ALNASEEM BOOKSHOP

التميز في الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي - المستوى الثالث

الوحدة الأولى :

2018

النهايات والإتصال

اعداد المعلم

جهاد كساسبة

0779002042

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* الوحدة الأولى : النهايات والاتصال
* الفصل الأول : النهايات
* أولاً : مفهوم النهاية

* نقصد بنهاية الاقتران عند نقطة هو دراسة سلوك الاقتران ق(س) عندما س تقترب (تؤول) من العدد الحقيقي (أ) من جهة اليمين ومن جهة اليسار ويتم دراسة هذا السلوك من خلال :-

① الجداول ② التمثيل البياني للاقترانات ③ حساب النهايات .

مثال : اذا كان ق(س) = س + ٢ ، ادرس سلوك الاقتران ق(س) عندما تقترب س من العدد (٤) من خلال الجداول .

	جهة اليمين					جهة اليسار			
س	٤,٢	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	٤	٣,٩٩	٣,٩٧	٣,٩٠	٣,٨٥
ق(س)	٦,٢	٦,١	٦,٠١	٦,٠٠١		٥,٩٩	٥,٩٧	٥,٩٠	٥,٨٥

نلاحظ مايلي :

* كلما اقتربت س من العدد (٤) من جهة اليمين فان قيم الاقتران ق(س) تقترب من العدد (٦) ، ونقول في هذه الحالة أن نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب من (٤) من اليمين تساوي (٦) ويعبر عن ذلك رمزياً :

$$\lim_{س \to ٤^{+}} ق(س) = ٦$$

* كلما اقتربت س من العدد (٤) من جهة اليسار فان قيم الاقتران ق(س) تقترب من العدد (٦) ، ونقول في هذه الحالة أن نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب من (٤) من اليسار تساوي (٦) ويعبر عن ذلك رمزياً

$$\lim_{س \to ٤^{-}} ق(س) = ٦$$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

نظرية ① إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^+}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^-}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$ ، حيث $\text{ل} \in \text{ح}$

فإن :

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$ موجودة وتكون $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$

② إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^+}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} \neq \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^-}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$ ، فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$ غير موجودة .

ملاحظات

① نلاحظ أنه لإيجاد نهاية الاقتران ق(س) عندما س تؤول الى (أ) لا يشترط أن يكون ق(س) معرف عند (أ) نفسه ولكن يكفي أن يكون الاقتران معرف حول العدد (أ) . (اي معرف في فترة مفتوحة تحوي العدد أ) .

② $\text{س} \leftarrow \text{أ}^+$ ، تعني أن س تقترب من أ من جهة اليمين .

③ $\text{س} \leftarrow \text{أ}^-$ ، تعني أن س تقترب من أ من جهة اليسار .

④ $\text{س} \leftarrow \text{أ}$ ، تعني أن س تقترب من أ ولكن $\neq$ أ .

مثال اذا كان $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1}$ ، $\text{س} \neq 1$

اوجد $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$ باستخدام الجدول .

الحل : $\text{ق(س)} = \frac{(\text{س}+1)\cancel{(\text{س}-1)}}{\cancel{(\text{س}-1)}} = \text{س} + 1$ ، $\text{س} \neq 1$

	← اليمين			اليسار →	
س	١٫٠٢	١٫٠١	١	٠٫٩٩	٠٫٩٥
ق(س)	٢٫٠٢	٢٫٠١	ق(١) ↓	١٫٩٩	١٫٩٥

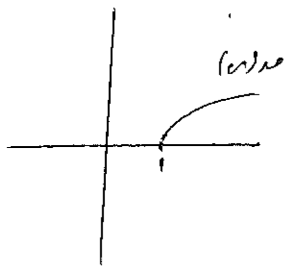
$\underset{\text{س} \leftarrow 1^+}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = 2$

$\underset{\text{س} \leftarrow 1^-}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = 2$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = 2$

مثال: معتمداً على الرسومات الآتية والتي تمثل منحنيات لـ ق(س) اجب عما يلي:

١)

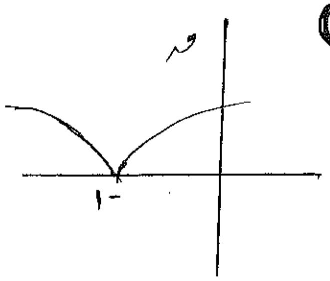


١) ق(١) = صفر

٢) نهـا ق(س) = صفر
س ← ١⁺

٣) نهـا ق(س) غير موجودة
س ← ١⁻

٢)

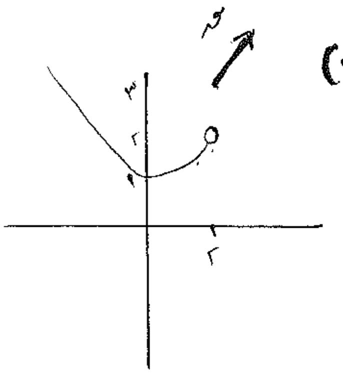


١) ق(-١) = صفر

٢) نهـا ق(س) = صفر
س ← -١⁺

٣) نهـا ق(س) = صفر
س ← -١⁻

٣)

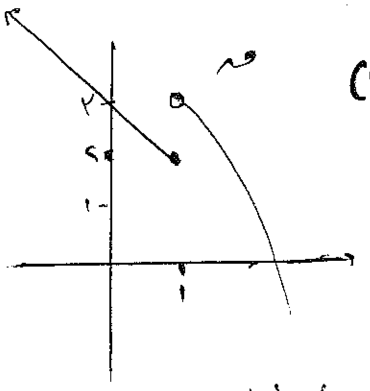


١) ق(٢) = ٢

٢) نهـا ق(س) = ٣
س ← ٢⁺

٣) نهـا ق(س) = ٢
س ← ٢⁻

٤)



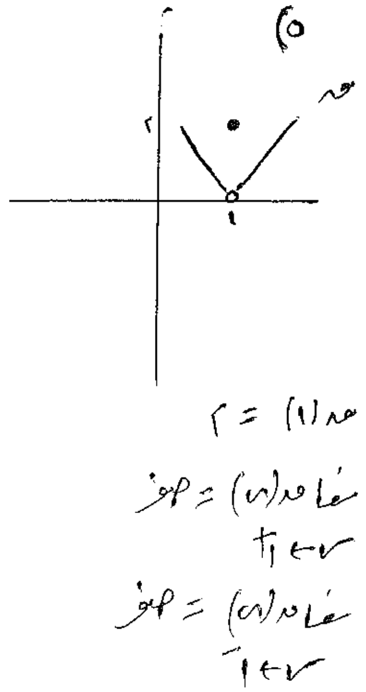
١) ق(١) = ٢

٢) نهـا ق(س) = ٣
س ← ١⁺

٣) نهـا ق(س) = ٢
س ← ١⁻

٤) نهـا ق(س) غير موجودة.
س ← ١

٥)

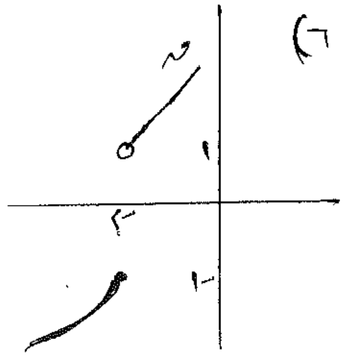


١) ق(١) = ٢

٢) نهـا ق(س) = صفر
س ← ١⁺

٣) نهـا ق(س) = صفر
س ← ١⁻

٦)



١) ق(-٢) = -١

٢) نهـا ق(س) = ١
س ← -٢⁺

٣) نهـا ق(س) = -١
س ← -٢⁻

٤) نهـا ق(س) غير موجودة
س ← -٢

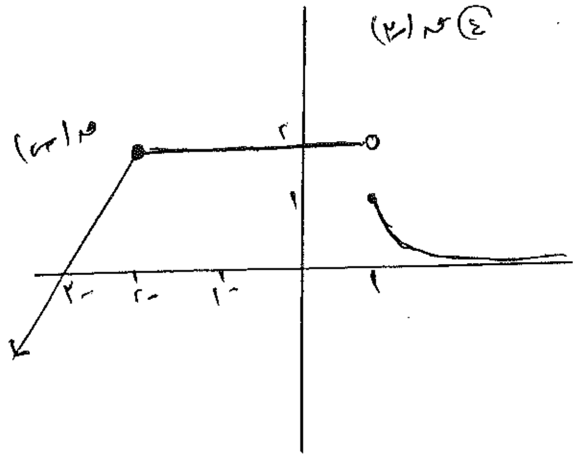
مثال: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى د(س) أوجد ما يلي:

① د(١) ② د(-٢) ③ د(٠) ④ د(-٣)

⑤ نها د(س)
س ← ١

⑥ نها د(س)
س ← -١

⑦ نها د(س)
س ← -٣



الحل:

① د(١) = ١

② د(-٢) = ٢

③ د(٠) = ٢

④ د(-٣) = ٠

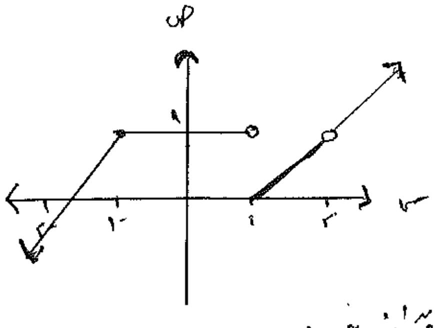
⑤ نها د(س) = ١ ، س ← ١⁺
نها د(س) = ٢ ، س ← ١⁻
⟸ نها د(س) غير موجودة ، س ← ١

⑥ نها د(س) = ٢ ، س ← -١⁺
نها د(س) = ٢ ، س ← -١⁻
⟸ نها د(س) = ٢ ، س ← -١

⑦ نها د(س) = صفر ، س ← -٣⁺
نها د(س) = صفر ، س ← -٣⁻
⟸ نها د(س) = صفر ، س ← -٣

مثال: بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق

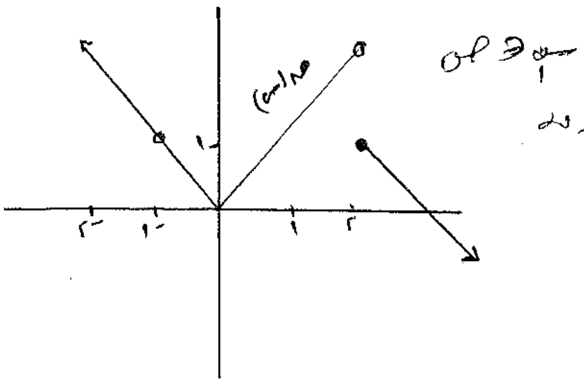
أوجد مجموعة قيم أ التي تجعل $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = 1 حيث أ ∈ ح



الحل: مجموعة قيم أ هي [-1، 1) ∪ {2}.

مثال: بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق،

أوجد ما يلي:



$س_1$ ∈ ح

① قيم $س_1$ التي تجعل $\lim_{س \to س_1}$ ق(س) غير موجودة

④ $\lim_{س \to 0}$ ق(س)

③ ق(-1)

② ق(2)

الحل:

① $س_1$ = {-3، 2}

② ق(-1) = غير معرفة

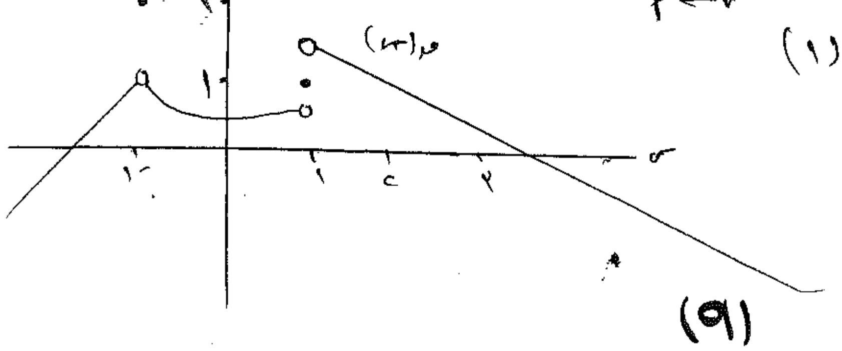
③ ق(2) = 1

④ $\lim_{س \to 0^+}$ ق(س) = 0

$\lim_{س \to 0^-}$ ق(س) = 0

$\lim_{س \to 0}$ ق(س) = صفر

مثال: بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على ح



① ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = 1 حيث أ ∈ ح

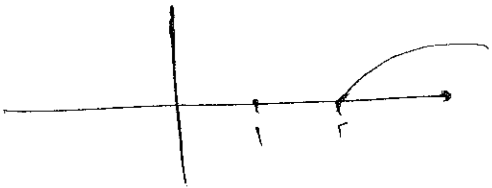
③ ق(-1) ② ق(1)

الحل: ① أ = {-2، 1، 2}

③ ق(-1) = 2

② ق(1) = 1

مثال: اذا كانت ق(س) = √(س−٢) ، ارسم منحنى ق(س)
ثم اوجد



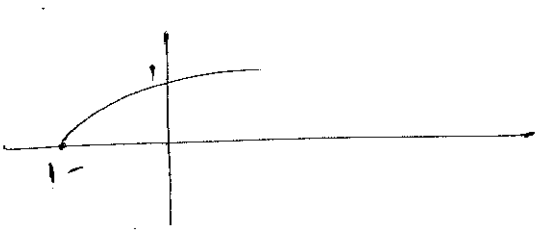
١) نها ق(س) = صفر
س ← ٢⁺

٢) نها ق(س) غير موجود
س ← ٢⁻

٣) نها ق(س) غير موجودة .
س ← ٢

مثال: اذا كانت ق(س) = √(س+١) ، ارسم منحنى ق(س)

ثم اوجد :-



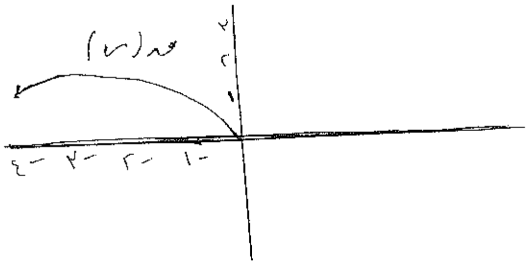
① ق(−١) = صفر

② نها ق(س) = صفر
س ← −١⁺

③ ق(٠) = ١

④ نها ق(س) غير موجودة .
س ← −١⁻

مثال: معتمداً الشكل الآتي والذي يمثل منحنى $ق(س) = \sqrt{-س}$



أوجد:

١) $\lim_{س \to ٠^+} ق(س)$ غير موجودة

٢) $\lim_{س \to ٠^-} ق(س)$ = صفر

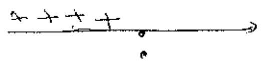
٣) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ غ.م

٤) $\lim_{س \to -١^+} ق(س) = ١$

٥) $\lim_{س \to ١} ق(س)$ غ.م

٦) ما مجال ق(س):

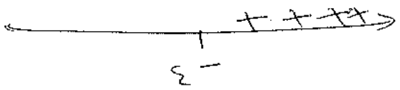
مجاله س $\le$ صفر



مثال: ما مجال الاقتران $ق(س) = \sqrt{س+٤}$

الحل:

مجاله س $\ge$ -٤



نظرية (٢)

إذا كانت $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\, د(س) = ل$ ، $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\, هـ(س) = م$ ، حيث أ، ل، م، جـ $\in$ ح

فإنه :-

① $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \left(د(س) \pm هـ(س)\right) = \underset{س \to أ}{\text{نها}}\, د(س) \pm \underset{س \to أ}{\text{نها}}\, هـ(س) = ل \pm م$

② $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \left(د(س) \times هـ(س)\right) = \underset{س \to أ}{\text{نها}}\, د(س) \times \underset{س \to أ}{\text{نها}}\, هـ(س) = ل \times م$

③ $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \left(جـ \times د(س)\right) = جـ \times \underset{س \to أ}{\text{نها}}\, د(س) = جـ \times ل$

④ $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \dfrac{د(س)}{هـ(س)} = \dfrac{\underset{س \to أ}{\text{نها}}\, د(س)}{\underset{س \to أ}{\text{نها}}\, هـ(س)} = \dfrac{ل}{م}$ ، م $\neq$ ٠

⑤ $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \sqrt[ن]{د(س)} = \sqrt[ن]{\underset{س \to أ}{\text{نها}}\, د(س)} = \sqrt[ن]{ل}$ ، ل $>$ ٠ إذا كانت (ن) عدد زوجي (معرفة)

تنبيه

إذا كانت $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\, د(س) = ل$ ، فإنه

$\underset{س \to أ}{\text{نها}} \left(د(س)\right)^{ن} = \left(\underset{س \to أ}{\text{نها}}\, د(س)\right)^{ن} = ل^{ن}$ ، حيث ن عدد طبيعي ،

مثال إذا كانت $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}\ ق(س) = \frac{1}{2}$ ، $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}\ هـ(س) = -2$

أوجد كلاً مما يأتي :-

1) $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \left(ق(س) - \frac{1}{هـ(س)} \right)$ 2) $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \sqrt[2]{ق(س) - \frac{1}{2}}$

الحل :-

1) $\dfrac{\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}\ ق - \underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}\ (1)}{\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}\ هـ(س)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{-2} = 1$

2) $\sqrt[2]{\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \left(ق(س) - \frac{1}{2} \right)} = \sqrt[2]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\text{صفر}} = \text{صفر}$

مثال إذا كانت $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \left(أ س^4 - 4 أ س^2 - 3 \right) = 9$ فأوجد قيمة أ $\in$ ح .

الحل :

$أ - 4 أ - 3 = 9 \Leftarrow -3 أ = 12 \Leftarrow أ = -4$

مثال إذا كانت $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \left(هـ^{أس} + لو_{هـ} أ + س + 2 \right) = 6$ ، فما قيمة أ

الحل :

$هـ^{0} + لو_{هـ} أ + 0 + 2 = 6$

$\Leftarrow 4 + لو_{هـ} أ = 6 \Leftarrow لو_{هـ} أ = 2 \Leftarrow أ = هـ^2$

مثال إذا كانت $\underset{س \leftarrow 4}{\text{نها}} \sqrt[3]{(أ + س)^2} = 1$ فأوجد قيمة أ حيث أ $\in$ ح .

$\sqrt[3]{(أ + 4)^2} = 1 \Leftarrow (أ + 4)^2 = 1 \Leftarrow |أ + 4| = 1$

$\Leftarrow أ = -3$ ، $أ = -5$

* الاقتران المتشعب

مثال:

ق(س) = { م(س) : أ < س < ب
　　　　 ل(س) : ب < س < جـ

أ ، جـ أطراف فترة .

ب نقطة تشعب (تحول)

* عند ايجاد النهاية عند نقطة وكانت هذه النقطة نقطة (تشعب) مثل (ب) فاننا نجد النهاية عن يمين النقطة وعن يسارها حيث .

١) اذا كانت نها ق(س) (س ← ب⁺) = نها ق(س) (س ← ب⁻) = ل ، فان النهاية تكون موجودة وتساوي (ل) ، حيث ل عدد حقيقي

٢) اذا كانت نها ق(س) (س ← ب⁺) ≠ نها ق(س) (س ← ب⁻) ، فان النهاية تكون غير موجودة .

* النهاية غير موجودة عند أطراف الفترة بشكل عام لكنها تكون موجودة عند جهة المجال المعرف مثل أ⁺ ، جـ⁻

مثال: اذا كان ق(س) = { ٢س٢ − ١٥ : س < ٣
　　　　　　　　　　　 ٧ : س = ٣
　　　　　　　　　　　 ٥ : س > ٣

أوجد ما يلي .

(١) نها ق(س) (س ← ٢⁺) = نها (٢س٢ − ١٥) (س ← ٢⁺) = ٣

(٢) نها ق(س) (س ← ٢⁻) = نها ٥ (س ← ٢⁻) = ٥

∴ نها ق (س ← ٢) غ . م

(٣) نها ق(س) (س ← ٠) = نها ٥ (س ← ٠) = ٥

مثال إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س^٢ - س + ١ & ، س \neq ٠ \\ ٧ & ، س = ٠ \end{cases}$

أوجد ما يلي :

١) $د(٠) = ٧$

٢) $\lim\limits_{س \to ٠} د(س) = ١$

ملاحظة

$س \neq أ$ تعني أنه

$س > أ$ ، $س < أ$

$\Leftarrow$ $س \to أ^{+}$ ، $س \to أ^{-}$

مثال إذا كانت $م(س) = \begin{cases} س^٢ & : س \leq ٣ \\ ١ - ٥س & : س > ٣ \end{cases}$ ، $ل(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & : س \leq ٣ \\ \frac{٢}{س} & : س > ٣ \end{cases}$

وكانت $د(س) = م(س) + ل(س)$ ، أوجد ما يلي :-

١) $\lim\limits_{س \to ٣} م(س) \Leftarrow \lim\limits_{س \to ٢^{+}} م(س) = ٩$ ، $\lim\limits_{س \to ٢^{-}} م(س) = -١٤$ $\Big>$ $\therefore \lim\limits_{س \to ٢} م(س)$ غ.م

٢) $\lim\limits_{س \to ٢} ل(س) \Leftarrow \lim\limits_{س \to ٢^{+}} ل(س) = ٤$ ، $\lim\limits_{س \to ٢^{-}} ل(س) = ٧$ $\Big>$ $\therefore \lim\limits_{س \to ٢} ل(س)$ غ.م

٢) $\lim\limits_{س \to ٢} د(س)$

$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣س - ٢ & : س \leq ٢ \\ ١ - ٥س + \frac{٢}{س} & : س > ٢ \end{cases}$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٢^{+}} د = ١٣$ ، $\lim\limits_{س \to ٢^{-}} د = ١٢$ $\Big>$ $\therefore \lim\limits_{س \to ٢} د = ١٢$

ملاحظة

فلاحظ بالرغم منه أنه $\lim\limits_{س \to ٢} م$ ، $\lim\limits_{س \to ٢} ل$ غير موجودة إلا أنها $\lim\limits_{س \to ٢} د$ موجودة .

مثال: إذا كانت د(س) =
$$\begin{cases} ١ - أس^{٢} - ٥س & ، \quad س < ٢ \\ ٧ & ، \quad س = ٢ \\ أس^{٣} + س + ١ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ د(س) موجودة فما قيمة الثابت أ؟

الحل: بما أن النهاية موجودة فإن:-

$\lim_{س \to ٢^{+}}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ د(س)

١ - ٤أ - ١٠ = ٨أ + ٢ + ١

-١٢أ = ١٢

$\Leftarrow \boxed{أ = -١}$

مثال: إذا كانت د(س) =
$$\begin{cases} س^{٣} - ١ & ، \quad س \in ص \\ ١ - ٢س & ، \quad س \notin ص \end{cases}$$

ص: الأعداد الصحيحة

أوجد:

① د(٢) = ٢٧ - ١ = ٢٦

② $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢}$ (١ - ٢س) = -٨

③ د(-١) = $(-١)^{٣}$ - ١ = -٢

④ $\lim_{س \to -١}$ د(س) = $\lim_{س \to -١}$ (١ - ٢س) = ٤

⑤ د(½) = ١ - ٢/٢ = ١/٢

* النهاية لتوجد عند ∌ ≠ بينما الصورة حسب العدد أين يقع

ملاحظة: النهاية توجد عند عدم المساواة لأنها لا تساوي العدد نفسه بينما الصورة تكون عند العدد نفسه.

س → ٢ ∉ ص ، د(٢) ∈ ص

س → -١ ∉ ص ، د(-١) ∈ ص .

* نهاية الاقترانات الجذرية

أولاً: نهاية الجذور الفردية :-

عند ايجاد نهاية اقترانات تحوي جذور فردية فانه يتم التعويض المباشر فيها وذلك لأن الجذور الفردية معرفة على (ح). ونقبل الناتج اذا كان موجب او سالب او صفر.

أمثلة اوجد قيمة النهايات الاتية :

① $\lim_{س \to -8} \frac{\sqrt[3]{س} - 2}{س + 2} = \frac{-4}{-6}$ $= 1$

② $\lim_{س \to 5} \frac{\sqrt[7]{س - 4}}{1 - س} = \frac{1}{-4}$

③ $\lim_{س \to 3} \sqrt[5]{س^2 - 27} = \sqrt[2]{0} =$ صفر

ثانياً: نهاية الجذور الزوجية :

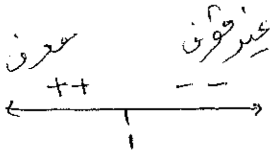
* عند ايجاد نهاية اقترانات تحوي جذور زوجية فاننا في هذه الحالة نعوض تعويض مباشر وينتج من التعويض إحدى الحالات التالية :

① ان يكون ناتج التعويض سالب وبالتالي النهاية غير موجودة .

② ان يكون ناتج التعويض موجب وبالتالي النهاية موجودة وتكون قيمة الجذر

③ ان يكون ناتج التعويض صفر وبالتالي (النهاية غير موجودة) وكانها تكون (موجودة) وتساوي قيمتها (صفر) من جهة (المجال المفتوح) بعد دراسة اشارة ق(س) .

③ نها $\sqrt{١ - س}$
$س \to ١$

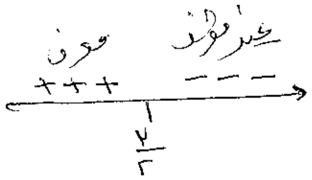


∵ نها $\sqrt{١ - س}$ غير موجود
$س \to ١^{+}$

∴ نها $\sqrt{١ - س}$ غير موجود
$س \to ١$

نها $\sqrt{١ - س}$ = صفر
$س \to ١^{-}$

② نها $\sqrt{٢ - ٣س}$
$س \to \frac{٢}{٣}$

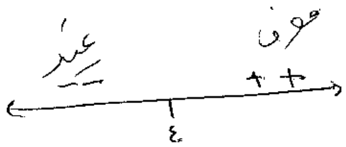


∵ نها $\sqrt{٢ - ٣س}$ غير موجود
$س \to \frac{٢}{٣}^{+}$

∴ نها $\sqrt{٢ - ٣س}$ غير موجود
$س \to \frac{٢}{٣}$

نها $\sqrt{٢ - ٣س}$ = صفر
$س \to \frac{٢}{٣}^{-}$

④ نها $\dfrac{\sqrt{س - ٤} + ٢}{س + ٥}$
$س \to ٤$



الحل:

نها $\dfrac{\sqrt{س - ٤} + ٢}{س + ٥} = \dfrac{٢ + ٠}{٩} = \dfrac{٢}{٩} = \dfrac{١}{٢}$
$س \to ٤^{+}$

نها $\dfrac{\sqrt{س - ٤} + ٢}{س + ٥}$ غير موجود
$س \to ٤^{-}$

نها $\dfrac{\sqrt{س - ٤} + ٢}{س + ٥}$
$س \to ٤$

غير موجود

(٩) $\lim\limits_{س \to 1} \sqrt{س^3 - س^2} = \;؟$ ندرس الإشارة.

$س^3 - س^2 = 0$

$\Leftarrow س = 0 ، 1$

معرف   غ.م   غ.م

$+ \quad - \quad -$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 1^+} \sqrt{س^3 - س^2} =$ صفر

$\lim\limits_{س \to 1^-} \sqrt{س^3 - س^2}$ غير موجودة

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 1} \sqrt{س^3 - س^2}$ غير موجودة.

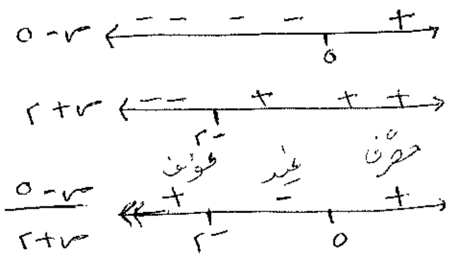
فكر

(١٠) $\lim\limits_{س \to 2} \sqrt{س^5 - 4س^3}$

(١١) $\lim\limits_{س \to 0} \sqrt{\dfrac{س - 3}{س - 2}}$

$= \sqrt{\dfrac{-3}{-2}} = \sqrt{3/2}$

مثال (٤) أوجد قيمة النهايات الآتية :-

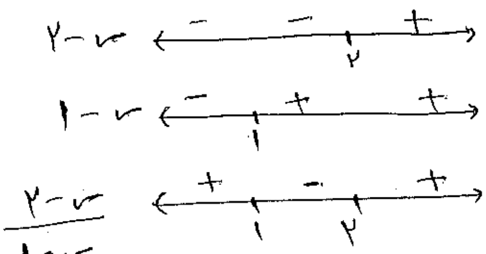


(١) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س-٥}{س+٢}}$

$\therefore \underset{س \to ٥^{+}}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س-٥}{س+٢}} = \text{صفر}$

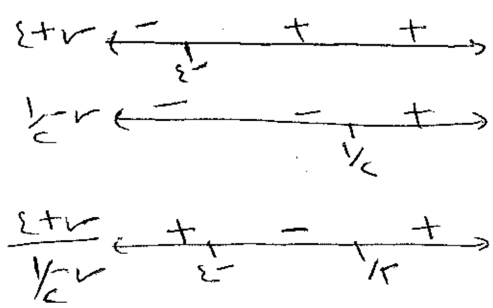
$\therefore \underset{س \to ٥^{-}}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س-٥}{س+٢}}$ غير موجودة

$\therefore \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س-٥}{س+٢}}$ غير موجودة



(٢) $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س-٢}{س-١}}$

$\therefore \underset{س \to ١^{-}}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س-٢}{س-١}} = \text{صفر}$



(٣) $\underset{س \to -٤^{+}}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س+٤}{س-\frac{١}{٢}}}$

$\therefore \underset{س \to -٤^{+}}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س+٤}{س-\frac{١}{٢}}}$ غير موجودة

مثال: جد $\lim\limits_{س \to 1^+} \dfrac{\sqrt{س^2-1} + \sqrt{س-1}}{\sqrt{س-1}}$

الحل:

$\sqrt{س^2-1}$ معرف من يمين (1)

$\sqrt{س-1}$ معرف من يمين (1)

$\therefore \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{س^2-1} + \sqrt{س-1}}{\sqrt{س-1}} = \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{(س-1)(س+1)} + \sqrt{س-1}}{\sqrt{س-1}}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{س-1} \times \sqrt{س+1} + \sqrt{س-1}}{\sqrt{س-1}}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\cancel{\sqrt{س-1}}\,(\sqrt{س+1} + 1)}{\cancel{\sqrt{س-1}}} = \lim\limits_{س \to 1} \sqrt{س+1} + 1$

$= 1 + \sqrt{2}$

مثال: اوجد قيمة النهايات التالية:

(1) $\lim\limits_{س \to 1^+} 5س^2 + \sqrt{س-1}$ (3) $\lim\limits_{س \to 2} \sqrt{س^2} + \sqrt{س-2}$ غ.م

(2) $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{س-1} + 3س}{5س+2}$

$\Leftarrow 5(1)^2 + صفر$

$= 5$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 1^+} \dfrac{\sqrt{س-1} + 3س}{5س+3} = \dfrac{1}{8}$

$\lim\limits_{س \to 1^-} \dfrac{\sqrt{س-1} + 3س}{5س+2}$ غ.م

إيجاد نهاية اقتران قيمة مطلقة أو اقترانات تحوي اقتران قيمة مطلقة :-

* عند إيجاد النهاية لاقتران قيمة مطلقة أو اقتران مطلق مرتبط مع جزء من الاقترانات فإننا نقوم بعملية التعويض المباشر ونقبل جميع الإجابات إلا أن يكون ناتج التعويض (صفر) فعندها يجب إعادة التعريف على خط الأعداد .
* يعاد تعريف المطلق إذا صفر نفسه أو صفر الاقتران
* القيمة المطلقة : هي بعد النقطة (أ) التي تمثل العدد الحقيقي عن نقطة الأصل على خط الأعداد ويرمز لها بالرمز | | .

* خواص اقتران القيمة المطلقة :-

① $|ص\,س| = |ص|\,|س|$

② $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$

③ $|ص - س| = |س - ص|$

④ $|ص - س| \neq |ص| - |س|$

⑤ $|ص + س| \neq |ص| + |س|$

نعيد تعريفه أيضاً عندما يكون جميع أجزاء ناتج تعويضه مع اقترانات أخرى صفر أيضاً
مثل : $\lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢}$

* مثال : أوجد قيمة النهايات الآتية :-

① $\lim_{س \to ١} |س^٢ + ٥| = |٦| = ٦$

② $\lim_{س \to ٤} \frac{|س - ٢| + ٢س}{س + ١} = \frac{٢ + ٢(٤)}{٥} = \frac{١٤}{٥}$

③ $\lim_{س \to -١} \frac{٧|س| - ٢}{س - ١} = \frac{٧(١) - ٢}{-٢} = \frac{-٥}{٢}$

④ $\lim_{س \to ١} \frac{|س + ٢|}{|س + ٣|} = \frac{٣}{٤}$

خطوات إعادة تعريفه
① نجد صفر الاقتران
② ندرس الإشارة على خط الأعداد .

مثال: اوجد $\lim\limits_{س \to ٣} \sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$

الحل: $\lim\limits_{س \to ٣} \sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} = \lim\limits_{س \to ٣} \sqrt{(س - ٣)^{٢}} = \lim\limits_{س \to ٣} |س - ٣|$

⇐ نعيد تعريف $|س - ٣|$

$س - ٣ = ٠$

⇐ $س = ٣$

٣ − س (−) | ٣ | س − ٣ (+)

⇐ $\lim\limits_{س \to ٣^{+}} |س - ٣| = \lim\limits_{س \to ٣^{+}} (س - ٣) = صفر$

$\lim\limits_{س \to ٣^{-}} |س - ٣| = \lim\limits_{س \to ٣^{-}} (٣ - س) = صفر$

$\lim\limits_{س \to ٣} |س - ٣| = صفر$

مثال: اذا كانت $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٢ - س}{|س - ٢|} & ، س < ٢ \\ ٥ + أس^{٢} & ، س \geq ٢ \end{cases}$

اوجد قيمة الثابت أ اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} د(س)$ موجودة .

الحل: بما ان $\lim\limits_{س \to ٢} د(س)$ موجودة فان :-

$\lim\limits_{س \to ٢^{+}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٢^{-}} د(س)$

$\lim\limits_{س \to ٢^{+}} ٥ + أس^{٢} = \lim\limits_{س \to ٢^{-}} \dfrac{٢ - س}{|س - ٢|}$

$٥ + ٤أ = \lim\limits_{س \to ٢^{-}} \dfrac{\cancel{٢ - س}}{\cancel{٢ - س}}$

$٥ + ٤أ = ١$

⇐ $٤أ = -٤$

⇐ $أ = -١$

* نعيد تعريف $|س - ٢|$

٢ − س (+) | ٢ | س − ٢ (−)

ملاحظة: يعاد تعريف المطلق

اذا كان ناتج التعويض داخل المطلق (صفر) او ناتج التعويض داخل الاقتران صفر.

(مثال ٤) إذا كانت

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - ٤}{|\text{س} - ٢|} & ،\ \text{س} > ٢ \\ ٣ & ،\ \text{س} = ٢ \\ (\text{س} + \text{أ})^2 + ٢|\text{س}| - ١ & ،\ \text{س} < ٢ \end{cases}$$

فما قيمة أ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$ موجودة.

الحل ٤

$$\lim_{\text{س} \to ٢^+} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{د}(\text{س})$$

$|\text{س} - ٢|$

$٢ - \text{س}$ $\text{س} - ٢$

$-$ ٢ $+$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٢^+} \frac{(\text{س}+٢)\cancel{(\text{س}-٢)}}{\cancel{(\text{س}-٢)}} = \lim_{\text{س} \to ٢^-} (\text{س} + \text{أ})^2 + ٢|\text{س}| - ١$$

$$٤ = (٢ + \text{أ})^2 + ٤ - ١$$

$$٤ = (٢ + \text{أ})^2 + ٣$$

$$\Leftarrow (٢ + \text{أ})^2 = ١$$

$$\Leftarrow ٢ + \text{أ} = ١ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -١}$$

(مثال) إذا كانت

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}^2 - ٢٥|}{\text{س} - ٥} & \text{س} > ٥ \\ ٦\text{س} + ٢\text{أ} & \text{س} < ٥ \end{cases}$$

أوجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{د}(\text{س})$ موجودة.

ج: أ = −١٠

مثال ٤) اوجد قيمة الغايات التالية:

١) نها [س+٣] = ٣
س ← ½

٢) نها [س+٣] = ٣
س ← ½⁺

٣) نها [س+٢] = ٣
س ← ½⁻

* ناتج التعويض داخل الصحيح (عدد غير صحيح) وبالتالي الغاية موجودة وتساوي صحيح ذلك العدد بشكل تام و + و −

٤) نها [س+١] غ. م
س ← ٥

٥) نها [س+١] = ٦
س ← ٥⁺

٦) نها [س+١] = ٦ − ١ = ٥
س ← ٥⁻

* ناتج التعويض داخل الصحيح (عدد صحيح) وبالتالي الغاية غير موجودة بشكل تام وموجودة من (+) ومن (−) (ومعامل س موجب)

٧) نها [٢−س] غ. م
س ← ٧

٨) نها [٢−س] = −٤ − ١ = −٥
س ← ٧⁺

٩) نها [٢−س] = −٤
س ← ٧⁻

* ناتج التعويض داخل الصحيح (عدد صحيح) وبالتالي الغاية غير موجودة بشكل تام وموجودة من (+) ومن (−) (ومعامل س سالب)

مثال: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢[س] & ؛ \quad س > أ \\ [س+٢] & ؛ \quad س < أ \end{cases}$

اوجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) موجودة .

الحل: بما أن النهاية موجودة .

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to أ^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to أ^-} ق(س)$

$\lim\limits_{س \to أ^+} [س+٢] = \lim\limits_{س \to أ^-} ٢[س]$

حسب القواعد السابقة

أولاً: أ $\in$ ص .

أ + ٢ = ٢(أ − ١) $\Leftarrow$ أ + ٢ = ٢أ − ٢

$\Leftarrow$ أ = ٤

ثانياً: أ $\notin$ ص .

[أ] ٢ = [أ + ٢]

[أ] ٢ = ٢ + [أ]

$\Leftarrow$ ٢ = [أ]

$\Leftarrow$ ٢ < أ < ٣

تذكر

[س] = أ ، أ ≤ س < أ + ١

$\Leftarrow$ أ = ٤ $\cup$ (٢، ٣)

$$
\Leftarrow \left(\text{د}(س) + \text{ع}(س)\right) = \begin{cases} ٨ & : ٠ < س < ١ \\ ٩ & : س = ١ \\ ٨ & : ١ < س < ٢ \end{cases}
$$

$$
\Leftarrow \lim_{س \to ١^{+}} \left(\text{د}(س) + \text{ع}(س)\right) = ٨
$$

$$
\lim_{س \to ١^{-}} \left(\text{د}(س) + \text{ع}(س)\right) = ٨
$$

∴ النهاية موجودة وتساوي (٨)

ملاحظة

١) لا توزع النهاية على الاقترانات اذا كانت غير موجودة عند احدهما.

٢) قد تكون النهاية غير موجودة عند الاقترانات لكنها تصبح موجودة عند جمع او طرح او ضرب او قسمة الاقترانات.

مثال اذا كان

$$
\text{د}(س) = \begin{cases} |س+١| + ٢ & : س < أ \\ [س] + أ & : س > أ \end{cases}
$$

اوجد قيم الثابت أ اذا كانت $\lim_{س \to أ} \text{د}(س)$ موجودة حيث $أ \in ص - \{-١\}$.

الحل: بما أن النهاية موجودة

$$
\Leftarrow \lim_{س \to أ^{+}} \text{د}(س) = \lim_{س \to أ^{-}} \text{د}(س)
$$

$$
|أ+١| + ٢ = \lim_{س \to أ^{-}} [س] + أ
$$

$$
|أ+١| + ٢ = (أ-١) + أ
$$

$$
|أ+١| = ٢أ - ٣
$$

اما $أ + ١ = ٢أ - ٢$

$\Leftarrow -أ = -٤$

$\Leftarrow أ = ٤ \in ص$.

او $أ + ١ = -٢أ + ٢$

$٣أ = ٢$

$أ = \frac{٢}{٣} \notin ص$. ✗

مثال: اذا كانت ق(س) اقتراناً كثير حدود وكانت $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{ق(س)}{(س^٢ - ٢س - ١٥)} = ٦$

اوجد $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{ق(س)}{س - ٥}$

الحل: $\lim\limits_{س \to ٥} \left(\frac{ق(س)}{س - ٥} \times \frac{س + ٣}{س + ٣} \right) = \lim\limits_{س \to ٥} (س + ٣) \times \lim\limits_{س \to ٥} \frac{ق(س)}{س^٢ - ٢س - ١٥}$

$= \underbrace{٨ \times ٦}_{} = ٤٨$

مثال: اذا كانت ق(س) اقتراناً كثير حدود وكانت $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ق(س)}{س^٢ + س} = ٧$

اوجد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ق(س)}{٣س}$

الحل: $\frac{١}{٣} \times \lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{ق(س)}{س} \times \frac{س + ١}{س + ١} \right)$

$= \underbrace{\frac{١}{٣} \times \lim\limits_{س \to ٠} (س + ١) \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{ق(س)}{س^٢ + س}}_{} = \frac{١}{٣} \times ١ \times ٧ = \frac{٧}{٣}$

مثال: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} ١ + ظاس & : س \leq \frac{\pi}{٤} \\ ١ + جاس & : س > \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

اوجد ما يلي :-

① $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٤}} ق(س) = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٤}} (٢) = ٢$

② $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٦}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{٣}{٢}\right) = \frac{٣}{٢}$

مثال: اذا كانت $\lim_{س \to 3}$ ق(س) = ١٢ ، $\lim_{س \to 2}$ ق(س) = ٢

اوجد كثير حدود من الدرجة الأولى .

الحل : ق(س) = أس + ب ، أ، ب ∈ ح .

* $\lim_{س \to 3}$ ق(س) = ١٢ ⇐ $\lim_{س \to 3}$ (أس + ب) = ١٢ ⇐ ٣أ + ب = ١٢ ... (١)

* $\lim_{س \to 2}$ ق(س) = ٢ ⇐ $\lim_{س \to 2}$ (أس + ب) = ٢ ⇐ ٢أ + ب = ٢ ... (٢)

نأخذ المعادلتين .

$$
\begin{array}{r}
٣أ + \cancel{ب} = ١٢ \\
- \quad ٢أ + \cancel{ب} = ٢ \\
\hline
أ = ٩
\end{array}
$$

⇐ ٢(٩) + ب = ٢ ⇐ ب = -١٥

⇐ الاقتران ق(س) = ٩س - ١٥

مثال: اوجد قاعدة كثير حدود من الدرجة الثانية حيث :

ق(٠) = ٤ ، $\lim_{س \to 1}$ ق(س) = ٥ ، $\lim_{س \to -1}$ ق(س) = ٧

الحل : قاعدة الاقتران من الدرجة الثانية هي ق(س) = أس^2 + بس + جـ

* ق(٠) = ٤ ⇐ جـ = ٤ ⇐ ق(س) = أس^2 + بس + ٤

* $\lim_{س \to 1}$ ق(س) = ٥ ⇐ أ + ب + ٤ = ٥ ⇐ أ + ب = ١ ... (١)

* $\lim_{س \to -1}$ ق(س) = ٧ ⇐ أ - ب + ٤ = ٧ ⇐ أ - ب = ٣ ... (٢)

$$
\begin{array}{r}
أ + ب = ١ \\
+ \quad أ - ب = ٣ \\
\hline
٢أ = ٤
\end{array}
$$

⇐ $\boxed{أ = ٢}$

⇐ $\boxed{ب = -١}$

⇐ ق(س) = ٢س^2 - س + ٤

مثال: إذا كانت $\displaystyle\lim_{س \to \left(\frac{٣}{ب - ٢}\right)} (أ^{٢} - ١٦) = ٩$ ، فما قيم الثوابت أ ، ب

الحل: $أ^{٢} - ١٦ = ٩$ $\qquad$ $ب \in ح - \{٢\}$

$\Leftarrow أ^{٢} = ٢٥ \Leftarrow أ = \pm ٥$

مثال: إذا كانت $\displaystyle\lim_{س \to \left(\frac{٥}{٢ب + ٦}\right)} أ^{٢} - ٥أ = -٦$

الحل: $أ^{٢} - ٥أ = -٦$ $\qquad$ $٢ب - ٦ = ٠$

$أ^{٢} - ٥أ + ٦ = ٠$ $\qquad$ $ب = ٣$

$\Leftarrow (أ - ٢)(أ - ٣)$ $\qquad$ $\therefore ب \in ح - \{٣\}$

$\Leftarrow أ = ٢ ، ٣$

مثال: أوجد $\displaystyle\lim_{س \to ١} (س[س] + |س|)$

مثال: اذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س} - \text{٣ق(س)}}{\text{٢}}\right)^{\text{٣}} = \frac{\text{١}}{\text{٨}}$ ، جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نها}} \sqrt{\text{٣ق(س)}}$

ملاحظة: عندما يكون ناتج التعويض في الغايات الكسرية $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$ فانه لابد من معالجة ثم اختصار ثم تعويض ⇐ الجواب

ويتم المعالجة من خلال عمليات جبرية مختلفة حسب طبيعة السؤال وهي :-

1) اخذ عامل مشترك والتحليل الى العوامل .
2) توحيد المقامات .
3) الضرب بالمرافق .
4) الفرض او الاستبدال .
5) الاضافة والطرح وغيرهما .

تذكر :

- $(\text{أ}-\text{ب})^2 = \text{أ}^2 - 2\text{أب} + \text{ب}^2$.
- $(\text{أ}+\text{ب})^2 = \text{أ}^2 + 2\text{أب} + \text{ب}^2$.
- $(\text{أ}-\text{ب})^3 = \text{أ}^3 - \text{ب}^3 - 3\text{أ}^2\text{ب} + 3\text{أب}^2$ لا يحلل
- $(\text{أ}+\text{ب})^3 = \text{أ}^3 + \text{ب}^3 + 3\text{أ}^2\text{ب} + 3\text{أب}^2$.
- $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})$.
- $\text{أ}^3 - \text{ب}^3 = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}^2 + \text{أب} + \text{ب}^2)$.
- $\text{أ}^3 + \text{ب}^3 = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}^2 - \text{أب} + \text{ب}^2)$.
- $\text{أ}^2 + \text{ب}^2$ ⇐ لا يحلل .

$$\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ}-\text{ب}} = 1$$

$$\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ}+\text{ب}} = 1$$

$$\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{ب}-\text{أ}} = -1$$

$$\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ}+\text{ب}} = \frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ}+\text{ب}}$$

⑥ $\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{س^٣ + ٢٧}{س^٢ + ٣س}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{(س^٢ - ٣س + ٩)\cancel{(س+٣)}}{س\cancel{(س+٣)}} = \dfrac{٩+٩+٩}{-٣} = ٢٧$

⑦ $\lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{(س+١)^٢ - ٨١}{س - ٨}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{(س+١-٩)(س+١+٩)}{س-٨}$

$= \lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{\cancel{(س-٨)}(س+١٠)}{\cancel{(س-٨)}} = \lim\limits_{س \to ٨} س + ١٠ = ١٨$

⑧ $\lim\limits_{س \to -٥} \dfrac{(س+٤)^٢ - ١}{س + ٥}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{س \to -٥} \dfrac{((س+٤)-١)((س+٤)+١)}{(س+٥)}$

$= \lim\limits_{س \to -٥} \dfrac{(س+٤-١)(س+٤+١)}{س+٥} = \lim\limits_{س \to -٥} \dfrac{(س+٣)\cancel{(س+٥)}}{\cancel{(س+٥)}}$

$= -٥ + ٣ = -٢$

⑨ $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} \dfrac{٨س^٣ - ١}{س - \frac{١}{٢}}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} \dfrac{(٢س-١)(٤س^٢+٢س+١)}{س - \frac{١}{٢}} = \lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} \dfrac{٢\cancel{(س-\frac{١}{٢})}(٤س^٢+٢س+١)}{\cancel{(س-\frac{١}{٢})}}$

$= ٢(٣) = ٦$

(١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^٣ - ٣\text{س} - ٢}{\text{س}^٣ - ٨}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

نلاحظ أنه ناتج تعويض (٢) في البسط يساوي صفر وبالتالي فإنه (س-٢) عامل من عوامل البسط

ثابت	س	$\text{س}^٢$	$\text{س}^٣$	$\boxed{٢}$
٣-	٢-	٠	١	
٢	٤	٢		
٠	١	٢	١	

$(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١)$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١)}{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)}$$

$$= \frac{٤+٤+١}{٤+٤+٤} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$$

(١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^٣ + ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^٢ - ١}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

نلاحظ أنه ناتج تعويض (١) في البسط يساوي صفر وبالتالي فإنه (س-١) عامل من عوامل البسط.

ثابت	س	$\text{س}^٢$	$\text{س}^٣$	$\boxed{١}$
٤-	٣	٠	١	
٤	١	١		
٠	٤	١	١	

$(\text{س}^٢ + \text{س} + ٤)$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^٢ + \text{س} + ٤)}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س} + ١)}$$

$$= \frac{٦}{٢}$$

$$= ٣$$

(١٨) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{٤٨ - ٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣ - ٦٤}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{٣(١٦ - \text{س}^٢)}{(\text{س} - ٤)(\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ١٦)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{٣\overset{-١}{\cancel{(٤ - \text{س})}}(٤ + \text{س})}{\cancel{(\text{س} - ٤)}(\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ١٦)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{-٣(٤ + \text{س})}{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ١٦} = \dfrac{-٢٤}{٤٨} = \dfrac{-١}{٢}$

(١٩) $\lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}} \dfrac{\sqrt{١ + ٤\text{س} + ٤\text{س}^٢}}{٢\text{س} + ١}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}} \dfrac{\sqrt{٤\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ١}}{٢\text{س} + ١}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}} \dfrac{\sqrt{(٢\text{س} + ١)^٢}}{٢\text{س} + ١}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}} \dfrac{|٢\text{س} + ١|}{٢\text{س} + ١}$

$(٢\text{س} + ١)$: $-٢\text{س} - ١$ ($-$) | $-\frac{١}{٢}$ | $(٢\text{س} + ١)$ ($+$)

$\lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}^{+}} \dfrac{|٢\text{س} + ١|}{٢\text{س} + ١}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}^{+}} \dfrac{٢\text{س} + ١}{٢\text{س} + ١} = ١$

$\lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}^{-}} \dfrac{|٢\text{س} + ١|}{٢\text{س} + ١}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}^{-}} \dfrac{-\cancel{(٢\text{س} + ١)}}{\cancel{٢\text{س} + ١}} = -١$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{١}{٢}} \dfrac{|٢\text{س} + ١|}{٢\text{س} + ١}$ غير موجودة

(٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٩^{س} - ٣^{س}}{١ - ٣^{س}}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

الحل $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٣^{٢س} - ٣^{س}}{١ - ٣^{س}} = \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٣^{س} \cancel{(٣^{س} - ١)}^{-١}}{\cancel{١ - ٣^{س}}} = \lim\limits_{س \to ٠} ٣^{س} \times -١$

$= ١ \times -١ = -١$

(٤) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{٧^{س+١} - ٤٩}{٧ - ٧^{س}}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{٧ \cancel{(٧^{س} - ٧)}^{-١}}{\cancel{٧ - ٧^{س}}} = -٧$

(٥) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{٨} + س^{٤} - ٢}{س^{٢} - س}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(س^{٤})^{٢} + س^{٤} - ٢}{س(س^{٢} - ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(س^{٤} + ٢)(س^{٤} - ١)}{س(س^{٢} - ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(س^{٤} + ٢)\cancel{(س^{٢} - ١)}(س^{٢} + ١)}{س\cancel{(س^{٢} - ١)}}$

$= \dfrac{(٣)(٢)}{١} = ٦$

(٦) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(٤٩)^{س} - (٧)^{س}}{١ - ٧^{س}}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٧^{٢س} - ٧^{س}}{١ - ٧^{س}}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٧^{س} \cancel{(٧^{س} - ١)}^{-١}}{\cancel{١ - ٧^{س}}}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} (-١) \times ٧^{س}$

$= -١ \times (١) = -١$

$$٢٩)\quad \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{٥ - |٣س+١|}{س^{٣}+٨}$$

$-(٣س+١)$ $\quad$ $٣س+١$

$٣س+١$: $-$ $\quad$ $+$ عند $-\frac{١}{٣}$

$$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{٥ - (-٣س-١)}{س^{٣}+٨}$$

$$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{٦+٣س}{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)} = \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{(س+٢)}}{\cancel{(س+٢)}(س^{٢}-٢س+٤)} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$$

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

$$٣٠)\quad \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\frac{س^{٢}+٢٧}{س^{٢}-٩} - \frac{س+٣}{س-٣} \right)$$

$$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\frac{س^{٢}+٢٧}{س^{٢}-٩} - \frac{(س+٣)}{(س-٣)} \times \frac{(س+٣)}{(س+٣)} \right)$$

$$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٢}+٢٧-(س+٣)^{٢}}{س^{٢}-٩}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{س^{٢}}+٢٧-\cancel{س^{٢}}-٦س-٩}{س^{٢}-٩} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{١٨-٦س}{(س-٣)(س+٣)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{-٦\cancel{(س-٣)}}{\cancel{(س-٣)}(س+٣)} = \frac{-٦}{٦} = -١$$

*(يمكن حل المثال السابق بتوحيد المقامات بالضرب التبادلي)

(٣٤) $\text{نها}_{س \to ٢} \dfrac{(س+٢)^٢ - ١٦}{٩ - (س+١)^٢} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \dfrac{(س+٢-٤)(س+٢+٤)}{(٣-(س+١))(٣+(س+١))}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \dfrac{\cancel{(س-٢)}(س+٦)}{\cancel{(٢-س)}(س+٤)} = -١\left(\dfrac{٨}{٦}\right) = \dfrac{-٤}{٣}$

تدريب

(٣٥) $\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{٢٧ - (س+٢)^٣}{(س+١)^٣ - ٨}$

ملاحظة: نلاحظ من خلال ما سبق انه اذا كانت

$\text{نها}_{س \to أ} \dfrac{د(س)}{هـ(س)} = \dfrac{صفر}{صفر}$

فان (س−أ) او (أ−س) يكون عامل مشترك

بين البسط والمقام .

مثال: اذا كانت $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{أس^{٢} + س - ٦}{٣س - ٩}$ موجودة فأوجد قيمة الثابت أ .

الحل: بما أن النهاية موجودة

ناتج التعويض في نهاية المقام = صفر

فإن ناتج التعويض في نهاية البسط = صفر

(س - ٣) عامل من عوامل البسط والمقام .

$\Leftarrow ٩أ + ٣ - ٦ = ٠ \Leftarrow ٩أ = ٣$

$\Leftarrow أ = \frac{١}{٣}$

مثال: اذا كانت $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{أس^{٢} - ب س - ٦}{س - ٢} = ٥$ ، اوجد قيم الثوابت أ ، ب

الحل: نهاية موجودة

ناتج التعويض في المقام = صفر

$\Leftarrow$ ١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ أس^{٢} - ب س - ٦ =$ صفر

$\Leftarrow ٤أ - ٢ب - ٦ = ٠$

$٤أ - ٢ب = ٦ \quad ... (١)$

٢) (س - ٢) عامل من عوامل البسط والمقام

$\Leftarrow$ قسمة تركيبية

$\boxed{٢}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	أ	$-ب$	-٦
		$٢أ$	$-٢ب + ٤أ$
	أ	$(-ب + ٢أ)$	صفر

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} \frac{\cancel{(س-١)}(أس^٢ + ٢أس + ب)}{\cancel{س-١}} = ٥$

$\Leftarrow ٣أ + ب = ٥ \quad \cdots (٢)$

$\Leftarrow$ نأخذ المعادلتين

$$
\begin{array}{r}
٢أ + ب = ٢ \\
- \quad ٣أ + ب = ٥ \\
\hline
-أ = -٣
\end{array}
$$

$\Leftarrow \quad أ = ٣ \quad \Leftarrow \quad ب = -٤$

تدريب

مثال: اذا كانت $\lim_{س \to ب} \frac{س^٢ - أس + ١٦}{س - ب} =$ صفر

قيمتي الثوابت أ ، ب

تدريب

مثال: اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أس^٣ + ٢ب س + ٢}{س^٣ - ١} = ١$

اوجد قيمة كل من الثوابت أ ، ب

مثال: اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{ق(س) - ٣}{س - ٢} = ٥$

اوجد ما يلي:

١) $\lim\limits_{س \to ٢} ق^{٢}(س) + [س + \pi]$

٢) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{١}{٢} + ق(س) - [\pi - س]$

الحل: نهاية موجودة

ناتج التعويض في المقام = صفر

⇐ ناتج التعويض في نهاية البسط = صفر

⇐ $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٣$

١) $\lim\limits_{س \to ٢} ق^{٢}(س) + \lim\limits_{س \to ٢} [س + \pi]$

$= ٩ + [٣٫١٤ + ٢] = ٩ + [٥٫١٤]$

$= ٩ + ٥ = ١٤$

٢) $\dfrac{١}{٢} + ٣ - [٣٫١٤ - ٢]$

$= \dfrac{٧}{٢} - [١٫١٤] \Leftarrow \dfrac{٧}{٢} - ١ = \dfrac{٥}{٢}$

مثال إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣س^٢ - ٥س + ٢}{٢س^٢ - ٣س + ١} & س < ١ \\ ب & س \geq ١ \end{cases}$

أوجد قيمة الثابت (ب) التي تجعل $\lim\limits_{س \to ١}$ د(س) موجودة .

الحل : بما أن النهاية موجودة فإن :-

$$\lim_{س \to ١^-} \frac{٣س^٢ - ٥س + ٢}{٢س^٢ - ٣س + ١} = \lim_{س \to ١} ب$$

س²	س	ثابت
٣	−٥	٢
	٢	−٢
٣	−٣	٠

(س − ١)(٣س − ٢)

$$\lim_{س \to ١^-} \frac{\cancel{(س-١)}(٣س-٢)}{\cancel{(س-١)}(٢س-١)} = ب$$

$\Leftarrow \dfrac{١}{١} = ب$

$\Leftarrow ب = ١$

مثال

إذا كانت $\lim\limits_{س \to أ} [٢س] = ٥$ فأوجد أ

الحل : بما أن النهاية موجودة

$\therefore أ \notin ص$.

$\Leftarrow [٢أ] = ٥$

$٥ < ٢أ < ٦$

$٢,٥ < أ < ٣$

س²	س	ثابت
٢	−٣	١
	٢	−١
٢	−١	٠

(س − ١)(٢س − ١)

تدريب

مثال اذا كان د(س) = { $\dfrac{س^3 - أس^2 + ٣}{س - ١}$ ؛ س > ١
                               ب س - ٥ ؛ س < ١

ماقيم الثوابت أ ، ب التي تجعل نها د(س) موجودة .
                                    س ← ١

أ ، ب ∈ ح .

تدريب

مثال اذا كان د(س) = { $\dfrac{س^3 + س^2 - أس - ٤}{س - ٢}$ ، س > ٢
                               [٢س + ١] - $\dfrac{ب}{س}$ + س ، س < ٢

ماقيم الثوابت أ ، ب التي تجعل نها د(س) موجودة .
                                    س ← ٢

أ = ٤ ، ب = -١٢

مثال

اذا كان د(س) = { [س + ١] ، س < أ
                      ٨ - [س] ، س > أ

ماقيم الثابت أ التي تجعل نها د(س) موجودة
                               س ← أ

الحل : نها د = نها د
        س ← أ⁺   س ← أ⁻

٨ - أ = أ + ١ - ١

٢أ = ٨ ⟸ أ = ٤

⑤ $\lim\limits_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{١}{(\text{س}-١)}\left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}-١\right) \qquad \frac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{١}{(\text{س}-١)}\left(\frac{١-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{(١-\sqrt{\text{س}})}{(\text{س}-١)(\sqrt{\text{س}})}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{-١\cancel{(\sqrt{\text{س}}-١)}}{(\sqrt{\text{س}})(١+\sqrt{\text{س}})\cancel{(\sqrt{\text{س}}-١)}}$

$= \frac{-١}{٢}$

⑥ $\lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٣} \left(\frac{١}{\text{س}}-\frac{١}{٣}\right)\left(\frac{١}{\text{س}-٣}\right) \qquad \frac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٣} \left(\frac{٣-\text{س}}{٣\text{س}}\right)\left(\frac{١}{\text{س}-٣}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٣} \frac{-١\cancel{(\text{س}-٣)}}{\cancel{(\text{س}-٣)}(٣\text{س})}$

$= \frac{-١}{٩}$

⑦ $\lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \left(\frac{٧}{\text{س}}-\frac{٧}{٢}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^٢-٤}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \left(\frac{١٤-٧\text{س}}{٢\text{س}}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^٢-٤}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{١٤-٧\text{س}}{(\text{س}^٢-٤)(٢\text{س})}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{-٧\cancel{(\text{س}-٢)}}{(\text{س}+٢)\cancel{(\text{س}-٢)}\,٢\text{س}}$

$= \frac{-٧}{١٦}$

⑧ $\lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{\frac{٥}{\text{س}+١}-\frac{٥}{٣}}{\text{س}-٢} \qquad \frac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{١٥-٥(\text{س}+١)}{(\text{س}-٢)(٣)(\text{س}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{١٥-٥\text{س}-٥}{(\text{س}-٢)(٣)(\text{س}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{١٠-٥\text{س}}{(\text{س}-٢)(٣)(\text{س}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{-٥\cancel{(\text{س}-٢)}}{\cancel{(\text{س}-٢)}(٣)(\text{س}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{-٥}{(٣)(\text{س}+١)}$

$= \frac{-٥}{٩}$

⑨ $\lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٥} \left(\frac{٢}{\text{س}}-\frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^٢-٢٥}\right) \qquad \frac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٥} \left(\frac{١٠-٢\text{س}}{٥\text{س}}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^٢-٢٥}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٥} \frac{١٠-٢\text{س}}{(\text{س}+٥)(\text{س}-٥)(٥\text{س})}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٥} \frac{-٢\cancel{(\text{س}-٥)}}{(\text{س}+٥)\cancel{(\text{س}-٥)}(٥\text{س})}$

$= \lim\limits_{\text{س}\leftarrow ٥} \frac{-٢}{(\text{س}+٥)(٥\text{س})}$

$= \frac{-٢}{١٠\times ٢٥} = \frac{-٢}{٢٥٠}$

$= \frac{-١}{١٢٥}$

(١٢) $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \dfrac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow -٣} \dfrac{\cancel{٣ + س}}{٣س\,(\cancel{س + ٣})(س - ١)} = \lim\limits_{س \leftarrow -٣} \dfrac{١}{٣س\,(س - ١)} = \dfrac{١}{٣٦}$

(١٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{\frac{٢س + ٢}{س + ٢} - \frac{٣}{س}}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{\frac{٢س^{٢} + ٢س - ٣س - ٦}{(س)(س + ٢)}} = \lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{(س)(س + ٢)(س - ٢)(س + ٥)}{٢س^{٢} - س - ٦}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{(س)(س + ٢)\cancel{(س - ٢)}(س + ٥)}{\cancel{(س - ٢)}(٢س + ٣)}$

$= \dfrac{(٢)(٤)\cancel{(٧)}}{\cancel{٧}} = ٨$

(١٤) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{\frac{٩}{س + م} - ٣}{س - ٢} = \dfrac{٣}{٤}$ ، أوجد قيم م ، و

الحل: نهاية موجودة وناتج التعويض في مقام = صفر

$\Leftarrow$ ∴ ناتج التعويض في نهاية البسط = صفر

$\Leftarrow \dfrac{٩}{٢ + م} - ٣ = ٠$

* امثلة على الضرب بالمرافق

ما يدل على ذلك وجود $\sqrt[٣]{\ }$ ، $\sqrt{\ }$ في البداية .

* تذكير

مقدار	مرافقه التربيعي	حاصل ضربهما
* $(أ - ب)$	$(أ + ب)$	$أ^{٢} - ب^{٢}$
* $(أ + ب)$	$(أ - ب)$	$أ^{٢} - ب^{٢}$
مثال		
$\sqrt{س} - ٣$	$\sqrt{س} + ٣$	$س - ٩$
$٤ - \sqrt{س - ١}$	$٤ + \sqrt{س - ١}$	$١٦ - (س - ١)$
$\sqrt{س} - \sqrt{س - ١}$	$\sqrt{س} + \sqrt{س - ١}$	$س - (س - ١)$

تذكير

مقدار	مرافقه التكعيبي	حاصل ضربهما
* $(أ - ب)$	$أ^{٢} + أب + ب^{٢}$	$أ^{٣} - ب^{٣}$
* $(أ + ب)$	$أ^{٢} - أب + ب^{٢}$	$أ^{٣} + ب^{٣}$
مثال		
$\sqrt[٣]{س} - ١$	$(\sqrt[٣]{س})^{٢} + \sqrt[٣]{س} + ١$	$س - ١$
$\sqrt[٣]{س} - ٢$	$(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤$	$س - ٨$
$٢ + \sqrt[٣]{س}$	$٤ - ٢\sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}$	$٨ + س$

(د) $\underset{س \leftarrow 8}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[3]{س} - 2}{س - 8}$ ، $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$= \underset{س \leftarrow 8}{\text{نها}} \left(\frac{\sqrt[3]{س} - 2}{س - 8} \times \frac{(\sqrt[3]{س})^2 + 2\sqrt[3]{س} + 4}{(\sqrt[3]{س})^2 + 2\sqrt[3]{س} + 4} \right)$$

$$= \underset{س \leftarrow 8}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س - 8)}\ 1}{\cancel{(س - 8)}\left((\sqrt[3]{س})^2 + 2\sqrt[3]{س} + 4\right)}$$

$$= \underset{س \leftarrow 8}{\text{نها}} \frac{1}{(\sqrt[3]{س})^2 + 2\sqrt[3]{س} + 4}$$

$$= \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}$$

(هـ) $\underset{س \leftarrow 7}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[3]{س + 1} - 2}{(س - 7)}$ ، $\dfrac{0}{0}$

$$= \underset{س \leftarrow 7}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{س + 1} - 2}{(س - 7)} \times \frac{(\sqrt[3]{س + 1})^2 + 2\sqrt[3]{س + 1} + 4}{(\sqrt[3]{س + 1})^2 + 2\sqrt[3]{س + 1} + 4}$$

$$= \underset{س \leftarrow 7}{\text{نها}} \frac{(س + 1) - 8}{(س - 7)\left((\sqrt[3]{س + 1})^2 + 2\sqrt[3]{س + 1} + 4\right)}$$

$$= \underset{س \leftarrow 7}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س - 7)}\ 1}{\cancel{(س - 7)}\left((\sqrt[3]{س + 1})^2 + 2\sqrt[3]{س + 1} + 4\right)}$$

$$= \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}$$

$$⑨\ \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س + ٣}{\sqrt[٣]{س - ٥} + ٢} \quad ، \quad \frac{٠}{٠}$$

$$= \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س+٣}{\sqrt[٣]{س-٥}+٢} \times \frac{\left((\sqrt[٣]{س-٥})^{٢} - ٢\sqrt[٣]{س-٥} + ٤\right)}{\left((\sqrt[٣]{س-٥})^{٢} - ٢\sqrt[٣]{س-٥} + ٤\right)}$$

$$= \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{(س+٣)\left((\sqrt[٣]{س-٥})^{٢} - ٢\sqrt[٣]{س-٥} + ٤\right)}{(س-٥)+٨}$$

$$= \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س+٣)}\left((\sqrt[٣]{س-٥})^{٢} - ٢\sqrt[٣]{س-٥} + ٤\right)}{\cancel{(س+٣)}} = ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$$

$$⑩\ \underset{س \to ١٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+١٣} - ٥}{(س-١٢)} \quad ، \quad \frac{٠}{٠}$$

$$= \underset{س \to ١٢}{\text{نها}} \left(\frac{\sqrt{س+١٣} - ٥}{(س-١٢)} \times \frac{\sqrt{س+١٣} + ٥}{\sqrt{س+١٣} + ٥} \right)$$

$$= \underset{س \to ١٢}{\text{نها}} \frac{(س+١٣) - ٢٥}{(س-١٢)(\sqrt{س+١٣} + ٥)} = \underset{س \to ١٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س-١٢)}}{\cancel{(س-١٢)}(\sqrt{س+١٣}+٥)} ١$$

$$= \frac{١}{١٠}$$

$$⑪\ \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{١ - \sqrt{س-٣}}{س-٤} \quad ، \quad \frac{٠}{٠}$$

$$= \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \sqrt{س-٣}}{س-٤} \times \frac{١ + \sqrt{س-٣}}{١ + \sqrt{س-٣}} \right) = \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{١ - (س-٣)}{(س-٤)(١ + \sqrt{س-٣})}$$

$$= \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{١ - س + ٣}{(س-٤)(١ + \sqrt{س-٣})} = \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{-١\cancel{(س-٤)}}{\cancel{(س-٤)}(١ + \sqrt{س-٣})} = \frac{-١}{٢}$$

(تكعيب موضوعي)

$$⑭ \quad \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}{\sqrt{\text{س}+3} - 2} \quad , \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}{\sqrt{\text{س}+3} - 2} \times \frac{\left((\sqrt[3]{\text{س}})^2 + \sqrt[3]{\text{س}} + 1\right)}{\left((\sqrt[3]{\text{س}})^2 + \sqrt[3]{\text{س}} + 1\right)} \times \frac{\sqrt{\text{س}+3} + 2}{\sqrt{\text{س}+3} + 2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س} - 1)\left(\sqrt{1+3} + 2\right)}{\left((\text{س}+3) - 4\right)\left((\sqrt[3]{1})^2 + \sqrt[3]{1} + 1\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{4\cancel{(\text{س}-1)}}{3\cancel{(\text{س}-1)}} = \frac{4}{3}$$

$$⑮ \quad \lim_{\text{س} \to 1} \frac{1}{\text{س}-1}\left(\frac{1-\sqrt{\text{س}}}{2\text{س}+1}\right) \quad , \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{1}{\text{س}-1} \times \frac{1-\sqrt{\text{س}}}{2\text{س}+1} \times \frac{1+\sqrt{\text{س}}}{1+\sqrt{\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{-1\,\cancel{(1-\text{س})}}{\cancel{(\text{س}-1)}\,(2\text{س}+1)\,(1+\sqrt{\text{س}})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{-1}{(2\text{س}+1)(1+\sqrt{\text{س}})} = \frac{-1}{6}$$

$$⑯ \quad \lim_{\text{س} \to -2} \left(\frac{1}{\text{س}+2}\right)\left(\frac{8}{\sqrt[3]{\text{س}-5}} + 4\right) \quad , \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -2} \left(\frac{1}{\text{س}+2}\right)\left(\frac{8 + 4\sqrt[3]{\text{س}-5}}{\sqrt[3]{\text{س}-5}}\right)$$

$$= \cancel{\lim_{\text{س} \to -2}} \frac{1}{\text{س}+2} \times \frac{8+4\sqrt[3]{\text{س}-5}}{\sqrt[3]{\text{س}-5}} \times \frac{64 - 32\sqrt[3]{\text{س}-5} + 16\left(\sqrt[3]{\text{س}-5}\right)^2}{64 - 32\sqrt[3]{\text{س}-5} + 16\left(\sqrt[3]{\text{س}-5}\right)^2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -2} \frac{512 + 64(\text{س}-5)}{(\text{س}+2)\left(\sqrt[3]{\text{س}-5}\right)\left(64 - 32(-2) + 16(4)\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -2} \frac{512 + 64\text{س} - 320}{(\text{س}+2)(-2)(192)} = \lim_{\text{س} \to -2} \frac{192 + 64\text{س}}{3(\text{س}+2)(-384)} = \lim_{\text{س} \to -2} \frac{64\cancel{(3+\text{س})}}{\cancel{(\text{س}+2)}(-384)}$$

$$= \frac{64}{-384} = -\frac{1}{6}$$

$$⑳\ \lim_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{س+1}}\right)$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{\sqrt{س+1} - 1}{\sqrt{س+1}}\right)$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{\sqrt{س+1} - 1}{\sqrt{س+1}} \times \frac{\sqrt{س+1} + 1}{\sqrt{س+1} + 1}\right)$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{\cancel{1} + س - \cancel{1}}{2\sqrt{س+1}}\right) = \lim_{س \to 0} \frac{1}{\cancel{س}}\left(\frac{\cancel{س}}{2\sqrt{س+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$㉑\ \lim_{س \to -8} \frac{\sqrt{1-س} - 3}{2 + \sqrt[3]{س}}$$

$$= \lim_{س \to -8} \frac{\sqrt{1-س} - 3}{2 + \sqrt[3]{س}} \times \frac{\sqrt{1-س} + 3}{\sqrt{1-س} + 3} \times \frac{4 - 2\sqrt[3]{س} + (\sqrt[3]{س})^2}{4 - 2\sqrt[3]{س} + (\sqrt[3]{س})^2}$$

$$= \lim_{س \to -8} \frac{12 \times ((1-س) - 9)}{(6)(س+8)} = -\lim_{س \to -8} \frac{12\,\cancel{(س+8)}}{(6)\,\cancel{(س+8)}} = -2$$

$$\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{4-س} - \sqrt{س}}{2 - س} \qquad ج: \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(٢٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٣س}{س - ١ - \sqrt{س+١}}$

الحل:

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٣س}{(س-١) - \sqrt{س+١}}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٣س}{(س-١) - \sqrt{س+١}} \times \dfrac{(س-١) + \sqrt{س+١}}{(س-١) + \sqrt{س+١}}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(س^{٢} - ٣س)(٤)}{(س-١)^{٢} - (س+١)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{٤س(س-٣)}{س^{٢} - ٢س + \cancel{١} - س - \cancel{١}} = \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{٤\cancel{س}\cancel{(س-٣)}}{\cancel{س}\cancel{(س-٣)}} = ٤$

ملاحظة: يمكن حله بالفرض

$ص = \sqrt{س+١}$

$ص^{٢} = س + ١$

$\Leftarrow س = ص^{٢} - ١$

.....

(٢٥) إذا كانت $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٣د(س)}{س-٤} = \dfrac{٣}{٢}$

أوجد $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - س} - \sqrt{١٢}}{٣د(س)}$

$٣ \times \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{د(س)}{س-٤} = \dfrac{٣}{٢}$

$\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{د(س)}{(س-٤)} = \dfrac{١}{٢}$

الحل: $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - س} - \sqrt{١٢}}{٣د(س)} \times \dfrac{\sqrt{س^{٢} - س} + \sqrt{١٢}}{\sqrt{س^{٢} - س} + \sqrt{١٢}}$

$= \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - س - ١٢}{٣د(س)\,(٢\sqrt{١٢})} = \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{(س-٤)(س+٣)}{٣د(س)\,(٢\sqrt{١٢})}$

$= \dfrac{١}{٣} \times \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س-٤}{د(س)} \times \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س+٣}{٢\sqrt{١٢}} = \dfrac{١}{٣} \times ٢ \times \dfrac{٧}{٢\sqrt{١٢}}$

$= \dfrac{١٤}{٦\sqrt{١٢}}$

(٦) $\lim\limits_{س \to ٩} \dfrac{\sqrt{\sqrt{س}} - \sqrt{٢}}{س - ٩}$

نفرض $ص = \sqrt{س}$

$ص^2 = س$

$س \to ٩ ، ص \to ٣$

$= \lim\limits_{ص \to ٣} \dfrac{\sqrt{ص} - \sqrt{٣}}{ص^2 - ٩}$

$= \lim\limits_{ص \to ٢} \dfrac{\sqrt{ص} - \sqrt{٢}}{ص^2 - ٩} \times \dfrac{\sqrt{ص} + \sqrt{٢}}{\sqrt{ص} + \sqrt{٢}}$

$= \lim\limits_{ص \to ٢} \dfrac{\cancel{(ص - ٢)}}{\cancel{(ص - ٢)}(ص + ٢)(٢\sqrt{٢})} = \dfrac{١}{١٢\sqrt{٢}}$

(٧) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^2 - ٢س}{س + \sqrt{س + ٧} - ٥} = \dfrac{٠}{٠}$

$\lim\limits_{س \to ٢} س \times \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{(س - ٢)}{س + \sqrt{س + ٧} - ٥}$

نفرض $ص = \sqrt{س + ٧}$

$ص^2 = س + ٧$

$س \to ٢ ، ص \to ٣$

$\boxed{س = ص^2 - ٧}$

$= ٢ \times \lim\limits_{ص \to ٣} \dfrac{ص^2 - ٧ - ٢}{ص^2 - ٧ + ص - ٥}$

$= ٢ \times \lim\limits_{ص \to ٣} \dfrac{ص^2 - ٩}{ص^2 + ص - ١٢}$

$= ٢ \times \lim\limits_{ص \to ٣} \dfrac{\cancel{(ص - ٣)}(ص + ٣)}{\cancel{(ص - ٣)}(ص + ٤)} \Leftarrow = ٢ \times \dfrac{٦}{٧} = \dfrac{١٢}{٧}$

أمثلة على الفرض

مثال: أوجد قيمة النهايات التالية:-

① $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^2\sqrt{س} - 1}{س - 1}$

نفرض $ص = \sqrt{س}$

$ص^2 = س$

عندما $س \to 1$ ، $ص \to 1$

الحل: $\lim\limits_{ص \to 1} \dfrac{(ص^2)^2(ص) - 1}{ص^2 - 1}$

$= \lim\limits_{ص \to 1} \dfrac{ص^5 - 1}{ص^2 - 1}$

$ص^5$	$ص^4$	$ص^3$	$ص^2$	$ص$	ثابت
1	0	0	0	0	-1
	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0

$= \lim\limits_{ص \to 1} \dfrac{\cancel{(ص - 1)}(ص^4 + ص^3 + ص^2 + ص + 1)}{\cancel{(ص - 1)}(ص + 1)}$

$= \dfrac{5}{2}$

② $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س - 4\sqrt{س} + 3}{س^2 - 1}$

نفرض $ص = \sqrt{س}$

$ص^2 = س$

عندما $س \to 1$ ، $ص \to 1$

الحل: $\lim\limits_{ص \to 1} \dfrac{ص^2 - 4ص + 3}{ص^4 - 1}$

$= \lim\limits_{ص \to 1} \dfrac{\cancel{(ص - 1)}(ص - 3)}{\cancel{(ص - 1)}(ص + 1)(ص^2 + 1)}$

$= \lim\limits_{ص \to 1} \dfrac{ص - 3}{(ص + 1)(ص^2 + 1)}$

$= \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

ملاحظة

يمكن حله بالمرافق

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{(س + 3) - 4\sqrt{س}}{س^2 - 1} \times \dfrac{(س + 3) + 4\sqrt{س}}{(س + 3) + 4\sqrt{س}}$

* أمثلة متنوعة طرح وإضافة وغيرها

* يمكن توزيع النهاية على الفرق بشرط أن يبقى $\left(\frac{صفر}{صفر}\right)$

مثال: أوجد قيمة النهايات الآتية:

1) $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س+2} - \sqrt[3]{س+6}}{س-2}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س+2} - 2 - \sqrt[3]{س+6} + 2}{س-2}$ بإضافة وطرح (2)

$= \lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س+2} - 2}{س-2} - \lim_{س \to 2} \frac{\sqrt[3]{س+6} - 2}{س-2}$

← مرافق تربيعي

← مرافق تكعيبي.

2) $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 - 1}{2س - \sqrt{س} + 3}$

* يمكن حل هذا المثال
من خلال 1) المرافق
2) الفرض والاستبدال
* 3) قلب النهاية
وحلها بطرق مختلفة

نجد مقلوب النهاية:

$\lim_{س \to 1} \frac{2س - \sqrt{س} + 3}{س^2 - 1}$ ، نضيف 2 ونطرح 2

$\lim_{س \to 1} \frac{2س + 2 - \sqrt{س} + 2 - 2}{س^2 - 1}$

$\frac{صفر}{صفر}$ تحقق

$= \lim_{س \to 1} \frac{2س + 2}{س^2 - 1} - \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س^2 - 1}$

تحقق $\frac{صفر}{صفر}$

٤) $\lim\limits_{س \to -1} \left(س^2 + \frac{3}{س} + 2 \right)$ ، ج : طرح وإضافة .

إما الطرح وإضافة ١
أو الطرح وإضافة -٣
أو كليهما .

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{س^2 - 1 + \frac{3}{س} + 2 + 1}{س + 1}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{س^2 - 1}{س + 1} + \lim\limits_{س \to -1} \frac{\frac{3}{س} + 3}{س + 1}$

تفتيت

$\frac{صفر}{صفر}$

$= \lim\limits_{س \to -1} (س - 1) + \lim\limits_{س \to -1} \frac{3 + 3س}{س(س + 1)}$

$= -2 + \lim\limits_{س \to -1} \frac{3\cancel{(1 + س)}}{س\cancel{(س + 1)}}$

$= -5$

تدريب

٥) $\lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} + \frac{1}{س} - 2}{س - 1}$ ج : $-\frac{1}{2}$

تدريب

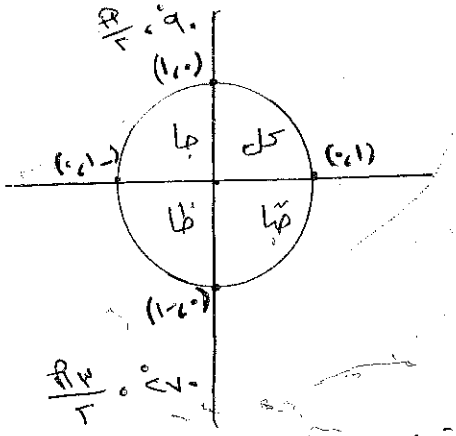
٦) $\lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt{س}\,(س + 1)^2 - 4}{س - 1}$ ج : ٦

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

رابعاً: مشتقة الاقترانات الدائرية (المثلثية).

* تذكير :-

دائرة الوحدة :-
وهي دائرة نصف قطرها وحدة واحدة .



* (جتا ، جا) (س ، ص)

* للتحويل من تقدير ستيني إلى دائري نضرب في $\frac{ط}{١٨٠°}$

مثال :- حوّل ٩٠° $\Leftarrow$ $٩٠° \times \frac{ط}{١٨٠°} \Leftarrow \frac{ط}{٢}$ راديان

* للتحويل من تقدير دائري إلى ستيني . نضرب في $\frac{١٨٠°}{ط}$

مثال :- حوّل $\frac{ط}{٢} \Leftarrow \frac{ط}{٢} \times \frac{١٨٠°}{ط} = \frac{١٨٠°}{٢} = ٩٠°$

ملاحظة :-

① الاحداثي السيني يمثل قيمة (جتا) والاحداثي الصادي يمثل قيمة (جا)

② النسب المثلثية جا ، جتا ، ظا ، ظتا ، قا ، قتا . جميعها موجبة في الربع الأول .

③ جا ، قتا فقط موجبات في الربع الثاني وما تبقى سالب .

④ ظا ، ظتا " " " " الثالث وما تبقى سالب .

⑤ جتا ، قا " " " " الرابع وما تبقى سالب .

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* تذكير ببعض الزوايا :-

الزاوية دائري ستيني / الاقتران الدائري	$\frac{ط}{٦}$ ٣٠°	$\frac{ط}{٤}$ ٤٥°	$\frac{ط}{٣}$ ٦٠°	$\frac{ط}{٢}$ ٩٠°	ط ١٨٠°	$\frac{٣ط}{٢}$ ٢٧٠°	٢ط ٣٦٠°	$\frac{٢ط}{٣}$ ١٢٠°	$\frac{٣ط}{٤}$ ١٣٥°	٠ ٠°
جاس	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	١-	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	٠
جتاس	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	٠	١-	٠	١	$-\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
ظاس	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرف	٠	غير معرف	٠	$-\sqrt{٣}$	١-	٠

تذكير : ظاس = $\frac{جاس}{جتاس}$ ، ظتاس = $\frac{جتاس}{جاس}$ ، قاس = $\frac{١}{جتاس}$ ، قتاس = $\frac{١}{جاس}$

مثال: اوجد قيمة الغايات الآتية.

1) $\underset{س \to \pi}{\text{نها}}\ \text{جا}\ س = \text{صفر}$ ،

2) $\underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\ س}{س} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ ،

3) $\underset{س \to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\ س}{س} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$ ،

4) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ (\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س)^2 = 1$

5) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}\ س}{س} = \frac{1}{0}$ (غير موجودة)

مثال: اثبت أن $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\ س}{س} = 1$ ، حيث س مقاسة بالراديان

الإثبات: $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\ س}{س} = \underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\left(\frac{\text{جا}\ س}{\text{جتا}\ س}\right)}{س}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\ س}{س} \times \underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{1}{\text{جتا}\ س}$

$= 1 \times 1 = 1$.

نتائج: أ، ب $\in$ ح ، ب $\neq 0$

1) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\ أس}{ب\ س} = \frac{أ}{ب}$

2) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{أس}{\text{جا}(ب\ س)} = \frac{أ}{ب}$

3) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\ أس}{\text{جا}(ب\ س)} = \frac{أ}{ب}$

4) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\ أس}{ب\ س} = \frac{أ}{ب}$

5) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{أس}{\text{ظا}\ ب\ س} = \frac{أ}{ب}$

6) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\ أس}{\text{ظا}\ ب\ س} = \frac{أ}{ب}$

7) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\ أس}{\text{ظا}\ ب\ س} = \frac{أ}{ب}$

8) $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\ أس}{\text{جا}\ ب\ س} = \frac{أ}{ب}$

(٧) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٥س - ٣س}{٤س} = \div$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣س}{٤س} - \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٥س}{٤س}$

$= \dfrac{٣}{٤} - \dfrac{٥}{٤} = \dfrac{-١}{٢}$

(٨) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٥س + \text{ظا}٢س}{٧س} \,،\, \div$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٥س}{٧س} + \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}٢س}{٧س}$

$= \dfrac{٥}{٧} + \dfrac{٢}{٧} = ١$

(٩) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}٣س}{س^٢ - ٢س} \,،\, \div$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}٣س}{س(س-٢)} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}٣س}{س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{س-٢}$

$= ٣ \times \dfrac{-١}{٢} = \dfrac{-٣}{٢}$

(١٠) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢(٥س) - \text{جا}^٣(٥س)}{٣س^٢ - س^٣} \,،\, \div$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢(٥س)(١ - \text{جا}٥س)}{س^٢(٣-س)} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢٥س}{س^٢} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جا}٥س}{٣-س}$

$= ٢٥ \times \dfrac{١}{٣} = \dfrac{٢٥}{٣}$

(١٥) $\displaystyle نها_{س \leftarrow ٠} \frac{٧ جا^{٦} س}{٢ س^{٦}}$ ، $\frac{٠}{٠}$

$\displaystyle = \frac{٧}{٢} \left(نها_{س \leftarrow ٠} \frac{جا س}{س} \right)^{٦} = \frac{٧}{٣}$ (عدد حقيقي)

(١٦) $\displaystyle نها_{س \leftarrow ٠} \frac{جا^{٤} ٢س}{٣ س^{٣}}$ ، $\frac{٠}{٠}$

$\displaystyle = نها_{س \leftarrow ٠} \frac{جا ٢س}{٣} \times نها_{س \leftarrow ٠} \frac{جا^{٣} ٢س}{س^{٣}}$

$\displaystyle = صفر \times \left(نها_{س \leftarrow ٠} \frac{جا ٢س}{س} \right)^{٣}$

$= ٠ \times ٨ =$ (صفر)

(١٧) $\displaystyle نها_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٤}}{ظا^{٥} س} = \frac{٠}{٠}$

$\displaystyle = \left(نها_{س \leftarrow ٠} \frac{س}{ظا س} \right)^{٤} \times نها_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{ظا س}$

$= ١ \times \frac{١}{٠} =$ غير موجودة ،

ملاحظة: تستنتج نلاحظ من خلال الأمثلة ١٥، ١٦، ١٧
انه اذا كانت السؤال تطبيق على النتائج (٨) السابقة فانه

درجة البسط = درجة المقام ← نهاية موجودة وتساوي عدد حقيقي
درجة البسط > درجة المقام ← " " " صفر
درجة البسط < درجة المقام ← نهاية غير موجودة .

③ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س جا س - ظا ٣س}{جا(٥س) - ٤س} = \dfrac{صفر}{صفر}$

نقسم البسط والمقام على س ونعوض

$= -٣$

④ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س - جا ٢س + ظا ٥س}{٣س - ظا س} = \dfrac{٠}{٠}$

نقسم البسط والمقام على س ونعوض .

$= \dfrac{٣}{٢}$

⑤ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\sqrt{٣}\, جا^٢ س + جا س^٢}{س^٢} \quad , \quad \dfrac{٠}{٠}$

نفرض ص = $س^٢$
$س \to ٠ \Leftarrow ص \to ٠$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\sqrt{٣}\, جا^٢ س}{س^٢} + \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{جا س^٢}{س^٢}$

$= \sqrt{٣} \times \left(\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{جا س}{س}\right)^٢ + \lim\limits_{ص \to ٠} \dfrac{جا ص}{ص}$

$= \sqrt{٣}\,(١) + ١ = \sqrt{٣} + ١$

٦) $\lim\limits_{س \to أ} \dfrac{جا(س - أ)}{(س - أ)} \quad , \quad \dfrac{٠}{٠}$

نفرض ص = س − أ
$س \to أ \Leftarrow ص \to ٠$

$\Leftarrow \lim\limits_{ص \to ٠} \dfrac{جا ص}{ص} = ١$

٧) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{جا |س|}{س} = \dfrac{٢}{\pi}$,

$\text{جا}^2\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١} - \text{جتا ٢س})$

$\text{١} - \text{جتا س} = \text{٢ جا}^2 \frac{\text{س}}{\text{٢}}$

④ $\lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \frac{\text{١} - \text{جتا س}}{\text{س جا س}} \quad \text{،} \quad \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \frac{\text{٢ جا}^2 \frac{\text{س}}{\text{٢}}}{\text{س جا س}}$

$= \text{٢} \times \lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \frac{\text{جا}(\frac{\text{س}}{\text{٢}})}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \frac{\text{جا}(\frac{\text{س}}{\text{٢}})}{\text{جا س}}$

$= \text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

⑤ $\lim\limits_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}} \frac{\text{١} - \text{٢ جا س}}{\text{٣} - \text{٤ جتا}^2\text{س}} \quad \text{،} \quad \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}} \frac{\text{١} - \text{٢ جا س}}{\text{٣} - \text{٤}(\text{١} - \text{جا}^2\text{س})}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}} \frac{\text{١} - \text{٢ جا س}}{\text{٣} - \text{٤} + \text{٤ جا}^2\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}} \frac{\text{١} - \text{٢ جا س}}{\text{٤ جا}^2\text{س} - \text{١}} = \lim\limits_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}} \frac{\cancel{\text{١} - \text{٢ جا س}}}{\cancel{(\text{٢ جا س} - \text{١})}(\text{٢ جا س} + \text{١})}$

$= \frac{-\text{١}}{\text{٢}}$

⑥ $\lim\limits_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{٣ جتا}^2\text{س}}{\text{جا س} - \text{جا}^2\text{س}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{٣}(\text{١} - \text{جا}^2\text{س})}{\text{جا س}(\text{١} - \text{جا س})}$

$$⑨ \quad \lim_{س \to ٠} \frac{جتا^٢ س + ٢ جتا س - ٣}{س^٢} = \frac{٠}{٠}$$

$$جا^٢ س = \frac{١}{٢}(١ - جتا ٢س)$$

$$-٢ جا^٢ \frac{س}{٢} = جتا س - ١$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{(جتا س + ٣)(جتا س - ١)}{س^٢}$$

$$= \lim_{س \to ٠} (جتا س + ٣) \times \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جتا س - ١}{س^٢}\right)$$

$$= ٤ \times -٢ \times \left(\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ \frac{س}{٢}}{س^٢}\right)$$

$$= -٨ \times \frac{١}{٤} = -٢$$

$$⑩ \quad \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{جتا ٤س} - ١}{س^٢} \ ، \ \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{جتا ٤س} - ١}{س^٢} \times \frac{\sqrt{جتا ٤س} + ١}{\sqrt{جتا ٤س} + ١}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٤س - ١}{س^٢ (٢)} \ ، \ \text{أكمل الحل :}$$

$$=$$

تدريب

(١٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{ظا(س - ٣)}{س^{٣} - ٢٧}$ ، ∵ نقسم ونضرب بـ (س - ٣)

تدريب

(١٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س - ٨}{جا(\sqrt{س} - ٢)}$ ، ∵ نقسم ونضرب بـ $(\sqrt{س} - ٢)$

تدريب

(١٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{جا(٢س - ٩)}{٢ - س٧}$ نقسم ونضرب بـ (٢س - ٩)

(١٨) $\displaystyle \lim_{س \to \pi} \frac{1 + جتا\,س}{(س - \pi)^2}$ ، ÷

$$\lim_{س \to \pi} \frac{1 + جتا\,س}{(س - \pi)^2} \times \frac{1 - جتا\,س}{1 - جتا\,س}$$

$$= \lim_{س \to \pi} \frac{1 - جتا^2\,س}{(س - \pi)^2} \times \frac{1}{2}$$

نفرض ص = $\pi - س$
، $س \to \pi$ ، ص $\to 0$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{س \to \pi} \frac{جا^2\,س}{(س - \pi)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{س \to \pi} \frac{جا^2(\pi - س)}{(\pi - س)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{س \to \pi} \frac{جا^2(\pi - س)}{(\pi - س)^2} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

(١٩) $\displaystyle \lim_{س \to \pi/6} \frac{جتا\,س - \sqrt{3}\,جا\,س}{6س - \pi}$ ، ÷ جا(أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب

اضرب ÷ $\frac{1}{2}$ واقسم على $\frac{1}{2}$

$$\lim_{س \to \pi/6} \frac{\frac{1}{2}جتا\,س - \frac{\sqrt{3}}{2}جا\,س}{\frac{1}{2}(6س - \pi)}$$

$$= \lim_{س \to \pi/6} \frac{جا\frac{\pi}{6}\,جتا\,س - جتا\frac{\pi}{6}\,جا\,س}{3(س - \pi/6)}$$

$$= \lim_{س \to \pi/6} \frac{جا(\frac{\pi}{6} - س)}{-3(\frac{\pi}{6} - س)}$$

$$= \lim_{ص \to 0} \frac{جا\,ص}{-3\,ص}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

نفرض
ص = $\pi/6 - س$
، $س \to \pi/6$
، ص $\to 0$

(٢٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(س-٢)}{\text{ظا}(\pi س)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(س-٢)}{-\text{ظا}(٢\pi - \pi س)}$

$= - \times \text{نها} \dfrac{(س-٢)}{\text{ظا}(\pi(س-٢))}$

$= \underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{ص}{\text{ظا}\, \pi ص} = \dfrac{١}{\pi}$

* بفرض $ص = س - ٢$

$س \to ٢$ ، $ص \to ٠$

* $\text{ظا}\,-س = -\text{ظا}\, س$

حل آخر من خلال فرضنا $ص = \pi س$

(٢٦) $\underset{س \to \pi/٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\, س}{(س - \frac{\pi}{٢})}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \text{نها} \dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{(س - \frac{\pi}{٢})}$

$= \underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\, ص}{ص} = ١$

بفرض $ص = \frac{\pi}{٢} - س$

$س \to \pi/٢$ ، $ص \to ٠$

حل آخر من خلال فرض $ص = (س - \frac{\pi}{٢})$

ربع ثاني ،

* $\text{جا}(٢\pi - س) = \text{جا}\, س$ ،

(٢٧) $\underset{س \to ٢\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\, س}{(\frac{س}{٢} - \pi)}$

$= \underset{س \to ٢\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(٢\pi - س)}{(\frac{س}{٢} - \pi)}$

$= \underset{س \to ٢\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(-٢(\frac{س}{٢} - \pi))}{(\frac{س}{٢} - \pi)}$

$= - \times \underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\, ٢ص}{ص} = -٢$ ،

بفرض $ص = \frac{س}{٢} - \pi$

عندما $س \to ٢\pi$

$ص \to ٠$

حل آخر من خلال فرض $ص = (\frac{س}{٢} - \pi)$

(٣٠) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{١ - \sqrt{٢}\ \text{جتا}\ س}{١ - \sqrt{٢}\ \text{جا}\ س}$ ، $\frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{١ - \sqrt{٢}\ \text{جتا}\ س}{١ - \sqrt{٢}\ \text{جا}\ س} \times \dfrac{١ + \sqrt{٢}\ \text{جتا}\ س}{١ + \sqrt{٢}\ \text{جتا}\ س} \times \dfrac{١ + \sqrt{٢}\ \text{جا}\ س}{١ + \sqrt{٢}\ \text{جا}\ س}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{٢\,(١ - ٢\,\text{جتا}^{٢}\ س)}{٢\,(١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\ س)} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{-\text{جتا}\ ٢س}{\text{جتا}\ ٢س}$

$= -١$

$\boxed{\begin{array}{c} \text{جتا}\ ٢س = ١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\ س \\ \text{جتا}\ ٢س = ٢\,\text{جتا}^{٢}\ س - ١ \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{c} \text{جتا}\ ٢س = \text{جتا}^{٢}\ س - \text{جا}^{٢}\ س \\ -\text{جتا}\ ٢س = \text{جا}^{٢}\ س - \text{جتا}^{٢}\ س \end{array}}$

(٣١) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\ س - \text{جتا}\ س}{١ - \sqrt{٢}\ \text{جا}\ س}$ ، $\frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\ س - \text{جتا}\ س}{١ - \sqrt{٢}\ \text{جا}\ س} \times \dfrac{\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س}{\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س} \times \dfrac{١ + \sqrt{٢}\ \text{جا}\ س}{١ + \sqrt{٢}\ \text{جا}\ س}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{٢\,(\text{جا}^{٢}\ س - \text{جتا}^{٢}\ س)}{\sqrt{٢}\,(١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\ س)} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢}\,\cancel{(-\text{جتا}\ ٢س)}}{\cancel{\text{جتا}\ ٢س}} = -\sqrt{٢}$

(٣٢) $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\ س}{(\pi - س)^{٢}} = \left(\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\ (\pi - س)}{\pi - س}\right)^{٢}$

$= \left(\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا} - (\pi - س)}{(\pi - س)}\right)^{٢}$

$ص = \pi - س$

$س \leftarrow \pi$ ، $ص \leftarrow ٠$

$= \left(\underset{ص \leftarrow ٠}{\text{نها}} (-١) \dfrac{\text{جا}\ (ص)}{ص}\right)^{٢} = (-١)^{٢} = ١$

(٣٥) $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{١ - ظتا^٢ س}{قتا^٢ س}$

$= \underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{١ - \dfrac{جتا^٢ س}{جا^٢ س}}{\dfrac{١}{جا^٢ س}}$

$= \underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{جا^٢ س - جتا^٢ س}{\cancel{جا^٢ س} \times \dfrac{١}{\cancel{جا^٢ س}}}$

$= -١$

تذكير

نلاحظ أنه لا يجوز الضرب بالمرافق هنا ولكننا نحول .

$* \; ظتا^٢ س \longrightarrow \dfrac{جتا^٢ س}{جا^٢ س}$

$* \; قتا^٢ س \longrightarrow \dfrac{١}{جا^٢ س}$.

(٣٦) $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{\sqrt{١ - جتا س}}{س}$

الحل : $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{\sqrt{٢ جا^٢ \frac{س}{٢}}}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{\sqrt{٢} \left| جا \frac{س}{٢} \right|}{س}$

$جا^٢ س = \frac{١}{٢}(١ - جتا ٢س)$

$\therefore \; \boxed{٢ جا^٢ \frac{س}{٢} = ١ - جتا س}$

$$\underset{-}{-جا(\tfrac{س}{٢})} \quad \overset{٠}{\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow} \quad \underset{+}{جا(\tfrac{س}{٢})}$$

$\Leftarrow \underset{س \to ٠^+}{نها} \dfrac{\sqrt{٢} \left| جا \frac{س}{٢} \right|}{س} = \underset{س \to ٠^+}{نها} \dfrac{\sqrt{٢} \, جا (\frac{س}{٢})}{س} = \dfrac{\sqrt{٢}}{٢} = \dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

$\underset{س \to ٠^-}{نها} \dfrac{\sqrt{٢} \left| جا \frac{س}{٢} \right|}{س} = \underset{س \to ٠^-}{نها} \dfrac{\sqrt{٢} \left(-جا \frac{س}{٢}\right)}{س} = \dfrac{-\sqrt{٢}}{٢} = \dfrac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow \underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{\sqrt{٢} \left| جا \frac{س}{٢} \right|}{س}$ غ.م

$$ص = ١ - \frac{١}{س}$$

$$← ١ \text{ ، } ص ← ٠ .$$

(٤٠) $$\underset{س ← ١}{نها} \frac{س \, جا \left(\frac{π}{س}\right)}{١ - س}$$

$$= \underset{١ ←}{نها} \frac{\cancel{س} \, جا \left(π - \frac{π}{س}\right)}{\cancel{س}\left(١ - \frac{١}{س}\right)}$$

$$= \underset{١ ←}{نها} \frac{جا \left(π\left(١ - \frac{١}{س}\right)\right)}{\left(١ - \frac{١}{س}\right)}$$

$$= \underset{ص ← ٠}{نها} \frac{جا \, π ص}{ص} = π \text{ .}$$

(٤١) $$\underset{← ٠}{نها} \frac{ظا \left(٧س + π\right)}{جا \left(٣س - ٢π\right)} \text{ ، } \frac{٠}{٠}$$

$$= \underset{س ← ٠}{نها} \frac{ظا \, ٧س}{-جا\left(٢π - ٣س\right)} = \underset{س ← ٠}{نها} \frac{ظا \, ٧س}{(-)(-) جا \, ٣س} = \frac{٧}{٣}$$

(٤٢) $$\underset{س ← π/٤}{نها} \frac{١ - جا \left(س + \frac{π}{٤}\right)}{س - π/٤}$$

، هذه الحالة تستبدل بدل (١) أقرب منه جا

$$= \underset{س ← π/٤}{نها} \frac{جا \left(\frac{π}{٢}\right) - جا \left(س + π/٤\right)}{س - π/٤}$$

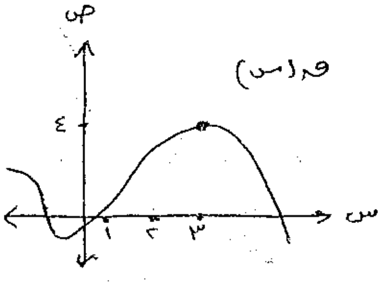
الحل جا أ - جا ب

$$= صفر \text{ .}$$

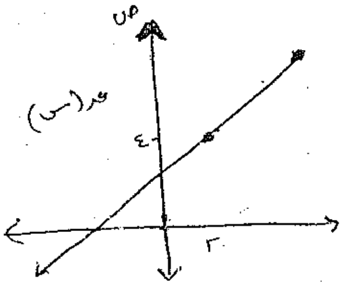
الفصل الثاني : الاتصال .

أولاً : الاتصال عند نقطة

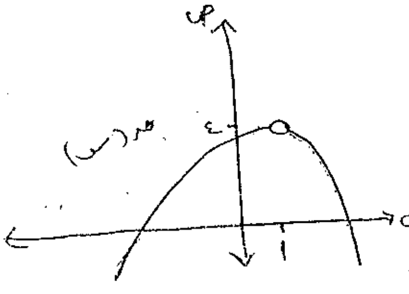
* يقال عن الاقتران ق أنه متصل إذا أمكن رسم منحنى ق على أي فترة من مجاله دون رفع القلم عن الورقة بحيث لا يوجد في منحناه ثقوب أو قفزات .



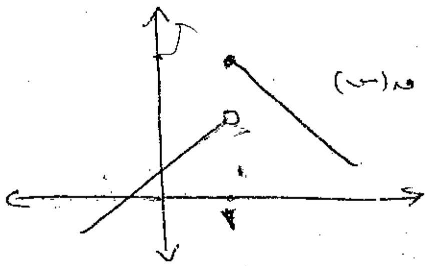
(أ)



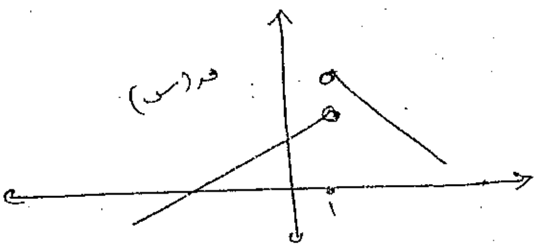
(ب)



(جـ)



(د)



(هـ)

① لاحظ في شكل (أ) أن ق(س) متصل عند (س = ٣)، لأنه عند نقطة (٣) لا يوجد ثقب أو انقطاع أو قفزة أبداً .

② لاحظ في شكل (ب) أن ق(س) متصل عند (س = ٢) لأنه عند النقطة (٢) لا يوجد ثقب أو انقطاع أو قفزة أبداً .

③ لاحظ في الشكل (جـ) أن ق غير متصل عند (س = ١) وذلك لوجود ثقب عند س = ١

④ لاحظ في الأشكال د ، هـ أنه ق غير متصل عند (س = ١) وذلك لوجود قفزة عند س = ١

مثال إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} & : س \neq ٩ \\ \dfrac{١}{٦} & : س = ٩ \end{cases}$

ابحث في اتصال د(س) عند س = ٩

الحل: ١) د(٩) = $\frac{١}{٦}$

٢) $\lim_{س \to ٩}$ د(س) = $\frac{١}{٦}$ (من خلال حلها).

٣) د(٩) = $\lim_{س \to ٩}$ د(س) = $\frac{١}{٦}$ ∴ د متصل عند س = ٩.

مثال إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \left|١ - \dfrac{س}{٢}\right| & : -١ \leq س < ٣ \\ \left[\dfrac{١}{٢}س + ٣\right] & : ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال د(س) عند س = ٣ .

الحل: ١) د(٣) = $\left[\frac{٣}{٢} + ٣\right]$ = [٤,٥] = ٤

٢) $\lim_{س \to ٣^{+}}$ د(س) = $\lim_{س \to ٣^{+}} \left[\frac{١}{٢}س + ٣\right]$

= ٤

$\lim_{س \to ٣^{-}}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) غير موجودة

∴ د غير متصل عند س = ٣

يمكن الحل بإعادة التعريف أيضاً .

مثال: إذا كان د(س) = $\begin{cases} 3س+5 & : س \in ص \\ 2س^2-4 & : س \notin ص \end{cases}$ ص ← الأعداد الصحيحة

ابحث في اتصال د(س) عند س = 3

الحل: 1) د(3) = 14

2) نهـا د(س) = نهـا $2س^2-4$ = 14
$\quad\;\; س \to 3 \qquad\qquad 3 \leftarrow$

3) د(3) ≠ نهـا د(س) ∴ د غير متصل عند س = 3 .
$\qquad\qquad\quad 3 \leftarrow$

مثال: إذا كان د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^3+س^2+2س-4}{س-1} & : س \neq 1 \\ 5س-1 & : س = 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال د(س) عند س = 1

الحل: 1) د(1) = 4

2) نهـا د(س) = نهـا $\dfrac{س^3+س^2+2س-4}{س-1}$
$\quad\; س \to 1 \qquad\quad س \to 1$

= نهـا $\dfrac{\cancel{(س-1)}(س^2+2س+4)}{\cancel{س-1}}$
$\quad 1 \leftarrow$

= 7

$س^3$	$س^2$	س	ثابت
1	1	2	-4
1	2	4	0

$\boxed{1}$

تدريب

مثال: إذا كان د(س) = $\begin{cases} \dfrac{|ظا س|}{س} & : س > 0 \\ 1-جتا س & : س \le 0 \end{cases}$

ابحث في الاتصال عند س = 0

مثال: إذا كانت د(س) = $س^٣ + س + ١$ ، ابحث في اتصال د(س) عند س = ٤

الحل: د(س) متصلة عند س = ٤ ، لأنه كثير حدود .

مثال: إذا كانت د(س) = $\sqrt{س^٢ + ١}$ ، ابحث في اتصال د(س) عند س = (-٢)

الحل: د(س) متصلة عند س = -٢ ، وذلك لأنه

$س^٢ + ١$ ، متصل عند س = -٢ ، لأنه كثير حدود .

مثال: إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{جا ٣س}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٣ & ، س = ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال د(س) عند س = ٠

الحل:

* د(٠) = ٣

* $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{س}$ = ٣

* د(٠) = النهاية = ٣

∴ د متصل عند س = ٠

مثال: إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{|٦ - ٢س|}{٢ - س} & ، س \neq ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال د(س) عند س = ٣

الحل: نبحث في شروط الاتصال .

(٦ - ٢س) + | - (٢س - ٦) ، ٣ ، ٢س - ٦

* د(٢) = ٢

* $\lim_{س \to ٢^+}$ د = $\lim_{س \to ٢^+} \frac{|٦ - ٢س|}{٢ - س}$ = $\lim_{س \to ٢^+} \frac{٢س - ٦}{٢ - س}$ = -٢ ⟩ نهاية غ.م

$\lim_{س \to ٢^-}$ د = $\lim_{س \to ٢^-} \frac{|٦ - ٢س|}{٢ - س}$ = $\lim_{س \to ٢^-} \frac{٦ - ٢س}{٢ - س}$ = ٢

∴ د غير متصل عند س = ٢

مثال: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^2(\text{ب س}) - \text{س}^2}{\text{س جا}\,2\text{س}} & ، \quad -\dfrac{\pi}{4} \leq \text{س} < 0 \\ 2 & ، \quad \text{س} = 0 \\ \dfrac{\text{س}^2 + (1-\text{أ})\text{س}}{\text{أ س}} & ، \quad 0 < \text{س} \leq 2 \end{cases}$$

اقتران متصل عند س = ٠ ، فجد قيم كل من أ ، ب

الحل: بما أن ق متصل عند س = ٠ ⇐ تتحقق شروط الاتصال

* ⇐ ق(٠) = $\displaystyle\lim_{\text{س} \to 0^+}$ ق

$$2 = \lim_{\text{س} \to 0^+} \frac{\text{س}^2 + (1-\text{أ})\text{س}}{\text{أ س}}$$

$$2 = \lim_{\text{س} \to 0^+} \frac{\text{س}^2}{\text{أ س}} + \lim_{\text{س} \to 0^+} \frac{(1-\text{أ})\cancel{\text{س}}}{\text{أ}\cancel{\text{س}}}$$

$$2 = 0 + \frac{1-\text{أ}}{\text{أ}} \quad ⇐ \quad 2\text{أ} = 1 - \text{أ}$$

$$⇐ \quad \text{أ} = \frac{1}{3}$$

* ق(٠) = $\displaystyle\lim_{\text{س} \to 0^-}$ ق(س)

$$2 = \lim_{\text{س} \to 0^-} \frac{\text{جا}^2(\text{ب س}) - \text{س}^2}{\text{س جا}\,2\text{س}}$$

$$2 = \lim_{\text{س} \to 0^-} \frac{\text{جا}^2(\text{ب س})}{\text{س جا}\,2\text{س}} - \lim_{\text{س} \to 0^-} \frac{\text{س}^{\cancel{2}}}{\cancel{\text{س}}\,\text{جا}\,2\text{س}}$$

$$2 = \lim_{\text{س} \to 0^-} \frac{\text{جا ب س}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to 0^-} \frac{\text{جا ب س}}{\text{جا}\,2\text{س}} - \lim_{\text{س} \to 0^-} \frac{\text{س}}{\text{جا}\,2\text{س}}$$

$$2 = \left(\text{ب} \times \frac{\text{ب}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2 = \frac{\text{ب}^2 - 1}{2} \quad ⇐ \quad \text{ب}^2 = 5 \quad ⇐ \quad \text{ب} = \pm\sqrt{5}$$

الاقتران النسبي

هو اقتران يأتي على صورة $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ وهو معرف ما عدا أصفار المقام.

مثال 1) ق(س) $= \frac{س^2 + س + 1}{س - 2}$ ، ق متصل على ح $- \{2\}$.

2) ق(س) $= \frac{س^3 - 27}{س^2 - 9}$ ، ق معرف على ح $- \{-3 , 3\}$.

3) ق(س) $= \frac{س - 4}{س^2 - 16}$ ، ق معرف على ح $- \{\pm 4\}$.

لا نختصر إلا عند حساب النهاية.

4) ق(س) = ظاس

= $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، جتاس = 0 ⟸ س $= \pm ن \frac{\pi}{2}$ ، ن فردي

ق غير متصل عند أصفار المقام

وهي س $= \pm ن \frac{\pi}{2}$ ، ن فردي.

5) مهم ق(س) $= \frac{4}{|س + 1| + 5}$ ، غير متصل عند أصفار المقام

⟸ $|س + 1| + 5 = 0$

$|س + 1| = -5$ مستحيل لا يحل.

س $= \emptyset$ ∴ ق متصل على ح

(مثال) إذا كان د(س) = س^٢ + ٣[$\frac{س}{٣}$]

هـ(س) = [س + $\frac{١}{٢}$] + |س − ١| − ١

هل (د − هـ)(س) متصل عند س = ٢

الحل: * د(س) = س^٢ + ٣(٠) ⟸ د(س) = س^٢

∴ د متصل عند س = ٢ لأنه على صورة كثيرة حدود

* هـ(س) = ٢ + س − ١

⟸ هـ(س) = س + ١ متصل عند س = ٢ لأنه على صورة كثيرة حدود .

⟸ د − هـ متصل عند س = ٢ لأنه ناتج طرح اقترانين متصلين حسب النظرية السابقة .

(مثال) إذا كان د(س) = { س^٢+١ ، س < ١ ؛ ٢س^٢ ، س ≥ ١ }

ع(س) = { س^٢ ، س < ١ ؛ [س − ١] ، س ≥ ١ } ابحث في اتصال (د × ع) عند س = ١

الحل: نبحث في اتصال د .

د(١) = ٣

نها د (س→١$^+$) = ٢ ، نها د (س→١$^-$) = ٢ ⟸ نها د (س→١) = ٢

د(١) = نها د(س) (س→١)

∴ د متصل عند س = ١

نبحث في اتصال ع .

ع(١) = ١

نها ع (س→١$^+$) = ١ ، نها ع (س→١$^-$) = ١ ⟸ نها ع (س→١) = ١

∴ ع(١) = نها ع (س→١) = ١

∴ ع متصل عند س = ١

∴ د × ع متصل عند س = ١ ، حسب النظرية

مثال إذا كان $م(س) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{8}س^3 + 1}{س+2} & ، \quad س \neq -2 \\ \dfrac{3}{2} & ، \quad س = -2 \end{cases}$

$$هـ(س) = \frac{جتا\left(\frac{\pi}{4}س\right)}{س}$$

ابحث في اتصال الاقتران $م(س) \times هـ(س)$ عند $س = -2$

الحل: نبحث أولاً في اتصال $م(س)$.

* $م(-2) = \frac{3}{2}$

* $\lim\limits_{س \to -2^+} م(س) = \lim\limits_{س \to -2^+} \dfrac{\frac{1}{8}س^3 + 1}{س+2} = \lim\limits_{س \to -2^+} \dfrac{\left(\frac{1}{2}س+1\right)\left(\frac{1}{4}س^2 - \frac{1}{2}س + 1\right)}{س+2}$

$$= \lim_{س \to -2^+} \frac{\frac{1}{2}\cancel{(س+2)}\left(1 + \frac{س}{2} - \frac{س^2}{4}\right)}{\cancel{(س+2)}} = \frac{1}{2}(1+1+1)$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\lim_{س \to -2^-} م(س) = \frac{3}{2}$$

$\therefore \lim\limits_{س \to -2} م(س)$ موجودة.

* $م(-2) = النهاية = \frac{3}{2}$ $\quad \therefore$ م متصل عند $س = -2$

* نبحث في شروط $هـ(س)$:

* $هـ(-2) = صفر$

* $\lim\limits_{س \to -2} هـ(س) = صفر$

$هـ(-2) = النهاية$

$\therefore$ هـ متصل عند $س = -2$

$\therefore م(س) + هـ(س)$ متصل لأنه ناتج جمع اقترانين متصلين.

مثال تدريب

إذا كانت د(س) = $\dfrac{س^{٢} + س + ٧}{س^{٢} + أس + ٢٥}$

متصلة على ح جد مجموعة قيم الثابت أ

مثال تدريب

إذا كانت د(س) = $\dfrac{س^{٢} + ٥س + ٢}{أس^{٢} + س + ٣}$ فما قيم أ التي تجعل

د متصلة على ح .

ملاحظة

(1) يكون الاقتران ق(س) متصلاً على ح أو على (−∞ ، ∞) إذا كان متصلاً عند كل س ∈ ح أو س ∈ (−∞ ، ∞)

(2) يكون الاقتران ق(س) متصلاً على (أ ، ∞)، إذا كان ق(س) متصلاً لكل س ∈ (أ ، ∞)

(3) يكون الاقتران ق(س) متصلاً على (−∞ ، ب)، إذا كان ق(س) متصلاً لكل س ∈ (−∞ ، ب)

تذكير

(1) كثير الحدود متصل دائماً على الأعداد الحقيقية (ح) .

(2) الاقتران النسبي متصل على أي فترة يكون معرف عليها .

(3) إذا كان ق(س) متصل على ح فإنه يكون متصل على أي فترة جزئية من ح

مثال

إذا كان ق(س) = { س³ − ٢س ، ١ ≤ س < ٣
  ٤س + ٩ ، س = ٣

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [١ ، ٣]

الحل: سنبحث في شروط الاتصال :

(1) س³ − ٢س ، متصل على (١ ، ٣) ، لأنه على صورة كثير حدود .

(2) نبحث في اتصال ق عند س = ١^+

ق(١) = −١

$\underset{س \to ١^+}{نها}$ ق(س) = −١

ق(١) = $\underset{س \to ١^+}{نها}$ ق(س) = −١

∴ ق متصل عند س = ١^+

(3) نبحث في اتصال ق عند س = ٣^-

ق(٣) = ٢١

$\underset{س \to ٣^-}{نها}$ ق(س) = ٢١

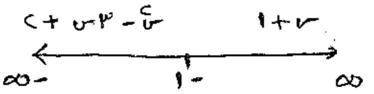
ق(٣) = $\underset{س \to ٣^-}{نها}$ ق(س) = ٢١

∴ ق متصل عند س = ٣^-

∴ ق متصل على [١ ، ٣]

مثال: اذا كانت د(س) = { س² - ٣س + ٢ ، س ≥ -١ ؛ س + ١ ، س < -١

ابحث في اتصال د(س) لجميع قيم س الحقيقية.
أي ابحث في اتصال د(س) على مجالها.



الحل: ① س² - ٣س + ٢ ، متصلة على (-١ ، ∞-)
لانه على صورة كثيرة حدود.

② س + ١ ، متصلة على (-١ ، ∞) ، لانه على صورة كثيرة حدود.

③ نبحث في الاتصال عند (س = -١)

* د(-١) = (-١)² - ٣(-١) + ٢
= ٦

نها د(س) (س ← -١⁺) = ٠
نها د(س) (س ← -١⁻) = ٦
∴ نهاية عند -١ غير موجودة.

∴ د غير متصل عند س = -١
∴ د متصل على ح ما عدا {-١}

مثال: اذا كانت د(س) = { (س³ - ٨)/(س - ٢) ، س < ٢ ؛ ٣س + ٦ ، س ≥ ٢

ابحث في اتصال د(س) على ح.

الحل: ① (س³ - ٨)/(س - ٢) ، متصلة على (-∞ ، ٢) ، لانه نسبي
ومعرف على مجاله ، وصفر المقام {٢} ∉ للفترة (-∞ ، ٢)

② ٣س + ٦ ، متصلة على (٢ ، ∞) ، لانه على صورة كثيرة حدود.

③ * د(٢) = ١٢

* نها د(س) (س ← ٢⁺) = ١٢

نها د(س) (س ← ٢⁻) = نها (س³ - ٨)/(س - ٢) = نها (س - ٢)(س² + ٢س + ٤)/(س - ٢) = ١٢

∴ نها د(س) (س ← ٢) موجودة.

* د(٢) = نها د(س) (س ← ٢) = ١٢ ∴ د متصل عند س = ٢
∴ د متصل على ح

مثال: ابحث في اتصال الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 1} & ، \; -2 \le \text{س} < -1 \\ \text{س}[\text{س}] + 1 & ، \; -1 \le \text{س} < 1 \end{cases}$$

على الفترة $[-2 ، 1)$.

الحل: نعيد تعريف [س] على مجالها

طول الدرج = ١

صفر الاقتران = ٠

$$[\text{س}] = \begin{cases} -1 & ، \; -1 \le \text{س} < 0 \\ 0 & ، \; 0 \le \text{س} < 1 \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 1} & ، \; -2 \le \text{س} < -1 \\ -\text{س} + 1 & ، \; -1 \le \text{س} < 0 \\ 1 & ، \; 0 \le \text{س} < 1 \end{cases}$$

نبحث في اتصال ق(س) على $[-2 ، 1)$

(١) $\dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 1}$ ، متصل على $(-2 ، -1)$ لانه نسبي ومعرف على الفترة وصفر المقام $-1 \notin (-2 ، -1)$.

(٢) $-\text{س} + 1$ ، متصل على $(-1 ، 0)$ ، لانه على صورة كثير الحدود.

(٣) ١ ، متصل على $(0 ، 1)$ ، لانه ثابت وعلى صورة كثير الحدود.

(٤) نبحث في الاتصال عند $\text{س} = -2^{+}$ (طرف فترة)

* $\text{ق}(-2) = \dfrac{(-2)^2 - 1}{-2 + 1} = \dfrac{3}{-1} = -3$

* $\lim\limits_{\text{س} \to -2^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to -2^{+}} \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 1} = -3$

* $\text{ق}(-2) = \lim\limits_{\text{س} \to -2^{+}} \text{ق}(\text{س}) = -3$

∴ ق متصل عند $\text{س} = -2^{+}$

(٥) نبحث في الاتصال عند $\text{س} = -1$ (نقطة تشعب)

ق(−١) = ٢ ، $\lim\limits_{\text{س} \to -1^{+}} \text{ق}(\text{س}) = 2$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to -1^{-}} \text{ق}(\text{س}) = $ صفر ∴ نهـا غير موجودة

∴ ق غير متصل عند $\text{س} = -1$

(٦) نبحث في الاتصال عند $\text{س} = 0$ (نقطة تشعب)

ق(٠) = ١ ، $\lim\limits_{\text{س} \to 0^{+}} \text{ق}(\text{س}) = 1$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to 0^{-}} \text{ق}(\text{س}) = 1$ ، $\text{ق}(0) = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{ق}(\text{س}) = 1$

النهاية موجودة.

∴ ق متصل عند $\text{س} = 0$

∴ ق متصل على $[-2 ، 1) - \{-1\}$

مثال اذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{أ}{س} + س^٢ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٣ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \end{cases}$

وكانت د متصلاً عند س = ٢ ، اجب عما يأتي:

① جد قيمة الثابت أ

② ابحث في اتصال الاقتران د على الفترة [٠، ٣] .

تعريف [س]

٠ ١ ٢ ٣

[س] = $\begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \\ ٣ & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

الحل: ① لما ان د متصل عند س = ٢ فان النهاية موجودة.

∴ $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س)

$\frac{أ}{٢} + (٢)^٢ = [٢^+] + ٣$

$\frac{أ}{٢} + ٤ = ٥ \Leftarrow \frac{أ}{٢} = ١ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

∴ د(س) = $\begin{cases} \frac{٢}{س} + س^٢ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٣ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \end{cases}$ = $\begin{cases} \frac{٢}{س} + س^٢ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ ٥ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \end{cases}$

② نبحث في الاتصال على [٠، ٣] .

* $\frac{٢}{س} + س^٢$ ، متصل على (٠، ٢) ، لانه نسبي ومعرف على الفترة (٠، ٢) وصفر المقام ∉ (٠، ٢)

* ٥ ، متصل على (٢، ٣) ، لانه ثابت وعلى صورة كثير حدود.

* نبحث في الاتصال عند س = ٢

① د(٢) = ٥

② $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = ٥ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = ٥ ⟩ نهاية موجودة

③ د(٢) = $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٥

∴ د متصل عند س = ٢

* نبحث في الاتصال عند س = ٣

① د(٣) = ٧

② $\lim_{س \to ٣^-}$ د(س) = ٥

③ د(٣) ≠ النهاية

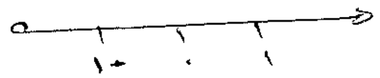
∴ د غير متصل عند س = ٣

∴ د متصل على (٠، ٣)

مثال: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} [س] + س \ ، & -1 \leq س < 0 \\ جاس + \frac{3}{5}س \ ، & 0 \leq س \leq 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [-1، 2] .

الحل: نعيد تعريف [س] .



∴ [س] = { -1 ، -1 ≤ س < 0 .

∴ ق(س) = $\begin{cases} -1 + س \ ، & -1 \leq س < 0 \\ جاس + \frac{3}{5}س \ ، & 0 \leq س \leq 2 \end{cases}$

(1) -1 + س ، متصل على (-1، 0) لانه على صورة كثير حدود .

(2) جاس + $\frac{3}{5}$س ، متصل على (0، 2) لانه ناتج جمع اقترانين مثلثين معرفة كل منهما على (0، 2)

(3) سنبحث في الاتصال عند س = 0 .

ق(0) = صفر

$\lim_{س \to 0^+}$ ق(س) = صفر

$\lim_{س \to 0^-}$ ق(س) = غير موجودة

نهاية غير موجودة

∴ ق غير متصل عند س = 0 .

(4) سنبحث في الاتصال عند س = -1^+

ق(-1) = -2 ، $\lim_{س \to -1^+}$ ق(س) = -2 ، ق(-1) = $\lim_{س \to -1^+}$ ق(س) = -2

∴ ق متصل عند س = -1^+

(5) سنبحث في الاتصال عند س = 2^-

ق(2) = جا2 + $\frac{12}{5}$ ، $\lim_{س \to 2^-}$ ق(س) = جا2 + $\frac{12}{5}$

ق(2) = $\lim_{س \to 2^-}$ ق(س) = جا2 + $\frac{12}{5}$

∴ ق متصل عند س = 2^-

∴ ق متصل على [-1، 2] ماعدا {0} .

مثال: إذا كان د(س) = $\begin{cases} س+٢ ، & |س| \leq ٢ \\ س^٢ ، & |س| > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال د(س) على مجاله .

الحل: نعيد تعريف |س|

⇐ د(س) = $\begin{cases} س+٢ ، & -٢ \leq س \leq ٢ \\ س^٢ ، & س > ٢ \\ س^٢ ، & س < -٢ \end{cases}$

① س+٢ ، متصل على (-٢، ٢) لأنه كثير حدود .

② س² ، متصل على (٢، ∞) لأنه كثير حدود .

③ س² ، متصل على (-∞، -٢) لأنه كثير حدود .

④ نبحث في الاتصال عند س = -٢

- د(-٢) = صفر
- $\lim_{س \to -٢^+}$ د(س) = صفر
- $\lim_{س \to -٢^-}$ د(س) = ٤

نهاية غير موجودة

∴ د غير متصل عند س = -٢

⑤ نبحث في الاتصال عند س = ٢

- د(٢) = ٤
- $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = ٤
- $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = ٤

نهاية موجودة

∴ د(٢) = $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٤

∴ د متصل عند س = ٢

ملاحظة

- |س| ≤ أ ⇐ -أ ≤ س ≤ أ
- |س| > أ ⇐ س > أ ، س < -أ

⇐ |س| ≤ ٢ ∴ -٢ ≤ س ≤ ٢

⇐ |س| > ٢ ∴ س > ٢ ، س < -٢

∴ د متصل على ح - {-٢} .

مثال: اذا كانت $د(س) = \begin{cases} \sqrt{٥س - س^2} & ، |س-٣| < ١ \\ س^2 + ٢ & ، [س] = ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال د(س) على مجاله.

$\therefore د(س) = \begin{cases} \sqrt{٥س - س^2} & ، ٢ < س < ٤ \\ س^2 + س & ، ٤ \le س < ٥ \end{cases}$

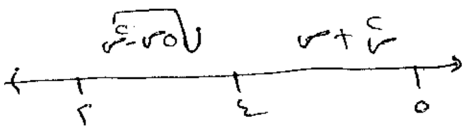
* $|س-٣| < ١$

$\Leftarrow -١ < س-٣ < ١$

$٢ < س < ٤$

* $[س] = ٤$

$٤ \le س < ٥$



* نبحث في شروط الاتصال

(١) $\sqrt{٥س - س^2}$ ، متصل على (٢ ، ٤)

لأنه جذر زوجي وما تحته متصل.

(٢) $س^2 + س$ ، متصل على (٤ ، ٥)

لأنه كثير الحدود.

(٣) نبحث عند س = ٤

د(٤) = ٢٠

$\lim_{س \to ٤^+} = ٢٠$

$\lim_{س \to ٤^-} = ٢$

$\lim_{س \to ٤}$ غ.م

∴ د غير متصل عند س = ٤

∴ د متصل على مجاله − {٤}

أو د متصل (٢ ، ٥) − {٤}

مثال: إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{٥س - س^{٢}} + \dfrac{٨}{٥} \quad ، & س < ٥ \\ \sqrt{٥ - س} \quad ، & س \geq ٥ \end{cases}$$

ابحث عن اتصال د(س) على ح .

الحل: * $\dfrac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{٥س - س^{٢}} + \dfrac{٨}{٥}$ ، متصل على $(٥ ، \infty)$ ، لأنه نسبية وأصفار المقام $\notin (٥ ، \infty)$.

* $\sqrt{٥ - س}$ ، متصل على $(-\infty ، ٥)$ ، لأنه جذر زوجي وما تحته معرف $\forall$ س $\in (-\infty ، ٥)$

* نبحث عند س = ٥

(١) د(٥) = صفر

(٢) $\lim\limits_{س \to ٥^{+}} د = \lim\limits_{س \to ٥^{+}} \dfrac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{٥س - س^{٢}} + \dfrac{٨}{٥}$

$= \lim\limits_{س \to ٥^{+}} \dfrac{(س + ٣)\cancel{(س - ٥)}}{س\cancel{(٥ - س)}} + \dfrac{٨}{٥}$

$= \dfrac{-١(٨)}{٥} + \dfrac{٨}{٥} =$ صفر

$\lim\limits_{س \to ٥} د =$ صفر $\Leftarrow$ نهاية موجودة

(٣) د(٥) = النهاية = صفر

$\therefore$ د متصل عند س = ٥

$\Leftarrow$ د متصل على ح .

(ملاحظة)

(مثال) اذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{ظا س} & \text{، س = ٠} \\ \dfrac{\text{جا ط س}}{\text{س} - ٢} & \text{، ٠ < س < ٢} \\ ⟦\text{ط س}⟧ - ٣ & \text{، س = ٢} \end{cases}$

⟦ط(٢)⟧ = ⟦٦,٢٨⟧ = ٦

⟦ط س⟧ − ٣ = ٣

ابحث في اتصال د على [٠، ٢] .

الحل: * جا(ط س) متصل على (٠،٢) لانه زاوية (ط س) على صورة كثير حدود . حيث نها جا ط س = جا(ط أ) لكل أ ∈ (٠،٢)
س←أ

* س − ٢ متصل لانه كثير حدود .

∴ $\dfrac{\text{جا(ط س)}}{\text{س} - ٢}$ متصل على (٠،٢) لانه خارج قسمة اقترانين متصلين .

* نبحث عند (س = ٠^+) (طرف فترة)

د(٠) = صفر

نها د = نها $\dfrac{\text{جا ط س}}{\text{س} - ٢}$ = صفر
س←٠^+

∴ د متصل عند س = ٠^+

* نبحث عند س = ٢^-

د(٢) = ٣

نها د = نها $\dfrac{\text{جا ط س}}{\text{س} - ٢}$ = نها $\dfrac{-\text{جا(٢ط − ط س)}}{\text{س} - ٢}$
س←٢^-

= نها $\dfrac{\text{جا(ط(س − ٢))}}{\text{س} - ٢}$ = ط

افرض ص = س − ٢ ، س←٢ ، ص←٠

∴ د غير متصل عند س = ٢^-

∴ د متصل على [٠، ٢)

مثال: إذا كان الاقتران ق(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + ٢(١-\text{م})\text{س} - ٤\text{م}}{\text{س} - ٢} & \text{س} \neq ٢ \\ \text{س} + ٥ & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

متصلاً على ح ، فأوجد قيمة الثابت م .

الحل: بما أن ق متصل على ح فإنه متصل عند س = ٢

$\Leftarrow$ ق(٢) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ ق(س)

$$\Leftarrow ٧ = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^2 + ٢(١-\text{م})\text{س} - ٤\text{م}}{\text{س} - ٢}$$

$$٧ = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} + ٢\text{م})\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}}$$

$$٧ = ٢ + ٢\text{م}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{م} = \frac{٥}{٢}}$$

$\boxed{٢}$	س^2	س	ثابت
	١	٢-٢م	-٤م
		٢	٤م
	١	٢م	٠