - (-٢٨) = ٦ + ٢٨ = ٤٤$

⑩ $\int_{-٣}^{-١} \frac{١}{٨}\, دس = \frac{١}{٨}(-١ - -٣) = \frac{١}{٨}(-١ + ٣) = \frac{١}{٨}(٢) = \frac{١}{٤}$

⑪ $\int_{١}^{٤} \left(\sqrt{س} + \frac{١}{س^{٢}} \right) دس = \int_{١}^{٤} س^{\frac{١}{٢}} + س^{-٢}\, دس = \left[س^{\frac{٣}{٢}} \frac{٢}{٣} + \frac{س^{-١}}{-١} \right]_{١}^{٤}$

$= \left[\frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + \frac{-١}{س} \right]_{١}^{٤} = \left(\frac{٢}{٣} (\sqrt{٤})^{٣} + \frac{-١}{٤} \right) - \left(\frac{٢}{٣} (\sqrt{١})^{٣} + \frac{-١}{١} \right)$

$= \left(\frac{٢}{٣}(٨) + \frac{-١}{٤} \right) - \left(\frac{٢}{٣} + -١ \right) = \frac{-١}{٤} + \frac{١٦}{٣} + ١ - \frac{٢}{٣}$

$= \frac{١٤}{٣} + \frac{٣}{٤} = \frac{٥٦ + ٩}{١٢} = \frac{٦٥}{١٢}$

مثال: إذا كان $\int_{-٣}^{ج}$ ٢س دس = ٠ ، فجد قيم الثابت ج

الحل: س² $\Big]_{-٣}^{ج}$ = ٠

ج² - (-٣)² = ٠

ج² - ٩ = ٠ ⇐ ج = ±٣

مثال: إذا كان $\int_{-٢}^{ج}$ ٩ س دس = ٢١ فجد قيمة الثابت ج

الحل: ٣ س² $\Big]_{-٢}^{ج}$ = ٢١

٣ ج² - ٣(-٢)² = ٢١

٣ ج² + ٢٤ = ٢١

٣ ج² = ٢١ - ٢٤

٣ ج² = -٣ ⇐ ج² = -١ ⇐ ج = -١

مثال: إذا كان $\int_{١}^{ب}$ (٢س - ٤) دس = ١٥ ، فجد قيمة الثابت (ب) .

الحل:

س² - ٤س $\Big]_{١}^{ب}$ = ١٥

(ب² - ٤ب) - ((١)² - ٤(١)) = ١٥

ب² - ٤ب + ٣ = ١٥

ب² - ٤ب + ٣ - ١٥ = ٠

ب² - ٤ب - ١٢ = ٠

(ب - ٦)(ب + ٢) = ٠

⇐ ب - ٦ = ٠ ⇐ ب = ٦

⇐ ب + ٢ = ٠ ⇐ ب = -٢

مثال: إذا كان $\int_{0}^{\text{أ}} ٧ \, \text{دس} = ٢١$ ، فأوجد قيمة الثابت أ .

الحل:

$$٧ (\text{أ} - ٠) = ٢١$$

$$٧ \text{أ} = ٢١$$

$$\text{أ} = ٣$$

مثال:

إذا كان $\int_{0}^{\text{ب}} \text{س}^{٢} \, \text{دس} = ٩$ ، فأوجد قيمة الثابت ب

الحل:

$$\left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{\text{ب}} = ٩$$

$$\frac{\text{ب}^{٣}}{٣} - (٠) = ٩$$

$$\text{ب}^{٣} = ٢٧$$

$$\sqrt[٣]{\text{ب}^{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧} \Leftarrow \text{ب} = ٣$$

مثال: إذا كان $\int_{١}^{\text{ج}} (٢\text{س} + ٣) \, \text{دس} = ١٤$ ، فأوجد قيمة الثابت ج

الحل:

$$\left[\text{س}^{٢} + ٣\text{س} \right]_{١}^{\text{ج}} = ١٤$$

$$(\text{ج}^{٢} + ٣\text{ج}) - (٤) = ١٤$$

$$\text{ج}^{٢} + ٣\text{ج} - ٤ - ١٤ = ٠$$

$$\text{ج}^{٢} + ٣\text{ج} - ١٨ = ٠$$

عددان حاصل ضربهما (-١٨) ومجموعهما (٣)

$$(\text{ج} + ٦)(\text{ج} - ٣) = ٠$$

$$\Leftarrow \text{ج} + ٦ = ٠ \Leftarrow \text{ج} = -٦$$

$$\text{ج} - ٣ = ٠ \Leftarrow \text{ج} = ٣$$

$\therefore$ قيم ج $= \{-٦ ، ٣\}$.

مثال: اذا كانت $\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س}$ ، هي مشتقة الاقتران ق(س) والمعرف على الفترة [-٢، ٣] ، فجد قيمة ق(٣) - ق(-٢)

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س}$ ، نأخذ التكامل للطرفين من [-٢، ٣]

$$\int_{-٢}^{٣} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-٢}^{٣} ٦\text{س}\,\text{دس}$$

$$\text{ق}(\text{س})\Big]_{-٢}^{٣} = ٣\text{س}^{٢}\Big]_{-٢}^{٣}$$

$$\text{ق}(٣) - \text{ق}(-٢) = ٣(٣)^{٢} - ٣(-٢)^{٢}$$

$$\text{ق}(٣) - \text{ق}(-٢) = ٢٧ - ١٢$$

$$\Leftarrow \text{ق}(٣) - \text{ق}(-٢) = ١٥$$

مثال: اذا كانت $\int_{١}^{\text{ج}} (٢\text{س} + ٣)\,\text{دس} = ٦$ ، فما قيم ج

الحل:

$$\text{س}^{٢} + ٣\text{س}\Big]_{١}^{\text{ج}} = ٦$$

$$(\text{ج}^{٢} + ٣\text{ج}) - ((١)^{٢} + ٣(١)) = ٦$$

$$\text{ج}^{٢} + ٣\text{ج} - ٤ = ٦$$

$$\text{ج}^{٢} + ٣\text{ج} - ٤ - ٦ = ٠$$

$$\text{ج}^{٢} + ٣\text{ج} - ١٠ = ٠$$

عددان حاصل ضربهما (-١٠) ومجموعهما (٣)

$$\Leftarrow (\text{ج} + ٥)(\text{ج} - ٢) = ٠$$

إما $\text{ج} + ٥ = ٠ \Leftarrow \text{ج} = -٥$

$\text{ج} - ٢ = ٠ \Leftarrow \text{ج} = ٢$

إذن قيم ج هي {٢، -٥} .

مثال: إذا كانت $\int_{ج}^{٢} (٤س - ١)\, دس = -٣ج$ ، فما قيمة ج

الحل:

$$\left[٢س^{٢} - س \right]_{ج}^{٢} = -٣ج$$

$$\left(٢(٢)^{٢} - (٢) \right) - \left(٢ج^{٢} - ج \right) = -٣ج$$

$$٦ - ٢ج^{٢} + ج = -٣ج$$

$$٢ج^{٢} - ٣ج - ج - ٦ = ٠$$

$$٢ج^{٢} - ٤ج - ٦ = ٠$$

$$ج^{٢} - ٢ج - ٣ = ٠$$

$$(ج - ٣)(ج + ١) = ٠$$

$$\Leftarrow ج = ٣ ، -١$$

مثال: إذا كانت $\int_{٠}^{٣} (ج س^{٢} - ٩)\, دس = -١٥$ ، فما قيمة ج

الحل:

$$\left[ج \frac{س^{٣}}{٣} - ٩س \right]_{٠}^{٣} = -١٥$$

$$\left(\frac{ج(٣)^{٣}}{٣} - ٢٧ \right) - (٠) = -١٥$$

$$(٩ج - ٢٧) = -١٥$$

$$٩ج = -١٥ + ٢٧$$

$$٩ج = ١٢$$

$$ج = \frac{١٢}{٩}$$

$$ج = \frac{٤}{٣}$$

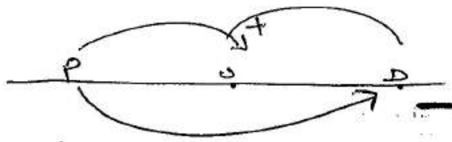
خاصية الإضافة (٥) :-

* إذا كانت أ، ب، جـ أعداد حقيقية، فإن :-

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ءس}$$

* أهم ما يميز هذه الخاصية أنه يكون هناك ثلاثة حدود تكامل مختلفة

أ < ب < جـ



مثال : إذا كانت $\int_{١}^{٧} \text{د(س) ءس} = ١٣$ ، $\int_{٧}^{٩} \text{د(س) ءس} = -٤$ ، أوجد $\int_{١}^{٩} \text{د(س) ءس}$ ،

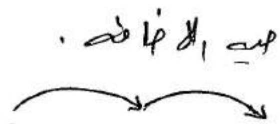
الحل :- يوجد ثلاثة حدود تكامل مختلفة ∴ خاصية الإضافة

$$\therefore \int_{١}^{٩} \text{د(س) ءس} = \int_{١}^{٧} \text{د(س) ءس} + \int_{٧}^{٩} \text{د(س) ءس}$$

$$= ١٣ - ٤ = ٩$$

مثال : إذا كانت $\int_{١}^{٣} \text{د(س) ءس} = ٤$ ، $\int_{١}^{٨} \text{د(س) ءس} = ١٧$ ، أوجد $\int_{٣}^{٨} \text{د(س) ءس}$ ،

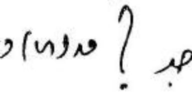
الحل :- يوجد ثلاثة حدود تكامل مختلفة ∴ خاصية الإضافة .



$$\int_{٣}^{٨} \text{د(س) ءس} = \int_{١}^{٨} \text{د(س) ءس} - \int_{١}^{٣} \text{د(س) ءس} .$$

$$= ١٧ - ٤ = ١٣$$

مثال : إذا كانت $\int_{٠}^{-٤} \text{د(س) ءس} = ٨$ ، $\int_{-٤}^{٦} \text{د(س) ءس} = ١٥$ ، أوجد $\int_{٠}^{٦} \text{د(س) ءس}$



الحل :- $\int_{٠}^{٦} \text{د(س) ءس} = \int_{-٤}^{٦} \text{د(س) ءس} - \int_{-٤}^{٠} \text{د(س) ءس}$

$$= ١٥ - (-٨) = ١٥ + ٨ = ٢٣$$

مثال ٤ إذا كان $\int_{-١}^{١} \text{د(س) دس} = ٦$ ، $\int_{٣}^{١} \text{د(س) دس} = -٢$ ، فأوجد $\int_{-١}^{٣} (\text{د(س)} + ٥) \text{ دس}$

الحل ٤

$-١ \quad ١ \quad ٣$

$$\int_{-١}^{٣} (\text{د(س)}+٥) \text{ دس} = \int_{-١}^{٣} \text{د(س) دس} + \int_{-١}^{٣} ٥ \text{ دس} ،$$

$$= \left(\int_{-١}^{١} \text{د(س) دس} + \int_{١}^{٣} \text{د(س) دس} \right) + \int_{-١}^{٣} ٥ \text{ دس}$$

$$= (٦ + ٢) + ٥(٣ - -١)$$

$$= ٨ + ٢٠ = ٢٨$$

ملاحظة $\int_{١}^{٢} \text{د(س) دس} = -\int_{٢}^{١} \text{د(س) دس}$ حسب خاصية (٢) ،

$$= -(-٢)$$

$$= ٢$$

مثال إذا كان $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{د(س)}}{٢} \text{ دس} = ٤$ ، $\int_{٩}^{٥} \text{د(س) دس} = ١٢$ ، فأوجد قيمة $\int_{٣}^{٩} (\text{د(س)} - ٧) \text{ دس}$

الحل ٤

$٣ \quad ٥ \quad ٩$

$$\int_{٣}^{٩} (\text{د(س)} - ٧) \text{ دس}$$

$$= \int_{٣}^{٩} \text{د(س) دس} - \int_{٣}^{٩} ٧ \text{ دس} ،$$

$$= \left(\int_{٣}^{٥} \text{د(س) دس} + \int_{٥}^{٩} \text{د(س) دس} \right) - \int_{٣}^{٩} ٧ \text{ دس} ،$$

$$= ٨ + (-١٢) - ٧(٩ - ٣)$$

$$= ٨ - ١٢ - ٤٢$$

$$= -٤٦$$

$$\int_{٣}^{٥} \frac{\text{د(س)}}{٢} \text{ دس} = ٤$$

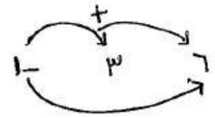
$$\frac{١}{٢} \int_{٣}^{٥} \text{د(س) دس} = ٤$$

نضرب الطرفين بمقلوب $(\frac{١}{٢})$

$$\cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}} \int_{٣}^{٥} \text{د(س) دس} = ٨$$

$$\therefore \int_{٣}^{٥} \text{د(س) دس} = ٨$$

مثال: اذا كانت $\int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 8$ ، $\int_{-1}^{2} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 10$ ، فاوجد $\int_{2}^{6} (\text{ق}(\text{س}) + 2\text{س})\,\text{دس}$



الحل:

$$\int_{2}^{6} (\text{ق}(\text{س}) + 2\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{2}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{6} 2\text{س}\,\text{دس}$$

$$= \left(\int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right) + \int_{2}^{6} 2\text{س}\,\text{دس}$$

$$= (8) - (5) + \left(\Big[\text{س}^2\Big]_{2}^{6}\right)$$

$$= 3 + \left((6)^2 - (2)^2\right)$$

$$= 3 + (36 - 4)$$

$$= 3 + 32 = 35$$

$\int_{-1}^{2} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 10$

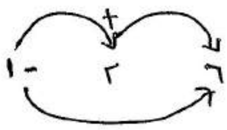
$2\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 10$

نضرب بمقلوب (٢)

$\frac{1}{2} \times 2\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 5$

$\therefore \int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 5$

مثال: اذا كانت $\int_{-1}^{6} (2\text{ق}(\text{س}) - 2)\,\text{دس} = 10$ ، $\int_{3}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 14$ ، فاوجد $\int_{-1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$.



الحل:

$$\int_{-1}^{6} (2\text{ق}(\text{س}) - 2)\,\text{دس} = 10$$

$$\int_{-1}^{6} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-1}^{6} 2\,\text{دس} = 10$$

$$2\int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - 2(6 - -1) = 10$$

$$2\int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - 14 = 10$$

$$2\int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 24$$

نضرب الطرفين لمقلوب ٢

$$\frac{1}{2} \times 2\int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 8$$

$$\Leftarrow \int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 8$$

المطلوب: $\int_{-1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$$= \int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{3}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= 8 - 14$$

$$= -6$$

(مثال) اذا كانت $\int_{٠}^{١} ٣\,د(س)\,دس = -١٢$ ، $\int_{٣}^{١} د(س)\,دس = -٨$ ، فجد قيمة $\int_{٠}^{٣} د(س)\,دس$.

الحل :

$$\int_{٠}^{٣} د(س)\,دس = \int_{٠}^{١} د(س)\,دس + \int_{١}^{٣} د(س)\,دس$$

$$= -٤ + (٨)$$

$$= ٤$$

$$\int_{٠}^{١} ٣\,د(س)\,دس = -١٢$$

$$٣ \int_{٠}^{١} د(س)\,دس = -١٢$$

اضرب الطرفين بـ $\frac{١}{٣}$

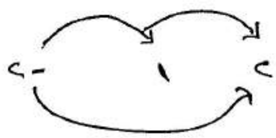
$$\frac{١}{\cancel{٣}} \times \cancel{٣} \int_{٠}^{١} د(س)\,دس = \frac{-١٢}{٣}$$

$$= \int_{٠}^{١} د(س)\,دس = -٤$$

(مثال) اذا كانت $\int_{-٢}^{١} د(س)\,دس = ٩$ ، $\int_{-٢}^{٢} د(س)\,دس = ١٨$

اوجد $\int_{١}^{٢} ٣\,د(س)\,دس$.

الحل :



$$\int_{١}^{٢} ٣\,د(س)\,دس = ٣ \int_{١}^{٢} د(س)\,دس .$$

$$= ٣ \left(\int_{-٢}^{٢} د(س)\,دس - \int_{-٢}^{١} د(س)\,دس \right)$$

$$= ٣ \left(١٨ - ٩ \right)$$

$$= ٣ \left(٩ \right)$$

$$= ٢٧ .$$

مثال: اذا كانت $\int_{-1}^{4} (3ق(س) - 2)\, دس = 8$ ، $\int_{4}^{2} ق(س)\, دس = -12$

احسب قيمة ما يأتي:

① $\int_{-1}^{2} ق(س)\, دس$ ② $\int_{4}^{-1} \left(\frac{ق(س)}{2} + 2س\right) دس$.

$-1 \quad 2 \quad 4$

الحل: نأخذ المعطيات اولاً.

$$\int_{-1}^{4} (3ق(س) - 2)\, دس = 8$$

$$3\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس - 2\int_{-1}^{4} دس = 8$$

$$3\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس - 2(4 - -1) = 8$$

$$3\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس - 10 = 8$$

$$3\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس = 18$$

$$\Leftarrow \boxed{\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس = 6}$$

* **المطلوب الاول (1):**

$$\int_{-1}^{2} ق(س)\, دس = \int_{-1}^{4} ق(س)\, دس - \int_{2}^{4} ق(س)\, دس$$

$$= 6 - (12)$$

$$= -6$$

* **المطلوب الثاني (2):**

$$\int_{4}^{-1} \left(\frac{ق(س)}{2} + 2س\right) دس$$

$$= \int_{4}^{-1} \frac{ق(س)}{2}\, دس + \int_{4}^{-1} 2س\, دس$$

$$= \frac{1}{2}\int_{4}^{-1} ق(س)\, دس + \int_{4}^{-1} 2س\, دس$$

$$= \frac{1}{2}(-6) + \Big[س^2\Big]_{4}^{-1}$$

$$= -3 + (-1)^2 - (4)^2$$

$$= -3 + 1 - 16$$

$$= -18$$

مثال: إذا كان $\int_{-2}^{5}$ ق(س) دس = ٦ ، $\int_{5}^{-2} \frac{1}{2}$ ع(س) دس = ٤ ، فجد $\int_{-2}^{5}$ (٣ق(س) + ع(س) − س) دس

الحل:

من المعطيات:

$\int_{5}^{-2} \frac{1}{2}$ ع(س) دس = ٤

$\frac{1}{2} \int_{5}^{-2}$ ع(س) دس = ٤

$\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} \int_{5}^{-2}$ ع(س) دس = ٨

∴ $\int_{5}^{-2}$ ع(س) دس = ٨

⇐ $\int_{-2}^{5}$ ع(س) دس = −٨

$\int_{-2}^{5}$ (٢ق(س) + ع(س) − س) دس ، توزيع التكامل

= $\int_{-2}^{5}$ ٢ق(س) دس + $\int_{-2}^{5}$ ع(س) دس − $\int_{-2}^{5}$ س دس

= ٢ $\int_{-2}^{5}$ ق(س) دس + $\int_{-2}^{5}$ ع(س) دس − $\int_{-2}^{5}$ س دس

= ٢(٦) + (−٨) − $\left(\left[\frac{س^2}{2}\right]_{-2}^{5}\right)$

= ١٨ − ٨ − $\left(\frac{25}{2} - \frac{4}{2}\right)$

= ١٠ − $\frac{21}{2}$ = $\frac{-1}{2}$

مثال: إذا كان $\int_{0}^{2} \frac{ق(س)}{2}$ دس = ٦ ، فجد قيمة $\int_{0}^{2}$ (٣س² + ٢ق(س)) دس

الحل: من المعطيات: $\int_{0}^{2} \frac{ق(س)}{2}$ دس = ٦ ⇐ $\frac{1}{2} \int_{0}^{2}$ ق(س) دس = ٦

⇐ $\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} \int_{0}^{2}$ ق(س) دس = ١٢

∴ $\int_{0}^{2}$ ق(س) دس = ١٢

المطلوب:

$\int_{0}^{2}$ (٣س² + ٢ق(س)) دس ، توزيع التكامل

= $\int_{0}^{2}$ ٣س² دس + ٢ $\int_{0}^{2}$ ق(س) دس

= $\left[س^3\right]_{0}^{2}$ + ٢(١٢)

= (٨) − (٠) + ٢٤

= ٣٢

مثال ٤ إذا كان $\int_{1}^{2}$ ق(س) دس = ٦ ، $\int_{3}^{-1} \frac{ع(س)}{٢}$ دس = -٥ ، فجد

① $\int_{-1}^{2}$ (٤ ق(س) - ع(س)) دس   ② $\int_{-1}^{2}$ (٦س^{٢} - ٢ع(س) + ٢) دس

الحل ٤

من المعطيات $\int_{2}^{-1} \frac{ع(س)}{٢}$ دس = -٥

$\frac{١}{٢} \int_{2}^{-1}$ ع(س) دس = -٥

$\cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}} \int_{2}^{-1}$ ع(س) دس = -١٠ ⟸ $\int_{2}^{-1}$ ع(س) دس = -١٠

المطلوب ①

$\int_{-1}^{2}$ (٤ ق(س) - ع(س)) دس = $\int_{-1}^{2}$ ٤ ق(س) دس - $\int_{-1}^{2}$ ع(س) دس .

حسب خاصية (٢)

= ٤ (٦) - (١٠) = ٢٤ - ١٠ = ١٤

المطلوب ② .

$\int_{-1}^{2}$ (٦س^{٢} - ٢ع(س) + ٢) دس ، توزيع التكامل

= $\int_{-1}^{3}$ ٦س^{٢} دس - ٢ $\int_{-1}^{2}$ ع(س) دس + $\int_{-1}^{2}$ ٢ دس

حسب خاصية (٢) .

= $[$ ٢س^{٢} $]_{-1}^{2}$ - ٢ (١٠) + ٢ (٣ - -١)

= ٢(٢)^{٢} - ٢(-١)^{٢} - ٢٠ + ٨

= ٥٤ + ٢ - ٢٢ = ٣٤

واجب

مثال اذا كانت $\int_{2}^{5} \left(\frac{د(س)}{2} - 1\right) دس = 6$ ، $\int_{8}^{5} د(س) دس = 10$

فأوجد $\int_{3}^{8} \left(د(س) + 2س\right) دس$

واجب

مثال اذا كانت $\int_{-1}^{6} \left(3د(س) - 2\right) دس = 10$ ، $\int_{3}^{6} د(س) دس = 14$

فأوجد $\int_{-1}^{2} د(س) دس$.

واجب

مثال اذا كان $\int_{١}^{٧} ٤\,ق(س)\,دس = ٨$ ، $\int_{٥}^{٧} ق(س)\,دس = -٩$

فجد $\int_{١}^{٥} \left(٣\,ق(س) - \frac{٣}{٢}\,س^{٢}\right) دس$

مثال: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٤ ، & ٠ \leq س \leq ٢ \\ ٢س ، & ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$ ، اوجد $\int_{٠}^{٤} ق(س)\, دس$.

الحل:

$$\int_{٠}^{٤} ق(س)\, دس = \int_{٠}^{٢} ق(س)\, دس + \int_{٢}^{٤} ق(س)\, دس$$

$$= \int_{٠}^{٢} (س^{٣} - ٤)\, دس + \int_{٢}^{٤} ٢س\, دس$$

$$= \left[\tfrac{١}{٤} س^{٤} - ٤س \right]_{٠}^{٢} + \left[س^{٢} \right]_{٢}^{٤}$$

$$= \left(\tfrac{١}{٤}(٢)^{٤} - ٤(٢) \right) - \left(\cancel{\tfrac{١}{٤}(٠)^{٤} - ٤(٠)} \right) + \left((٤)^{٢} \right) - \left((٢)^{٢} \right)$$

$$= (٤ - ٨) + (١٦) - (٤) = -٤ + ١٦ - ٤$$

$$= ٨$$

مثال: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٢ ، & ١ \leq س \leq ٢ \\ ٢س + ٦ ، & ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$ ، احسب $\int_{١}^{٤} ق(س)\, دس$.

الحل:

$$\int_{١}^{٤} ق(س)\, دس = \int_{١}^{٢} ق(س)\, دس + \int_{٢}^{٤} ق(س)\, دس$$

$$= \int_{١}^{٢} (٣س^{٢} - ٢)\, دس + \int_{٢}^{٤} (٢س + ٦)\, دس$$

$$= \left[س^{٣} - ٢س \right]_{١}^{٢} + \left[س^{٢} + ٦س \right]_{٢}^{٤}$$

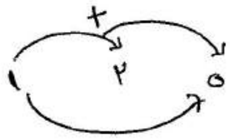
$$= (٨ - ٤) - (-١) + (١٦ + ٢٤) - (٤ + ١٢)$$

$$= ٤ + ١ + ٤٠ - ١٦$$

$$= ٤٥ - ١٦$$

$$= ٢٩$$

مثال: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} هـ^{س} & ، \ 1 \le س \le 2 \\ س & ، \ 2 < س \le 5 \end{cases}$ ، جد $\int_{1}^{5} ق(س)\, دس$.



الحل:

$$\int_{1}^{5} ق(س)\, دس = \int_{1}^{2} ق(س)\, دس + \int_{2}^{5} ق(س)\, دس .$$

$$= \int_{1}^{2} هـ^{س}\, دس + \int_{2}^{5} س\, دس$$

$$= \Big[هـ^{س} \Big]_{1}^{2} + \Big[\tfrac{1}{2} س^{2} \Big]_{2}^{5}$$

$$= \left(هـ^{2} - هـ \right) + \left(\tfrac{25}{2} - \tfrac{9}{2} \right)$$

$$= هـ^{2} - هـ + 8$$

واجب

مثال: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^{2} + 1 & ، \ 1 \le س \le 2 \\ 2س + 4 & ، \ 2 < س \le 5 \end{cases}$ ، فجد $\int_{1}^{5} ق(س)\, دس$.

واجب

مثال: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^{2} - 2س & \ 0 \le س \le 1 \\ 3 - 4س & \ 1 < س \le 2 \end{cases}$ ، فجد $\int_{0}^{2} ق(س)\, دس$.

واجب

مثال: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} 4س - 2 & ، \ -1 \le س \le 2 \\ 2س^{2} - 6 & \ 2 < س \le 3 \end{cases}$ ، فجد $\int_{-1}^{3} ق(س)\, دس$.

واجب

مثال: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^{2} + 1 & : \ -1 \le س \le 3 \\ 4س - 2 & : \ 3 < س \le 4 \end{cases}$

فجد $\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس$.

الدرس الرابع: التكامل بالتعويض -٤

* هو احد طرق التكامل وتستخدم هذه الطريقة عندما لا نستطيع ايجاد قيمة التكامل من خلال قواعد التكامل المباشرة.

* اهم ما يميز أن هذا السؤال بحاجة الى تكامل بالتعويض هو:
  ١) وجود مقدارين احدهما مشتقة للآخر.
  او ٢) وجود مقدارين احدهما له علاقة بمشتقة الآخر.

* **خطوات التكامل بالتعويض**

① نفرض ص او اي رمز آخر ما داخل الاقواس التي تكون مرفوعة لأس او ما تحت الجذور او الزوايا التي تكون للاقترانات المثلثية او الأسس.

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

② نشتق الفرض اي نجد $\frac{دص}{دس}$

③ نجد قيمة دس حيث أن $دس = \frac{دص}{المشتقة}$

④ نعود الى السؤال ثم نعوض قيمة الفرض ص وكذلك نعوض قيمة بدل دس.

⑤ نعمل عملية التكامل.

ملاحظة

* $هـ^{٠} = ١$ * $لو_{هـ} ١ = صفر$

* $لو_{هـ} هـ = ١$

مثال: أوجد التكاملات الآتية:

① $\int 2\text{س} \left(\text{س}^2 + 3\right)^4 \, \text{دس}$

الحل: نلاحظ أنه من الصعب أن ندخل (2س) الى داخل القوس،

نفرض $\text{ص} = \text{س}^2 + 3$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{2\text{س}} \left(\text{ص}\right)^4 \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(2\text{س})}}$

$= \int \text{ص}^4 \, \text{دص}$

$= \frac{1}{5} \text{ص}^5 + \text{ج}$

$= \frac{1}{5} \left(\text{س}^2 + 3\right)^5 + \text{ج}$

② $\int 2\text{س} \sqrt{\text{س}^2 + 2} \, \text{دس}$.

الحل: نلاحظ أيضاً أنه من الصعب أن ندخل 2س الى داخل الجذر.

$\Leftarrow$ نفرض $\text{ص} = \text{س}^2 + 3$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{2\text{س}} \sqrt{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س}}}$

$= \int \sqrt{\text{ص}} \, \text{دص}$

$= \int \text{ص}^{\frac{1}{2}} \, \text{دص} = \frac{2}{3} \text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{ج}$

$= \frac{2}{3} \sqrt{\left(\text{س}^2 + 2\right)^3} + \text{ج}$

③ $\int \frac{2\text{س} + 1}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} - 1}} \, \text{دس}$

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^2 + \text{س} - 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 1$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س} + 1}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{2\text{س} + 1}}{\sqrt{\text{ص}}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س} + 1}}$

$= \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \, \text{دص}$

$= 2 \, \text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$

$= 2 \sqrt{\text{ص}} + \text{ج}$

$= 2 \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} - 1} + \text{ج}$

④ $\int \left(\text{س} + 1\right) \text{هـ}^{\text{س}^2 + 2\text{س}} \, \text{دس}$.

الحل: افرض $\text{ص} = \text{س}^2 + 2\text{س}$،

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 2$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س} + 2}$

$\Leftarrow \int \cancel{\left(\text{س} + 1\right)} \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{2\cancel{\left(\text{س} + 1\right)}}$

$= \frac{1}{2} \int \text{هـ}^{\text{ص}} \, \text{دص} = \frac{1}{2} \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \frac{1}{2} \text{هـ}^{\text{س}^2 + 2\text{س}} + \text{ج}$

⑤ $\int \frac{٣\text{س}^{٢}+١}{(\text{س}^{٣}+\text{س}+٧)^{٥}}\,\text{دس}$.

الحل: افرض $\text{ص} = \text{س}^{٣}+\text{س}+٧$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}+١$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}+١}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{(٣\text{س}^{٢}+١)}}{(\text{ص})^{٥}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(٣\text{س}^{٢}+١)}}$

$= \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}^{٥}}$

$= \int \text{ص}^{-٥}\,\text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} + \text{ج}$

$= \frac{-١}{٤}(\text{س}^{٣}+\text{س}+٧)^{-٤} + \text{ج}$

⑥ $\int \text{س}\,\text{جا}(\text{س}^{٢}-٢)\,\text{دس}$.

الحل: افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢}-٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}}\,\text{جا}\,\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$\frac{١}{٢}\int \text{جا}\,\text{ص} \cdot \text{دص}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,\text{ص} + \text{ج}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{جتا}(\text{س}^{٢}-٢) + \text{ج}$

⑦ $\int ٦\text{س}\,\text{جا}\,\text{س}^{٢}\,\text{دس}$.

الحل:-

افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$\Leftarrow \int ٦\cancel{\text{س}}\,\text{جا}\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$= \int ٣\,\text{جا}\,\text{ص}\,\text{دص}$.

$= -٣\,\text{جتا}\,\text{ص} + \text{ج}$

$= -٣\,\text{جتا}(\text{س}^{٢}) + \text{ج}$

⑧ $\int \text{س}^{٢}\,\text{جا}(\text{س}^{٣}-١)\,\text{دس}$.

الحل: افرض $\text{ص} = \text{س}^{٣}-١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{٢}}\,\text{جا}\,\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{٣\text{س}^{٢}}}$

$\frac{١}{٣}\int \text{جا}\,\text{ص}\,\text{دص}$

$= -\frac{١}{٣}\,\text{جتا}(\text{ص}) + \text{ج}$

$= -\frac{١}{٣}\,\text{جتا}(\text{س}^{٣}-١) + \text{ج}$

$$⑨ \quad \int \frac{3\text{س}^3 - 6}{\sqrt[5]{\text{س}^3 - 6\text{س} + 9}}\, \text{دس}$$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^3 - 6\text{س} + 9$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 - 6$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2 - 6}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{3\text{س}^2 - 6}}{\sqrt[5]{\text{ص}}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2 - 6}}$$

$$= \int \frac{1}{\text{ص}^{\frac{1}{5}}}\, \text{دص}$$

$$= \int \text{ص}^{\frac{-1}{5}}\, \text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\frac{-1}{5}+1}}{\frac{-1}{5}+1} + \text{ج}$$

$$= \frac{5}{4}\, \text{ص}^{\frac{4}{5}} + \text{ج}$$

$$= \frac{5}{4} \left(\text{س}^3 - 6\text{س} + 9\right)^{\frac{4}{5}} + \text{ج}$$

$$⑩ \quad \int \sqrt[3]{6\text{س} - \text{س}^2}\, (6 - 2\text{س})\, \text{دس}$$

افرض $\text{ص} = 6\text{س} - \text{س}^2$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6 - 2\text{س}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{6 - 2\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \sqrt[3]{\text{ص}} \cdot \cancel{(6 - 2\text{س})} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(6 - 2\text{س})}}$$

$$= \int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\, \text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \text{ج}$$

$$= \frac{3}{4}\, \text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$$

$$= \frac{3}{4} \left(6\text{س} - \text{س}^2\right)^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$$

$$= \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{6\text{س} - \text{س}^2}\right)^4 + \text{ج}$$

$$⑪ \quad \int \frac{2\text{س} + 2}{\text{جتا}^2(\text{س}^2 + 2\text{س})}\, \text{دس}$$

الحل

افرض $\text{ص} = \text{س}^2 + 2\text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 2$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س} + 2}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{2\text{س} + 2}}{\text{جتا}^2 \text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س} + 2}}$$

$$= \int \text{قا}^2 \text{ص}\, \text{دص} = \text{ظا ص} + \text{ج}$$

$$= \text{ظا}(\text{س}^2 + 2\text{س}) + \text{ج}$$

⑬ $\int \sqrt[5]{(5-3\text{س})^{3}}\ \text{دس}$

الحل: افرض $\text{ص} = 5-3\text{س}$.

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -3$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-3}$

$\Leftarrow \int \sqrt[5]{\text{ص}^{3}} \cdot \frac{\text{دص}}{-3}$

$= \frac{-1}{3} \int \text{ص}^{\frac{3}{5}}\ \text{دص}$.

$= \frac{-1}{3} \times \frac{5}{8}\text{ص}^{\frac{8}{5}} + \text{ج}$

$= \frac{-5}{24} (5-3\text{س})^{\frac{8}{5}} + \text{ج}$

$= \frac{-5}{24} \sqrt[5]{(5-3\text{س})^{8}} + \text{ج}$

⑬ $\int (\text{س}+3)\sqrt[3]{\text{س}^2+6\text{س}-4}\ \text{دس}$.

الحل: افرض $\text{ص} = \text{س}^2+6\text{س}-4$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}+6$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}+6}$

$\Leftarrow \int (\text{س}+3)\sqrt[3]{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{2\text{س}+6}$

$= \int \cancel{(\text{س}+3)}\ \text{ص}^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س}+3)}}$

$= \frac{1}{2} \int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\ \text{دص}$

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$

$= \frac{3}{8} (\text{س}^2+6\text{س}-4)^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$

⑭ $\int \frac{10\text{س}-5}{(\text{س}^2-\text{س}+5)^{3}}\ \text{دس}$.

الحل: افرض $\text{ص} = \text{س}^2-\text{س}+5$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}-1$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}-1}$

$\Leftarrow \int \frac{10\text{س}-5}{\text{ص}^{3}} \cdot \frac{\text{دص}}{2\text{س}-1}$

$= \int \frac{5\cancel{(2\text{س}-1)}}{\text{ص}^{3}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(2\text{س}-1)}}$

$= 5\int \text{ص}^{-3}\ \text{دص}$

$= 5\ \frac{\text{ص}^{-2}}{-2} + \text{ج}$

$= \frac{-5}{2} (\text{س}^2-\text{س}+5)^{-2}$

$= \frac{-5}{2(\text{س}^2-\text{س}+5)^{2}}$

(١٥) $\int \text{٣س}^{٢} \text{ جا}(\text{٤} - \text{س}^{٣}) \text{ دس}$

الحل: افرض $\text{ص} = \text{٤} - \text{س}^{٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{٣س}^{٢}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{٣س}^{٢}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{٣س}^{٢}} \text{ جا ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{٣س}^{٢}}}$

$= \int -\text{جا ص دص}$

$= \text{جتا ص} + \text{ث}$

$= \text{جتا}(\text{٤} - \text{س}^{٣}) + \text{ث}$

(١٦) $\int \text{س قا}^{٢}(\text{س}^{٢} + \text{٨}) \text{ دس}$

الحل:
افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{٨}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}} \text{ قا}^{٢} \text{ ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{٢}\cancel{\text{س}}}$

$= \frac{١}{٢} \int \text{قا}^{٢} \text{ ص دص}$

$= \frac{١}{٢} \text{ ظا ص} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢} \text{ ظا}(\text{س}^{٢} + \text{٨}) + \text{ث}$

(١٧) $\int \text{٢س} (\text{س}^{٢} + \text{٤})^{٥} \text{ دس}$

الحل: افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{٤}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{٢س}} \text{ ص}^{٥} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٢س}}}$

$= \int \text{ص}^{٥} \text{ دص}$

$= \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{ث}$

$= \frac{(\text{س}^{٢} + \text{٤})^{٦}}{٦} + \text{ث}$

(١٨) $\int \frac{٢}{\text{٢س} - ١٢} \text{ دس}$

الحل: افرض $\text{ص} = \text{٢س} - ١٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{٢}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{٢}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٢س} - ١٢| + \text{ث}$

(١٩) $\int \text{ه}^{(\text{٩س}-1)} \, \text{دس}$.

الحل : افرض $\text{ص} = \text{٩س} - 1$

$\therefore \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = 9$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{9}$

$\Leftarrow \int \text{ه}^{\text{ص}} \cdot \dfrac{\text{دص}}{9}$

$= \dfrac{1}{9} \int \text{ه}^{\text{ص}} \, \text{دص}$

$= \dfrac{1}{9} \text{ه}^{\text{ص}} + \text{ث}$

$= \dfrac{1}{9} \text{ه}^{(\text{٩س}-1)} + \text{ث}$

(٢٠) $\int \text{قا}^2 (\text{٥س} - 8) \, \text{دس}$.

الحل : افرض $\text{ص} = \text{٥س} - 8$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{5}$

$\Leftarrow \int \text{قا}^2 \text{ص} \cdot \dfrac{\text{دص}}{5}$

$= \dfrac{1}{5} \int \text{قا}^2 \text{ص} \, \text{دص}$

$= \dfrac{1}{5} \text{ظا ص} + \text{ث}$

$= \dfrac{1}{5} \text{ظا} (\text{٥س} - 8) + \text{ث}$

(٢١) $\int \text{قا}^2 \left(\dfrac{\text{س}}{7}\right) \text{دس}$.

الحل : افرض $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{7}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{1}{7}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\left(\frac{1}{7}\right)} = 7 \, \text{دص}$

$\Leftarrow \int \text{قا}^2 \text{ص} \cdot 7 \, \text{دص}$

$= 7 \, \text{ظا ص} + \text{ث}$

$= 7 \, \text{ظا} \left(\dfrac{\text{س}}{7}\right) + \text{ث}$

(٢٢) $\int \text{جتا} \left(\dfrac{\text{س}}{3}\right) \text{دس}$.

الحل : افرض $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{3}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{1}{3}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3 \, \text{دص}$

$\Leftarrow \int \text{جتا ص} \cdot 3 \, \text{دص}$

$= 3 \, \text{جا ص} + \text{ث}$

$= 3 \, \text{جا} \left(\dfrac{\text{س}}{3}\right) + \text{ث}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(٢٣) $\int هـ^{(1-4س)} \, دس$ ،

الحل: افرض ص = ١ - ٤س ،

$\frac{دص}{دس} = -4$

$دس = \frac{دص}{-4}$

$\Leftarrow \int هـ^{ص} \cdot \frac{دص}{-4}$

$= \frac{-1}{4} هـ^{ص} + جـ$

$= \frac{-1}{4} هـ^{(1-4س)} + جـ$

---

(٢٤) $\int \frac{-5}{6-2س} \, دس$ ،

الحل: افرض ص = ٦ - ٢س ،

$\frac{دص}{دس} = -2$

$دس = \frac{دص}{-2}$

$\Leftarrow \int \frac{-5}{ص} \cdot \frac{دص}{-2}$

$= \frac{5}{2} \int \frac{1}{ص} \cdot دص$

$= \frac{5}{2} لو_{هـ} |ص| + جـ$

$= \frac{5}{2} لو_{هـ} |6-2س| + جـ$

---

٢٥) $\int \frac{10س - 1}{\sqrt{5س^2 - س + 1}} \, دس$

الحل: بفرض ص = ٥س² - س + ١

$\frac{دص}{دس} = 10س - 1$

$دس = \frac{دص}{10س - 1}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{(10س-1)}}{\sqrt{ص}} \times \frac{دص}{\cancel{(10س-1)}}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{ص}} \, دص$

$= \int \frac{1}{ص^{1/2}} \, دص$

$= \int ص^{-1/2} \, دص$

$= \frac{ص^{-1/2+1}}{-1/2+1} + جـ$

$= 2 ص^{1/2} + جـ$

$= 2\sqrt{ص} + جـ$

$= 2\sqrt{5س^2 - س + 1} + جـ$

مثال : أوجد التكاملات الآتية .

① $\int_{١}^{٢} (٢\text{س} - ٣)^{٤}\, \text{دس}$.

الحل : افرض $\text{ص} = ٢\text{س} - ٣$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢}$

عندما $\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = ٢(١) - ٣$

$\Leftarrow \text{ص} = -١$

عندما $\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ٢(٢) - ٣$

$\Leftarrow \text{ص} = ١$

$\Leftarrow \int_{-١}^{١} \text{ص}^{٤} \cdot \frac{\text{دص}}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \left[\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}\right]_{-١}^{١}$

$= \frac{١}{١٠} \left((١)^{٥} - (-١)^{٥}\right)$

$= \frac{١}{١٠} (١ + ١) = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$

② $\int_{٠}^{١} \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\, \text{دس}$.

الحل : افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

عندما $\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٠$

$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = ١$

$\Leftarrow \int_{٠}^{١} \cancel{\text{س}}\, \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$= \frac{١}{٢} \int_{٠}^{١} \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{دص}$

$= \frac{١}{٢} \left[\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{١}{٢} \left(\text{هـ}^{١} - \text{هـ}^{٠}\right)$

$= \frac{١}{٢} \left(\text{هـ}^{١} - ١\right)$

③ $\int_{١}^{٣} (٨\text{س})\, \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\, \text{دس}$.

الحل : افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

عندما $\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ٩$

$\Leftarrow \int_{١}^{٩} ٨\cancel{\text{س}}\, \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$\Leftarrow \int_{١}^{٩} ٤\, \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{دص}$

$= \left[٤\, \text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{١}^{٩}$

$= ٤ \left(\text{هـ}^{٩} - \text{هـ}^{١}\right)$

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

④ $\int_{1}^{3} ٢س\, هـ^{(س^٢ - ١)}\, دس$ ،

الحل ٤ افرض $ص = س^٢ - ١$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

نغير حدود التكامل من س الى ص ؛

عندما $س = ١ \Leftarrow ص = (١)^٢ - ١ = صفر$

عندما $س = ٣ \Leftarrow ص = (٣)^٢ - ١ = ٨$

$\Leftarrow \int_{٠}^{٨} \cancel{٢س}\, هـ^{ص} \cdot \frac{دص}{\cancel{٢س}}$

$= ٣ \int_{٠}^{٨} هـ^{ص}\, دص$ ،

$= ٢ \left[هـ^{ص} \right]_{٠}^{٨}$

$= ٢ (هـ^{٨} - هـ^{٠})$

$= ٢ (هـ^{٨} - ١)$

⑥ $\int_{-١}^{١} (٤س - ١) \sqrt{٢س^٢ - س - ٣}\, دس$ ،

الحل ٤ افرض $ص = ٢س^٢ - س - ٣$

$\frac{دص}{دس} = ٤س - ١$

$دس = \frac{دص}{٤س - ١}$

عندما $س = -١ \Leftarrow ص = ٢(-١)^٢ - (-١) - ٣$

$= ٠$

عندما $س = ١ \Leftarrow ص = ٢(١) - (١) - ٣$

$= -١$

$\Leftarrow \int_{١}^{-١} (\cancel{٤س-١}) (ص)^{\frac{١}{٢}} \cdot \frac{دص}{\cancel{٤س-١}}$

$= \frac{٢}{٤} \left[ص^{\frac{٤}{٣}} \right]_{١}^{-١} = \frac{٢}{٤} \left[(\sqrt[٣]{ص})^{٤} \right]_{١}^{-١}$

$= \frac{٢}{٤} \left((\sqrt[٣]{-١})^{٤} - (\sqrt[٣]{١})^{٤} \right)$

$= \frac{٢}{٤} (١ - ١) = صفر$.

⑤ $\int_{-١}^{٠} س (س^٢ + ٢)^٣\, دس$.

الحل ٤ افرض $ص = س^٢ + ٢$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

عندما $س = -١ \Leftarrow ص = (-١)^٢ + ٢$

$= ٣$

عندما $س = ٠ \Leftarrow ص = (٠)^٢ + ٢$

$= ٢$

$\Leftarrow \int_{٣}^{٢} \cancel{س}\, ص^٣ \cdot \frac{دص}{٢\cancel{س}}$

$= \frac{١}{٢} \int_{٣}^{٢} ص^٣\, دص = \frac{١}{٢} \times \left[\frac{ص^٤}{٤} \right]_{٣}^{٢}$

$= \frac{١}{٨} \left((٢)^٤ - (٣)^٤ \right)$

$= \frac{١}{٨} (١٦ - ٨١) = \frac{-٦٥}{٨}$

⑦ $\int_{3}^{5} \frac{2}{2س-4}\, دس$

الحل: افرض $ص = 2س - 4$

$\frac{دص}{دس} = 2$

$دس = \frac{دص}{2}$

عندما $س = 3 \Leftarrow ص = 2$

عندما $س = 5 \Leftarrow ص = 6$

$\Leftarrow \int_{2}^{6} \frac{\cancel{2}}{ص} \cdot \frac{دص}{\cancel{2}}$

$= \left[لو_{هـ} |ص| \right]_{2}^{6}$

$= لو_{هـ} 6 - لو_{هـ} 2$

⑧ $\int_{1}^{2} \frac{2}{س+2}\, دس$ ،

الحل:

نفرض $ص = س + 2$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = 1$

$دس = \frac{دص}{1}$

عندما $س = 1 \Leftarrow ص = 4$

$س = 2 \Leftarrow ص = 6$

$\Leftarrow \int_{4}^{6} \frac{2}{ص} \cdot دص$

$= 2 \left[لو_{هـ} |ص| \right]_{4}^{6} = 2 لو 6 - 2 لو 4$

⑨ $\int_{0}^{1} \frac{1}{س+هـ}\, دس$

الحل:

نفرض $ص = س + هـ$

$\frac{دص}{دس} = 1$

$دس = دص$

عندما $س = 0 \Leftarrow ص = هـ$

عندما $س = 1 \Leftarrow ص = 1 + هـ$

$\Leftarrow \int_{هـ}^{هـ+1} \frac{1}{ص}\, دص$

$= \left[لو_{هـ} |ص| \right]_{هـ}^{هـ+1}$

$= لو_{هـ} |هـ+1| - لو_{هـ} |هـ|$

$= لو_{هـ} |هـ+1| - 1$

مثال إذا كانت ق(٨) = ١٤ ، ق(-١) = -٥ ، فجد قيمة $\int_{-1}^{2} ٣س^{٢}\, قَ(س^{٣})\, دس$

الحل:

بفرض ص = $س^{٣}$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}$

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

⇐ تغيير حدود التكامل:

عندما س = -١ ⇐ ص = $(-١)^{٣}$ = -١

عندما س = ٢ ⇐ ص = $(٢)^{٣}$ = ٨

$$\Leftarrow \int_{-1}^{8} \cancel{٣س^{٢}}\, قَ(ص) \cdot \frac{دص}{\cancel{٣س^{٢}}}$$

$$= \int_{-1}^{8} قَ(ص)\, دص$$

$$= \Big[ق(ص) \Big]_{-1}^{8}$$

$$= ق(٨) - ق(-١)$$

$$= ١٤ - -٥ = ١٩$$

مثال إذا كانت ق(٤) = ١٢ ، ق(١) = -٨ ، أوجد $\int_{1}^{2} ٢س\, قَ(س^{٢})\, دس$.

الحل: بفرض ص = $س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

* عندما س = ١ ⇐ ص = ١
* عندما س = ٢ ⇐ ص = ٤

$$\Leftarrow \int_{1}^{4} \cancel{٢س}\, قَ(ص) \cdot \frac{دص}{\cancel{٢س}}$$

$$= \int_{1}^{4} قَ(ص)\, دص$$

$$= \Big[ق(ص) \Big]_{1}^{4} = ق(٤) - ق(١)$$

$$= ١٢ - -٨ = ٢٠$$

مثال إذا كانت ق(١) = ٣ ، ق(٠) = ٢ ، أوجد $\int_{0}^{1} ٢٠س^{٤}\, قَ(س^{٥})\, دس$.

الحل:

بفرض ص = $س^{٥}$

$\frac{دص}{دس} = ٥س^{٤}$

$دس = \frac{دص}{٥س^{٤}}$

* عندما س = ٠ ⇐ ص = ٠
* عندما س = ١ ⇐ ص = ١

$$\Leftarrow \int_{0}^{1} \cancel{٢٠}^{٤} \cancel{س^{٤}}\, قَ(ص) \frac{دص}{\cancel{٥س^{٤}}}$$

$$= \int_{0}^{1} ٤\, قَ(ص)\, دص = ٤ \Big[ق(ص) \Big]_{0}^{1}$$

$$= ٤ق(١) - ٤ق(٠)$$

$$= ٤(٣) - ٤(٢) = ٤$$

مثال: إذا كانت ج عدداً ثابتاً وكانت ق(ج) = ١٢ ، ق(٠) = ٨

$\int_{٠}^{ج}$ (ق̄(س) − هـ^٣) دس = ٠ ، فأوجد قيمة هـ

الحل:

$\int_{٠}^{ج}$ (ق̄(س) − هـ^٣) دس = ٠

[ق(س) − هـ^٣]$_{٠}^{ج}$ = ٠

(ق(ج) − هـ^ج) − (ق(٠) − هـ^٠) = ٠

(١٢ − هـ^ج) − (٨ − ١) = ٠

١٢ − هـ^ج − ٧ = ٠

⇐ ٥ − هـ^ج = ٠ ⇐ هـ^ج = ٥

$\boxed{هـ^{٠} = ١}$

مثال: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي (٤س − ٢)^٣ ، اكتب قاعدة الاقتران ق علماً بأنه يمر بالنقطة (١، ٨) .

الحل: $\boxed{\text{الميل = المشتقة ق̄(س)}}$

* قاعدة الاقتران = ∫ ق̄(س) دس
ق(س)

⇐ ق(س) = ∫ (٤س − ٢)^٣ دس

استخدم التكامل بالتعويض

⇐ نفرض ص = ٤س − ٢

دص/دس = ٤

دس = دص/٤

⇐ ق(س) = ∫ ص^٣ . دص/٤

⇐ ق(س) = ١/٤ × ص^٤/٤ + ج

ق(س) = ١/١٦ ص^٤ + ج

بدل ص

ق(س) = ١/١٦ (٤س − ٢)^٤ + ج

لكن ق يمر بالنقطة (١، ٨) / لإيجاد (ج)

⇐ ق(١) = ٨

⇐ ٨ = ١/١٦ (٤(١) − ٢)^٤ + ج

٨ = ١ + ج ⇐ $\boxed{ج = ٧}$

* ⇐ $\boxed{\text{ق(س) = ١/١٦ (٤س − ٢)}^{٤} + ٧}$

مثال: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة
$ع(ن) = ٣(ن+١)^{٣}$ م/ث ، أوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد
(ثانيتين) من بدء الحركة ، علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١ م

الحل : المسافة = ∫ السرعة

$\Leftarrow$ $ف(ن) = \int ٣(ن+١)^{٣}\, دن$

*** نستخدم التكامل بالتعويض هنا :-**

نفرض $ص = ن + ١$

$\frac{دص}{دن} = ١$

$دن = \frac{دص}{١}$

$\Leftarrow$ $ف(ن) = \int ٣(ص)^{٣} . دص$

$ف(ن) = \frac{٣}{٤} ص^{٤} + جـ$ $\Leftarrow$ $ف(ن) = \frac{٣}{٤}(ن+١)^{٤} + جـ$

*** ⇐ نجد قيمة (جـ) من خلال ف(٠) = ١**

$\Leftarrow$ $١ = \frac{٣}{٤}(٠+١)^{٤} + جـ$

$١ = \frac{٣}{٤} + جـ$

$\Leftarrow$ $جـ = ١ - \frac{٣}{٤}$

$\boxed{جـ = \frac{١}{٤}}$

$\Leftarrow$ $ف(ن) = \frac{٣}{٤}(ن+١)^{٤} + \frac{١}{٤}$

⇐ نجد الآن المسافة بعد ثانيتين

$\Leftarrow$ $ف(٢) = \frac{٣}{٤}(٢+١)^{٤} + \frac{١}{٤}$

$= \frac{٣}{٤} \times (٨١) + \frac{١}{٤}$

$= \frac{٢٤٣}{٤} + \frac{١}{٤}$

$= \frac{٢٤٤}{٤}$

$= ٦١$

مثال: إذا كانت ق(س) = ٦ هـ^٢س − ١/(س+هـ) ، فأوجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن النقطة (١،٠) تقع على منحنى الاقتران ق

الحل:

قاعدة الاقتران = ∫ ق(س) دس
ق(س)

ق(س) = ∫ (٦ هـ^٢س − ١/(س+هـ)) دس

ق(س) = ∫ ٦ هـ^٢س دس − ∫ ١/(س+هـ) دس

تعويض (١) — تعويض (٢)

تذكير: لو_هـ هـ = ١

تعويض (١)

نفرض ص = ٢س

دص/دس = ٢

دس = دص/٢

تعويض (٢)

نفرض م = س + هـ

دم/دس = ١

دس = دم/١

⇐ ق(س) = ∫ ٦ هـ^ص . دص/٢ − ∫ ١/م . دم/١

= ∫ ٣ هـ^ص دص − ∫ ١/م دم

ق(س) = ٣ هـ^ص − لو_هـ |م| + جـ

⇐ ق(س) = ٣ هـ^٢س − لو_هـ |س+هـ| + جـ

لإيجاد قيمة جـ:

(١،٠) تقع على منحنى ق ⇐ ق(٠) = ١

⇐ ١ = ٣ هـ^٢(٠) − لو_هـ |٠+هـ| + جـ

١ = ٣(١) − لو_هـ هـ + جـ

١ = ٣ − ١ + جـ

جـ = −١

⇐ ق(س) = ٣ هـ^٢س − لو_هـ |س+هـ| − ١

مثال إذا كان هـ اقترانًا قابلاً للاشتقاق وكان هـَ(س) = $\frac{٣}{س+١}$ ، س ≠ -١
وكان منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة (٠، ٢) فجد قاعدة الاقتران هـ.

الحل : قاعدة الاقتران هـ(س) = ∫ هـَ(س) دس ،

هـ(س) = ∫ $\frac{٣}{س+١}$ دس

نستخدم التعويض

نفرض ص = س + ١

$\frac{دص}{دس}$ = ١

دس = دص

⇐ هـ(س) = ∫ $\frac{٣}{ص}$ دص

هـ(س) = ٣ لوهـ |ص| + جـ

⇐ هـ(س) = ٣ لوهـ |س+١| + جـ

⇐ **نجد قيمة (جـ)**

فلكن هـ يمر بالنقطة (٠، ٢)

⇐ هـ(٠) = ٢

⇐ ٢ = ٣ لوهـ |٠+١| + جـ

٢ = ٣ لوهـ ١ + جـ

٢ = ٣(٠) + جـ

⇐ $\boxed{جـ = ٢}$

⇐ هـ(س) = ٣ لوهـ |س+١| + ٢

مثال إذا كان هـ(س) متصلاً وكان هـ(١) = ٤ ، هـ(٢) = ١٢
$\int_{١}^{٢}$ أ هـَ(س) دس = ١٦ ، أ ثابتة ، فجد قيمة أ.

الحل : أ $\int_{١}^{٢}$ هـَ(س) دس = ١٦

أ × [هـ(س)]$_{١}^{٢}$ = ١٦

أ × (هـ(٢) - هـ(١)) = ١٦

أ × (١٢ - ٤) = ١٦

٨ أ = ١٦ ⇐ $\boxed{أ = ٢}$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عند النقطة $(\text{س},\text{ص})$ يساوي $\text{هـ}^{(٢-\text{س})}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $(٢,١)$ فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل: الميل = المشتقة = $\text{هـ}^{(٢-\text{س})}$

← قاعدة الاقتران = $\int \text{قَ}(\text{س})\, \text{د}\text{س}$.

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{هـ}^{(٢-\text{س})}\, \text{د}\text{س}$$

نفرض $\text{ص} = ٢ - \text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -١$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-١} = -\text{دص}$$

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \int \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot -\text{دص}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = -\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = -\text{هـ}^{(٢-\text{س})} + \text{جـ}$$

← نجد قيمة جـ

المنحنى يمر بالنقطة $(٢,١)$

$$\Leftarrow \text{ق}(٢) = ١$$

$$\Leftarrow ١ = -\text{هـ}^{(٢-٢)} + \text{جـ}$$

$$١ = -١ + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٢}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{س}) = -\text{هـ}^{(٢-\text{س})} + ٢$$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عند النقطة $(\text{س},\text{ص})$ يساوي $\left(٢ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٢}, ١\right)$ ، فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل: الميل = المشتقة = $\left(٢ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)$

قاعدة الاقتران = $\int \text{قَ}(\text{س})\, \text{دس}$

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \left(٢ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right) \text{دس}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \left(٢ - \text{س}^{-٢}\right) \text{دس}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} - \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$$

نجد قيمة (جـ) وذلك من خلال :-

$$\text{ق}\left(\frac{١}{٢}\right) = ١$$

$$\Leftarrow ١ = ٢\left(\frac{١}{٢}\right) + \frac{١}{\left(\frac{١}{٢}\right)} + \text{جـ}$$

$$١ = ١ + ٢ + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{جـ} = -٢}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}} - ٢$$

تأكد

مثال: يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٢(ن + ١)^٢ م/ث أوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانيتين منذ بدء الحركة، علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١م

قواعد تستخدم للتأكد من الاجوبة :-

① $\int \text{هـ}^{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})}\,\text{د}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{هـ}^{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})} + \text{جـ}$

② $\int (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{د}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

③ $\int \frac{\text{و}}{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})}\,\text{د}\text{س} = \frac{\text{و}}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{أ}\text{س}+\text{ب}| + \text{جـ}$

④ $\int \text{جا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب})\,\text{د}\text{س} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{جتا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب}) + \text{جـ}$

⑤ $\int \text{جتا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب})\,\text{د}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{جا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب}) + \text{جـ}$

⑥ $\int \text{قا}^{2}(\text{أ}\text{س}+\text{ب})\,\text{د}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب}) + \text{جـ}$

مثال: اوجد التكاملات الآتية :

① $\int \text{هـ}^{(\text{٣س}+١)} \, \text{دس} = \frac{١}{٣} \, \text{هـ}^{(\text{٣س}+١)} + \text{ث}$

② $\int (\text{٢س}+٥)^{٤} \, \text{دس} = \frac{١}{٢} \, \frac{(\text{٢س}+٥)^{٥}}{٥} = \frac{١}{١٠} (\text{٢س}+٥)^{٥} + \text{ث}$

③ $\int \frac{٣}{\text{٢س}+١} \, \text{دس} = \frac{٣}{٢} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٢س}+١| + \text{ث}$

④ $\int \text{جا}(\text{٢س}+١) \, \text{دس} = \frac{-١}{٢} \, \text{جتا}(\text{٢س}+١) + \text{ث}$

⑤ $\int \text{جتا}(\text{٥س}+١) \, \text{دس} = \frac{١}{٥} \, \text{جا}(\text{٥س}+١) + \text{ث}$

⑥ $\int \text{قا}^{٢}(\text{٤س}+٢) \, \text{دس} = \frac{١}{٤} \, \text{ظا}(\text{٤س}+٢) + \text{ث}$

أسئلة على التعويض

واجب:

* أوجد التكاملات الآتية :-

① $\int س\ \text{جا}(س^{٢}+٤)\ دس$

② $\int (هـ^{-٣س} + \text{قا}^{٢}س)\ دس$ ،

③ $\int ٨س\ \text{جا}\ س^{٢}\ دس$ ،

④ $\int هـ^{س} + \text{قا}^{٢}(٥س)\ دس$ ،

⑤ $\int \frac{٢س+٣}{\sqrt{س^{٢}+٣س+١}}\ دس$ ،

⑥ $\int (٢س+٢)\ هـ^{س^{٢}+٢س}\ دس$ ،

⑦ $\int \left(هـ^{٢س} - \frac{٧}{س} + \text{قا}^{٢}(٢س)\right) دس$

⑧ $\int (س-١)\ \text{قا}^{٢}(س^{٢}-٢س)\ دس$ ،

⑨ $\int^{١} س^{٢}\left(\frac{٢}{س}-٢\right)^{٣} دس$

⑩ $\int ٧س\ \text{قا}^{٢}(س^{٢}-٣)\ دس$

⑪ $\int \sqrt[٣]{(٦-٢س)^{٥}}\ دس$ ،

⑫ إذا علمت أن ق(٤) = ١٧

ق(١) = −٦

احسب قيمة $\int_{١}^{٢} ٦س\ ق'(س^{٢})\ دس$ ،

⑬ $\int \text{قا}^{٢}\left(\frac{١}{٢}س+٣\right) دس$.

⑭ $\int \left(\frac{-٣}{س} + \frac{٢}{س} + هـ^{س}\right) دس$

س ≠ ٠ ،

⑮ $\int \frac{٢س+٥}{\text{جتا}^{٢}(س^{٢}+٥س)}\ دس$ ،

⑯ $\int س^{٢}\ \text{جا}\left(\frac{٢}{س}-١\right) دس$.

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* الدرس الخامس : تطبيقات التكامل المحدود
(ايجاد المساحات)

* هناك ثلاثة صيغ يأتي عليها سؤال المساحة وهي :-

① الصيغة الأولى :-

المساحة المحصورة بين محور السينات ومنحنى د(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب
او الفترة [أ ، ب] .

في هذه الحالة نساوي د(س) بالصفر ونجد قيم س ومن ثم نتأكد مما يلي :-

* اذا كانت قيم س (قيم س) تقع ضمن الفترة [أ ، ب] فاننا نجزئ المساحة الى مساحتين او أكثر حسب قيم س .
* اذا كانت قيم س (قيم س) لا تقع ضمن الفترة [أ ، ب] فاننا نجد المساحة مباشرة بعد أخذ أ ، ب حدود التكامل .

$$\Leftarrow م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, دس \right|$$

ملاحظة : دائماً قيمة المساحة موجبة .

مثال ٤ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى د(س) = س - ٣ ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٢

الحل:

س - ٣ = ٠

⟸ س = ٣

لكن ٣ ∉ [-١ ، ٢]

⟸ $م = \int_{-١}^{٢} (س - ٣)\, دس = \left[\frac{١}{٢} س^{٢} - ٣س \right]_{-١}^{٢}$

$= \left(\frac{١}{٢}(٢)^{٢} - ٣(٢) \right) - \left(\frac{١}{٢}(-١)^{٢} - ٣(-١) \right)$

$= \left(\frac{٤}{٢} - ٦ \right) - \left(\frac{١}{٢} + ٣ \right)$

$= \frac{٤}{٢} - ٦ - \frac{١}{٢} - ٣$

$= \frac{٣}{٢} - ٩ = \frac{٣ - ١٨}{٢} = \frac{-١٥}{٢}$

⟸ $م = \left| \frac{-١٥}{٢} \right| = \frac{١٥}{٢}$ ، المساحة دائماً موجبة.

مثال ٤ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين محور السينات ومنحنى د(س) = ٢ - ٢س والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢

الحل:

٢ - ٢س = ٠

⟸ ٢ = ٢س

⟸ س = ١

لكن ١ ∈ [٠ ، ٢]

⟸ 

⟸ المساحة الكلية (م) = م١ + م٢

نجد م١:

$م_{١} = \int_{٠}^{١} (٢ - ٢س)\, دس$

$= \left[٢س - س^{٢} \right]_{٠}^{١}$

$= (٢ - ١) - (٠)$

$= ١$

نجد م٢:

$م_{٢} = \int_{١}^{٢} (٢ - ٢س)\, دس$

$= \left[٢س - س^{٢} \right]_{١}^{٢}$

$= (٤ - ٤) - (٢ - ١)$

⟸ م٢ = -١

⟸ م٢ = |-١| = ١

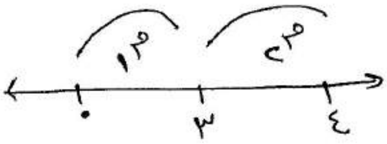
∴ م الكلية = م١ + م٢

= ١ + ١

= ٢ وحدة مساحة

مثال: اوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٦ - ٢س
ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٤] .

الحل: ٦ - ٢س = ٠ ← ٦ = ٢س ← س = ٣
لكن ٣ ∋ [٠ ، ٤] ← لذلك نجزئ المساحة الى مساحتين



← م١ = $\int_{٠}^{٣}$ (٦ - ٢س) دس

= [٦س - س٢]$_{٠}^{٣}$

= (٦(٣) - (٣)٢) - (٠)

= ١٨ - ٩ = ٩

$\boxed{\text{م١ = ٩}}$ ←

← م٢ = $\int_{٣}^{٤}$ (٦ - ٢س) دس

= [٦س - س٢]$_{٣}^{٤}$

= (٦(٤) - (٤)٢) - (٦(٣) - (٣)٢)

= (٢٤ - ١٦) - (١٨ - ٩)

= ٨ - ٩ = -١

$\boxed{\text{م٢ = |-١| = ١}}$ ←

← م الكلية = م١ + م٢
= ٩ + ١ = ١٠ وحدات مساحة .

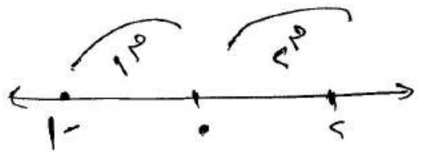
مثال ١ : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين محور السينات ومنحنى ق(س) = $٤س^٣$

والمستقيمين س = -١ ، س = ٢

الحل : $٤س^٣ = ٠$

$س^٣ = ٠$ بالقسمة على (٤)

س = ٠



⇐ لكن ٠ ∈ [-١ ، ٢]

⇐ نجد م١ = $\int_{-1}^{0} ٤س^٣ \, دس = [س^٤]_{-1}^{0}$

$= (٠)^٤ - (-١)^٤$

$= ٠ - ١ = -١$

⇐ م١ = |-١| = ١

⇐ نجد م٢ = $\int_{0}^{2} ٤س^٣ \, دس = [س^٤]_{0}^{2}$

= ١٦ - ٠

= ١٦

⇐ م ك = م١ + م٢

= ١ + ١٦

= ١٧ وحدة مساحة .

مثال: اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين محور السينات ومنحنى ق(س) = س² - ١
والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢

الحل:
س² - ١ = ٠
س² = ١
⟸ س = -١ ، ١
لكن -١ ∉ [٠ ، ٢] لذلك (-١) تهمل.
١ ∈ [٠ ، ٢] لذلك نجزئ المساحة

⟸ نجد م١ :

$$م_1 = \int_{0}^{1} (س^2 - 1)\, دس$$

$$= \left[\frac{س^3}{3} - س\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 1\right) - (0)$$

$$= \frac{-2}{3} \Leftarrow م_1 = \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

⟸ نجد م٢ :

$$م_2 = \int_{1}^{2} (س^2 - 1)\, دس$$

$$= \left[\frac{س^3}{3} - س\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$

⟸ م = م١ + م٢

م = ٢/٣ + ٤/٣ = ٦/٣ = ٢ وحدة مساحة.

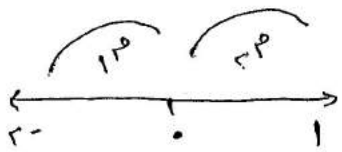
مثال ٤ اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س² − ٦س ومحور السينات في الفترة [−٢، ١]

الحل: ٣س² − ٦س = ٠

٣س (س − ٢) = ٠

اما ٣س = ٠ ⟸ س = ٠ ∈ [−٢، ١] ✓

أو س − ٢ = ٠ ⟸ س = ٢ ∉ [−٢، ١] مهمل.



نجد م١

$$\text{م}_1 = \int_{-2}^{0} (\text{٣س}^2 - \text{٦س})\, \text{دس}$$

$$= \text{س}^3 - \text{٣س}^2 \Big]_{-2}^{0}$$

$$= (0) - \left((-2)^3 - 3(-2)^2\right)$$

$$= -(-8 - 12) = -(-20) = 20 \text{ وحدة مساحة}.$$

نجد م٢

$$\text{م}_2 = \int_{0}^{1} (\text{٣س}^2 - \text{٦س})\, \text{دس} =$$

$$= \text{س}^3 - \text{٣س}^2 \Big]_{0}^{1} = (1 - 3) = -2$$

⟸ م٢ = |−٢| = ٢ وحدة مساحة.

نجد م الكلية

⟸ $\text{م}_{\text{ك}} = \text{م}_1 + \text{م}_2$

$= 20 + 2 = 22$ وحدة مساحة

مثال: اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين محور السينات ومنحنى

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$ والمستقيمين $\text{س} = -٣$ ، $\text{س} = ٣$

الحل: $\text{س}^{٢} + ١ = ٠$

$\text{س}^{٢} = -١$ لا تحلل (د(س) لا تقطع محور السينات).

$$\Leftarrow \text{م} = \int_{-٣}^{٣} (\text{س}^{٢} + ١) \, \text{د}\text{س}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س} \right]_{-٣}^{٣} = \left(\frac{(٣)^{٣}}{٣} + ٣ \right) - \left(\frac{(-٣)^{٣}}{٣} - ٣ \right)$$

$= (١٢) - (-١٢) = ٢٤$ وهذه مساحة.

مثال: اوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين محور السينات

ومنحنى $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢$ ، والمستقيمين $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٢$

الحل: $\text{س}^{٢} + ٢ = ٠$

$\text{س}^{٢} = -٢$ لا تحلل (د(س) لا تقطع محور السينات).

$$\Leftarrow \text{م} = \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٢} + ٢) \, \text{د}\text{س} = \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٢\text{س} \right]_{٠}^{٢}$$

$$= \left(\frac{٨}{٣} + ٤ \right) - (٠)$$

$= \frac{٢٠}{٣}$ وهذه مساحة.

مثال: اوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين محور السينات ومنحنى

$\text{د}(\text{س}) = ٦$ والمستقيمين $\text{س} = -٢$ ، $\text{س} = ٥$

الحل: $٦ \neq ٠ \Leftarrow \text{م} = \int_{-٢}^{٥} ٦ \, \text{د}\text{س} = ٦ \left(٥ - -٢ \right)$

$= ٦ \times ٧ = ٤٢$ وهذه مساحة.

الصيغة الثانية :-

* المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات .

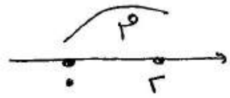
* في هذه الحالة نجد قيم س من خلال مساواة ق(س) بالصفر فتكون قيم س الناتجة هي نفسها حدود التكامل .

مثال٤ اوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $\text{ق(س)} = \text{س}^2 - 2\text{س}$ ومحور السينات .

الحل : $\text{س}^2 - 2\text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س} - 2) = 0$ اخذ س عامل مشترك .

$\Leftarrow \text{س} = 0 \text{ ، } 2$ حدود التكامل .



$\Leftarrow \text{م} = \int_{0}^{2} (\text{س}^2 - 2\text{س})\, \text{دس}$.

$= \left[\frac{\text{س}^3}{3} - \text{س}^2 \right]_{0}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 4 \right) - (0)$

$= \frac{8 - 12}{3}$

$= \frac{-4}{3} \Leftarrow \text{م} = \left| \frac{-4}{3} \right| = \frac{4}{3}$ وحدة مساحة

مثال٥ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $\text{ق(س)} = \text{س}^2 - 9$ ومحور السينات .

الحل : $\text{س}^2 - 9 = 0$

$\text{س}^2 = 9$

$\Leftarrow \text{س} = -3 \text{ ، } 3$ (حدود التكامل)

$\Leftarrow \text{م} = \int_{-3}^{3} (\text{س}^2 - 9)\, \text{دس} = (36)$ وحدة مساحة

اختبر نفسك واكمل الحل .

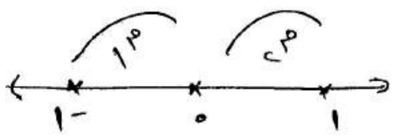
مثال: اوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س - س^{٣}$ ومحور السينات :

الحل : $س - س^{٣} = ٠$

$س\,(١ - س^{٢}) = ٠$

$س\,(١ - س)(١ + س) = ٠$

$\Leftarrow س = ٠ ، ١ ، -١$



$$\Leftarrow \boxed{م_{كلية} = م_{١} + م_{٢}}$$

* نأخذ $م_{١}$:

$$م_{١} = \int_{-١}^{٠} (س - س^{٣})\, دس$$

$$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٤}}{٤} \right]_{-١}^{٠} = (٠) - \left(\frac{(-١)^{٢}}{٢} - \frac{(-١)^{٤}}{٤} \right)$$

$$= -\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} \right)$$

$$= -\frac{١}{٤} \Leftarrow م_{١} = \left| -\frac{١}{٤} \right| = \frac{١}{٤}$$

وحدة مساحة

* نأخذ $م_{٢}$:

$$م_{٢} = \int_{٠}^{١} (س - س^{٣})\, دس$$

$$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٤}}{٤} \right]_{٠}^{١} = \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} \right) - (٠)$$

$$= \frac{١}{٤} \Leftarrow م_{٢} = \frac{١}{٤}$$ وحدة مساحة

$$\Leftarrow م_{ك} = م_{١} + م_{٢}$$

$$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$ وحدة مساحة

مثال: اوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $د(س) = ٥ - ٥س^٢$ ومحور السينات .

الحل : $٥ - ٥س^٢ = ٠$

$٥ = ٥س^٢$ بالقسمة على (٥)

$١ = س^٢$ اخذ الجذر التربيعي للطرفين .

$\Leftarrow س = -١ ، ١$ (حدود التكامل)

$$\Leftarrow م = \int_{-١}^{١} (٥ - ٥س^٢) \, دس$$

$$= \left[٥س - \frac{٥}{٣} س^٣ \right]_{-١}^{١}$$

$$= \left(٥ - \frac{٥}{٣}\right) - \left(-٥ + \frac{٥}{٣}\right)$$

$$= ٥ - \frac{٥}{٣} + ٥ - \frac{٥}{٣} \qquad -\frac{١٠}{٣}$$

$$= ١٠ - \frac{١٠}{٣} = \frac{٢٠}{٣}$$ وحدة مساحة .

اختبر فهمك

مثال: اوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $د(س) = س^٢ - \frac{١}{٤}$ ومحور السينات .

الصيغة الثالثة :-

* المساحة المحصورة بين منحنيين :-

خطوات الحل :-

① نساوي المنحنيين ببعض

② يتكون من ذلك معادلة نقوم بحلها وينتج من ذلك قيم س = { أ، ب }.
فتكون هي حدود التكامل . $أ < ب$

③ فتكون المساحة :

$$م = \int_{أ}^{ب} (\text{المنحنى الأكبر} - \text{المنحنى الأصغر})\, دس$$

④ لمعرفة المنحنى الأكبر من الأصغر نأخذ قيمة بين أ، ب مثل (ج)
ونعوضها في كلا الاقترانين ...
وبالتالي الاقتران الأكبر تكون منه قيمة التعويض أكبر
و الاقتران الأصغر تكون منه قيمة التعويض أصغر .

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين
ق(س) = $س^2$ ، هـ(س) = ٢س

الحل:

$س^2 = ٢س$ **(مساواة الاقترانين)**

$س^2 - ٢س = ٠$ **معادلة**

$س(س - ٢) = ٠$ **حل المعادلة.**

$\Leftarrow$ س = ٠ ، ٢ حدود التكامل

لمعرفة المنحنى الأكبر

	$س^2$	٢س
$\boxed{1}$	١	٢

$\boxed{٢س > س^2}$

$\Leftarrow م = \int_{0}^{2} (٢س - س^2)\, دس$

$= \left[س^2 - \frac{س^3}{٣} \right]_{0}^{2}$

$= \left(٤ - \frac{٨}{٣}\right) - (٠)$

$= \frac{٤}{٣}$ وحدة مساحة.

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $١ - س^2$
والمستقيم ص = -٣

الحل: $١ - س^2 = -٣$

$\Leftarrow س^2 - ١ - ٣ = ٠$

$س^2 - ٤ = ٠$

$س^2 = ٤$

$\Leftarrow$ س = -٢ ، ٢

لمعرفة المنحنى الأكبر

	$١ - س^2$	-٣
٠	١	-٣

$\boxed{١ - س^2 > -٣}$

$\Leftarrow م = \int_{-2}^{2} \left((١ - س^2) - (-٣)\right) دس$

$= \int_{-2}^{2} (١ - س^2 + ٣)\, دس$

$= \int_{-2}^{2} (٤ - س^2)\, دس$

$\Leftarrow م = \left[٤س - \frac{س^3}{٣} \right]_{-2}^{2}$

$= \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ - \frac{-٨}{٣}\right)$

$= ٨ - \frac{٨}{٣} + ٨ - \frac{٨}{٣}$

$= ١٦ - \frac{١٦}{٣} = \frac{٤٨ - ١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$
وحدة مساحة.

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٢ - س² ، م(س) = س .

الحل:

$٢ - \text{س}^٢ = \text{س}$

$\text{س}^٢ + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = -٢ ، ١$

نحدد الاقتران الأكبر :-

س	٢ - س²
٠	٢

$\boxed{٢ - \text{س}^٢ > \text{س}}$

$$\Leftarrow \text{م} = \int_{-٢}^{١} (٢ - \text{س}^٢ - \text{س})\, \text{دس}$$

$$= \left[٢\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \right]_{-٢}^{١}$$

$$= \left(٢ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}\right) - \left(-٤ + \frac{٨}{٣} - \frac{٤}{٢}\right)$$

$$= ٢ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤ - \frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٢}$$

$$= ٦ - \frac{٩}{٣} + \frac{٣}{٢}$$

$$= ٦ - ٣ + \frac{٣}{٢}$$

$$= ٣ + \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٢} \text{ وحدة مساحة}$$

مثال: اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² - ٤س والمستقيم ص = ٥

الحل:

$\text{س}^٢ - ٤\text{س} = ٥$

$\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥ = ٠$

$(\text{س} - ٥)(\text{س} + ١) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = ٥ ، -١$

نحدد الاقتران الأكبر

٥	س² - ٤س
٥	٠

$(\text{س}^٢ - ٤\text{س}) < ٥$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٥} (٥) - (\text{س}^٢ - ٤\text{س})\, \text{دس}$$

$$= \int_{-١}^{٥} (٥ - \text{س}^٢ + ٤\text{س})\, \text{دس}$$

$$= \left[٥\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣} + ٢\text{س}^٢ \right]_{-١}^{٥}$$

$$= \left(٢٥ - \frac{١٢٥}{٣} + ٥٠\right) - \left(-٥ + \frac{١}{٣} + ٢\right)$$

$$= ٢٥ - \frac{١٢٥}{٣} + ٥٠ + ٥ - \frac{١}{٣} - ٢$$

$$= \left(٧٨ - \frac{١٢٦}{٣}\right) = ٧٨ - ٤٢$$

$$= ٣٦ \text{ وحدة مساحة}$$

مثال: احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين
$ص - س = ٦$ ، $ص = س^٢$

الحل: نعيد كتابة $ص - س = ٦ \Leftarrow \boxed{ص = ٦ + س}$

$\Leftarrow س^٢ = ٦ + س$

$س^٢ - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

$\Leftarrow س = ٣ ، -٢$

لتحديد الاقتران الأكبر

$س^٢$	$٦ + س$
٠	٦

$\boxed{٦ + س > س^٢}$
الأكبر

تابع

$\Leftarrow م = \int_{-٢}^{٣} (٦ + س) - س^٢ \, دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-س^٢ + س + ٦) \, دس$

$= \Big[٦س + \frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} \Big]_{-٢}^{٣}$

$= \left(١٨ + \frac{٩}{٢} - ٩\right) - \left(-١٢ + ٢ + \frac{٨}{٣}\right)$

$= \left(٩ + \frac{٩}{٢}\right) - \left(-١٠ + \frac{٨}{٣}\right)$

$= ٩ + \frac{٩}{٢} + ١٠ - \frac{٨}{٣}$

$= ١٩ + \left(\frac{٩}{٢} - \frac{٨}{٣}\right) = ١٩ + \left(\frac{٢٧ - ١٦}{٦}\right)$

$= ١٩ + \frac{١١}{٦} = \frac{٦ \times ١٩ + ١ \times ١١}{٦}$

$= \frac{١١٤ + ١١}{٦} = \frac{١٢٥}{٦}$

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ١٦ - ٤س^٢$
والمستقيم $ص = ٠$

الحل: $١٦ - ٤س^٢ = ٠$

$٤س^٢ = ١٦$

$س^٢ = ٤$

$\Leftarrow س = -٢ ، ٢$

لتحديد المنحنى الأكبر ١-

$١٦ - ٤س^٢$	٠
١٦	٠

$١٦ - ٤س^٢ > ٠$

$\Leftarrow م = \int_{-٢}^{٢} (١٦ - ٤س^٢) - (٠) \, دس$

$= \Big[١٦س - \frac{٤}{٣}س^٣ \Big]_{-٢}^{٢}$

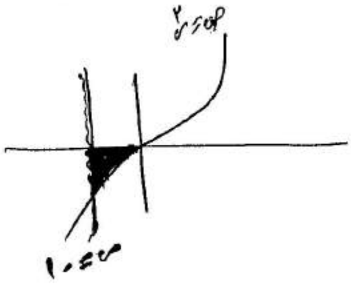
$= \left(٣٢ - \frac{٣٢}{٣}\right) - \left(-٣٢ + \frac{٣٢}{٣}\right)$

$= ٣٢ - \frac{٣٢}{٣} + ٣٢ - \frac{٣٢}{٣} = ٦٤ - \frac{٦٤}{٣}$

$= \frac{١٢٨}{٣}$ وحدة مساحة

(حالة خاصة)

* **مثال:** جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = س^3$ والمستقيم $\boxed{س = -1}$ ومحور السينات.



← حد تكامل

الحل: $س^3 = 0$

$\Leftarrow س = 0$ ← حد تكامل

$\Leftarrow م = \int_{-1}^{0} س^3 \, دس$

$= \left[\frac{س^4}{4}\right]_{-1}^{0} = (0) - \left(\frac{1}{4}\right)$

$= -\frac{1}{4} \Leftarrow م = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ وحدة مساحة.

ملاحظة

(منحنى العلوي - منحنى السفلي)

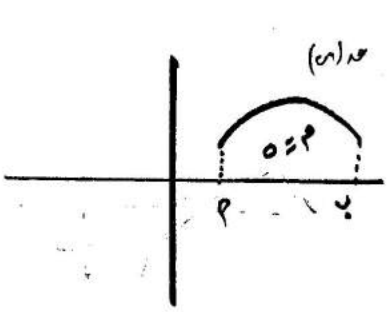
حل آخر: $\int_{-1}^{0} (0 - س^3) \, دس$

$= \frac{1}{4}$

ملاحظة

① قيمة المساحة دائماً موجبة اذا كانت المنحنى فوق محور السينات او تحت محور السينات.

② قيمة التكامل موجبة اذا كانت المنحنى فوق محور السينات وسالبة اذا كانت المنحنى تحت محور السينات.

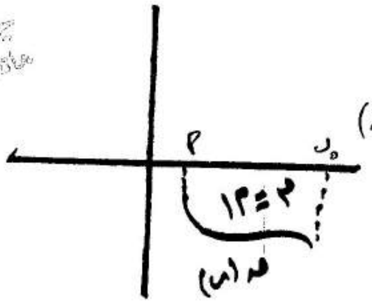


مثال: بالاعتماد على الشكل المجاور

فإن $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس = 5$ (فوق محور السينات).

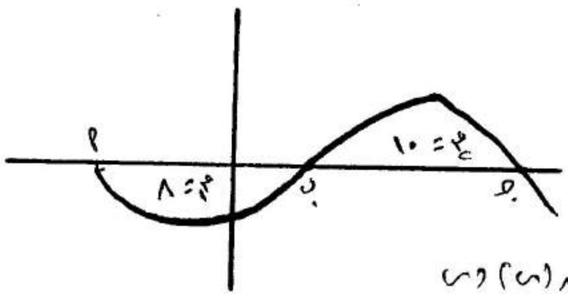
مثال: بالاعتماد على الشكل التالي:

فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = -12$ (تحت محور السينات)



مثال: بالاعتماد على الشكل التالي:

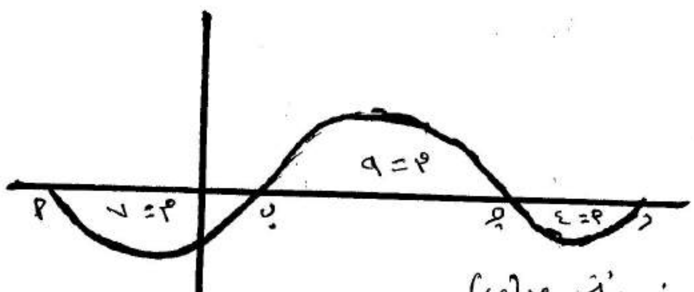
أوجد $\int_{\text{أ}}^{\text{ج}} \text{ق(س) دس}$



الحل:
$\int_{\text{أ}}^{\text{ج}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{ق(س) دس}$

$= \underset{\text{تحت}}{(-8)} + \underset{\text{فوق}}{(10)} = 2$

مثال:



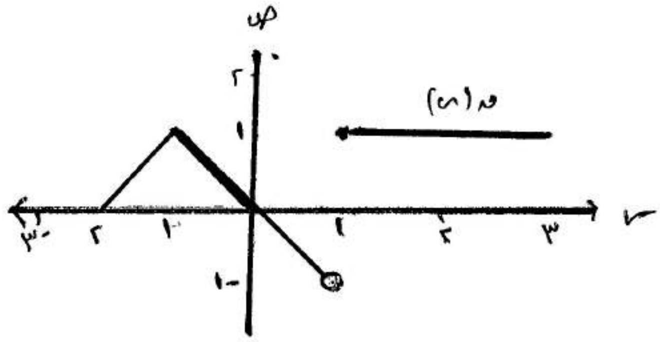
بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على الفترة [أ، د] أوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في الفترة [أ، د]

الحل: $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{ج}}^{\text{د}} \text{ق(س) دس}$

$= 7 + 9 + 4 = 20$ وحدة مساحة

مثال ٤ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [-٢ ، ٣]

اعتمد على الشكل لإيجاد قيمة $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) دس .



الدرس السادس : تطبيقات اقتصادية على التكامل

① الايراد الكلي د(س) :-

الايراد الكلي = $\int$ الايراد الحدي .

⇐ د(س) = $\int$ د'(س) دس ، حيث

* د(س) : الايراد الكلي

د'(س) : الايراد الحدي

دس : دالة التكامل

ملاحظة : قيمة ثابت التكامل (جـ) في حالة الايراد الكلي = صفر لذلك لا داعي لاضافة + جـ في الجواب النهائي .

مثال : اذا كانت اقتران الايراد الحدي لبيع (س) لعبة من لعب الاطفال التي تنتجها مصنع هو : د'(س) = ٣س٢ + ٦ اوجد الايراد الكلي د(س)

الحل : الايراد الكلي = $\int$ الايراد الحدي

د(س) = $\int$ د'(س) دس

= $\int$ (٣س٢ + ٦) دس

= س٣ + ٦س

مثال: إذا كان الإيراد الحدي لبيع (س) من الثلاجات يعطى بالاقتران
د'(س) = ٦٠ س² - ٣٠ س + ٦ دينارًا.
فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٤) ثلاجات.

الحل: د(س) = ∫ د'(س) دس .

د(س) = ∫ (٦٠ س² - ٣٠ س + ٦) دس

د(س) = ٢٠ س³ - ١٥ س² + ٦ س

⇐ د(٤) = ٢٠(٤)³ - ١٥(٤)² + ٦(٤)

= ٢٠(٦٤) - ١٥(١٦) + ٢٤

= ١٢٨٠ - ٢٤٠ + ٢٤

= ١٠٦٤ دينارًا.

مثال: إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع (س) من القطع من منتج ما هو
د'(س) = ٦٠ س² - ١٨ س + ٢٠ دينارًا.
فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٥) قطع.

الحل: د(س) = ∫ د'(س) دس

د(س) = ∫ (٦٠ س² - ١٨ س + ٢٠) دس

د(س) = ٢٠ س³ - ٩ س² + ٢٠ س

⇐ د(٥) = ٢٠(٥)³ - ٩(٥)² + ٢٠(٥)

= ٢٥٠٠ - ٢٢٥ + ١٠٠

= ٢٣٧٥ دينارًا.

واجب

مثال: اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) لعبة من لعب الاطفال هو
$د(س) = ٦ س^٢ - ٤ س + ٢$ ديناراً فجد الايراد الكلي الناتج
عن بيع (١٠) لعب.

واجب

مثال: اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س) كمبيوتر من انتاج
مصنع هو $د(س) = ٣ س^٢ - ٤ س + ١٠$ ديناراً فجد
الايراد الكلي الناتج عن بيع (٣٠) كمبيوتر

② فائض المستهلك (فك) وفائض المنتج (فج)

حفظ

أولاً : فائض المستهلك (فك) :-

فك = ∫ من ٠ إلى س١ (ق(س) − ع١) دس = ∫ من ٠ إلى س١ ق(س) دس − (ع١ × س١)

حفظ

ثانياً : فائض المنتج (فج) :-

فج = ∫ من ٠ إلى س١ (ع١ − ط(س)) دس = (ع١ × س١) − ∫ من ٠ إلى س١ ط(س) دس .

* حيث :-

* س١ : كمية التوازن (قيمة ثابتة وموجبة دائماً) .
* ع١ : سعر التوازن (قيمة ثابتة)
* ع = ق(س) اقتران (السعر – الطلب)
* ع = ط(س) اقتران (السعر – العرض)

*** طرق ايجاد س١ (كمية التوازن) اذا كانت مجهولة وذلك حسب معطيات السؤال وهي :**

① من خلال مساواة ع١ = ق(س) .

② من خلال مساواة ع١ = ط(س) .

③ من خلال مساواة ق(س) = ط(س) .

* طرق ايجاد $ع_1$ (سعر التوازن) اذا كانت مجهوله وذلك حسب معطيات السؤال وهي:

① من خلال تعويض $س_1$ في د(س) فنستبدل قيمة ع وهي $ع_1$

② من خلال تعويض $س_1$ في ق(س) فنستبدل قيمة ع وهي $ع_1$

مثال: اذا كانت ع = د(س) = ٥٠ - ٢س يمثل اقتران (السعر الطلب) حيث (ع) السعر بالدنانير (س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند $ع_1 = 10$ فاجد قيمة فائض المستهلك.

الحل: نجد اولاً قيمة $س_1$ لاننا نحتاج اليها في القانون:

$$ع_1 = د(س)$$

$$10 = 50 - 2س$$

$$\Leftarrow \ -40 = -2س$$

$$\Leftarrow \ س = 20 \ \Leftarrow \ \boxed{س_1 = 20}$$

$$ف_ك = \int_0^{س_1} د(س)\,دس - (ع_1 \times س_1)$$

$$= \int_0^{20} (50 - 2س)\,دس - (10 \times 20)$$

$$= \left[50س - س^2\right]_0^{20} - 200$$

$$= \left(50(20) - (20)^2\right) - (0) - 200$$

$$= 1000 - 400 - 200$$

$$= 400 \text{ ديناراً}$$

مثال: اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $ع = ق(س) = ١٦ - ٢س$
حيث ع السعر بالدنانير، س عدد القطع المنتجة وكان السعر ثابتاً عند
$ع_1 = ١٠$ دنانير فجد فائض المستهلك.

الحل: نجد اولاً قيمة $س_1$ لاننا نحتاج اليها في القانون.

$$ع_1 = ق(س)$$
$$١٠ = ١٦ - ٢س$$
$$-٢س = ١٠ - ١٦$$
$$-٢س = -٦$$
$$\Leftarrow س = \frac{-٦}{-٢}$$
$$\Leftarrow \boxed{س_1 = ٣}$$

$$\Leftarrow فق = \int_0^3 ق(س)\,دس - (ع_1 \times س_1)$$
$$فق = \int_0^3 (١٦ - ٢س)\,دس - (٣ \times ١٠)$$
$$فق = \left[١٦س - س^2\right]_0^3 - ٣٠$$
$$فق = (٤٨ - ٩) - (٠) - ٣٠$$
$$فق = ٣٩ - ٣٠ = ٩ \text{ دنانير}$$

مثال: اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $ع = ق(س) = ٣٦ - ٢س$
وكان اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو $ع = هـ(س) = ٣س + ١٦$
فجد فائض المستهلك عند سعر التوازن.

الحل: نجد اولاً قيمة $س_1$ من خلال مساواة $\boxed{ق(س) = هـ(س)}$
وبعد ذلك نعوض قيمة $س_1$ اما في ق او في هـ فنحصل على $ع_1$

$$\Leftarrow ق = هـ$$
$$٣٦ - ٢س = ٣س + ١٦$$
$$٣٦ - ١٦ = ٣س + ٢س$$
$$٢٠ = ٥س$$
بالقسمة على (٥)
$$\frac{٢٠}{٥} = \frac{٥س}{٥}$$
$$٤ = س$$
$$\Leftarrow \boxed{س_1 = ٤}$$

نعوض قيمة $س_1$ اما في ق او في هـ

$$\Leftarrow ع_1 = ق(٤) = ٣٦ - ٢(٤)$$
$$= ٢٨$$
$$\Leftarrow \boxed{ع_1 = ٢٨}$$

$$\Leftarrow فق = \int_0^4 ق(س)\,دس - (ع_1 \times س_1)$$
$$= \left[٣٦س - س^2\right]_0^4 - (٤ \times ٢٨)$$
$$= (١٤٤ - ١٦) - (٠) - ١١٢$$
$$= ١٦ \text{ ديناراً}$$

اكمل

مثال: إذا كان اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين معطى بالعلاقة

ع = هـ(س) = ٦ + ٢س ، حيث ع السعر بالدنانير

(س) عدد الوحدات المنتجة، وكان السعر ثابتاً عندما ع١ = ٢٤

فجد فائض المنتج

الحل: نجد أولاً قيمة س١ لأننا نحتاج إليها في القانون

ع١ = هـ(س)

٢٤ = ٦ + ٢س

١٨ = ٢س

⇐ س = ٩

⇐ $\boxed{\text{س١ = ٩}}$

⇐ فج = (ع١ × س١) − ∫ من ٠ إلى س١ هـ(س) دس

= (٢٤ × ٩) − ∫ من ٠ إلى ٩ (٦ + ٢س) دس

= ٢١٦ − ([٦س + س٢] من ٠ إلى ٩)

= ٢١٦ − ((٥٤ + ٨١) − (٠))

= ٢١٦ − ١٣٥ = ٨١ ديناراً .

ملاحظة

نلاحظ أنه في قانون فائض المستهلك فإننا نعوض د(س)

بينما في قانون فائض المنتج نعوض هـ(س) .

مثال: إذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = د(س) = ٤٨ − ٣س

وكان اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = ٥س

فجد فائض المنتج عند سعر التوازن :

الحل: نجد أولاً قيمة س١ من خلال مساواة $\boxed{\text{د(س) = هـ(س)}}$ وبعد ذلك نعوض قيمة س١ إما في د أو هـ فنحصل على ع١

⇐ د(س) = هـ(س)

٤٨ − ٣س = ٥س

٤٨ = ٨س

⇐ س = ٦

⇐ $\boxed{\text{س١ = ٦}}$

⇐ نعوض س١ في د أو هـ

⇐ ع١ = هـ(٦) = ٥ × ٦

= ٣٠

⇐ $\boxed{\text{ع١ = ٣٠}}$

تابع ⇐

⇐ ف م = (ع₁ × س₁) − ∫ من ٠ إلى س₁ ق(س) دس ،

= (٣٠ × ٦) − ∫ من ٠ إلى ٦ (٥س) دس

= ١٨٠ − [٥ س² / ٢] من ٠ إلى ٦

= ١٨٠ − (٥/٢ (٦)² − ٥/٢ (٠)²)

= ١٨٠ − (٢١٠/٢ − ٠)

= ١٨٠ − ١٠٥ = ٧٥ ديناراً .

مثال ٤ إذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = د(س) = ٤٣ − ٤س
وكان اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو ع = ق(س) = س + ٣
أوجد ما يلي :-

١ كمية التوازن .
٢ سعر التوازن .
٣ فائض المستهلك .
٤ فائض المنتج .

الحل :-

١ نجد كمية التوازن (س₁)

د = ق

٤٣ − ٤س = س + ٣

٤٣ − ٣ = ٥س

٤٠ = ٥س

⇐ س = ٨

⇐ $\boxed{\text{س}_1 = 8}$

٢ نجد سعر التوازن ع₁

ع₁ = ق(٨) = ٨ + ٣

= ١١

⇐ $\boxed{\text{ع}_1 = 11}$

تابع ...

③ نجد فائض المستهلك (فس)

$فس = \int_{٠}^{س_{١}} د(س)\, دس - (س_{١} \times ع_{١})$

$= \int_{٠}^{٨} (٤٣ - ٤س)\, دس - (١١ \times ٨)$

$= \left[٤٣س - ٢س^{٢}\right]_{٠}^{٨} - ٨٨$

$= ٤٣(٨) - ٢(٨)^{٢} - (٠) - ٨٨$

$= ٣٤٤ - ١٢٨ - ٨٨$

$= ١٢٨$ ديناراً .

④ نجد فائض المنتج (فن)

$فن = (ع_{١} \times س_{١}) - \int_{٠}^{س_{١}} ق(س)\, دس$

$= (١١ \times ٨) - \int_{٠}^{٨} (س + ٣)\, دس$

$= ٨٨ - \left[\frac{١}{٢}س^{٢} + ٣س\right]_{٠}^{٨}$

$= ٨٨ - \left(\left(\frac{٦٤}{٢} + ٢٤\right) - (٠)\right)$

$= ٨٨ - (٣٢ + ٢٤)$

$= ٨٨ - ٥٦$

$= ٣٢$ ديناراً .

اختبر ، جرّب

مثال: اذا كانت اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين هو $ع = د(س) = ١١ + ٢س^{٢}$ حيث ع هي السعر بالدينار (س) عدد القطع المنتجة وأن السعر ثابت عند $ع_{١} = ٢١$ ديناراً فجد فائض المنتج .

اختبر، جذب

مثال: اذا كانت اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = د(س) = ٧٠ - ٤ س
وكانت اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو ع = م(س) = ١٠ + ٦ س
فأوجد فائض المستهلك عند سعر التوازن.