بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة الأردنية الهاشمية

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٧ / الدورة الشتوية

(اختبار تجريبي)

المبحث: الرّياضيات　　مدة الامتحان: ساعتان

الفرع: العلمي ، الصناعي　　اليوم والتاريخ:　/　/ ٢٠١٦

ملحوظة: أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (٥)، علماً بأنّ عدد الصّفحات (٣).

السؤال الأول: (٢٢ علامة)

أ) جد كلاً مما يلي:

١) $\lim_{س \to 3} \frac{س^{٢} - \sqrt{س + ١} - ٧}{س^{٢} - س - ٦}$ (٦ علامات)

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤س - س^{٢} - جا(\sqrt{س} - ٢)}{س - ٤}$ (٥ علامات)

٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتا ٢س}{٤س - \pi}$ (٤ علامات)

ب) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{٥س - س^{٢}} & ، |س - ٣| < ١ \\ س^{٢} + ٢ & ، [س] = ٤ \end{cases}$ (٧ علامات)

فابحث في اتّصال الاقتران ق(س) على مجاله.

السّؤال الثاني: (١٩ علامة)

أ) إذا كان ق^{٣}(ص^{٢}) = ٥س^{٣} + ٣ ، وكانت ص = ١ عند س = ١ ، وأيضاً ق′(١) = ٥.

فجد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١ ، ص = ١ (٥ علامات)

ب) إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ + ٨ جتا ٢س ، فجد ق′(س) باستخدام تعريف المشتقّة. (٨ علامات)

ج) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}$ $س^{ن}$ ، وكانت ق″ (س) = ٤٠$س^{ن-٣}$ ، فجد قيمة ن. (٦ علامات)

السؤال الثالث: (١٩ علامة)

أ) إذا كان المستقيم ٤س – ٢ص + ٥ = ٠ يمس منحنى ق(س) عند النقطة (٣ ، ٢)، وكان المستقيم ٣س+٩ص-٤=٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل(س) عند النّقطة (٣ ، -١) ، أوجد (ق × ل)′ (٣). (٧ علامات)

ب) إذا كان ق(س+ص) = ق(س) × ق(ص) ، وكان ق(٠) = ق′(٠) = ١. أثبت أنّ ق′(س) = ق(س) (٥علامات)

ج) من قمّة برج ارتفاعه ١٠٠ م ، قُذِف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = أ ن – ٥ $ن^{٢}$ ، حيث أ>٠ ، وكانت سرعة الجسم لحظة الوصول إلى الأرض تُساوي ٦٠ م / ث ، فجد قيمة أ. (٧ علامات)

السؤال الرابع: (١٤ علامة)

أ) إذا كان متوسّط تّغير ق(س) في [١ ، ٢] هو (٣)، ومتوسط تغيّر ق(س) في [٢ ، ٥] هو (٨)، أوجد متوسّط التّغير لـ ق(س) في [١ ، ٥]. (٥ علامات)

ب) إذا كانت س = ظتا ص ، أثبت أنّ ص″ (١+$س^{٢}$) = جا ٢ص. (٥ علامات)

ج) ق (س) = $\sqrt{س+١}$ ، هـ(س) = أ $س^{٣}$ ، أوجد قيمة الثّابت أ ، علماً بأنّ (هـ O ق)′ (٣) = ١٢ (٤ علامات)

السؤال الخامس: (٢٦ علامة)

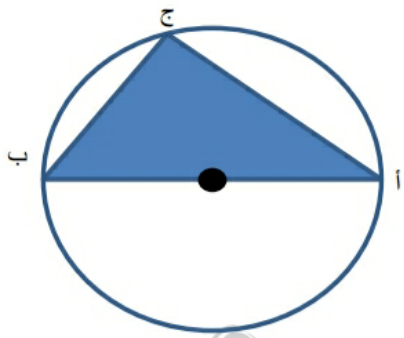
أ) ليكن ق(س) = ($٢س + س^{٢}$)$^{\frac{١}{٣}}$ ، حيث س ∋ ح ، أوجد: (٨ علامات)

١) فترات التّزايد والتّناقص للاقتران ق(س).

٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)، وبيّن نوعها.

ب) في الشّكل المجاور أب قطر في دائرة طوله (٢٠ سم)، تتحرك النّقطة (ج) على القوس $\overset{\frown}{أ\ ب}$ بحيث يزيد قياس الزّاوية جـ ب أ بمعدّل 3° / د ، احسب معدّل تغيّر مساحة المثلث أ ب جـ عندما يكون قياس الزّاوية حـ ب أ = $\frac{\pi}{3}$

(٩ علامات)



ج) أوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم يُمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٤ سم، وارتفاعه ١٢ سم، بحيث يقع رأس المخروط الدّاخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي. (٩ علامات)

انتهت الأسئلة

جـ١) أ)

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٧\sqrt{س+١} - ٧}{س^٤ - س - ٦}$

نقسم البسط والمقام على $س - ٣$

البسط: $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٧\sqrt{س+١} - ٧}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٩ + ٩ - ٢س + ٢ - ٧\sqrt{س+١} - ٧}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٩}{س - ٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{٢ - ٧\sqrt{س+١}}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{٢ - ٧\sqrt{س+١}}{س - ٣} \times \frac{٢ + ٧\sqrt{س+١}}{٢ + ٧\sqrt{س+١}}$

$= ٦ + \lim_{س \to ٣} \frac{٤ - ٤(س+١)}{(س - ٣)(٢ + ٧\sqrt{س+١})}$

$= ٦ + \frac{-١}{٢+٢} = ٦ - \frac{١}{٤} = \frac{٢٣}{٤}$

المقام: $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - س - ٦}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)}{س - ٣}$

$= ٣ + ٢ = ٥$

$\therefore$ النهاية $= \frac{\frac{٢٣}{٤}}{٥} = \frac{٢٣}{٤} \times \frac{١}{٥}$

$= \frac{٢٣}{٢٠}$

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤س - س^٢ - جا(٧س - ٢٨)}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٤س - س^٢}{س - ٤} - \lim_{س \to ٤} \frac{جا(٧س - ٢٨)}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(٤ - س)}{س - ٤} - \lim_{س \to ٤} \frac{جا(٧س - ٢٨)}{\frac{س - ٤}{٧س - ٢٨}}$

$= \lim_{س \to ٤} -س - \lim_{س \to ٤} \frac{١}{\frac{(٧س - ٢٨)(٧س + ٢٨)}{٧س - ٢٨}}$

$= -٤ - \frac{١}{٤} = \frac{-١٧}{٤}$

٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظتا ٢س}{٤س - \pi}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظتا ٢س}{٤(س - \frac{\pi}{٤})}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{٤(س - \frac{\pi}{٤})}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا ٢(\frac{\pi}{٤} - س)}{٤(س - \frac{\pi}{٤})}$

$= -\frac{٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ب) $م(س) = \begin{cases} \sqrt{٥س - س^{٢}} - ٦ & ، ١ < س - ٣ < ٢ \\ س^{٢} + ٢ & ، ٤ \geq س > ٥ \end{cases}$

$= \begin{cases} \sqrt{٥س - س^{٢}} & ، ٢ < س < ٤ \\ س^{٢} + ٢ & ، ٤ \geq س > ٥ \end{cases}$

مجال الاقتران م(س) هو (٢، ٥)

نبحث الاتصال على الفترة (٢، ٥)

* القواعد: $\sqrt{٥س - س^{٢}}$ متصل على (٢، ٤)

لأنه ما تحت الجذر موجب ← − | + | − ← (٠، ٥)

$س^{٢} + ٢$ متصل على (٤، ٥) .. كثير حدود

* نقاط التحول: عند $س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^{-}} م(س) = \sqrt{٢٠ - ١٦} = \sqrt{٤} = ٢$

$\lim_{س \to ٤^{+}} م(س) = (٤)^{٢} + ٢ = ١٨$

∴ $\lim_{س \to ٤}$ م(س) غير موجودة

⇐ م غير متصل عند $س = ٤$

∴ م متصل على (٢، ٥) − {٤}

جـ٢) أ) نشتق الطرفين

$٣ م^{٢}(ص^{٣}) \times م'(ص^{٣}) \times ٣ص^{٢} \times \frac{د ص}{د س} = ٥$

نعوض $س = ١$ ، $ص = ١$

$٣ م^{٢}(١) \times م'(١) \times ٣ \times \frac{د ص}{د س} = ١٥$

لإيجاد م(١) ⇐ $م^{٣}(١) = ٥ + ٣ = ٨$

$م(١) = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

⇐ $٣ \times ٤ \times ٥ \times ٣ \times \frac{د ص}{د س} = ١٥$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١٥}{٢ \times ٥ \times ٤ \times ٣} = \frac{١}{٨}$

ب) $م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} + ٨ جتا ٢ع - س^{٢} - ٨ جتا ٢س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٨ جتا ٢ع - ٨ جتا ٢س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} ٨ \left(\frac{-٢ جا(\frac{ع+٢س}{٢}) جا(\frac{ع-٢س}{٢})}{ع - س} \right)$

$= \lim_{ع \to س} (ع + س) + \lim_{ع \to س} -١٦ جا(\frac{ع+٢س}{٢}) \times \lim_{ع \to س} \frac{جا(\frac{ع-٢س}{٢})}{ع - س}$

$= ٢س - ١٦ جا ٢س \times ١$

$= ٢س - ١٦ جا ٢س$

جـ) $م(س) = \frac{١}{٣} \times ن \times س^{ن-١}$

$م'(س) = \frac{١}{٣} \times ن \times (ن-١) \times س^{ن-٢}$

$م''(س) = \frac{١}{٣} \times ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times س^{ن-٣}$

$\frac{١}{٣} \times ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times س^{ن-٣} = ٤٠ س^{ن-٣}$

$ن \times (ن-١) \times (ن-٢) = ١٢٠$

نبحث عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها ١٢٠

$٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$

∴ $ن = ٦$

(ج٣) م)

$(م \times ل)'(٣) = م(٣) \times ل'(٣) + ل(٣) \times م'(٣)$

$م(٣) = ٢$ $\quad ل(٣) = -١$

$٤ - ٢\frac{ص}{س} = ٠ \Leftarrow \frac{ص}{س} = ٢$

$م'(٣) = ٢$

$٣ + ٩\frac{ص}{س} = ٠ \Leftarrow \frac{ص}{س} = -\frac{١}{٣}$

المستقيم عمودي على منحنى ل

$\therefore ل'(٣) = ٣$

$\Leftarrow (م \times ل)'(٣) = (٢)(٣) + (-١)(٢) = ٤$

ب) $م'(٠) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(٠ + هـ) - م(٠)}{هـ} = ١$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{م(هـ) - ١}{هـ} = ١$

$م'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س + هـ) - م(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س) \times م(هـ) - م(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س)(م(هـ) - ١)}{هـ}$

$= م(س) \times ١$

$= م(س)$

ج) $ف(ن) = ٢ن^٣ - ١٥ن^٢ + ١٠٠$

$ع(ن) = \frac{ف}{ن} = ٢ن^٢ - ١٥ن$

$٢ن^٢ - ١٥ن = ٦٠ \Leftarrow ع = ٦٠$

$٢ن^٢ - ١٥ن - ٦٠ = ٠$

عند الوصول الى الأرض ف(ن) = ٠

$٢ن^٣ - ١٥ن^٢ + ١٠٠ = ٠$

$ن(٢ن^٢ - ١٥ن + ١٠٠) = ٠$

$٢ن^٣ - ١٥ن^٢ + ١٠٠ن = ٠$

$\div ٥$

$٢ن^٣ - ٦ن^٢ + ٢٠ن = ٠$

$ن(ن^٢ - ١٢ن + ٢٠) = ٠$

$ن(ن - ١٠)(ن - ٢) = ٠$

$ن = ١٠$ أو $ن = ٢$

$ن = ١٠ \Leftarrow ع = ٦٠ - ١٠(١٠) = -٤٠$

$ن = ٢ \Leftarrow ع = ٦٠ - ١٠(٢) = ٤٠$

نأخذ $ع = ٤٠$

(ج٤) م) في الفترة [١، ٢]:

$\frac{\Delta م(س)}{\Delta س} = \frac{م(٢) - م(١)}{١} = ٣$

$\Leftarrow م(٢) - م(١) = ٣$ ——— (١)

في الفترة [٢، ٥]:-

$\frac{\Delta م(س)}{\Delta س} = \frac{م(٥) - م(٢)}{٣} = ٨$

$\Leftarrow م(٥) - م(٢) = ٢٤$ ——— (٢)

بالجمع $\Leftarrow$ $م(٢) - م(١) = ٣$

$م(٥) - م(٢) = ٢٤$

$م(٥) - م(١) = ٢٧$

$\therefore$ في الفترة [١، ٥]:

$\frac{\Delta م(س)}{\Delta س} = \frac{م(٥) - م(١)}{٥ - ١} = \frac{٢٧}{٤}$

ب) $س = ظتا\ ص$ نشتق الطرفين

$1 = -قتا^2 ص \times ص'$

$\Leftarrow ص' = \frac{-1}{قتا^2 ص} = -جا^2 ص$

$ص'' = -2\ جا ص \times جتا ص \times ص'$

$= -(2\ جا ص\ جتا ص) \times \frac{-1}{قتا^2 ص}$

$ص'' = \frac{جا 2ص}{1 + ظتا^2 ص} = \frac{جا 2ص}{1 + س^2}$

$ص''(1 + س^2) = جا 2ص$

فترات التناقص $(-\infty, -1]$

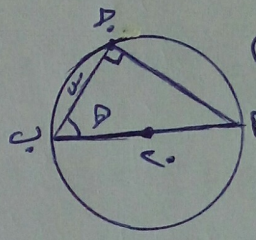
فترات التزايد $[-1, \infty)$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $س = -1$

قيمتها $م(-1) = \sqrt[3]{2(-1) + (-1)^2}$

$= \sqrt[3]{-1} = -1$

ب)



$د/ ٣° = \frac{د ه}{ن س}$

$= \frac{\pi}{180} \times 3$

$= \frac{\pi}{60}$ راديان/د

$م = \frac{1}{2} \times ٢٠ \times س \times جا ه$

$م = ١٠ س\ جا ه$

لكن: $جتا ه = \frac{س}{٢٠}$

$\boxed{س = ٢٠\ جتا ه}$ علاقة فرعية

$م = ١٠ (٢٠ جتا ه) \times جا ه$

$م = ١٠٠ (2\ جا ه جتا ه)$

$م = ١٠٠ جا 2ه$ ← نشتق

$\frac{د م}{ن س} = ١٠٠ \times جتا 2ه \times 2 \times \frac{د ه}{ن س}$

$= ١٠٠ \times جتا 2(\frac{\pi}{3}) \times 2 \times \frac{\pi}{60}$

$= ١٠٠ \times -\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\pi}{60}$

$= -\frac{5\pi}{3}$

٤) $(هـ \circ م)'(٣) = هـ'(م(٣)) \times م'(٣)$

$١٢ = هـ'(٤) \times \frac{1}{4}$

$١٢ \times ٤ = هـ'(٤)$

$\boxed{هـ'(٤) = ٤٨}$

$م(س) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2س}}$

$م'(س) = -\frac{1}{2}(1 + 2س)^{-\frac{3}{2}} \times 2$

$= \frac{-1}{\sqrt{(1 + 2س)^3}}$

$م'(٤) = \frac{-1}{\sqrt{(9)^3}} = -\frac{1}{27}$

$هـ'(س) = ٣ س^2$

$هـ'(٤) = ٣ \times ١٦ = ٤٨$

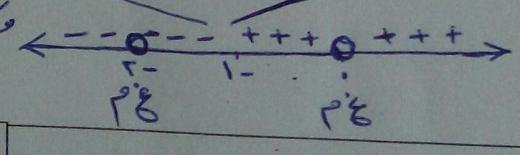
جـ٥) م) $م'(س) = \frac{1}{3}(2س + س^2)^{-\frac{2}{3}}(2 + 2س)$

$= \frac{2 + 2س}{\sqrt[3]{(2س + س^2)^2}}$ = صفر

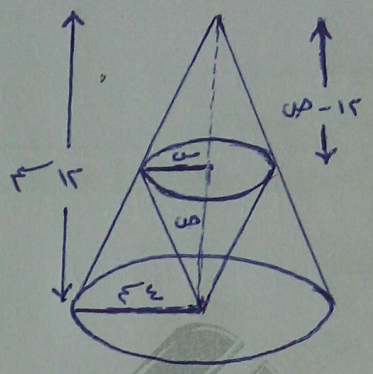
$2 + 2س = ٠ \Leftarrow \boxed{س = -1}$ ← البسط

$2س + س^2 = ٠ \Leftarrow س(2 + س) = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ $\boxed{س = -2}$ ← المقام



٤)



$ح = \frac{1}{3} \pi س^2 ص$

و س تشابه Δ Δ :

$\frac{س}{4} = \frac{12-ص}{12}$

$3س = 12 - ص$

$\Leftarrow \boxed{ص = 12 - 3س}$

$\Leftarrow ح = \frac{1}{3} \pi س^2 (12 - 3س)$

$ح = \frac{\pi}{3} (12 س^2 - 3 س^3)$ ← نشتقه

$ح' = \frac{\pi}{3} (24 س - 9 س^2) =$ صفر

$24 س - 9 س^2 = 0$

$8 س - 3 س^2 = 0 \Leftarrow س(8 - 3س) = 0$

$\boxed{س = 0}$ أو $\boxed{س = \frac{8}{3}}$

نختبر أيهما قيمة عظمى

$ح'' = \frac{\pi}{3} (24 - 18 س)$

$ح''(0) = \frac{24\pi}{3}$ (+) صغرى ×

$ح''(\frac{8}{3}) =$ (−) قيمة عظمى ✓

عند $\boxed{س = \frac{8}{3}}$

$\therefore ح = \frac{\pi}{3} (\frac{8}{3})^2 (12 - 3 \times \frac{8}{3})$

$ح = \frac{\pi}{3} (\frac{8}{3})^2 \times 4$

$ح = \frac{\pi}{3} \times \frac{64}{9} \times 4$

$= \frac{256\pi}{27}$ سم^3