بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة الأردنية الهاشمية

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٧ / الدورة الشتوية

(اختبار تجريبي)

المبحث: الرياضيات — مدة الامتحان: ساعتان

الفرع: العلمي . الصناعي — اليوم والتاريخ: / ٢٠١٦

ملحوظة: أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (٥). علماً بأنّ عدد الصّفحات (٣).

السؤال الأول: (٢٢ علامة)

أ) جد كلاً مما يلي:

١) $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - \sqrt{س + ١٠} - ٧}{س^2 - س - ٦}$ (٦ علامات)

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤س - س^2 - جا(\sqrt{س} - ٢)}{س - ٤}$ (٥ علامات)

٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتا ٢س}{٤س - \pi}$ (٤ علامات)

ب) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{٥س - س^2} & ، |س - ٣| < ١ \\ س^2 + ٢ & ، [س] = ٤ \end{cases}$ (٧ علامات)

فابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجاله.

السؤال الثاني: (١٩ علامة)

أ) إذا كان ق^{٣}(ص^{٢}) = ٥س^{٢} + ٣ . وكانت ص = ١ عند س = ١ . وأيضاً ق′(١) = ٥.

فجد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١ ، ص = ١ (٥ علامات)

ب) إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٨ جتا ٢س . فجد ق′(س) باستخدام تعريف المشتقة. (٨ علامات)

ج) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٥} . وكانت ق″ (س) = ٤٠س^{ن} . فجد قيمة ن. (٦ علامات)

السؤال الثالث: (١٩ علامة)

أ) إذا كان المستقيم ٤س − ٢ص + ٥ = ٠ يمس منحنى ق(س) عند النقطة (٣ ، ٢). وكان المستقيم ٣س+٩ص-٤=٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل(س) عند النقطة (٣ ، ١٠) . أوجد (ق × ل)′ (٣). (٧ علامات)

ب) إذا كان ق(س+ص) = ق(س) × ق(ص) . وكان ق(٠) = ق′(٠) = ١. أثبت أنّ ق′(س) = ق(س) (٥علامات)

ج) من قمّة برج ارتفاعه ١٠٠ م . قُذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = أ ن − ٥ ن^{٢} . حيث أ>٠ . وكانت سرعة الجسم لحظة الوصول إلى الأرض تُساوي ٦٠ م / ث . فجد قيمة أ. (٧ علامات)

السؤال الرابع: (١٤ علامة)

أ) إذا كان متوسّط تَغير ق(س) في [١ ، ٢] هو (٣). ومتوسط تغيّر ق(س) في [٢ ، ٥] هو (٨). أوجد متوسّط التّغير لـ ق(س) في [١ ، ٥].

ب) إذا كانت س = ظتا ص . أثبت أنّ ص″ (١+س^{٢}) = جا ٢ص. (٥ علامات)

ج) ق (س) = $\sqrt{س + ١}$. هـ(س) = أ س^{٢} . أوجد قيمة الثّابت أ . علماً بأنّ (هـ ○ ق)′ (٣) = ١٢ (٤ علامات)

السؤال الخامس: (٢٦ علامة)

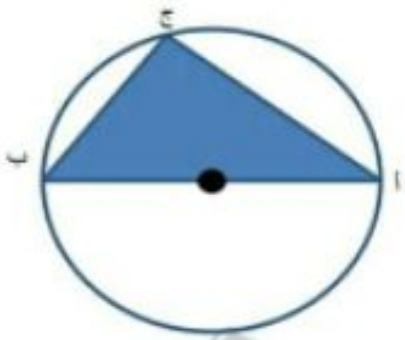
أ) ليكن ق(س) = (٢س + س^{٢})$^{\frac{١}{٣}}$. حيث س ∈ ح . أوجد: (٨ علامات)

١) فترات التّزايد والتّناقص للاقتران ق(س).

٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س). وبيّن نوعها.

ب) في الشّكل المجاور أب قطر في دائرة طوله (٢٠ سم)، تتحرك النّقطة (ج) على القوس $\overset{\frown}{أب}$ بحيث يزيد قياس الزّاوية جـ ب أ بمعدّل ٣° / د . احسب معدّل تغيّر مساحة المثلث أ ب جـ عندما يكون قياس الزّاوية حـ ب أ = $\frac{\pi}{٣}$

(٩ علامات)



ج) أوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم يُمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٤ سم، وارتفاعه ١٢ سم، بحيث يقع رأس المخروط الدّاخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي. (٩ علامات)

انتهت الأسئلة

جـ١) ٢)

١) $\lim_{س\to٣} \frac{س^٤ - ٧ - \sqrt{س+١}}{س^٤ - س - ٦٠}$

نقسم البسط والمقام على $س-٣$

البسط: $\lim_{س\to٣} \frac{س^٤ - ٧ - \sqrt{س+١}}{س-٣}$

$= \lim_{س\to٣} \frac{س^٤ - ٩ + ٩ - ٧ - \sqrt{س+١} + ٢ - ٢}{س-٣}$

$= \lim_{س\to٣} \frac{س^٤ - ٩}{س-٣} + \lim_{س\to٣} \frac{٢ - \sqrt{س+١}}{س-٣}$

$= \lim_{س\to٣} \frac{(س-٣)(س+٣)(س^٢+٩)}{س-٣} + \lim_{س\to٣} \frac{٤ - (س+١)}{(٢+\sqrt{س+١})(س-٣)} \times \frac{٢+\sqrt{س+١}}{٢+\sqrt{س+١}}$

$= ٦ + \lim_{س\to٣} \frac{-١}{(٢+\sqrt{س+١})} = ٦ - \frac{١}{٤} = \frac{٢٣}{٤}$

المقام: $\lim_{س\to٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س-٣}$

$= \lim_{س\to٣} \frac{(س-٣)(س+٢)}{س-٣}$

$= ٣ + ٢ = ٥$

$\therefore$ النهاية $= \frac{\frac{٢٣}{٤}}{٥} = \frac{٢٣}{٤} \times \frac{١}{٥}$

$= \frac{٢٣}{٢٠}$

٢) $\lim_{س\to٤} \frac{٤س - س^٢ - جا(\pi س - ٢)}{س-٤}$

$= \lim_{س\to٤} \frac{٤س - س^٢}{س-٤} - \lim_{س\to٤} \frac{جا(\pi س - ٢)}{س-٤}$

$= \lim_{س\to٤} \frac{س(٤-س)}{-(٤-س)} - \lim_{س\to٤} \frac{جا(\pi س - ٢)}{\frac{\pi س - ٢}{٤}}$

$= \lim_{س\to٤} -س - \lim_{س\to٤} \frac{١}{(٢+\sqrt{\pi س - ٢})}$

$= -٤ - \frac{١}{٤} = \left(-\frac{١٧}{٤}\right)$

٣) $\lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جتا ٢س}{٤س - \pi}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جتا ٢س}{٤(س - \frac{\pi}{٤})}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جا(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{٤(س - \frac{\pi}{٤})}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جا ٢(\frac{\pi}{٤} - س)}{٤(س - \frac{\pi}{٤})}$

$= -\frac{٢}{٤} = \left(-\frac{١}{٢}\right)$

ب) $م(س) = \begin{cases} \sqrt{٥س - س^٢} - ٦ & ، -١ < س < ٠ \\ س^٢ + ٢ & ، ٠ \leq س < ٤ \\ \sqrt{٥س - س^٢} & ، ٤ < س < ٥ \end{cases}$

مجال الاقتران $م(س)$ هو $(-١، ٥)$
نبحث الاتصال على الفترة $(-١، ٥)$

* القواعد: $\sqrt{٥س - س^٢}$ متصل على $(٤، ٥)$
لأن مافتت الجذر موجب ← − | + | −
$س^٢ + ٢$ متصل على $(٠، ٤)$ ـ كثير حدود

* نقاط التحول: عند $س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^-} م(س) = \sqrt{٢٠ - ١٦} = \sqrt{٤} = ٢$

$\lim_{س \to ٤^+} م(س) = (٤)^٢ + ٢ = ١٨$

$\therefore \lim_{س \to ٤} م(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow م$ غير متصل عند $س = ٤$

$\therefore م$ متصل على $(-١، ٥) - \{٤\}$

ب) $م(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ + ٨ جتا ع - س^٢ - ٨ جتا س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٨ جتا ع - ٨ جتا س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} (ع + س) + \lim_{ع \to س} \frac{-٢ جا(\frac{ع+س}{٢}) \times ٢ جا(\frac{ع-س}{٢})}{ع - س}$

$= ٢س - ١٦ \lim_{ع \to س} جا ع + س \times \lim_{ع \to س} \frac{جا(ع - س)}{ع - س}$

$= ٢س - ١٦ جا س \times ١$

$= ٢س - ١٦ جا س$

جـ) $م(س) = \frac{١}{٣} ن \times س^{ن-١}$

$م'(س) = \frac{١}{٣} ن(ن-١) \times س^{ن-٢}$

$م''(س) = \frac{١}{٣} ن(ن-١)(ن-٢) \times س^{ن-٣}$

$\frac{١}{٣} ن(ن-١)(ن-٢) \times س^{ن-٣} = ٤٠ س^{ن-٣}$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ١٢٠$

نبحث عن ثلاثة أعداد متتالية
حاصل ضربها ١٢٠

$٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$

$\therefore \boxed{ن = ٦}$

جـ٢) أ) نشتق الطرفين

$٣ م'(ص^٢) \times م'(ص^٢) \times ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٥$

نعوض $س = ١$ $ص = ١$

$٣ م'(١) \times م'(١) \times ٢ \frac{د ص}{د س} = ١٥$

لإيجاد $م(١)$ $\Leftarrow م'(١) = ٥ + ٣ = ٨$

$م(١) = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

$\Leftarrow ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٢ \frac{د ص}{د س} = ١٥$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١٥}{٢ \times ٥ \times ٤ \times ٢} = \frac{١}{٨}$

جـ٣) م

$(هـ \times ل)'(٣) = هـ(٣) \times ل'(٣) + ل(٣) \times هـ'(٣)$

$هـ(٣) = ٢$ $\quad ل(٣) = -١$

$٤ - ٢\frac{ص}{س} = ٠ \Leftarrow \frac{ص}{س} = ٢$

$هـ'(٣) = ٢$

$٣ + ٩\frac{ص}{س} = ٠ \Leftarrow \frac{ص}{س} = -\frac{١}{٣}$

المستقيم عمودي على منحنى ل

$\therefore ل'(٣) = ٣$

$\Leftarrow (هـ \times ل)'(٣) = (٢)(٣) + (-١)(٢) = ٤$

ب) $هـ'(٠) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٠+هـ) - هـ(٠)}{هـ} = ١$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ) - ١}{هـ} = ١$

$هـ'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(س+هـ) - هـ(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(س) \times هـ(هـ) - هـ(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(س)(هـ(هـ) - ١)}{هـ}$

$= هـ(س) \times ١$

$= هـ(س)$

ج) $ف(ن) = ٢ن^٣ - ٥ن^٢ + ١٠٠$

$ع(ن) = \frac{ف}{ن} = ٢ن^٢ - ٥ن + ١٠٠$

$ع'(ن) = \frac{ف}{ن} = ٤ن - ١٠$

$٤ن - ١٠ = ٠ \Leftarrow ٤ن = ١٠ \Leftarrow ن = ٢.٥$

عند الوصول الى الارض ف(ن) = ٠

$٢ن^٣ - ٥ن^٢ + ١٠٠ = ٠$

$(٢.٥ - ن)(ن^٢ - ٢٠ن - ٤٠) = ٠$

$ن = ٢.٥$ أو $ن^٢ - ٢٠ن - ٤٠ = ٠$

$ن = \frac{٢٠ \pm \sqrt{٤٠٠ + ١٦٠}}{٢} = \frac{٢٠ \pm \sqrt{٥٦٠}}{٢}$

$ن = ١٠ + \sqrt{١٤٠}$ أو $ن = ١٠ - \sqrt{١٤٠}$

جـ٤) م) في الفترة [١، ٣] :

$\frac{د هـ(س)}{د س} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٢} = ٣$

$\Leftarrow هـ(٣) - هـ(١) = ٦$ ——— (١)

في الفترة [٣، ٥] :-

$\frac{د هـ(س)}{د س} = \frac{هـ(٥) - هـ(٣)}{٢} = ٨$

$\Leftarrow هـ(٥) - هـ(٣) = ١٦$ ——— (٢)

بالجمع $\Leftarrow$ $هـ(٣) - هـ(١) = ٦$

$هـ(٥) - هـ(٣) = ١٦$

$هـ(٥) - هـ(١) = ٢٢$

$\therefore$ في الفترة [١، ٥] :

$\frac{د هـ(س)}{د س} = \frac{هـ(٥) - هـ(١)}{٥ - ١} = \frac{٢٢}{٤}$

ب) $س = ظتا ص$ نشتق الطرفين

$1 = -قتا^2 ص \times ص'$

$\Leftarrow ص' = \frac{-1}{قتا^2 ص} = -جا^2 ص$

$ص'' = -2 جا ص \times جتا ص \times ص'$

$= -(2 جا ص جتا ص) \times \frac{-1}{قتا^2 ص}$

$ص'' = \frac{جا 2 ص}{1 + ظتا^2 ص} = \frac{جا 2 ص}{1 + س^2}$

$ص''(1 + س^2) = جا 2 ص$

مدرات التناقص $(-\infty, -1]$

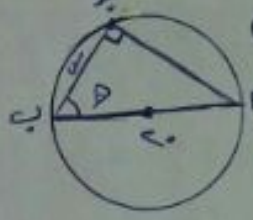
مدرات التزايد $[-1, \infty)$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $س = -1$

قيمتها $م(-1) = \sqrt{2(-1) + (-1)^2}$

$= \sqrt{-1} = -1$

ب)



$د = \frac{ق ه}{نق} = 3^\circ$

$= \frac{\pi}{180} \times 3$

$= \frac{\pi}{60}$ راديان / د

$م = \frac{1}{2} \times ٢٠ \times س \times جا ه$

$م = 10 س جا ه$

لكن: $جتا ه = \frac{س}{٢٠}$

$س = ٢٠ جتا ه$ علاقة فرعية

$م = 10 (٢٠ جتا ه) \times جا ه$

$م = 100 (2 جا ه جتا ه)$

$م = 100 جا 2 ه$ ← نشتق

$\frac{د م}{نق} = 100 \times جتا 2 ه \times 2 \times \frac{د ه}{نق}$

$= 100 \times جتا 2 (\frac{\pi}{3}) \times 2 \times \frac{\pi}{60}$

$= 100 \times \frac{1}{2} - \times 2 \times \frac{\pi}{60}$

$= -\frac{5}{3} \pi$

٤) $(هـ \circ م)'(3) = هـ'(م(3)) \times م'(3)$

$12 = هـ'(4) \times \frac{1}{4}$

$12 = 12 \times \frac{1}{4}$

$م = 4$

$م(س) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2س}}$

$هـ(س) = 2 س^2$

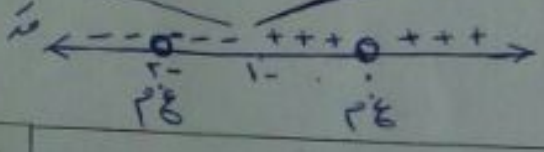
جـ٥) أ) $م'(س) = \frac{1}{3} (2س + س^2)^{-\frac{2}{3}} (2 + 2س)$

$= \frac{2 + 2س}{\sqrt[3]{(1 + س + س^2)^2}} =$ صفر

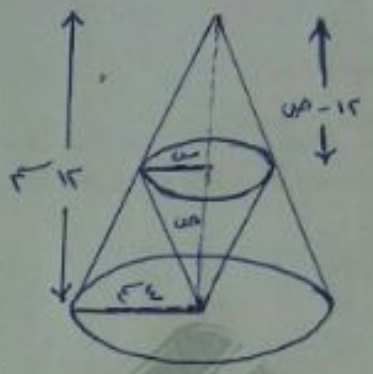
$2 + 2س = 0 \Leftarrow س = -1$ ← البسط

$2س + س^2 = 0 \Leftarrow س(2 + س) = 0$

$س = 0$ $س = -2$ ← المقام



ع)



$ع = \frac{1}{3}\pi س^2 ص$

و س تشابه ∆ ∆ :

$\frac{س}{4} = \frac{12 - ص}{12}$

$3س = 12 - ص$

$\Leftarrow$ **ص = 12 - 3س**

$\Leftarrow ع = \frac{1}{3}\pi س^2 (12 - 3س)$

$ع = \frac{\pi}{3}(12س^2 - 3س^3)$ ← نشتقه

$ع' = \frac{\pi}{3}(24س - 9س^2) =$ صفر

$24س - 9س^2 = 0$

$8س - 3س^2 = 0 \Leftarrow س(8 - 3س) = 0$

س = 0 أو **$س = \frac{8}{3}$**

نختبر أيهما قيمة عظمى

$ع'' = \frac{\pi}{3}(24 - 18س)$

$ع''(0) = \frac{24\pi}{3}$ (+) صغرى ×

$ع''(\frac{8}{3}) =$ (−) قيمة عظمى

عند **$س = \frac{8}{3}$** ←

$\therefore ع = \frac{\pi}{3}(\frac{8}{3})^2 (12 - 3 \times \frac{8}{3})$

$ع = \frac{\pi}{3}(\frac{8}{3})^2 \times 4$

$ع = \frac{\pi}{3} \times \frac{64}{9} \times 4$

$= \frac{256\pi}{27}$ سم^3