السؤال الأول :- (٨ علامة)

٣٢ أ) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٦س+٩} - ٣ - ٥س^{٢}}{س}$ = ؟ (١)

٣٨ (١٠)

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٦س+٩} - ٣ - ٥س^{٢}}{س} \times \frac{\sqrt{٦س+٩} + ٣ + ٥س^{٢}}{\sqrt{٦س+٩} + ٣ + ٥س^{٢}}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٦س + ٩ - (٣ + ٥س^{٢})^{٢}}{س(\sqrt{٦س+٩} + ٣ + ٥س^{٢})}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٦س + ٩ - ٩ - ٣٠س^{٢} - ٢٥س^{٤}}{س(\sqrt{٦س+٩} + ٣ + ٥س^{٢})}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٦ - ٣٠س - ٢٥س^{٣}}{\sqrt{٦س+٩} + ٣ + ٥س^{٢}}$$

وبما أن المقام $\to$ صفر عند $س \to 0$ فإن البسط $= 0$

$$٦ + ٦ب = 0 \Leftarrow ٦ + ٦ب - ٠ = 0$$

$$ب = -١$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٦س+٩} - ٣}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{ب س^{٢}}{س}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{٦س + ٩ - ٩}{س(\sqrt{٦س+٩} + ٣)} + \lim_{س \to 0} ب س$$

$$\frac{٦}{٣ + ٣} + ٠ = ٠$$

$$ب = -١ \Leftarrow ١ + ب = ٠$$

الأستاذ أحمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner

س١ ب) نبحث في اتصال م(س) عند س = ١

* م(١) = $\frac{1}{2}$ ، م(س) معرّف عند س = ١ ①

* نجد $\lim_{س \to 1^-}$ م(س) = $\lim_{س \to 1^-}$ $\frac{س}{2} - 1 - \frac{1}{2}$ ①

$= \frac{س}{2} - 1 - \frac{1}{2}$ ①

$= \frac{س}{2} - \frac{3}{2}$ ①

$\lim_{س \to 1^-}$ م(س) = $\frac{1}{2} - 3 = -1$ ①

ونجد $\lim_{س \to 1^+}$ $\frac{س - [س]}{1 + ظا(س^2 - 1)}$ ①

$= \lim_{س \to 1^+}$ $\frac{س - 1}{ظا(س^2 - 1)}$ ① $\times \frac{(س+1)}{(س+1)}$

$= \lim_{س \to 1^+}$ $\frac{(س^2 - 1)}{ظا(س^2 - 1)}$ ① $\times \lim_{س \to 1^+} \frac{1}{(س+1)}$

نفرض أن ص = $س^2 - 1$ ①

عندما س $\to 1^+$ ، ص $\to 0^+$

$= \lim_{ص \to 0^+}$ $\frac{ص}{ظا ص}$ ① $\times \frac{1}{2}$ ①

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ①

بما أن $\lim_{س \to 1^+}$ م(س) $\neq$ $\lim_{س \to 1^-}$ م(س) ⇐ فالمطلوب ①

م(س) غير متصل عند س = ١ ①

س١ ج)

١) ج ③

٢) ب ③

الأستاذ أحمد عويس 0785536266

Scanned by CamScanner

(٨٨ بلاية)

مثال ٩) $\lim_{س \to 0} \frac{ن ا جاس}{\sqrt{س^٣ + س^٤}}$ (١٠)

$= \lim_{س \to 0} \frac{ن ا جاس}{\sqrt{س^٣(س+١)}} = \lim_{س \to 0} \frac{ن ا جاس}{|س| \sqrt{س+١}}$ ①

$\because$ $|س| = \begin{cases} س & ، س \geq 0 \\ -س & ، س < 0 \end{cases}$ ①

$\therefore$ لابد ان نجد النهاية عن يمين الصفر وعن يساره

$\Leftarrow \lim_{س \to 0^+} \frac{ن ا جاس}{\sqrt{س+١}}$ ①

$= \lim_{س \to 0^+} ن ا \frac{جاس}{س} \times \frac{١}{\sqrt{س+١}}$ ①

$= ١ \times ١ = ١$ ⊕

$\lim_{س \to 0^-} \frac{ن ا جاس}{-\sqrt{س+١}}$ ①

$= \lim_{س \to 0^-} ن ا \frac{جاس}{س} \times \frac{١}{-\sqrt{س+١}}$ ①

$= ١ \times -١ = -١$ ⊕

بما أن $\lim_{س \to 0^+} \frac{ن ا جاس}{\sqrt{س+١}} \neq \lim_{س \to 0^-} \frac{ن ا جاس}{-\sqrt{س+١}}$ ①

$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{ن ا جاس}{\sqrt{س^٣ + س^٤}}$ غير موجودة ①

الأستاذ أحمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الثاني:

٩٥

ب) $م(س) = س^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{\sqrt{س}}$ ، $س > 0$

$م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$ ①

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{\sqrt{ع}} - \left(س^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{\sqrt{س}}\right)}{ع - س}$ ①

ترتيب + كوزجع

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{2}{3}}}{ع - س} - \lim_{ع \to س} \frac{\frac{3}{\sqrt{ع}} - \frac{3}{\sqrt{س}}}{ع - س}$ ①

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع^{\frac{1}{3}} - س^{\frac{1}{3}})(ع^{\frac{1}{3}} + س^{\frac{1}{3}})}{(ع^{\frac{1}{3}} - س^{\frac{1}{3}})(ع^{\frac{2}{3}} + ع^{\frac{1}{3}}س^{\frac{1}{3}} + س^{\frac{2}{3}})} - \lim_{ع \to س} \frac{3س^{\frac{1}{2}} - 3ع^{\frac{1}{2}}}{ع^{\frac{1}{2}}س^{\frac{1}{2}}(ع - س)}$ ①

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{\frac{1}{3}} + س^{\frac{1}{3}}}{ع^{\frac{2}{3}} + ع^{\frac{1}{3}}س^{\frac{1}{3}} + س^{\frac{2}{3}}} \times \lim_{ع \to س} \frac{3س^{\frac{1}{2}} - 3ع^{\frac{1}{2}}}{ع^{\frac{1}{2}}س^{\frac{1}{2}}(ع - س)} \times \frac{3س^{\frac{1}{2}} + 3ع^{\frac{1}{2}}}{3س^{\frac{1}{2}} + 3ع^{\frac{1}{2}}}$ ①

$= س^{-2} - \lim_{ع \to س} \frac{9 - 9}{ع^{\frac{1}{2}}س^{\frac{1}{2}}(ع - س)(3س^{\frac{1}{2}} + 3ع^{\frac{1}{2}})}$ ①

$= س^{-2} + 0$ ①

$= \frac{9}{س^{\frac{1}{2}}(س^{\frac{1}{2}})} + س^{-2}$ ①

$م'(س) = \frac{3}{س^{\frac{3}{2}}} + س^{-2}$ ، $م'(4) = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$

* إذا أوجد المشتقة بأخذ حاجة
استخدام القوانين يأخذ
علامتين

٦) أ) م ③

ب) ج ④

الأستاذ احمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الثالث : (٣٤) علامة

أ) $ن(س) = \frac{(س + [\frac{1}{2} + س])^{٤}}{٤ - س^{٢}}$ ، $هـ(س) = ٨ + س^{٣}$ ١١٤ ١١٥

عند $س = ١$

$ن(١) = \frac{(١ + ١)^{٤}}{٤ - ١^{٢}}$ ①

$ن'(س) = \frac{٤(٤ - س^{٢})^{٣}(-٢س)(س + ١)^{٤} - (٤ - س^{٢})^{٤}(س + ١)^{٣}(١)}{(٤ - س^{٢})^{٨}}$ ①

$هـ'(س) = ٣س^{٢}$ ①

① $\frac{د}{د س}(ن(س) هـ(س)) = ن(س) هـ'(س) + هـ(س) ن'(س)$

① $\frac{د}{د س}(ن(س) هـ(س)) = ن(١) هـ'(١) + هـ(١) ن'(١)$

$= \frac{٤}{١} \times \frac{١٢}{٣} + \frac{٩}{١} \times \frac{٣٢ \times ٨ - ١٦ \times ٤}{٤}$ ① ① ①

$= ١٦ + ٩٦ + ٣٢$ ①

$= ١٤٤$ ①

بحيث أن مجموعها ١٤٤

⊗ إذا قام الطالب بإيجاد

$(ن \times هـ)(س) = ن(س) \times هـ(س)$ يعطى من (٦) علامات

لشرط أن يكون الناتج صحيح

للاستاذ احمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الثالث :

١٨٣ ب) $م(س) = جا^2 س - \frac{1}{2} جتا 2س$ ، $س \in [0 ، 2\pi]$

١٨٩ $م'(س) = 2 جا س جتا س + جا 2س$ ①

١٩٧ $= 2 جا س جتا س + 2 جا س جتا س$ ①

$= 4 جا س جتا س = 0$ أو $جا 2س = 0$ ①+①

$جا س = 0 \Leftarrow س = 0 ، \pi$ ①

$جتا س = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2}$ ①

إشارة $م'(س)$: + + + + + + − − − − − − + + + + + + ①

$0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{4}$

① ١) الاقتران $م(س)$ متزايد في الفترتين $[0 ، \frac{\pi}{4}]$ ، $[\pi ، \frac{3\pi}{4}]$

① الاقتران $م(س)$ متناقص في الفترة $[\frac{\pi}{4} ، \pi]$

① ٢) للاقتران $م(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = \frac{\pi}{4}$ وقيمتها $م(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}$

① للاقتران $م(س)$ قيمة صغرى محلية عند $س = \pi$ وقيمتها $م(\pi) = -\frac{1}{2}$

١٣ $م'(س) = -4 جا س + 4 جتا س$ ①

$= 4(جتا^2 س - جا^2 س) = 0$

$\Leftarrow جتا^2 س - جا^2 س = 0 \Leftarrow جتا^2 س = جا^2 س$

$جتا 2س = 0$ أو $جتا س = \pm جا س$ ①

$\Leftarrow س = \frac{\pi}{4} ، \frac{5\pi}{4}$ ①

$س = \frac{3\pi}{4}$ ①

إذا أخطأ الطالب في إيجاد $س$ غير ما سبق وعلاوته على أوجدها وعلاوته وعلاوته على الخطأ

∴ إشارة $م'(س)$: + + + + + + − − − − − − + + + + + + − − −

$0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4}$

① الاقتران $م(س)$ قيمة للأعلى في الفترتين $[0 ، \frac{\pi}{4}]$ ، $[\frac{3\pi}{4} ، \frac{5\pi}{4}]$

س ٣ ج) ١) د ② ٢) ب ③ ٣) ب

الأستاذ أحمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner

رقم الصفحة في الكتاب

(٣٠ علامة)

٤ س ٩) منحنى العلاقة $\frac{3}{4}$ س $= ٢ص^{٢} - ٦ص$ ١٦٤

نجد نقط تقاطع منحنى العلاقة مع محور الصادات $\Leftarrow$ س $= ٠$

① $٠ = ٢ص^{٢} - ٦ص$ ① ①

$٠ = ٢ص(ص - ٣) \Leftarrow ص = ٠$ ، $ص = ٣$

نقط التقاطع لمنحنى العلاقة مع محور الصادات هي

① $(٠، ٠)$ ، $(٣، ٠)$ ①

نجد الميل: $\frac{3}{4} = ٤ص ص' - ٦ص'$ ①

$\frac{3}{4} = ص'(٤ص - ٦) \Leftarrow ص' = \frac{٣}{٤(٤ص - ٦)}$ ①

ميل المماس الأول $\Leftarrow \frac{٣}{٤(-٦)} = -\frac{١}{٨}$ ①

ميل المماس الثاني $\Leftarrow \frac{٣}{٤(٦)} = \frac{١}{٨}$ ①

① ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

معادلة المماس الأول $\Leftarrow$ ص $= -\frac{١}{٨}$ س ①

معادلة المماس الثاني $\Leftarrow$ ص $= \frac{١}{٨}$ س $+ ٣$ ①

الأستاذ أحمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner

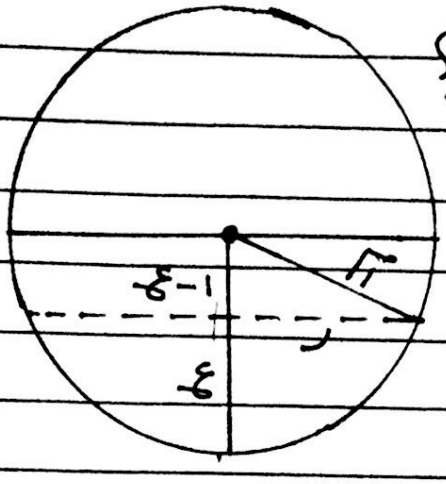
رقم الصفحة في الكتاب

١٧٧

س ٤ ب)

$\frac{كـ ع}{كـ ن} = \frac{1}{4}$ م/د ، $\frac{كـ م}{كـ ن} = ؟؟$

ن = ٢ د ①



مساحة سطح الماء في الوعاء = مساحة دائرة

① م = π $ر^2$

① $\frac{كـ م}{كـ ن} = 2\pi ر \frac{كـ ر}{كـ ن}$

من الشكل أيضاً ٥

① $ر^2 + (ع-1)^2 = 1$

① $2ر \frac{كـ ر}{كـ ن} + 2(ع-1)\frac{كـ ع}{كـ ن} = 0$

$\frac{كـ م}{كـ ن} = 2\pi \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)$ م/د

$= \frac{\pi}{4}$ م/د ①

بعد دقيقتين يكون ع = $\frac{1}{4} \times 2$

① $ر = \frac{1}{2}$

① $ر^2 + \frac{1}{4} = 1$

① $ر = \frac{\sqrt{3}}{2}$

① $ر = \frac{3}{4} \Leftarrow$

① $2ر \frac{كـ ر}{كـ ن} + 2(\frac{1}{4})(-\frac{1}{4}) = 0$

$\frac{1}{4} = \frac{كـ ر}{كـ ن}$

① $\frac{كـ ع}{كـ ن} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

س ٤ ج)

ب) ١ ، ٤ ③

ج) ٩ ③

الأستاذ أحمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner

رقم الصفحة في الكتاب

١٥١

(٣٠ علامة)

س ٥) ع ص ع

٣ جاس = جا ص

① ٣ جتاس = جتا ص صَ ①

⇐ صَ = ① ٣ جتاس / جتا ص بتربيع الطرفين

① (صَ)² = ① ٩ جتا²س / جتا²ص = ٩(١ − جا²س) / جتا²ص

من المعادلة الأولية جاس = جا ص / ٣ ⇐ جا²س = جا²ص / ٩ ①

∴ (صَ)² = ① ٩(١ − جا²ص / ٩) / جتا²ص

= ① ٩ − جا²ص / جتا²ص = ① ٩ / جتا²ص − جا²ص / جتا²ص

= ٩ قا²ص − طا²ص ①

الأستاذ أحمد موسى 0785536266

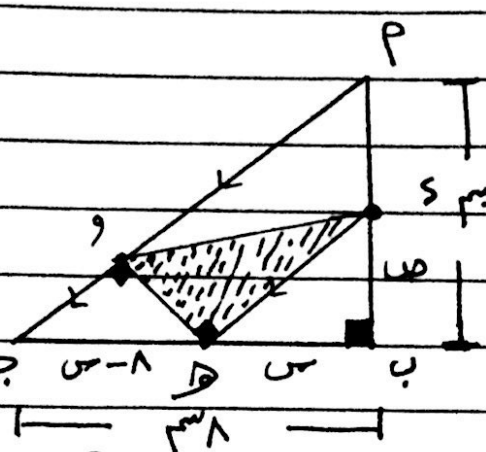
Scanned by CamScanner

رقم الصفحة في الكتاب

٢١٦

السؤال الخامس :

(ب)



نفرض أن ب ك = ص ، ب د = س

$م_{(\triangle و د ك)} = \frac{1}{2} \times د ك \times ب د$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} (٨ - س) \times \frac{5}{4} س$

$= \frac{3}{8} (٨ س - س^2)$

$م' = \frac{3}{8} (٨ - ٢ س) = ٠$

$٨ - ٣ س = ٠$

$٣ س = ٨$

$س = \frac{٨}{٣}$

+ + + | − − −

$\frac{٨}{٣}$

البرمساحة للمثلث عند $س = \frac{٨}{٣}$

$م(\frac{٨}{٣}) = \frac{3}{8} (٨ \times \frac{٨}{٣} - (\frac{٨}{٣})^2)$

$= \frac{3}{8} (\frac{٦٤}{٣} - \frac{١٦}{٣}) = \frac{3}{8} \times \frac{٤٨}{٣} = ٦ سم^2$

باستخدام فيثاغورس $ا جـ = ١٠ سم$

في المثلث ك ب د $\Leftarrow ك د = \sqrt{س^2 + ص^2}$

من تشابه المثلثات

$\triangle ب ص ك \sim \triangle ب د ك$

$\frac{ص}{س} = \frac{٦}{٨} \Leftarrow ص = \frac{3}{4} س$

$ك د = \sqrt{س^2 + \frac{9}{16} س^2} = \sqrt{\frac{25}{16} س^2} = \frac{5}{4} س$

لكن جا ب $= \frac{٦}{١٠} = \frac{و د}{٨ - س}$

$و د = \frac{3}{5} (٨ - س)$

ج) $س = ٥$

(٣) $ا \parallel$

(٣) $ك$

0785536266 الأستاذ أحمد موسى

Scanned by CamScanner

س١/ السؤال الأول

١٠

نفرض $ص = \sqrt{٦س + ٩} + ٣س$ ①

$ص(٠) = ٣$ ①

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{ص(س) - ص(٠)}{س - ٠}$ ①

$= ص'(س)$ ①

$= ص'(٠)$ ①

$ص' = \frac{٦}{٢\sqrt{٦س + ٩}} + ٣$ ①

$ص'(٠) = \frac{٦}{٦} + ٣ = ٤$ ①

$م = -\frac{١}{٤}$ ①

إذا تم استخدام قاعدة لوبيتال يأخذ علامة واحدة فقط

0785536266 الأستاذ احمد موسى

Scanned by CamScanner

الأستاذ احمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner

في فرع (ب)

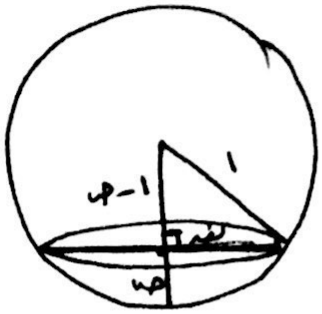
- إذا أخطأ في أحد الأسطر مثلاً (في قيمة واحدة)

يُرسم علامة ✗ على السطر وعلامة على خط الأعداد.

- رمز الإجابة يعتمد الرمز } في سؤال ضع دائرة.
- إجابة فقط تعتمد

Scanned by CamScanner

س ٣



$\frac{ع ص}{ع ن} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \frac{ع م}{ع ن} = \left| \right._{ن=٠}$

ب) مساحة السطح = مساحة الدائرة ①

$م = \pi$ نصف ②

بكسر نصف $= ١ - (١-ص)^{٢}$ ①

نصف $= ١ - (ص^{٢} + ص^{٢} - ٢ص + ١)$ ①

نصف $= ٢ص - ص^{٢}$ ①

$\therefore م = \pi (٢ص - ص^{٢})$ ①

$\left(\frac{ع ص}{ع ن} ٢ص - \frac{ع ص}{ع ن} ص^{٢} \right) \pi = \frac{ع م}{ع ن}$ ① ①

بكسر $ص = \frac{ع ص}{ع ن} \times ن \Leftarrow ص = ٤ \times ٠$ ①

$ص = \frac{١}{٢}$

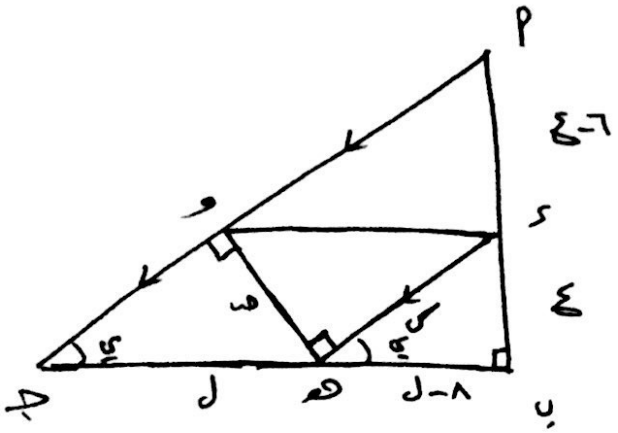
$\therefore \frac{ع م}{ع ن} = \left| \right._{ن=٠} \left(\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} \times ٢ - \frac{١}{٤} \times ٢ \right) \pi$ ①

$= \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} \right) \pi$ ①

$= \frac{\pi}{٤}$ سم^{٣}/د ①

الأستاذ احمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner



س٥

(ب)

١٢

$م_{\Delta} = \frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$م_{\Delta} = \frac{1}{2} \times ب \times ط$ ①

$\angle ك = \angle ج$ (بالتبادل). ① $\angle ك و = \angle ج و ه = ٩٠°$

$\angle ج = \angle ب$ (بالتناظر) ① $\angle ج و ه = \angle ب = ي$

$جا ي = \frac{ه ل}{ج ل}$ ، $جا ي = \frac{ج ك}{ج ب}$

$\therefore \frac{ه ل}{ج ل} = \frac{ج ك}{ج ب} \Leftarrow ه ل = ٣ ب - ج ك$ ①

$\therefore م_{\Delta} = \frac{1}{2} ج ك \times ل$ ①

كلا من Δ ا ب ج ، Δ ك ب ه متشابهان وفيهما $\angle ب$ مشتركة

$\frac{ج ك}{ه ل} = \frac{ج ب}{ب ه} \Leftarrow \frac{ج ك}{٨-ل} = \frac{٤}{٣}$ ①

$٣ ج ك = ٤ (٨-ل) \Leftarrow ج ك = \frac{٤}{٣}(٨-ل)$ ①

$\therefore م_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{٤}{٣} (٨-ل) \times ل$

$م_{\Delta} = \frac{٢}{٣} (٨ل - ل^{٢})$ ①

$م'(ل) = \frac{٢}{٣} (٨ - ٢ل)$ ①

$م'(ل) = ٠ \Leftarrow ٨ - ٢ل = ٠ \Leftarrow ل = ٤$ ①

(ل) م' — ++ — ٤ ①

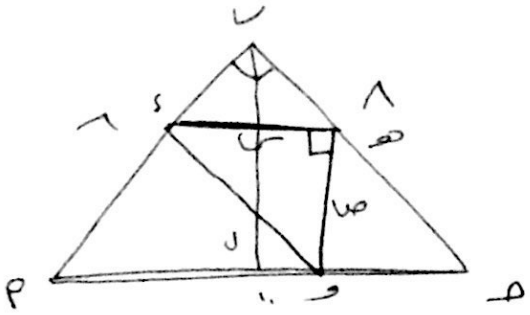
تكون المساحة بأكبر ما يمكن عندما ل = ٤ ①

$\therefore$ أكبر مساحة ممكنة للمثلث هي

$م(٤) = \frac{٢}{٣} (٣٢ - ١٦) = \frac{٣}{٨} \times ١٦ = ٦$ سم٢ ①

الأستاذ أحمد موسى 0785536266

Scanned by CamScanner



ب

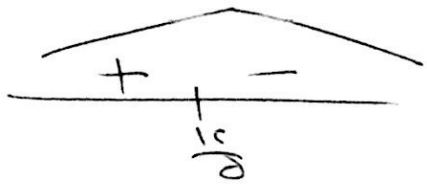
$م_{\Delta} = \frac{1}{2} \times س \times ص$ ①

$م = \frac{1}{2} \times ص (١٠ - \frac{٥}{١٢} ص)$ ①

$= ٥ ص - \frac{٥}{١٢} ص^{٢}$

$م' = ٥ - \frac{٥}{٦} ص = ٠$ ①

$ص = \frac{٦}{٥} \times ١٠ = ١٢$ ①



م أكبر ما يمكن عندما $ص = ١٢$ ①

$\therefore م_{\Delta} = \frac{1}{2} \times ١٢ \times ٥ = ٣٠$ ①

$ك = ٦$

$ه ء = \sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢}} = ١٠$ ①

$\frac{1}{2} \times ٦ \times ٨ = \frac{1}{2} \times ١٠ \times ل$ ① ①

$ل = \frac{٢٤}{٥}$ ①

$\Delta ه ء ب \sim \Delta ه ص ن$

$\frac{ص ن}{ء ب} = \frac{ه ص}{ه ء}$ ①

$\frac{ص ن}{٦} = \frac{\frac{٢٤}{٥} - ص}{\frac{٢٤}{٥}}$

$ص ن = ١٠ - \frac{٥}{٤} ص$ ①

0785536266 الأستاذ احمد موسى

Scanned by CamScanner