بسم الله الرحمن الرحيم

# الفصل الأول: النهايات

## * أولاً: مفهوم النهاية

* يقصد بنهاية الاقتران عند نقطة هو دراسة سلوك الاقتران ق(س) عندما س تقترب (تؤول) من العدد الحقيقي (أ) من جهة اليمين ومن جهة اليسار ويتم دراسة هذا السلوك من خلال حساب النهايات والجداول والتمثيل البياني.

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* مثال توضيحي:

إذا كان ق(س) = ٢س + ٤ ، أوجد نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب (تؤول) من العدد ٣

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} (٢س + ٤) = ١٠$

* هذا يعني أنه كلما س أخذت قيماً قريبة من العدد (٣) فإن ق(س) يأخذ قيماً قريبة من العدد (١٠)

* مثال: أوجد قيمة النهايات الآتية:-

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* ١) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} (٤س + ٢) = ٤(٣) + ٢ = ١٤$

* ٢) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \sqrt{س + ٥} = \sqrt{٩} = ٣$

* ٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س + ٧}}{س + ٢} = \frac{\sqrt[٣]{٨}}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

* ٤) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} (٥ + ٢س - س^٢) = (٥ + ٢ - ١) = ٧$

* ٥) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} (\sqrt[٣]{٥ - ٣س} + س^٢ + ٧) = \sqrt[٣]{٨} + ٨ = ١٠$

استاذ
جهاد كسابسيه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

# * حساب النهاية اذا كان الاقتران متشعب :-

* الاقتران المتشعب : هو اقتران يحتوي على اقترانين او اكثر مثل :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{م(س)} & : \text{أ} < \text{س} < \text{ب} \\ \text{ل(س)} & : \text{ب} < \text{س} < \text{جـ} \end{cases}$$ ، حيث

أ ، جـ أطراف فترات .

ب نقطة تشعب .

* ملاحظة

1) النهاية بشكل عام عند أطراف الفترات مثل أ ، جـ دائماً غير موجودة .
لكن تكون موجودة عندها من جهة المجال المعرف من اليمين او من اليسار حسب السؤال :-

مثلاً :

نهـا ق(س) $\text{س} \leftarrow \text{أ}$ غير موجودة لانها نهاية بشكل عام وعند طرف فترة .

نهـا ق(س) $\text{س} \leftarrow \text{جـ}$ غير موجودة لانها نهاية بشكل عام وعند طرف فترة .

نهـا ق(س) $\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}$ : النهاية موجودة لان الاقتران معرف عند $\text{س} > \text{أ}$

نهـا ق(س) $\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}$ : النهاية غير موجودة لان الاقتران غير معرف عند $\text{س} < \text{أ}$

نها د(س) : النهاية غير موجودة لأنه الاقتران غير معرف عند
س ← ج$^{+}$       س > ج

نها د(س) : النهاية موجودة لأنه الاقتران معرف عند
س ← ج$^{-}$       س < ج

٣) عند حساب النهاية عند نقطة تشعب مثل (ب) فإننا نجد النهاية عن يمين النقطة ب (س ← ب$^{+}$) وهذا يعني
نها د(س) ، ونجد النهاية عن يسار النقطة ب (س ← ب$^{-}$)
س ← ب$^{+}$
وهذا يعني نها د(س) فإذا كانت :
س ← ب$^{-}$

* نها د(س) = نها د(س) = ل ، حيث ل ثابت
س ← ب$^{+}$     س ← ب$^{-}$

فإنه في هذه الحالة تكون نها د(س) موجودة وتساوي (ل)
س ← ب

* نها د(س) ≠ نها د(س) ، فإنه في هذه الحالة
س ← ب$^{+}$     س ← ب$^{-}$

تكون نها د(س) غير موجودة .
س ← ب



٢) س ← ب$^{+}$ : تعني أن س تأخذ قيم أكبر بقليل من (ب) من جهة اليمين (س > ب)

س ← ب$^{-}$ : تعني أن س تأخذ قيم أقل بقليل من (ب) من جهة اليسار (س < ب)

**مثال** اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س+٢ & : ١ \le س < ٢ \\ س^{٢}+٦ & : ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$

اوجد ما يلي :-

١) $\lim\limits_{س \to ١}$ ق(س) : نهاية غير موجودة لأنها عند طرف فترة وطلبت بشكل عام

٢) $\lim\limits_{س \to ١^{-}}$ ق(س) : نهاية غير موجودة لأنه الاقتران غير معرف عند (س < ١)

٣) $\lim\limits_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ٤(١) + ٢

= ٦ ، نلاحظ أن النهاية موجودة وتساوي (٦)

وذلك لأن الاقتران معرف عند (س > ١)

٤) $\lim\limits_{س \to ٤}$ ق(س) : نهاية غير موجودة لأنها عند طرف فترة وطلبت بشكل عام

٥) $\lim\limits_{س \to ٤^{+}}$ ق(س) : نهاية غير موجودة لأنه الاقتران غير معرف عند (س > ٤)

٦) $\lim\limits_{س \to ٤^{-}}$ ق(س) = $(٤)^{٢}$ + ٦

= ٢٢ ، نلاحظ أن النهاية موجودة وتساوي (٢٢)

وذلك لأن الاقتران معرف عند (س < ٤)

٧) نها ق(س) ، (٢) نقطة تشعب (تحول) لذلك نجد النهاية من
س ← ٢
يمينها (س ← ٢⁺) ونجد النهاية من يسارها
(س ← ٢⁻)

∴ نها ق(س) = (٢)² + ٦ = ١٠
س ← ٢⁺

نها ق(س) = ٤(٢) + ٢ = ١٠
س ← ٢⁻

∴ نها ق(س) موجودة
س ← ٢
وتساوي (١٠)

٨) ق(١) = ٦     ٩) ق(٢) = ١٠     ١٠) ق(٤) = ٢٠

**مثال** اذا كان ق(س) = { ٤س + ١ : ٠ < س < ١ ؛ س + ٣ : ١ < س < ٢ }



اوجد نها ق(س)
س ← ١

الحل: (١) نقطة تشعب لذلك نجد النهاية من يمين والنهاية من
اليسار .

∴ نها ق(س) = ٤
س ← ١⁺

نها ق(س) = ٥
س ← ١⁻

نها ق(س) غير موجودة وذلك
س ← ١

لان نها ق(س) ≠ نها ق(س)
س ← ١⁺     س ← ١⁻

**مثال**

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^2 - ١٦ & : ٤ < س < ٦ \\ ٣س + ٦ & : ٦ < س < ٨ \end{cases}$

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

أوجد ما يلي :-

١) ق(٤) = صفر

٢) ق(٨) غير معرف

٣) ق(٦) = ٣(٦) + ٦ = ٢٤

٤) ق(٥) = ٢٥ − ١٦ = ٩

٥) ق(٧) = ٣(٧) + ٦ = ٢٧

٦) ق(٩) غير معرف

٧) ق(١٠) غير معرف

٨) $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٥}$ (س² − ١٦)
= ٩

٩) $\lim_{س \to ٧}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٧}$ (٣س + ٦)
= ٢٧

١٠) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) غير موجودة (طرف فترة وبشكل عام)

١١) $\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٤^+}$ (س² − ١٦) = صفر
لأن الاقتران معرف عندها

١٢) $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) غير موجودة
(طرف فترة والاقتران
غير معرف عند ٤⁻
أي عند (س < ٤))

١٣) $\lim_{س \to ٨}$ ق(س) غير موجودة (طرف فترة وبشكل عام)

١٤) $\lim_{س \to ٨^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٨^-}$ (٣س + ٦)
= ٣٠

١٥) $\lim_{س \to ٨^+}$ ق(س) غير موجودة ، طرف فترة والاقتران غير معرف عندها .

١٦) $\lim_{س \to ٦}$ ق(س) (٦ نقطة تشعب)
نجد النهاية عند اليمين وعن اليسار .

$\lim_{س \to ٦^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٦^+}$ (٣س + ٦)
= ٢٤

$\lim_{س \to ٦^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٦^-}$ (س² − ١٦)
= ٢٠

∴ $\lim_{س \to ٦}$ ق(س) غير موجودة ، لأن $\lim_{س \to ٦^+}$ ≠ $\lim_{س \to ٦^-}$

**مثال:** اذا كانت ق(س) =
$$\begin{cases} 2\text{س}+1 & ،\ \text{س} < 2 \\ \text{س}^2+1 & ،\ 2 \le \text{س} < 5 \\ 4\text{س}-1 & ،\ \text{س} \ge 5 \end{cases}$$

جد ما يلي :

① $\text{ق}(1) = 2(1)+1 = 3$

② $\text{ق}(-1) = 2(-1)+1 = -1$

③ $\text{ق}(2) = (2)^2+1 = 5$

④ $\text{ق}(5) = 4(5)-1 = 19$

⑤ $\text{ق}(3) = (3)^2+1 = 10$

⑥ $\text{ق}(6) = 4(6)-1 = 23$

⑦ $\lim_{\text{س}\to 1} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to 1} (2\text{س}+1) = 2(1)+1 = 3$ // لا طرف فترة ولا نقطة تشعب

⑧ $\lim_{\text{س}\to 3} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to 3} \text{س}^2+1 = (3)^2+1 = 10$ // لا طرف فترة ولا نقطة تشعب

⑨ $\lim_{\text{س}\to 7} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to 7} 4\text{س}-1 = 4(7)-1 = 27$ / لا طرف فترة ولا نقطة تشعب

⑩ $\lim_{\text{س}\to 2} \text{ق(س)}$ ، (2) نقطة تحول (تشعب) :-

$$\lim_{\text{س}\to 2^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to 2^+} \text{س}^2+1 = (2)^2+1 = 5$$
$$\lim_{\text{س}\to 2^-} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to 2^-} 2\text{س}+1 = 2(2)+1 = 5$$

$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 2} \text{ق(س)} = 5$

لأن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

⑪ $\lim_{\text{س}\to 5} \text{ق(س)}$ ؛ (5) نقطة تحول :

$$\lim_{\text{س}\to 5^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to 5^+} 4\text{س}-1 = 4(5)-1 = 19$$
$$\lim_{\text{س}\to 5^-} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to 5^-} \text{س}^2+1 = (5)^2+1 = 26$$

$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 5} \text{ق(س)}$ غير موجودة ،

لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار .

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* ايجاد نهاية الاقتران عند نقطة من خلال تكوين جدول

مثال: اذا كان ق(س) = س + ٣ ، اوجد نها ق(س) من خلال تكوين جدول
س ← ٢

س ← ٢⁺ ، ٢⁻ ←

| س | ٢,١ | ٢,٠١ | ٢ | ١,٩٩ | ١,٩٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) | ٥,١ | ٥,٠١ | X | ٤,٩٩ | ٤,٩٠ |

∴ نها ق(س) = ٥
س ← ٢⁺

نها ق(س) = ٥
س ← ٢⁻

∴ نها ق(س) = ٥
س ← ٢

مثال: اذا كان ق(س) = { س + ٢ ، س > ٣ ؛ ١٢ ، س = ٣ ؛ س + ١ ، س < ٣ }

اوجد نها ق(س) من خلال الجدول .
س ← ٣

س ← ٣⁺ ، ٣⁻ ←

| س | ٣,١ | ٣,٠١ | ٣ | ٢,٩٩ | ٢,٩١ |
|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) | ٥,١ | ٥,٠١ | X | ٣,٩٩ | ٣,٩١ |

∴ نها ق(س) = ٥
س ← ٣⁺

نها ق(س) = ٤
س ← ٣⁻

∴ نها ق(س)
س ← ٣
٤ ≠ ٥ غير موجودة

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

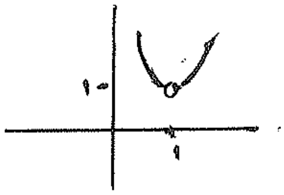
اللهم صل على الحبيب محمد

م. جهاد كساسبة
٠٧٧٩١١٢٠٤٤

استاذ جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال ٤ اجب عما يلي معتمداً الرسومات التالية :-

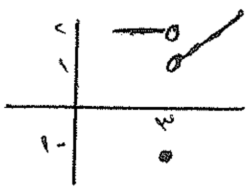
١)



ق(١) غير معرفة

نها س←١⁺ = ١
نها س←١⁻ = ١ ⟩ ∴ نها ق(س) س←١ = ١

٢)



ق(٣) = -١

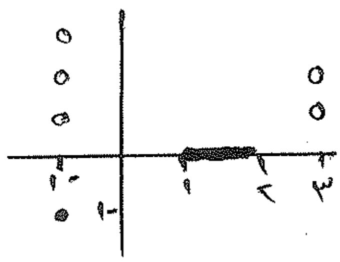
نها س←٣⁺ = ١
نها س←٣⁻ = ٢ ⟩ ∴ نها س←٣ غير موجودة .

٣)

ق(-١) = ٢

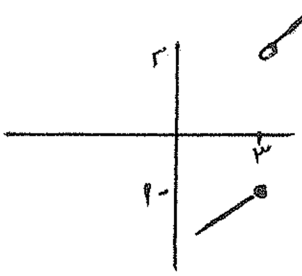
نها س←-١⁺ = ١
نها س←-١⁻ = ١ ⟩ ∴ نها س←-١ = ١

٤)



نها س←١⁺ = صفر
نها س←١⁻ .. غ موجودة
ق(-١) = -١
نها س←٣⁺ غ.م
نها س←٢ = صفر
ق(٢) غير معرفة

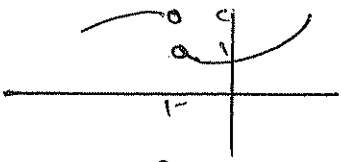
٥)



ق(٣) = -١

نها س←٣⁺ = ٢
نها س←٣⁻ = -١ ⟩ ∴ نها س←٣ غ موجودة

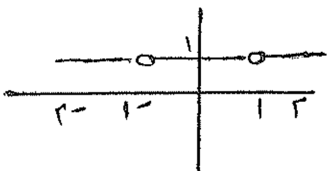
٦)



ق(-١) غير معرفة

نها س←-١⁺ = ١
نها س←-١⁻ = ٢ ⟩ ∴ نها س←-١ غ موجودة .

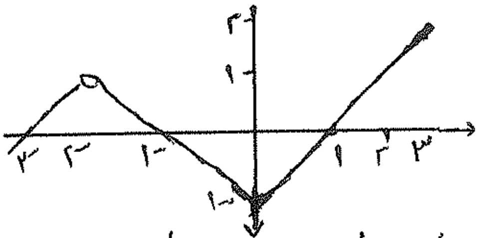
٧)



ق(١) غير معرفة
ق(٢) = ١
ق(-١) غير معرفة
ق(-٢) = ١

نها س←١⁺ = ١
نها س←١⁻ = ١
نها س←-١⁺ = ١
نها س←-١⁻ = ١

٨)

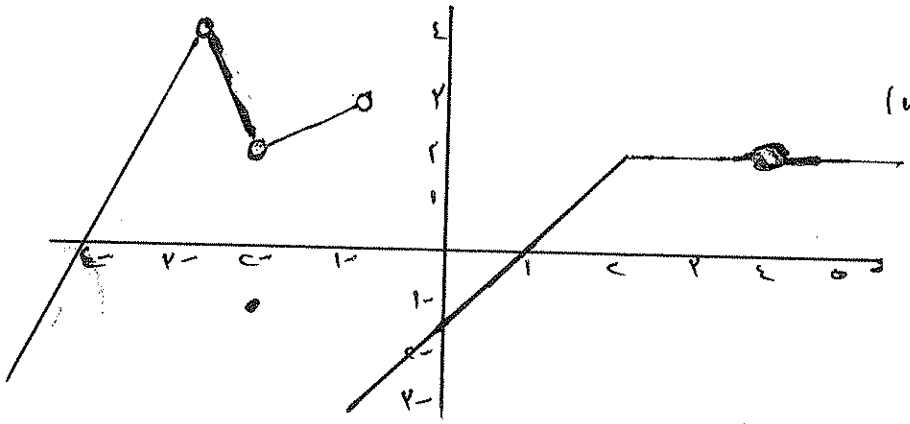


ق(١) = صفر
ق(٠) = -١
ق(-١) = صفر
ق(-٢) = صفر
ق(-٣) غير معرفة
ق(٢) = ٣

نها س←١ = صفر
نها س←-١ = صفر
نها س←-٣ = ١
نها س←-٣⁺ = ١

استاذ جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

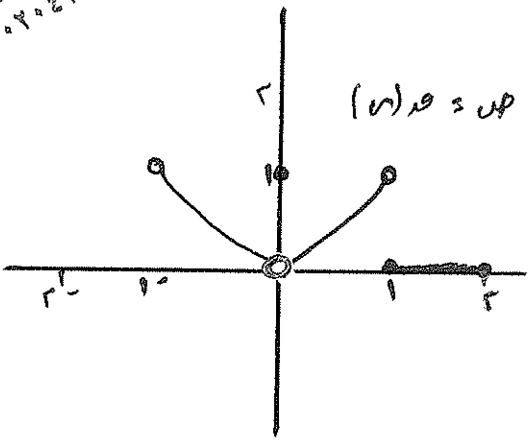
مثال: معتمداً الرسم التالي والذي يمثل منحنى ق(س) اجب عما يلي:




١) ق(١) = صفر
٢) ق(-١) = -٣
٣) ق(٤) غير معرف
٤) ق(٢) = ٢
٥) ق(٣) = ٢
٦) ق(٥) = ٢
٧) ق(-٢) = -١
٨) ق(-٣) غير معرف
٩) ق(-٤) = صفر
١٠) نهـا ق(س) عندما س ← ٤⁺ = ٢
١١) نهـا ق(س) عندما س ← ٤⁻ = ٢
١٢) نهـا ق(س) عندما س ← ٢⁺ = ٢
١٣) نهـا ق(س) عندما س ← ٢⁻ = ٢
١٤) نهـا ق(س) عندما س ← ١⁺ = صفر
١٥) نهـا ق(س) عندما س ← ١⁻ = صفر
١٦) نهـا ق(س) عندما س ← -٢⁺ = ٢
١٧) نهـا ق(س) عندما س ← -٢⁻ = ٢
١٨) نهـا ق(س) عندما س ← -٤⁺ = صفر
١٩) نهـا ق(س) عندما س ← -٤⁻ = صفر
٢٠) نهـا ق(س) عندما س ← -١⁺ = -٣
٢١) نهـا ق(س) عندما س ← -٣⁻ = ٣

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال) بالاعتماد على الشكل التالي اجب عما يلي .




١) نهـا ق(س) = ١
س ← -١⁺

٢) نهـا ق(س) = صفر
س ← ٠⁺

٣) نهـا ق(س) = صفر
س ← ٠⁻

٤) نهـا ق(س) = صفر
س ← ٠

٥) ق(٠) = ١

٦) نهـا ق(س) = صفر
س ← ١⁺

٧) نهـا ق(س) غير موجودة .
س ← ١⁻

٨) نهـا ق(س) غير موجودة
س ← ١

٩) نهـا ق(س) غير موجودة
س ← ٢⁺

١٠) نهـا ق(س) = صفر
س ← ٢⁻

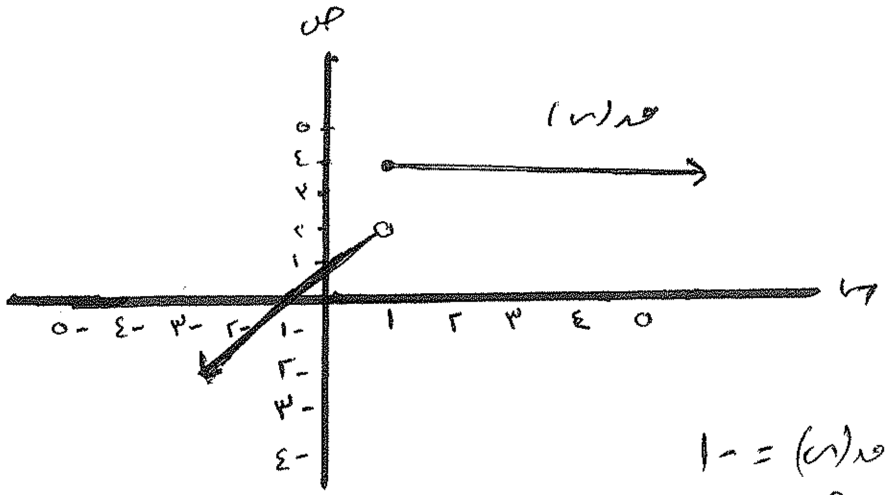
١١) نهـا ق(س) غير موجودة .
س ← ٢

١٢) ق(١) = صفر

١٣) ق(٢) = صفر

١٤) ق(-١) = غير معرف

**مثال:** اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى ق(س) اوجد ما يلي:




١) قيمة الثابت (أ) ، حيث نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = -١

٢) قيمة الثابت (ب) حيث نهـا$_{س \leftarrow ب}$ ق(س) = صفر

٣) قيمة الثابت (جـ) ، حيث نهـا$_{س \leftarrow جـ}$ ق(س) غير موجودة ،

الحل: ١) بما أن نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = -١ هذا يعني أن نهـا$_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow أ^-}$ ق(س) = -١

⇐ أ = -٢

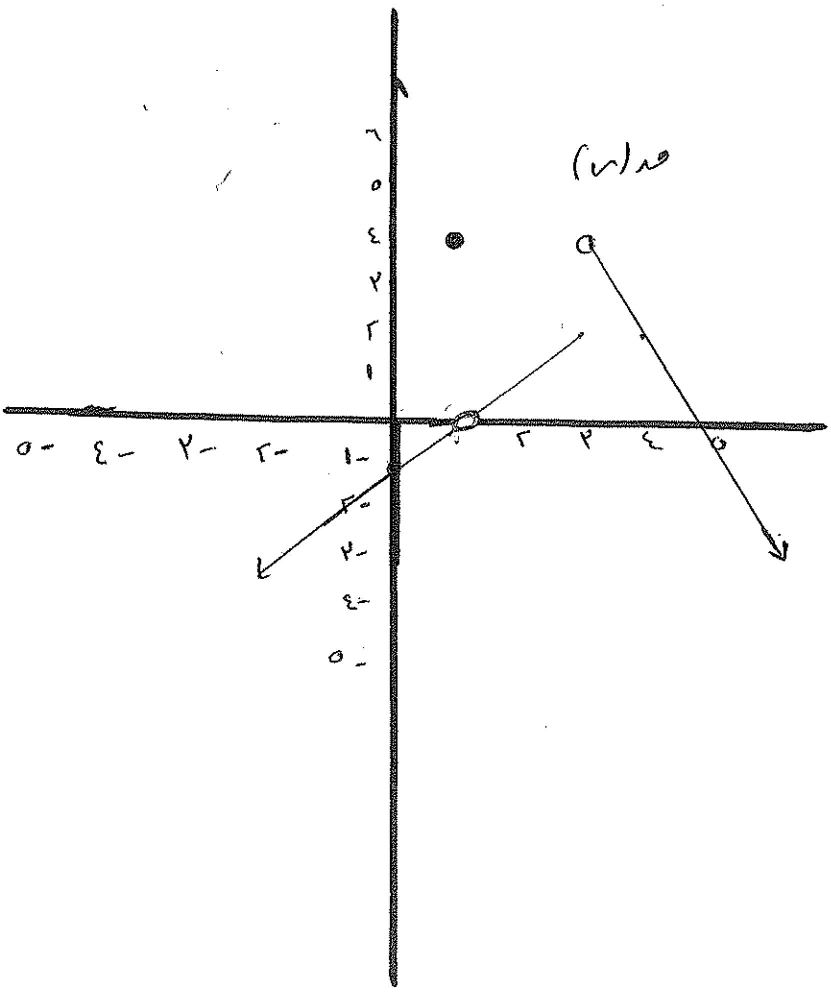
٢) بما أن نهـا$_{س \leftarrow ب}$ ق(س) = صفر ، هذا يعني أن نهـا$_{س \leftarrow ب^+}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow ب^-}$ ق(س) = صفر

⇐ ب = -١

٣) نهـا$_{س \leftarrow جـ}$ ق(س) غ.م ، ⇐ نهـا$_{س \leftarrow جـ^+}$ ق(س) ≠ نهـا$_{س \leftarrow جـ^-}$ ق(س)

⇐ جـ = ١

مثال: اعتماداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى ق(س) اوجد قيمة كل ما يأتي :-




١) نها ق(س)، س ← ٢

٢) قيمة الثابت أ ، حيث نها ق(س) = صفر ، س ← أ

٣) قيمة الثابت ب حيث نها ق(س) غير موجودة ، س ← ب

الحل:-

١) نها ق(س) = ١ ، س ← ٢+
نها ق(س) = ١ ، س ← ٢-
⟩ نها ق(س) = ١ ، س ← ٢

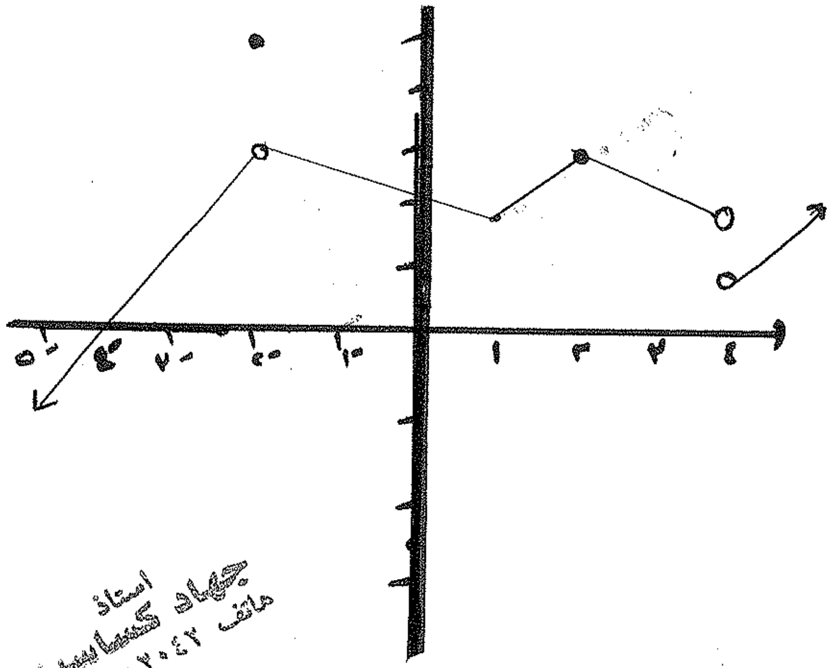
٢) أ = ١ لأن نها ق(س) (س ← ١+) = نها ق(س) (س ← ١-) = صفر ،
أ = ٥ لأن نها ق(س) (س ← ٥+) = نها ق(س) (س ← ٥-) = صفر

٣) ب = ٣ لأن نها ق(س) (س ← ٣+) = ٤ ، نها ق(س) (س ← ٣-) = ٢
∴ نها ق(س) غ . م ، س ← ٣

م. جهاد كساسبة
٠٧٧٩١١٠٢٠٤٢

# ورقة عمل

**مثال:** بالاعتماد على الشكل التالي والذي يمثل منحنى ق(س) اجب عما يلي :





١) $\underset{س \leftarrow ٤^{+}}{نها}$ ق(س) =

٢) $\underset{س \leftarrow ٤^{-}}{نها}$ ق(س) =

٣) $\underset{س \leftarrow ٤}{نها}$ ق(س) =

٤) ق(٤) =

٥) $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{نها}$ ق(س) =

٦) $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها}$ ق(س) =

٧) $\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{نها}$ ق(س) =

٨) ق(١) =

٩) ق(-٢) =

١٠) $\underset{س \leftarrow -٥^{+}}{نها}$ ق(س) =

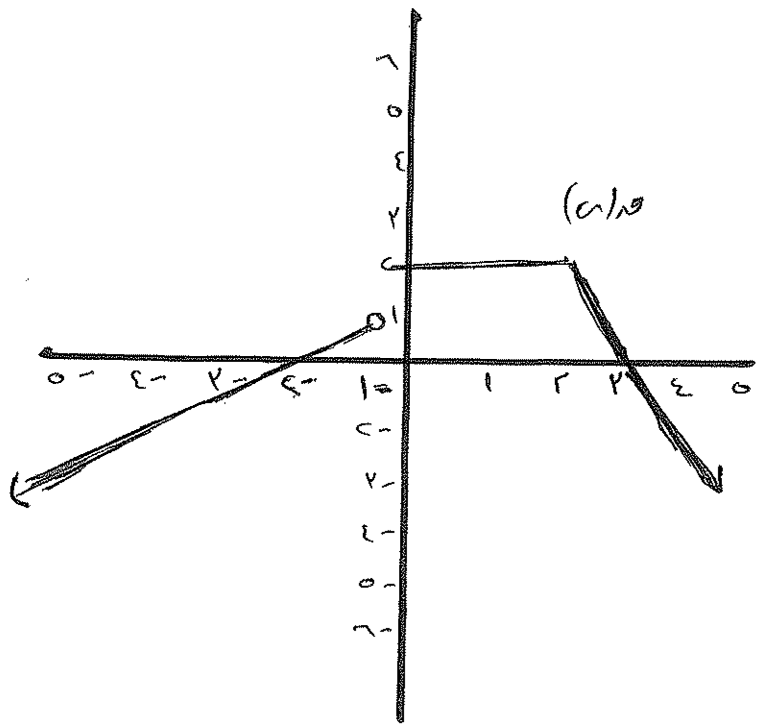
١١) ق(٢) =

١٢) $\underset{س \leftarrow -٤^{+}}{نها}$ ق(س) =

١٣) $\underset{س \leftarrow -٤^{-}}{نها}$ ق(س) =

# ورقة عمل

مثال: اعتماداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى ق(س) اجب عما يلي.




١) نها ق(س)
س ← ٢

٢) نها ق(س)
س ← ١

٣) قيمة الثابت أ حيث
نها ق(س) غير موجودة.
س ← أ

٤) قيمة الثابت (ب) حيث نها ق(س) = صفراً.
س ← ب

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

# * ثانياً : نظريات على النهايات

## نظرية (١) :-

اذا كان ق(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت فإن :-

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{جـ} = \text{جـ}$$

أي (نهاية العدد الثابت تساوي الثابت نفسه)

## أمثلة :-

① $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}(-٢) = -٢$

② $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}}(\pi) = \pi$

③ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}(\sqrt{٥}) = \sqrt{٥}$

④ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}(-\frac{١}{٢}) = -\frac{١}{٢}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

## نظرية (٢) :-

* اذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$ ، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = \text{م}$ ، أ ، ل ، م $\in$ ح

فإن :-

* ① $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}(\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}) = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} \pm \underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = (\text{ل} \pm \text{م})$

* ② $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}(\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}) = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} \times \underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = (\text{ل} \times \text{م})$

* ③ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{جـ} \times \text{ق(س)} = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{جـ} \times \underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = (\text{جـ} \times \text{ل})$

* ④ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}}{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، م $\neq$ صفر

* ⑤ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ل}}$

(ل > ٠) ، اذا كانت (ن) عدد زوجي

أي ( النهاية تتوزع على الجمع والطرح والضرب والقسمة)

**مثال** -

اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ ، $\lim\limits_{س \to ٣} هـ(س) = ٨$ ، اوجد ما يلي :

① $\lim\limits_{س \to ٣} \left(ق(س) + هـ(س)\right) = \lim\limits_{س \to ٣} ق(س) + \lim\limits_{س \to ٣} هـ(س) = ٤ + ٨ = ١٢$

② $\lim\limits_{س \to ٣} \left(ق(س) \times هـ(س)\right) = \lim\limits_{س \to ٣} ق(س) \times \lim\limits_{س \to ٢} هـ(س) = ٤ \times ٨ = ٣٢$

③ $\lim\limits_{س \to ٣} ٧\, ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣} ٧ \times \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٧ \times ٤ = ٢٨$

④ $\lim\limits_{س \to ٣} \sqrt[٣]{هـ(س)} = \sqrt[٣]{\lim\limits_{س \to ٢} هـ(س)} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$



⑤ $\lim\limits_{س \to ٣} \left(س\, ق(س) - ٣\right) = \lim\limits_{س \to ٢} س \times \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) - \lim\limits_{س \to ٣} ٣$

$= ٣ \times ٤ - ٣ = ١٢ - ٣ = ٩$

⑥ $\lim\limits_{س \to ٢} \left(ق(س)\right)^٢ = \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) \times \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٤ \times ٤ = ١٦$



⑦ $\lim\limits_{س \to ٣} \left(٣\, ق(س) - ٥\, هـ(س)\right) = ٣ \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) - ٥ \lim\limits_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢(٤) - ٥(٨) = -٣٢$

⑧ $\lim\limits_{س \to ٣} \left(ق^٢(س) - ٢\, هـ(س) + س\right)$

$= \lim\limits_{س \to ٣} ق^٢(س) - ٢ \lim\limits_{س \to ٢} هـ(س) + \lim\limits_{س \to ٢} س$

$= (٤)^٢ - ٢(٨) + ٣$

$= ١٦ - ١٦ + ٣ = ٣$

⑨ $\lim\limits_{س \to ٢} \left(\frac{٥}{٢}\, ق(س)\right) = \frac{٥}{٢} \lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$

$= \frac{٥}{٢}(٤) = ١٠$

(١٠) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} (٣ه(س) + ١) = ٣\,\text{نها}_{س \leftarrow ٢}\, ه(س) + \text{نها}_{س \leftarrow ٣}\, ١ = ٣(٨) + ١ = ٢٥$

(١١) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \left(\frac{١}{٢}س + ق(س)\right) = \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{١}{٢}س + \text{نها}_{س \leftarrow ٢} ق(س)$

$= \frac{١}{٢}(٣) + ٤ = \frac{١١}{٢}$

(١٢) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{ق(س)}} + ٢ق(س)\right)$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٢} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{ق(س)}}\right) + ٢\,\text{نها}_{س \leftarrow ٢}\, ق(س)$

$= \frac{١}{\sqrt[٣]{٨}} + ٢(٤) = \frac{١}{٢} + ٨ = \frac{١٧}{٢}$

(١٣) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} (س^٢ + ٤ه(س) - ١)$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٢} س^٢ + \text{نها}_{س \leftarrow ٢} ٤ه(س) - \text{نها}_{س \leftarrow ٢} ١$

$= (٩) + ٤(٨) - ١$

$= ٤٠$

(١٤) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \sqrt[٣]{٣ه(س) + ٣} = \sqrt[٣]{٣\,\text{نها}_{س \leftarrow ٢}\, ه(س) + ٣} = \sqrt[٣]{٣(٨) + ٣}$

$= \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

(١٥) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} (ق(س) \times ه(س) + ٥س - ١٢)$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٢} ق(س) \times \text{نها}_{س \leftarrow ٢} ه(س) + \text{نها}_{س \leftarrow ٢} (٥س - ١٢)$

$= (٤ \times ٨) + ٣ = ٣٥$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

**نتائج ٤ -**

① اذا كان ق(س) كثير حدود فان $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

② $\lim_{س \to أ}$ (ق(س))$^{ن}$ = ($\lim_{س \to أ}$ ق(س))$^{ن}$ ، ن عدد صحيح

**مثال**

١) اوجد $\lim_{س \to ٢}$ (س − ١)$^{٣}$ = ($\lim_{س \to ٢}$ س − ١)$^{٣}$ = (١)$^{٣}$ = ١

٢) اوجد $\lim_{س \to -١}$ (س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ − ١)$^{٥}$ = ($\lim_{س \to -١}$ س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ − ١)$^{٥}$

= ((−١)$^{٣}$ + ٢(−١)$^{٢}$ − ١)$^{٥}$ = ٠

٣) اوجد $\lim_{س \to ٢}$ $\sqrt[٣]{س + ٣}$ = $\sqrt[٣]{٥}$

**ملاحظة**

س ≠ أ تعني أن (س < أ) ، (س > أ)

**مثال**

اذا كان ق(س) = { ٢س + ٥ ، س ≠ ٣
                          ١٤ ، س = ٣

اوجد ما يلي :

① ق(٣) = ١٤        ② ق(١) = ٢(١) + ٥ = ٧

③ ق(−١) = ٢(−١) + ٥ = ٣

④ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣}$ (٢س + ٥) = ٢(٣) + ٥ = ١١

نلاحظ من المثال السابق لم يأخذ من يمين (٣) ومن يسار (٣)
لان س ≠ ٣ تعني (س < ٣) ، (س > ٣) اليمين واليسار .

مثال: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س+٦ & : س \in ص \\ ٤س+١ & : س \notin ص \end{cases}$

حيث ص = مجموعة الاعداد الصحيحة

اوجد ما يلي:

١) ق(٣) = ٣+٦ = ٩

٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣}$ (٤س+١)

= ٤(٣) + ١

= ١٣

ملاحظة: نلاحظ في المثال السابق ان النهاية كونت عندما س $\notin$ ص وذلك لان (س ← ٣) تعني

ان (س > ٣) ، (س < ٣) اي س $\neq$ ٣

وبالتالي $\notin$ ص .

م. جهاد كساسبة
٠٧٧٩٠٠٢٠٤٤

مثال: اذا كانت $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) + س$^{٣}$ - ٣) = ٥

فجد $\lim_{س \to ١}$ ٣(ق(س))$^{٢}$

الحل: $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + $\lim_{س \to ١}$ (س$^{٢}$ - ٢) = ٥

⇐ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + (-١)$^{٢}$ - ٢ = ٥

⇐ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) - ٤ = ٥ ⇐ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٩

⇐ $\lim_{س \to ١}$ ٣(ق(س))$^{٢}$

= ٣ × (٩)$^{٢}$

= ٣ × ٨١

= ٢٤٣

**مثال:**

إذا كانت نها (م س + ٥) = ٢١ ، فما قيمة الثابت (م)
س ← ٨

الحل:

م(٨) + ٥ = ٢١

٨م + ٥ = ٢١ ⟸ ٨م = ٢١ − ٥

⟸ ٨م = ١٦ ⟸ م = $\frac{١٦}{٨}$ = ٢

---

**مثال:**

إذا كانت نها (٨س + ٣ك) = ١٤ ، فما قيمة الثابت (ك)
س ← ١

الحل:

٨(١) + ٣ك = ١٤

٨ + ٣ك = ١٤ ⟸ ٣ك = ١٤ − ٨

٣ك = ٦ ⟸ ك = ٢

---

**مثال:**

إذا كانت نها (٣ل س + ١) = ٤ ، فما قيمة الثابت (ل)
س ← ١

الحل:

٣ل(١) + ١ = ٤ ⟸ ٣ل = ٣

⟸ ل = ١

---

**مثال:**

إذا كانت نها $\sqrt{أ - س}$ = ٢ ، فما قيمة الثابت (أ)
س ← ٣

الحل:

$\sqrt{أ - ٣}$ = ٢

خذ التربيع للطرفين:

⟸ $(\sqrt{أ - ٣})^{٢} = (٢)^{٢}$

⟸ أ − ٣ = ٤

⟸ أ = ٧

أستاذ
جهاد كسابيه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٤٢٠٤٢

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال :-

إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \sqrt[3]{\text{٢أ} + \text{س}} = 2$ ، فما قيمة الثابت (أ)

الحل :- $\sqrt[3]{\text{٢أ} + 1} = 2$ ، نأخذ التكعيب للطرفين

$$\left(\sqrt[3]{\text{٢أ} + 1}\right)^3 = (2)^3$$

$$\Leftarrow (\text{٢أ} + 1)^{3/3} = 8 \quad \Leftarrow \text{٢أ} + 1 = 8$$

$$\Leftarrow \text{٢أ} = 7$$

$$\Leftarrow \text{أ} = \frac{7}{2}$$

---

مثال :-

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٤س} - 1 & , \ 1 \le \text{س} < 3 \\ \text{٢أ} - 3 & , \ 3 \le \text{س} < 6 \end{cases}$

وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$ موجودة فما قيمة الثابت (أ)

الحل :-

بما أن $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$ موجودة فإن :

$$\underset{\text{س} \leftarrow 3^+}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow 3^-}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow 3^+}{\text{نها}}\ (\text{٢أ} - 3) = \underset{\text{س} \leftarrow 3^-}{\text{نها}}\ (\text{٤س} - 1)$$

$$\text{٢أ} - 3 = 4(3) - 1$$

$$\text{٢أ} - 3 = 11$$

$$\text{٢أ} = 14$$

$$\text{أ} = \frac{14}{2}$$

$$\text{أ} = 7$$

جهاد كساسبه
٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

## مثال ٢

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} ٥س^٢ - ل & ، س < ٢ \\ ل س + ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة فما قيمة الثابت (ل).

الحل: بما أن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة فإن:

$$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$$

$$\lim_{س \to ٢^+} (ل س + ٢) = \lim_{س \to ٢^-} (٥س^٢ - ل)$$

$$٢ل + ٢ = ٢٠ - ل$$

$$٢ل + ل = ٢٠ - ٢$$

$$٣ل = ١٨$$

$$\Leftarrow ل = ٦$$

## مثال ٣:-

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ١ & ، س < -٢ \\ س + أ & ، س \geq -٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) موجودة فما قيمة الثابت (أ).

الحل:- بما أن $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) موجودة

فإن:

$$\lim_{س \to -٢^+} ق(س) = \lim_{س \to -٢^-} ق(س)$$

$$\lim_{س \to -٢^+} (س + أ) = \lim_{س \to -٢^-} ٣س^٢ + ١$$

$$-٢ + أ = ٣(-٢)^٢ + ١$$

$$-٢ + أ = ١٣$$

$$\Leftarrow أ = ١٥$$

## مثال

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^٣ & ، س \geq ٢ \\ م س & ، س < ٢ \end{cases}$

فما قيمة الثابت (م) التي تجعل $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة.

الحل: بما أن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة

فإن:

$$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$$

$$\lim_{س \to ٢^+} م س = \lim_{س \to ٢^-} س^٣$$

$$٢م = (٢)^٣$$

$$٢م = ٨$$

$$\Leftarrow م = ٤$$

## مثال ٤

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} م س^٢ - ٥ & ، س < ٥ \\ ٣٠ & ، س = ٥ \\ ٨س + ٥ & ، س > ٥ \end{cases}$

فما قيمة الثابت (م) التي تجعل $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) موجودة.

الحل:

$$\lim_{س \to ٥^+} ق(س) = \lim_{س \to ٥^-} ق(س)$$

$$\lim_{س \to ٥^+} (م س^٢ - ٥) = \lim_{س \to ٥^-} (٨س + ٥)$$

$$٢٥م - ٥ = ٨(٥) + ٥$$

$$٢٥م - ٥ = ٤٥$$

$$٢٥م = ٥٠$$

$$\Leftarrow م = \frac{٥٠}{٢٥} = ٢$$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

**مثال ٤:** اذا كانت $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 + ٣ & ، س < ٣ \\ ١٠ & ، س = ٣ \\ \text{ل}س + ٦ & ، س > ٣ \end{cases}$

فما قيمة الثابت (ل) التي تجعل النهاية موجودة .

**الحل:**

$$\lim_{س \to ٣^+} \text{ق}(س) = \lim_{س \to ٣^-} \text{ق}(س)$$

$$\lim_{س \to ٣^+} (\text{ل}س + ٦) = \lim_{س \to ٣^-} س^2 + ٣$$

$$٣\text{ل} + ٦ = (٣)^2 + ٣$$

$$٣\text{ل} + ٦ = ١٢$$

$$٣\text{ل} = ٦$$

$$\text{ل} = \frac{٦}{٣} \Leftarrow \text{ل} = ٢$$

---

**مثال ٥:** اذا كانت $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 + ٧ & ، س \leq -٢ \\ \text{م}س + ١ & ، س > -٢ \end{cases}$

فما قيمة الثابت (م) التي تجعل النهاية موجودة .

**الحل:**

$$\lim_{س \to -٢^+} \text{ق}(س) = \lim_{س \to -٢^-} \text{ق}(س)$$

$$\lim_{س \to -٢^+} (\text{م}س + ١) = \lim_{س \to -٢^-} (س^2 + ٧)$$

$$-٢\text{م} + ١ = (-٢)^2 + ٧$$

$$-٢\text{م} + ١ = ١١$$

$$-٢\text{م} = ١٠$$

$$\text{م} = -٥$$

**مثال:** اذا كانت ق(س)، هـ(س) كثيرتي حدود وكانت

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = 12$ ، $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\ \text{س هـ(س)} = 10$ ، أجب عما يأتي :

* ١) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \left( \dfrac{\text{ق(س)}}{1 - \text{س}^2} + 8\ \text{هـ(س)} \right)$


استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢


* ٢) ما قيمة الثابت م التي تجعل

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \left( \text{م} (\text{هـ(س)})^2 - 6\ \text{ق(س)} \right) = 28$

**الحل:** $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\ \text{س هـ(س)} = 10$

$\Leftarrow 2 \times \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = 10 \Leftarrow \boxed{\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = 5}$

$\Leftarrow$ ١) بما أن ق، هـ كثيرات حدود فان

$\text{ق(2)} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = 12$ ، $\text{هـ(2)} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = 5$

$\Leftarrow \dfrac{\text{ق(2)}}{1 - 4} + 8\ \text{هـ(2)} = \dfrac{12}{-3} + 8(5)$

$= -4 + 40 = 36$

٢) $\text{م}(\text{هـ(2)})^2 - 6\ \text{ق(2)} = 28$

ق، هـ كثيرتي حدود

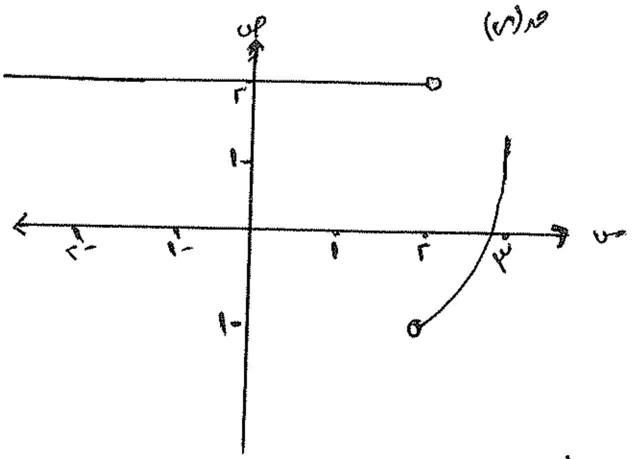
$\text{م}(5)^2 - 6(12) = 28$

$25\text{م} - 72 = 28$

$25\text{م} = 100 \Leftarrow \boxed{\text{م} = 4}$

استاذ جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

**مثال:** اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية أجب عما يلي:-




① اوجد $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

② $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \left( \sqrt[٣]{٤\,ق(س)} + \frac{١}{٤} س^{٣} \right)$

الحل:- ① $-١$

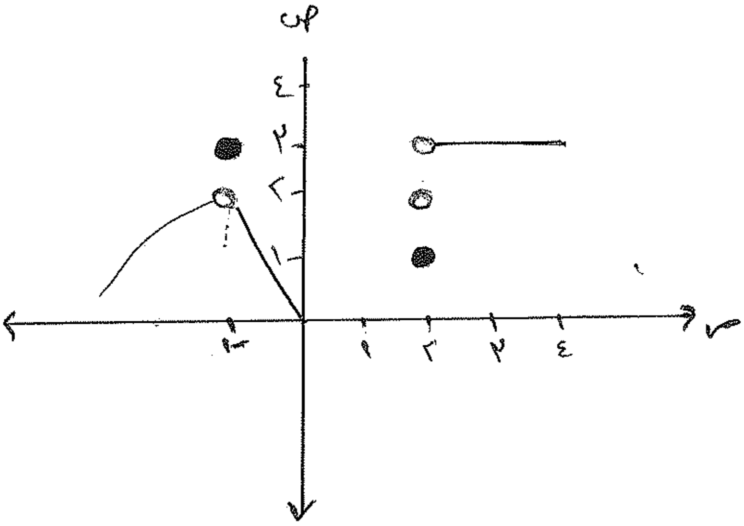
② $\sqrt[٣]{٤(٢)} + \frac{١}{٤}(-٢)^{٣}$

$= ٢ - ٢ =$ صفر

---

**مثال:**

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) اوجد كلاً مما يأتي:-




① $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

② $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \left( (ق(س))^{٢} - \frac{١}{٤}(س-٧) \right)$

الحل:

① ٣

② $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} (ق(س))^{٢} - \underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{١}{٤}(س-٧)$

$= \left( \underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} ق(س) \right)^{٢} - \frac{١}{٤}(-٨)$

$= ٤ + \frac{٨}{٤} = ٦$

(٦)

$$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

**مثال** اوجد قيمة ما يأتي:

① $\text{نها}_{س \to -٣} \left( \frac{٢س + ٦}{س^٢ + ٩} - ٥س \right)$

الحل:

$$= \frac{٢(-٣) + ٦}{(-٣)^٢ + ٩} - ٥(-٣) = \text{صفر} + ١٥ = ١٥$$

---

② $\text{نها}_{س \to -٥} \left( \frac{٢س + ١٠}{س^٢ + ٢٥} + س \right)$

الحل

$$\frac{٢(-٥) + ١٠}{(-٥)^٢ + ٢٥} - ٥ = \text{صفر} - ٥ = -٥$$

---

③ $\text{نها}_{س \to -٤} \left( \sqrt{٥ - س} + \frac{١}{٢س} \right)$

الحل:

$$\sqrt{٥ - -٤} + \frac{١}{٢(-٤)} = \sqrt{٩} - \frac{١}{٨}$$

$$= ٣ - \frac{١}{٨} = \frac{٢٣}{٨}$$

---

④ $\text{نها}_{س \to -١} \left( \sqrt[٣]{٥ - ٣س} + س^٢ + ٧ \right)$

الحل:

$$= \sqrt[٣]{٥ - ٣(-١)} + (-١)^٢ + ٧$$

$$= ٢ + ١ + ٧ = ١٠$$

---

**تذكر**

$$\frac{أ}{ب} + ١ = \frac{أ + ب}{ب}$$

$$\frac{أ}{ب} - ١ = \frac{أ - ب}{ب}$$

# ورقة عمل

**مثال (1)** اوجد قيمة النهايات الآتية:

1) $\lim\limits_{س \to -2} (3س^4 - 5س^3 + 6س - 7)$

2) $\lim\limits_{س \to 1} (س^2 + 1)(س^3 + 5س - 2)$

3) $\lim\limits_{س \to -1} (س^2 + 2)^5$

**مثال (2)** اذا كانت $\lim\limits_{س \to -2} (3ق(س) + 2س^2 + 1) = 37$

فاوجد $\lim\limits_{س \to -2} (ق(س))^3$

**مثال (٣)** اذا كانت $\lim$ نها (م س^٢ + ٥س + ١) = ٢٥ ، فما قيمة الثابت م

**مثال (٤)** اذا كان د(س) =
$$\begin{cases} \text{أ س} + ٤ & ، \quad \text{س} > ٢ \\ ٥\text{س}^٢ + \text{أ} & \quad \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

وكانت نها د(س) موجودة فما قيمة الثابت أ ،
س ← ٢

**مثال (٥)** اذا كان هـ(س) =
$$\begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & ، \quad \text{س} \neq ٣ \\ ٨ & ، \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

اوجد قيمة ما يلي :

١) هـ(٣) =

٢) نها هـ(س) =
س ← ٣

٣) نها هـ(س) =
س ← ٥

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال (٦): اوجد قيمة النهايات الاتية :

١) $\lim_{س \to -٢} \left( ٢س + \sqrt[٢]{٢ - ٢س} \right)$

الحل: =

---

٢) $\lim_{س \to ١} \left( س^{٢} + \frac{١ - س}{\sqrt[٣]{٧ - ٦س}} \right)$

الحل:

---

٣) $\lim_{س \to ١} \left( \frac{٣}{٢س} - \frac{١}{٤} \sqrt{س} \right)$

---

تذكر

$$\boxed{\frac{أ}{ب} \pm \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times د \pm جـ \times ب}{ب \times د}}$$

**مثال (٧)**

إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) = -٦ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ هـ(س) = ٤ فجد :-

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left( \text{ق(س)} + \left(\text{هـ(س)} + ١\right)^{٢} - ٢س \right)$$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

الحل :-

---

**مثال (٨)**

إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) = -٨ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ هـ(س) = ٤

فجد :

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left( \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} - \left(\text{هـ(س)}\right)^{٢} + ٥س \right)$$

الحل :-

# * ثالثاً :. نهاية خارج قسمة اقترانين

**نظرية :** إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نها} ق(س) = ل$ ، $\underset{س \leftarrow أ}{نها} هـ(س) = م$ ، حيث ل، م، أ $\in$ ح

فإن : $\underset{س \leftarrow أ}{نها} \left(\frac{ق(س)}{هـ(س)}\right) = \frac{\underset{س \leftarrow أ}{نها} ق(س)}{\underset{س \leftarrow أ}{نها} هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ ، $م \neq ٠$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* الاقتران النسبي :
هو الاقتران الذي يكتب على صورة $\left(\frac{بسط}{مقام}\right)$

**مثال :** اوجد قيمة النهايات التالية :-

١) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \frac{س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} = \frac{٤}{١} = ٤$

٢) $\underset{س \leftarrow ١}{نها} \frac{\sqrt{س + ٢} - ١}{س + ٢} = \frac{\sqrt{١ + ٢} - ١}{٣} = \frac{١}{٣}$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{\frac{٢}{س} + \frac{٥}{٢}}{س + ٢} = \frac{\frac{٢}{٢} + \frac{٥}{٢}}{٦} = \frac{\left(\frac{٧}{٢}\right)}{٦} = \frac{٧}{١٨}$

٤) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \sqrt[٣]{س + ٥} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

٥) $\underset{س \leftarrow ٤}{نها} \frac{١ - \sqrt{س}}{س + ٢} = \frac{١ - \sqrt{٤}}{٦} = \frac{-١}{٦}$

٦) $\underset{س \leftarrow -٥}{نها} \left(\frac{٣س + ١٠}{س^٢ + ٥} + س\right) = \frac{-١٥ + ١٠}{٥٠} - ٥ = -٥$

٧) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س+١} = \frac{\sqrt{٤} - ٢}{٢} = \frac{٢-٢}{٢} = \frac{٠}{٢} =$ صفر

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

٨) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٥}{س}$ غير موجودة .

* نلاحظ من خلال الأمثلة السابقة أن الأصل في ايجاد الغاية هو التعويض المباشر في الاقتران حيث:

* ١) اذا كان ناتج التعويض $\frac{عدد}{عدد}$ فان الغاية تكون موجودة وتساوي ناتج القسمة (عدد $\neq$ صفر)

* ٢) اذا كان ناتج التعويض $\left(\frac{صفر}{عدد}\right)$ فان الغاية تكون موجودة وتساوي صفر .

* ٣) اذا كان ناتج التعويض $\left(\frac{عدد}{صفر}\right)$ فان الغاية تكون غير موجودة .

* ٤) اذا كان ناتج التعويض $\left(\frac{صفر}{صفر}\right)$ فان الغاية تكون بحاجة الى معالجة من خلال العمليات الجبرية التالية:

١) اخذ عامل مشترك والتحليل الى العوامل
٢) توحيد المقامات .
٣) الضرب بالمرافق .

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* امثلة على اخذ عامل مشترك :

① جد $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} - ٨}{\text{س} - ٤}$ ، التعويض المباشر $\left(\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$

$$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٢\cancel{(\text{س} - ٤)}}{\cancel{(\text{س} - ٤)}} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}\ ٢ = ٢$$

② جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٤ + ٥\text{س}^٢}{\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢}$ ، التعويض المباشر $\left(\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}^٢}(\text{س}^٢ + ٥)}{\cancel{\text{س}^٢}(\text{س} - ٣)} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ + ٥}{\text{س} - ٣} = \frac{(٠)^٢ + ٥}{٠ - ٣} = \frac{٥}{-٣}$$

③ جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س}^٢ + ٤\text{س}}$ ، التعويض المباشر $\left(\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س} - ١)}{\cancel{\text{س}}(\text{س} + ٤)} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٤)} = \frac{٠ - ١}{٠ + ٤} = \frac{-١}{٤}$$

④ جد $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{٣س} - ١٢}{\text{س} - ٤}$ ، التعويض المباشر $\left(\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$

$$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{(\text{س} - ٤)}}{\cancel{(\text{س} - ٤)}} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}\ ٣ = ٣$$

⑤ $\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} - ١}{(\text{س} - \frac{١}{٢})} = \underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{٢\cancel{(\text{س} - \frac{١}{٢})}}{\cancel{(\text{س} - \frac{١}{٢})}} = \underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}}\ ٢ = ٢$

اعداد : جهاد كساسبة
0779002042

* امثلة على التحليل الى العوامل :-

مراجعة سريعة للقواعد :-

1) $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

2) $\text{أ}^3 - \text{ب}^3 = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^2 + \text{أب} + \text{ب}^2)$

3) $\text{أ}^3 + \text{ب}^3 = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ}^2 - \text{أب} + \text{ب}^2)$

4) $\dfrac{\cancel{(\text{أ} - \text{ب})}}{\cancel{(\text{ب} - \text{أ})}} = -1$

5) لتحليل العبارة التربيعية $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$ حيث $(\text{أ} = 1)$ فاننا نسأل
عددان حاصل ضربهما الحد الأخير (جـ)
ومجموعهما الحد الأوسط (ب).

6) $(\text{أ} - \text{ب})^3 = \text{أ}^3 - \text{ب}^3 - 3\text{أ}^2\text{ب} + 3\text{أ}\text{ب}^2$

7) $(\text{أ} + \text{ب})^3 = \text{أ}^3 + \text{ب}^3 + 3\text{أ}^2\text{ب} + 3\text{أ}\text{ب}^2$

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف 0779002042

امثلة: اوجد قيمة كل مما يلي من النهايات الآتية .

1) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3} = \underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - 3)}(\text{س} + 3)}{\cancel{(\text{س} - 3)}} = \underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}}\ \text{س} + 3 = 3 + 3 = 6$

2) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{(2 - \text{س})}{\text{س}^2 - 4} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{-1\ \cancel{(\text{س} - 2)}}{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 2)} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{-1}{\text{س} + 2} = \dfrac{-1}{2 + 2} = \dfrac{-1}{4}$

3) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{س}}{\text{س}^2 - 1} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{-1\ \cancel{(\text{س} - 1)}}{\cancel{(\text{س} - 1)}(\text{س} + 1)} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{-1}{\text{س} + 1} = \dfrac{-1}{2}$

4) $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \dfrac{3\text{س} - 12}{\text{س}^2 - 16} = \underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \dfrac{3\ \cancel{(\text{س} - 4)}}{\cancel{(\text{س} - 4)}(\text{س} + 4)} = \underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \dfrac{3}{(\text{س} + 4)} = \dfrac{3}{8}$

5) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{س}}^{\,1}}{\cancel{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ 1 = 1$

6) $\underset{\text{س}\to 1-}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + \text{س}^2}{1 - \text{س}^2} = \underset{\text{س}\to 1-}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\cancel{(1 + \text{س})}^{\,1}}{(1 - \text{س})\cancel{(1 + \text{س})}} = \underset{\text{س}\to 1-}{\text{نها}} \dfrac{1}{(1 - \text{س})} = \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2}$

⑦ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - س - ٦}{(س - ٣)}$ ، $\dfrac{0}{0}$

بالتحليل البسيط :

عددان حاصل ضربهما (-٦)

ومجموعهما (-١)

وهما -٣ ، ٢

$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-٣)}(س+٢)}{\cancel{(س-٣)}}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ س + ٢ = ٥$

---

⑧ $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ٣س - ٤}{(س + ١)}$ ، $\dfrac{0}{0}$

بالتحليل البسيط :

عددان حاصل ضربهما (-٤)

ومجموعهما (-٣)

وهما -٤ ، ١

$\therefore \underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{(س-٤)\cancel{(س+١)}}{\cancel{(س+١)}}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نها}}\ س - ٤ = -١ - ٤ = -٥$

---

⑨ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(س - ٣)}{س^٢ - ٢س - ٣}$

بالتحليل العام :

عددان حاصل ضربهما (-٣)

ومجموعهما (-٢)

وهما -٣ ، ١

$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-٣)}\ ١}{\cancel{(س-٣)}(س+١)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{١}{س+١} = \dfrac{١}{٤}$

---

⑩ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ + ٨}{(س + ٢)}$ ، $\dfrac{0}{0}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س+٢)}(س^٢ - ٢س + ٤)}{\cancel{(س+٢)}}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ س^٢ - ٢س + ٤$

$= (-٢)^٢ - ٢(-٢) + ٤ = ١٢$

---

⑪ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(س - ١)}{س^٣ - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-١)}\ ١}{\cancel{(س-١)}(س^٢ + س + ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{١}{س^٢ + س + ١}$

$= \dfrac{١}{٣}$

---

⑫ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ٢س}$ ، $\dfrac{0}{0}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(س-١)\cancel{(س-٢)}}{س\cancel{(س-٢)}}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س-١}{س} = \dfrac{٢-١}{٢} = \dfrac{١}{٢}$

---

⑬ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ٥س + ٦}{(س - ٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(س-٣)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{(س-٢)}}$

$= ٢ - ٣ = -١$

استاذ جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(١٤)

$$\lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^3 + 5\text{س}^2 + 6\text{س}}{\text{س}^2 - 4} \quad , \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}(\text{س}^2 + 5\text{س} + 6)}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}\cancel{(\text{س}+2)}(\text{س}+3)}{\cancel{(\text{س}+2)}(\text{س}-2)}$$

$$= \frac{(-2)(-2+3)}{(-2-2)}$$

$$= \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

(١٥)

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^3 + 5\text{س}^2 - 14\text{س}}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}(\text{س}^2 + 5\text{س} - 14)}{\text{س}(\text{س}-2)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س}+7)\cancel{(\text{س}-2)}}{\cancel{\text{س}}\cancel{(\text{س}-2)}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \text{س}+7 = 2+7$$

$$= 9$$

(١٦)

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}^2 + \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\cancel{\text{س}}\sqrt{\text{س}+1}}{\cancel{\text{س}}(\text{س}+1)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}+1} = 1$$

(١٧)

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}\sqrt[3]{\text{س}+8}}{\text{س}^3 + \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\cancel{\text{س}}\sqrt[3]{\text{س}+8}}{\cancel{\text{س}}(\text{س}^2+1)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+8}}{\text{س}^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{0+8}}{(0)^2+1} = \frac{2}{1}$$

$$= 2$$


استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢


(١٨) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3$

فجد $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(2)}{\text{س}-2}$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^3 - (2)^3}{\text{س}-2}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}^2+2\text{س}+4)}{\cancel{(\text{س}-2)}}$$

$$= (2)^2 + 2(2) + 4 = 12$$

(١٩) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2$

فجد $\displaystyle\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(1)}{\text{س}-1}$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2 - (1)^2}{\text{س}-1}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\cancel{(\text{س}-1)}(\text{س}+1)}{\cancel{(\text{س}-1)}}$$

$$= 1+1 = 2$$

اعداد : جهاد كساسبة
٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(٣٠) إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$

فجد $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - (\text{ق}(٢) + ٨)}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\,\text{س}^{٢} - (٨ + ٨)}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ١٦}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^{٢} - ٤)(\text{س}^{٢} + ٤)}{(\text{س} - ٢)}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} + ٤)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}}$

$= (٢ + ٢)((٢)^{٢} + ٤)$

$= (٤)(٨) = ٣٢$

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(٣١) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٤} + ٨\text{س}}{\text{س} + ٢}$

$= \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}(\text{س}^{٣} + ٨)}{\text{س} + ٢}$

$= \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\cancel{(\text{س} + ٢)}(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤)}{\cancel{(\text{س} + ٢)}}$

$= \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \text{س}(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤)$

$= -٢(٤ + ٤ + ٤) = -٢٤$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

## * أمثلة على توحيد المقامات

**مثال:** أوجد قيمة النهايات التالية :-

١) $\lim_{س \to ٢} \dfrac{\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}\right)}{س - ٢} \quad \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٢} \dfrac{\cancel{س - ٢}}{\cancel{(س - ٢)}(س)(٢)} = \lim_{س \to ٢} \dfrac{١}{٢س} = \dfrac{١}{٤}$

---

٢) $\lim_{س \to ٣} \dfrac{\left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}\right)}{س - ٣} \quad \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٣} \dfrac{١\,\cancel{(س - ٣)}}{\cancel{(س - ٣)}(٣)(س)} = \lim_{س \to ٣} \dfrac{١}{٣س} = \dfrac{١}{٩}$

---

٣) $\lim_{س \to ٥} \dfrac{\frac{١}{٥} - \frac{١}{س}}{(س - ٥)} \quad ...$

$= \lim_{س \to ٥} \dfrac{-١\,\cancel{(س - ٥)}}{\cancel{(س - ٥)}(س)(٥)} \quad \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٥} \dfrac{-١}{٥س} = \dfrac{-١}{٢٥}$

---

٤) $\lim_{س \to ٤} \dfrac{\left(\frac{٢}{س} - \frac{١}{٢}\right)}{س - ٤} \quad \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٤} \dfrac{\cancel{(٤ - س)}}{\cancel{(٤ - س)}(٢)(س)} = \lim_{س \to ٤} \dfrac{١}{٢س}$

$= \dfrac{١}{٨}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

٥) $\text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{\dfrac{١}{٢س} - \dfrac{١}{س+٤}}{س - ٤}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{(س+٤) - (٢س)}{(٢س)(س+٤)(س-٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{س+٤-٢س}{(٢س)(س+٤)(س-٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{-١\cancel{(س-٤)}}{(٢س)(س+٤)\cancel{(س-٤)}}$

$= \dfrac{-١}{(٢\times٤)(٤+٤)} = \dfrac{-١}{٦٤}$

٦) $\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{\dfrac{١}{٢س} - \dfrac{١}{س+٣}}{س - ٣}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{(س+٣) - (٢س)}{(٢س)(س+٣)(س-٣)}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{س+٣-٢س}{(٢س)(س+٣)(س-٣)}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{-١\cancel{(س-٣)}}{(٢س)(س+٣)\cancel{(س-٣)}}$

$= \dfrac{-١}{٣٦}$

٧) $\text{نها}_{س \to ٠} \dfrac{١}{س}\left(\dfrac{٣س}{٢} - \dfrac{٢س}{٣}\right)$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \dfrac{١}{س}\left(\dfrac{٩س - ٤س}{٦}\right)$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \dfrac{٥\cancel{س}}{٦\cancel{س}} = \dfrac{٥}{٦}$

٨) $\text{نها}_{ه \to ٠} \dfrac{١}{ه}\left(\dfrac{٢ه}{٥} - \dfrac{ه}{٣}\right)$

$= \text{نها}_{ه \to ٠} \dfrac{١}{ه}\left(\dfrac{٦ه - ٥ه}{١٥}\right)$

$= \text{نها}_{ه \to ٠} \dfrac{١\cancel{ه}}{١٥\cancel{ه}}$

$= \text{نها}_{ه \to ٠} \dfrac{١}{١٥} = \dfrac{١}{١٥}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

استاذ
[illegible]

٩) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{س}{(س-٢)} - \dfrac{(س+٢)}{(س-١)}}{(س-٤)}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \dfrac{(س)(س-١) - (س+٢)(س-٢)}{(س-٢)(س-١)(س-٤)} = \text{نها} \dfrac{س^٢ - س - (س^٢ - ٤)}{(س-٢)(س-١)(س-٤)}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س^٢} - س - \cancel{س^٢} + ٤}{(س-٢)(س-١)(س-٤)} = \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \dfrac{-١ \cancel{(س-٤)}}{(س-٢)(س-١)\cancel{(س-٤)}}$

$= \dfrac{-١}{(٤-٢)(٤-١)} = \dfrac{-١}{٦}$

---

١٠) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{(س-١)}{٤} - \dfrac{(س+٦)}{١١}}{س-٥}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{١١(س-١) - ٤(س+٦)}{(٤٤)(س-٥)}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{١١س - ١١ - ٤س - ٢٤}{(٤٤)(س-٥)}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{٧س - ٣٥}{(٤٤)(س-٥)}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{٧\cancel{(س-٥)}}{(٤٤)\cancel{(س-٥)}}$

$= \dfrac{٧}{٤٤}$

١١) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{٨}{س+١} - \dfrac{١٢}{٢س}}{س-٣}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{١٦س - ١٢(س+١)}{(س+١)(٢س)(س-٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{١٦س - ١٢س - ١٢}{(س+١)(٢س)(س-٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{٤س - ١٢}{(س+١)(٢س)(س-٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{٤\cancel{(س-٣)}}{(س+١)(٢س)\cancel{(س-٣)}}$

$= \dfrac{\cancel{٤}}{(\cancel{٤})(٦)} = \dfrac{١}{٦}$

الأستاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

١٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{\dfrac{\text{س}}{\text{س}-٢} - \dfrac{\text{س}+٤}{\text{س}-١}}{\text{س}-٦}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{\text{س}(\text{س}-١) - (\text{س}+٤)(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}-١)(\text{س}-٦)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - (\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٤\text{س} - ١٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}-١)(\text{س}-٦)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{\cancel{\text{س}^٢} - \text{س} - \cancel{\text{س}^٢} - \text{س} + ١٢}{(\text{س}-٢)(\text{س}-١)(\text{س}-٦)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{-٢\text{س} + ١٢}{(\text{س}-٢)(\text{س}-١)(\text{س}-٦)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{-٢\cancel{(\text{س}-٦)}\ ١}{(\text{س}-٢)(\text{س}-١)\cancel{(\text{س}-٦)}}$

$= \dfrac{-٢}{(٦-٢)(٦-١)} = \dfrac{-٢}{٤ \times ٥} = \dfrac{-٢}{١٥}$

واجب: $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\dfrac{-٣}{\text{س}+٢} + \dfrac{٣}{٤}}{\text{س}-٢}$

## * أمثلة على الضرب بالمرافق :-

أستاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

تذكير :-

| | مرافقه | حاصل ضربهما |
|---|---|---|
| $(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}})$ | $(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}})$ | $(\text{س} - \text{ص})$ |
| $(\sqrt{\text{س}} - ١)$ | $(\sqrt{\text{س}} + ١)$ | $(\text{س} - ١)$ |
| $(٣ - \sqrt{\text{س}})$ | $(٣ + \sqrt{\text{س}})$ | $(٣ - \text{س})$ |
| $(٤ - \sqrt{\text{س}+١})$ | $(٤ + \sqrt{\text{س}+١})$ | $١٦ - (\text{س}+١) = ١٦ - \text{س} - ١ = (١٥ - \text{س})$ |

وهكذا :-

أمثلة :- أوجد قيمة كل مما يلي :

(١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٤}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \left(\dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٤} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}} + ٢}{\sqrt{\text{س}} + ٢}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{(\sqrt{\text{س}} - ٢)(\sqrt{\text{س}} + ٢)}{(\text{س} - ٤)(\sqrt{\text{س}} + ٢)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{١\ \cancel{(\text{س} - ٤)}}{\cancel{(\text{س} - ٤)}(\sqrt{\text{س}} + ٢)}$

$= \dfrac{١}{\sqrt{٤} + ٢} = \dfrac{١}{٤}$

(٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{\text{س} - ٩}{\sqrt{\text{س}} - ٣}$ ، $\dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{(\text{س} - ٩)}{\sqrt{\text{س}} - ٣} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}} + ٣}{\sqrt{\text{س}} + ٣}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{(\sqrt{\text{س}} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٩)}}{\cancel{(\text{س} - ٩)}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٩} \sqrt{\text{س}} + ٣$

$= \sqrt{٩} + ٣$

$= ٦$

(٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{١ - \text{س}}{\sqrt{\text{س}} - ١}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \left(\dfrac{(١ - \text{س})}{\sqrt{\text{س}} - ١} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}} + ١}{\sqrt{\text{س}} + ١}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\sqrt{\text{س}} + ١)\overset{-١}{\cancel{(١ - \text{س})}}}{\cancel{(\text{س} - ١)}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} -١(\sqrt{\text{س}} + ١)$

$= -١(\sqrt{١} + ١)$

$= -٢$

④ $$\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س+١} - ٢} \quad ، \quad \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)}{\sqrt{س+١} - ٢} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}{(س+١) - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}(\sqrt{س+١} + ٢)}{\cancel{(س - ٣)}}$$

$$= \lim_{س \to ٣} (\sqrt{س+١} + ٢)$$

$$= ٤$$

⑤ $$\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س+١} - ٣}{س - ٨} \quad ، \quad \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س+١} - ٣}{(س - ٨)} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٣}{\sqrt{س+١} + ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س+١) - ٩}{(\sqrt{س+١} + ٣)(س - ٨)}$$

$$= \lim_{س \to ٨} \frac{١\cancel{(س - ٨)}}{(\sqrt{س+١} + ٣)\cancel{(س - ٨)}}$$

$$= \lim_{س \to ٨} \frac{١}{\sqrt{س+١} + ٣}$$

$$= \frac{١}{٦}$$

⑥ $$\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+١} - ١}{س} \quad ، \quad \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \left( \frac{\sqrt{س+١} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{س+١} + ١}{\sqrt{س+١} + ١} \right)$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\cancel{(١+س)} - \cancel{١}}{(\sqrt{س+١} + ١)\, س}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\cancel{س}}{(\sqrt{س+١} + ١)\, \cancel{س}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س+١} + ١} = \frac{١}{\sqrt{٠+١} + ١}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

⑦ $$\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س+٩} - ٤}{س - ٧} \quad ، \quad \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س+٩} - ٤}{س - ٧} \times \frac{\sqrt{س+٩} + ٤}{\sqrt{س+٩} + ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٧} \frac{س + ٩ - ١٦}{(\sqrt{س+٩} + ٤)(س - ٧)}$$

$$= \lim_{س \to ٧} \frac{١\cancel{(س - ٧)}}{(\sqrt{س+٩} + ٤)\cancel{(س - ٧)}}$$

$$= \lim_{س \to ٧} \frac{١}{(\sqrt{س+٩} + ٤)}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٧+٩} + ٤}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{١٦} + ٤} = \frac{١}{٨}$$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(٨) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \sqrt{س+١}}{س-٢} \quad , \quad \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \sqrt{س+١}}{س-٢} \times \dfrac{٢ + \sqrt{س+١}}{٢+\sqrt{س+١}}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٤ - (س+١)}{(س-٢)(٢+\sqrt{س+١})}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٤ - س - ١}{(س-٢)(٢+\sqrt{س+١})}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{-١\cancel{(س-٣)}}{\cancel{(س-٢)}(٢+\sqrt{س+١})}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{-١}{٢+\sqrt{س+١}} = \dfrac{-١}{٤}$

(٩) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{س-٥}{٣ - \sqrt{س+٤}} \quad , \quad \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{(س-٥)}{٣-\sqrt{س+٤}} \times \dfrac{٣+\sqrt{س+٤}}{٣+\sqrt{س+٤}}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{(س-٥)(٣+\sqrt{س+٤})}{٩-(س+٤)}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{(س-٥)(٣+\sqrt{س+٤})}{٩-س-٤}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{(س-٥)}}(٣+\sqrt{س+٤})}{\cancel{(٥-س)}}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} -١(٣+\sqrt{س+٤})$

$= -٦$

(١٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{س^٢}{\sqrt{س^٢+٤} - ٢}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{س^٢}{\sqrt{س^٢+٤}-٢} \times \dfrac{\sqrt{س^٢+٤}+٢}{\sqrt{س^٢+٤}+٢}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{س^٢(\sqrt{س^٢+٤}+٢)}{س^٢+\cancel{٤}-\cancel{٤}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س^٢}(\sqrt{س^٢+٤}+٢)}{\cancel{س^٢}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \sqrt{س^٢+٤}+٢$

$= ٤$

(١١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^٢+١} - ١}{س^٢}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^٢+١}-١}{س^٢} \times \dfrac{\sqrt{س^٢+١}+١}{\sqrt{س^٢+١}+١}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{س^٢+\cancel{١}-\cancel{١}}{س^٢(\sqrt{س^٢+١}+١)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س^٢}\ ١}{\cancel{س^٢}(\sqrt{س^٢+١}+١)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\sqrt{س^٢+١}+١}$

$= \dfrac{١}{٢}$

(13) $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{س^3} - 1}{س^2 - س}$ ، $\dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{س^3} - 1}{س^2 - س} \times \dfrac{\sqrt{س^3} + 1}{\sqrt{س^3} + 1}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^3 - 1}{(س^2 - س)(\sqrt{س^3} + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\cancel{(س - 1)}(س^2 + س + 1)}{س\cancel{(س - 1)}(\sqrt{س^3} + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^2 + س + 1}{س(\sqrt{س^3} + 1)}$

$= \dfrac{(1)^2 + (1) + 1}{(1)(\sqrt{(1)^3} + 1)}$

$= \dfrac{3}{2}$

(14) اذا كانت $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^2 + أس - 8}{س - 2} = 6$

جد قيمة الثابت (أ)

الحل: بما أن المقادير موجودة وناتج التعويض في المقام يساوي صفر فإن ناتج التعويض في البسط يساوي صفر

$\Leftarrow (2)^2 + أ(2) - 8 = 0$

$2أ - 4 = 0$

$2أ = 4$

$\boxed{أ = 2}$

(15) اذا كانت $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{أ}\, س - 4}{س - 1} = 4$

جد قيمة الثابت (أ)

الحل: بما أن المقادير موجودة وناتج التعويض في المقام صفر فإن ناتج التعويض في البسط يساوي صفر

$\Leftarrow \sqrt{أ}(1) - 4 = 0$

$\sqrt{أ} = 4$ نأخذ التربيع للطرفين

$أ = 16$

(13) $\lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{هـ}$ ، $\dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{هـ \to 0} \left( \dfrac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{هـ} \times \dfrac{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}} \right)$

$= \lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{\cancel{س} + هـ - \cancel{س}}{(هـ)(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$

$= \lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{\cancel{هـ}\ 1}{\cancel{هـ}(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$

$= \lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{س} + \sqrt{س}} = \dfrac{1}{2\sqrt{س}}$

استاذ جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(١٦) $\underset{س \leftarrow ٦}{\text{نها}} \left( \dfrac{\sqrt{٢س+٤} - ٤}{س^٢ - ٣٦} \right)$

$= \underset{س \leftarrow ٦}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢س+٤} - ٤}{س^٢ - ٣٦} \times \dfrac{\sqrt{٢س+٤} + ٤}{\sqrt{٢س+٤} + ٤}$

$= \underset{س \leftarrow ٦}{\text{نها}} \dfrac{٢س + ٤ - ١٦}{(س^٢ - ٣٦)\, ٨} = \underset{س \leftarrow ٦}{\text{نها}} \left( \dfrac{٢س - ١٢}{(س^٢ - ٣٦)\, ٨} \right)$

$= \underset{س \leftarrow ٦}{\text{نها}} \dfrac{٢\cancel{(س - ٦)}}{٨\cancel{(س - ٦)}(س + ٦)} = \dfrac{\cancel{٢}\,١}{\cancel{٨}٤ \times ١٢} = \dfrac{١}{٤٨}$

---

واجب

(١٧) $\underset{س \leftarrow ٧}{\text{نها}} \left( \dfrac{\sqrt{٣س+٤} - ٥}{س^٢ - ٤٩} \right)$

استاذ
جهاد كمساسبه
هاتف
٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(١٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left( \dfrac{٤ - \text{س}^٢}{٣ - \sqrt{٢\text{س} + ٥}} \right)$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٤ - \text{س}^٢}{٣ - \sqrt{٢\text{س} + ٥}} \times \dfrac{٣ + \sqrt{٢\text{س} + ٥}}{٣ + \sqrt{٢\text{س} + ٥}}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٦\,(٤ - \text{س}^٢)}{٩ - (٢\text{س} + ٥)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٦\,(٢ - \text{س})\,(٢ + \text{س})}{٩ - ٢\text{س} - ٥}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٦\,(٢ - \text{س})\,(٢ + \text{س})}{٤ - ٢\text{س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٦\,\cancel{(٢ - \text{س})}\,(٢ + \text{س})}{٢\,\cancel{(٢ - \text{س})}}$

$= \dfrac{٦ \times ٤}{٢} = ١٢$

---

واجب

(١٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{س}^٢}{٥ - \sqrt{\text{س}^٢ + ٢٤}}$

واجب

(٢٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - ١٠}{\sqrt{\text{س} + ٢٠} - ٥}$

# ورقة عمل

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال: اوجد قيمة النهايات الآتية :

١) $$\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{\frac{١}{١+س} - \frac{١}{٣}}{س-٢}$$

٢) $$\text{نها}_{س \leftarrow -٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{٢س-٤}$$

٣) $$\text{نها}_{س \leftarrow ٧} \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{١}{٥}}{٢س-١٤}$$

٤) $$\text{نها} \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{١٢ - ٣س}$$

٥) $$\text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ + ٥س}{س-١}$$

٦) $$\text{نها} \frac{س^٣ - ٢٧}{٣س^٢ - ٩س}$$

٧) $$\text{نها} \frac{س^٢ + س - ٢}{ص^٢ - ١}$$

٨) $$\text{نها}_{ص \leftarrow -٣} \frac{س^٤ + ٢٧س}{س+٣}$$

مثال: اذا كان $ق(س) = \sqrt{س}$ ، فجد $\text{نها}_{س \leftarrow -٣} \frac{ق(س^٢) - ق(٩)}{س+٣}$

مثال: اذا كان $ق(س) = \frac{١}{س-٢}$ ، فجد $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

## * رابعاً : نهاية اقترانات الجذر النوني :

**نظرية**

1) عند ايجاد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}}$ ، حيث ن عدد فردي

فإننا نقبل جميع الإجابات .

**مثال** اوجد قيمة النهايات الآتية:

1) $\lim\limits_{\text{س} \to ٦} \sqrt[٣]{\text{س}+٢} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

2) $\lim\limits_{\text{س} \to -٤} \sqrt[٣]{\text{س}-٤} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

3) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \sqrt[٣]{\text{س}+١} = \sqrt[٣]{٠} = ٠$

2) عند ايجاد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}}$ ، حيث ن عدد زوجي

فإنه:-

* تكون $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}}$ موجودة وتساوي ناتج التعويض

اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} > ٠$

**مثال** $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \sqrt{\text{س}+٥} = \sqrt{٩} = ٣$

* تكون $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}} \sqrt{ق(س)}$ غير موجودة اذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ ق(س) < ٠$ **(اي سالبة)**

**مثال:** $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \sqrt{س-١} = \sqrt{-١} \Leftarrow$ غ . موجودة

وذلك لعدم وجود جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب .

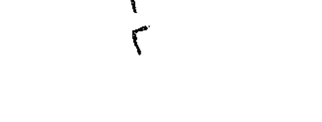
* اما اذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ ق(س) =$ صفر ، فهنا لابد من

دراسة الإشارة كالتالي :

١) اذا كانت دراسة الإشارة موجبة تكون الغاية موجودة وتساوي صفر .

٢) اذا كانت دراسة الإشارة سالبة تكون الغاية غير موجودة .

**مثال:** اوجد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \sqrt{س-٢}$



$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}} \sqrt{س-٢} =$ صفر

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}} \sqrt{س-٢} =$ غ . م

$> \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \sqrt{س-٢}$ غ . م

د. جهاد كساسبة
٠٧٧٩٠٠٢٠٤٤

**مثال** اوجد قيمة النهايات الآتية :

١) $\underset{س \to -٥}{\text{نها}} \left( \sqrt[3]{س^٣ - س} + س^٢ - ٤ \right)$

$= \sqrt[3]{٨} + (-٥)^٢ - ٤$

$= ٢ + ٢٥ - ٤ = ٢٣$

٢) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \sqrt[3]{٤ - س^٢} = \sqrt[3]{٠} = \text{صفر}$

٣) $\underset{س \to ٦}{\text{نها}} \sqrt[3]{٤ - ٣س} = \sqrt[3]{-٢}$

**مثال** اذا كانت $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\, د(س) = -٦٤$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \sqrt[3]{د(س)} = \sqrt[3]{-٦٤} = -٤$

٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \sqrt{د(س)} = \sqrt{-٦٤}$ غير موجودة .

٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \sqrt[3]{د(س)} + س^٢ + ٥س - ٣$

$= \sqrt[3]{-٦٤} + ٩ + ١٥ - ٣$

$= -٤ + ٢٤ - ٣ = ١٧$

يتبع ...

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \left( \sqrt[٥]{\dfrac{\text{ق(س)}}{٢}} + \text{س} - ٥ \right)$

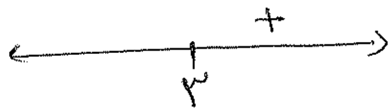
$= \sqrt[٥]{\dfrac{-٦٤}{٢}} + ٣ - ٥$

$= \sqrt[٥]{-٣٢} - ٢ \quad = -٢ - ٢ = -٤$

**مثال** أوجد قيمة الغايات الآتية :-

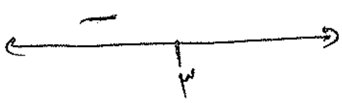
١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \sqrt{\text{س} - ٣}$ ، ناتج التعويض صفر والجذر زوجي لذلك ندرس الإشارة .

$=$ صفر

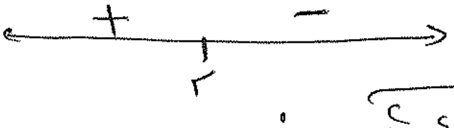



٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} \sqrt{\text{س} - ٣}$ ، ناتج التعويض صفر والجذر زوجي لذلك ندرس الإشارة .

$=$ غ . م




٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^٢}$ ، ناتج التعويض صفر ، والجذر زوجي لذلك ندرس الإشارة

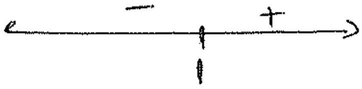



∵ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^٢}$ غ . م

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^٢} =$ صفر

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^٢}$ غ . م

٤) $\lim_{س \to 1} \sqrt[4]{س-1}$ ، ناتج التعويض صفر ، والجذر زوجي لذلك ندرس الإشارة



$\therefore \lim_{س \to 1^+} \sqrt[4]{س-1} = $ صفر

$\lim_{س \to 1^-} \sqrt[4]{س-1}$ غ٠م

$\lim_{س \to 1} \sqrt[4]{س-1}$ غ٠م

٥) $\lim_{س \to 0} \sqrt{س^3}$ ، ندرس الإشارة أيضاً .

$\therefore \lim_{س \to 0^+} \sqrt{س^3} = $ صفر

$\lim_{س \to 0^-} \sqrt{س^3}$ غ٠م

$\lim_{س \to 0} \sqrt{س^3}$ غ٠م

٦) $\lim_{س \to 9} \sqrt[4]{(س-9)^2}$ ، ناتج التعويض صفر ، والجذر زوجي .

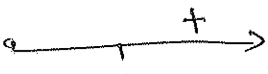
نلاحظ أن $(س-9)^2$ دائماً $> 0$ وبالتالي

$\lim_{س \to 9} \sqrt[4]{(س-9)^2}$ تساوي صفر .

٧) $\lim_{س \to 0^-} \sqrt{س}$ ، ندرس الإشارة أيضاً

$\therefore$ غ٠م

٨) $\lim_{س \to 0^+} \sqrt{س}$ ، ندرس الإشارة أيضاً



$=$ صفر

مثال: اذا كانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = -٨ ، اوجد ما يلي ،

١) $\lim_{س \to ٣} \left(\sqrt[3]{ق(س)} + ٣\right)$

٢) $\lim_{س \to ٣} \left(س^٢ + \sqrt{ق(س)}\right)$

الحل :-

١) $\sqrt[3]{-٨} + ٢$ ⟸ نهاية غير موجودة لانه لا يوجد جذر تربيعي حقيقي لـ (-٨)

٢) $٤ + \sqrt{-٨}$ نهاية غير موجودة لانه لا يوجد جذر تربيعي حقيقي لـ (-٨) .

⟸ ملاحظة: نهاية واحدة في السؤال غير موجودة تجعل النهاية كاملة غير موجودة كالمثال السابق ،

# ورقة عمل

**مثال** اوجد قيمة النهايات الآتية .

١) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \sqrt{س - ٣}$

٢) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \sqrt{س - ٥}$

٣) $\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نها}} \sqrt{س - ٤}$

٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \sqrt{(س - ٢)^{٢}}$

٥) $\underset{س \to -٤}{\text{نها}} \left( \sqrt{س + ٣} + ٤س - ١ \right)$

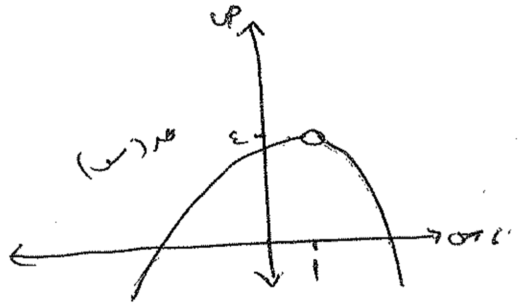
٦) $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}} \sqrt[٤]{٤س}$

٧) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \sqrt[٤]{(س - ٥)^{٢}}$

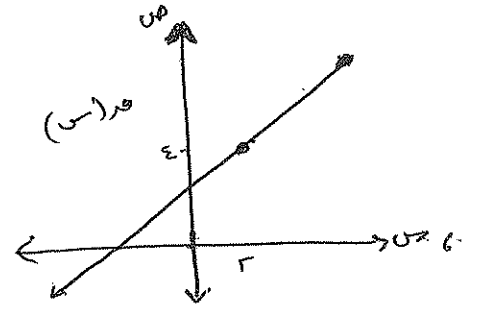
# الفصل الثاني : الاتصال

## أولاً : الاتصال عند نقطة

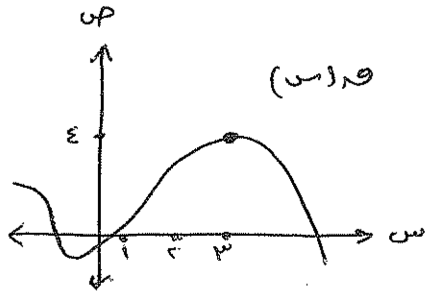
* نقول عن الاقتران ق انه متصل اذا امكن رسم منحنى ق على اي فترة من مجاله دون رفع القلم عن الورقة بحيث لا يوجد في منحناه ثقوب او قفزات او فجوة.




(جـ)

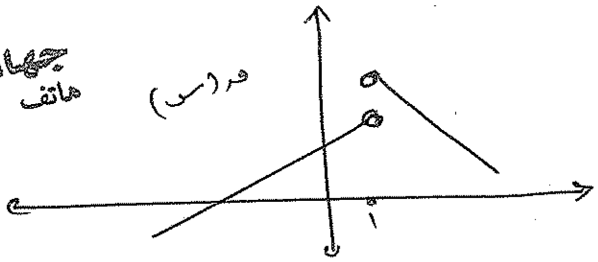



(ب)

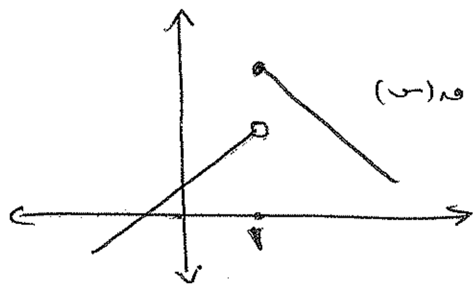



(أ)

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢




(هـ)




(د)

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* ① لاحظ في شكل (أ) أن ق(س) متصل عند (س = ٣)، لأنه عند نقطة (٣) لا يوجد ثقب او انقطاع او قفزة ابداً.

* ② لاحظ في شكل (ب) أن ق(س) متصل عند (س = ٢) لأنه عند النقطة (٢) لا يوجد ثقب او انقطاع او قفزة ابداً.

* ③ لاحظ في الشكل (جـ) أن ق غير متصل عند (س = ١) وذلك لوجود ثقب عند س = ١.

* ④ لاحظ في الاشكال د، هـ أن ق غير متصل عند (س = ١) وذلك لوجود قفزة عند س = ١

**تعريف:** الاتصال عند نقطة مثل (س = أ)

* يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند النقطة (س = أ) إذا تحققت الشروط التالية:

١) أن يكون ق(س) معرّف عند (أ) أي أن ق(أ) = عدد حقيقي (الصورة موجودة)

٢) أن تكون $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة . (النهاية موجودة)

٣) أن يكون ق(أ) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) (الصورة = النهاية)

**ملاحظة:** إذا لم يتحقق شرط واحد من الشروط السابقة فإن الاقتران ق(س) يكون غير متصل عند (س = أ)

---

**مثال:** إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س < ٣ \\ س^٢ - ٦ & ، س > ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٣)

الحل: نبحث في شروط الاتصال عند (س = ٣)

١) ق(٣) غير معرّف ⟸ ∴ ق غير متصل عند (س = ٣)

---

**مثال:** إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س + ٣ & ، س < ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \\ ٢س + ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$

ابحث في الاتصال عند س = ٢

الحل: نبحث في شروط الاتصال عند (س = ٢)

١) ق(٢) = ٦

٢) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٥ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٦ ⟸ ∴ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

⟸ ∴ ق غير متصل عند (س = ٢)

---

**مثال:** إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + ١ & ، س < -١ \\ ٣ & ، س = -١ \\ س^٣ + ٥ & ، س > -١ \end{cases}$

ابحث في الاتصال عند (س = −١)

الحل: نبحث في شروط الاتصال

١) ق(−١) = ٣

٢) $\lim_{س \to -١^+}$ ق(س) = ٣(−١)$^٢$ + ١ = ٤ ، $\lim_{س \to -١^-}$ ق(س) = (−١)$^٢$ + ٥ = ٤ ⟸ $\lim_{س \to -١}$ ق(س) موجودة

٣) ق(−١) ≠ $\lim_{س \to -١}$ ق(س)

∴ ق غير متصل عند (س = −١)

**مثال** إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س + ١ & ، س < ١ \\ س^٢ + ٤ & ، ١ \le س \le ٤ \\ ٢س - ٥ & ، س > ٤ \end{cases}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

① ابحث في الاتصال عند (س = ٤)
② ابحث في الاتصال عند (س = ٥)
③ ابحث في الاتصال عند (س = ١)

الحل: ① نبحث في شروط الاتصال عند (س = ٤)

* $ق(٤) = (٤)^٢ + ٤ = ٢٠$
* $\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٢(٤) - ٥ = ٣$
  $\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = (٤)^٢ + ٤ = ٢٠$

⇐ $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ غير موجودة

∴ ق غير متصل عند (س = ٤)

② نبحث في شروط الاتصال عند (س = ٥) (ليست نقطة تشعب)

* $ق(٥) = ٢(٥) - ٥ = ٥$
* $\lim_{س \to ٥} ق(س) = \lim_{س \to ٥} (٢س - ٥) = ٥$
* $ق(٥) = \lim_{س \to ٥} ق(س) = ٥$ ∴ ق متصل عند (س = ٥)

③ نبحث في شروط الاتصال عند (س = ١)

* $ق(١) = (١)^٢ + ٤ = ٥$
* $\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٥$
  $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٢$

⇐ $\lim_{س \to ١} ق(س)$ غير موجودة.

∴ ق غير متصل عند (س = ١)

---

**مثال** إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س \ne ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٢)

الحل: نبحث في شروط الاتصال عند (س = ٢)

① $ق(٢) = ٦$

② $\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}{\cancel{(س - ٢)}} = ٤$

③ $ق(٢) \ne \lim_{س \to ٢} ق(س)$ (٥٩) ∴ ق غير متصل عند (س = ٢)

**مثال** اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} س^2 - ٤ & ، \quad س < ٢ \\ ٣س + ١ & ، \quad ٢ \le س < ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند النقطة (س = ٢)

الحل : نبحث في شروط الاتصال عند (س = ٢)

① ق(٢) = ٣(٢) + ١ = ٧

② $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٧
$\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ق(س) = صفر
⟸ $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة .

∴ ق غير متصل عند (س = ٢)

---

**مثال** اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} & ، \quad س \ne ٩ \\ \dfrac{١}{٦} & ، \quad س = ٩ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند النقطة (س = ٩)

الحل : نبحث في شروط الاتصال عند (س = ٩)

① ق(٩) = $\dfrac{١}{٦}$

② $\lim\limits_{س \to ٩}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٩} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$

= $\lim\limits_{س \to ٩} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} \times \dfrac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$ = $\lim\limits_{س \to ٩} \dfrac{\cancel{(س - ٩)}\ ١}{\cancel{(س - ٩)}(\sqrt{س} + ٣)}$

= $\dfrac{١}{٦}$

③ ق(٩) = $\lim\limits_{س \to ٩}$ ق(س) = $\dfrac{١}{٦}$ ∴ ق متصل عند س = ٩

---

**مثال** اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} ٩ - ٢س & ، \quad -١ \le س < ٣ \\ ٨ & ، \quad س = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند (س = ٢)

الحل : نبحث في شروط الاتصال عند (س = ٢)

① ق(٢) = ٥

② $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) = ٥

③ ق(٢) = $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) = ٥

∴ ق متصل عند (س = ٢)

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

**مثال** اذا كانت ق(س) = 
$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٢س}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٤ & س = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

الحل: نبحث في شروط الاتصال عند نقطة .

١) ق(٢) = ٤

٢) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢} \dfrac{س^٢ - ٢س}{س - ٢}$

= $\lim_{س \to ٢} \dfrac{س\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{(س - ٢)}}$ = ٢

٣) ق(٢) $\neq \lim_{س \to ٢}$ ق(س) ∴ ق غير متصل عند س = ٢

م. جهاد كساسبة
٠٧٧٩٠٠٢٠٤٤

**مثال** اذا كان الاقتران ق متصلاً عند س = ٢ ، وكانت $\lim_{س \to ٢}$ (٢ق(س) + س) = ٦

فجد قيمة ق(٢)

الحل: بما أن ق متصل عند س = ٢

⟸ ق(٢) = $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) (الصورة = النهاية)

⟸ $\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + $\lim_{س \to ٢}$ س = ٦

٢ق(٢) + ٢ = ٦

٢ق(٢) = ٤

ق(٢) = ٢

* مراجعة كثيرة الحدود :-

الاقتران يكتب على صورة $ق(س) = أ_{ن} س^{ن} + أ_{(ن-١)} س^{(ن-١)} + ... + أ_{١} س + أ_{٠}$

حيث (ن) عدد صحيح موجب فقط ، ن = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ...، ∞}

أمثلة :

$ق(س) = ٤$

$ق(س) = س + ١$

$ق(س) = ٢س^{٢} + ٤س - ١$

$ق(س) = س^{٥} - ١$



* الاقترانات القيمة المطلقة | | ، وأكبر عدد صحيح [ ] ، واللوغاريتم ، والأسي ليست كثيرة حدود أبداً.

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* مثال: أي مما يلي كثير حدود وحدد سبب عدم ذلك:

١) $ق(س) = \frac{١}{٢}$ ، كثير حدود.

٢) $ق(س) = س^{-٣} + ٢س^{٢} + ١$ ، ليس كثير حدود لأن الأس عدد سالب.

٣) $ق(س) = س^{\frac{١}{٤}} + ٣س + ٥$ ، " " " " " كسر.

٤) $ق(س) = \sqrt{٢} س + ٣$ ، كثير حدود.

٥) $ق(س) = \sqrt[٣]{س} + ٢$ ، ليس كثير حدود لأنه $\sqrt[٣]{س} = س^{\frac{١}{٣}}$ كسر

٦) $ق(س) = |س|$ ، ليس ، لأنه مطلق.

٧) $ق(س) = [س + ٢]$ ، ليس لأنه أكبر عدد صحيح.

* ملاحظة: أي اقتران كثير حدود يكون متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) وبالتالي يكون متصل عند كل عدد حقيقي.

أمثلة: ابحث في اتصال الاقترانات التالية :-

١) $ق(س) = ٦$ ، عند $(س = ٣)$

الحل: متصل عند $س = ٣$ لأنه كثير حدود.

٢) $ق(س) = س^{٤} + ٢س + ١$ ، عند $(س = -٢)$

الحل: متصل عند $(س = -٢)$ لأنه كثير حدود.

③ $ق(س) = ٣س^٢ + ٢س - ١$ ، عند $(س = ٣)$

الحل : متصل عند $(س = ٢)$ لأنه كثير حدود .

④ $ق(س) = ٥س + ٣$ ، عند $(س = -١)$

الحل : متصل عند $(س = -١)$ لأنه كثير حدود .

مثال: إذا كانت $ق(س) = \frac{س - ١٢}{س^٢ - ٣}$ ، ابحث في اتصال ق(س) عند $(س = ٠)$

الحل :

① $ق(٠) = \frac{٠ - ١٢}{(٠)^٢ - ٣} = \frac{-١٢}{-٣} = ٤$

② $\lim_{س \to ٠} ق(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{س - ١٢}{س^٢ - ٣} = \frac{٠ - ١٢}{(٠)^٢ - ٣} = ٤$

③ $ق(٠) = \lim_{س \to ٠} ق(س) = ٤$

∴ ق متصل عند $(س = ٠)$



مثال: إذا كانت $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، ابحث في اتصال ق عند $(س = ٠)$

الحل ، ① $ق(٠) = \frac{١}{٠}$ ، كمية غير معرفة

∴ ق غير متصل عند $(س = ٠)$

مثال: إذا كانت $ق(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، ابحث في اتصال ق عند $(س = ٣)$

الحل : ① $ق(٣) = \frac{(٣)^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$ ، كمية غير معرفة

∴ غير متصل عند $(س = ٢)$

ملاحظة: الاقتران النسبي يكون غير متصل عند أصفار المقام

مثال: ابحث في اتصال $ق(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$ ، عند $(س = -٢)$

الحل : $ق(-٢) = \frac{-٢ - ٢}{-٢ + ٢} = \frac{-٤}{٠}$ ، غير معرفة

∴ ق غير متصل عند $(س = -٢)$

**مثال:** ابحث في اتصال د(س) = $\text{هـ}^{(\text{س}+1)}$ ، عندما (س = ٠)

الحل: ① د(٠) = $\text{هـ}^{(0+1)} = \text{هـ}^{1} = \text{هـ}$

② $\lim\limits_{\text{س}\to 0}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{هـ}^{(\text{س}+1)} = \text{هـ}^{1} = \text{هـ}$

③ د(٠) = $\lim\limits_{\text{س}\to 0}$ د(س) = هـ ∴ د متصل عند (س = ٠)

---

**مثال:** ابحث في اتصال د(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، س > ٠

عند (س = ١)

$\boxed{\begin{array}{c}\text{هـ}^{(0)} = 1 \\ \text{لو}_{\text{هـ}} 1 = \text{صفر} \\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = 1\end{array}}$

الحل: ① د(١) = $\text{لو}_{\text{هـ}} 1$ = صفر

② $\lim\limits_{\text{س}\to 1}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} 1$ = صفر

③ د(١) = $\lim\limits_{\text{س}\to 1}$ د(س) = صفر ∴ د متصل عند (س = ١)

---

**مثال:** ابحث في اتصال د(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ؛ س > ٠ عند (س = هـ)

الحل: ① د(هـ) = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}$ = ١

② $\lim\limits_{\text{س}\to \text{هـ}}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to \text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}$ = ١

③ د(هـ) = $\lim\limits_{\text{س}\to \text{هـ}}$ د(س) = ١ ∴ د متصل عند (س = هـ)

---

**مثال:** إذا كانت د(س) = $\begin{cases} 3\,\text{هـ}^{\text{س}} & ، \; 0 \le \text{س} < 1 \\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) & ، \; \text{س} < 0 \end{cases}$

ابحث في اتصال د عند (س = ٠)

① د(٠) = $3\,\text{هـ}^{(0)}$ = ٣(١) = ٣

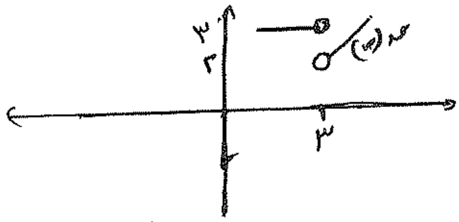
② $\lim\limits_{\text{س}\to 0^{+}}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to 0^{+}} 3\,\text{هـ}^{\text{س}}$ = ٣(١) = ٣

$\lim\limits_{\text{س}\to 0^{-}}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to 0^{-}} \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) = \text{لو}_{\text{هـ}}(0+1) = \text{لو}_{\text{هـ}} 1$ = صفر

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to 0}$ د(س) غير موجود

∴ د غير متصل

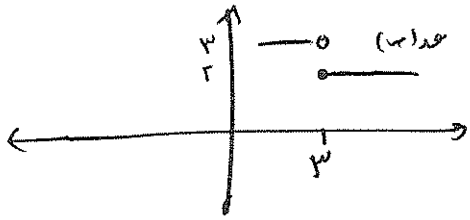
مثال: بالاعتماد على الأشكال التالية ، اذكر سبب واحد لعدم الاتصال

① 


غير متصل عند (س = ٢)

لانه ق(٢) غير معرفة

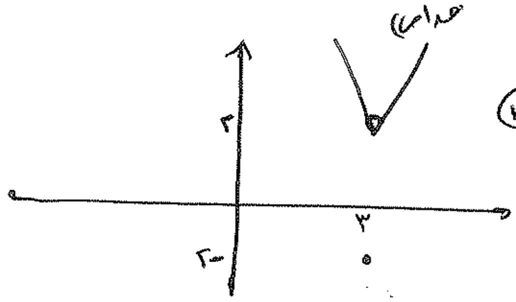


② 


غير متصل عند (س=٢)

لانه النهاية غير موجودة .

$\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ق(س) $\neq$ $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ق(س)

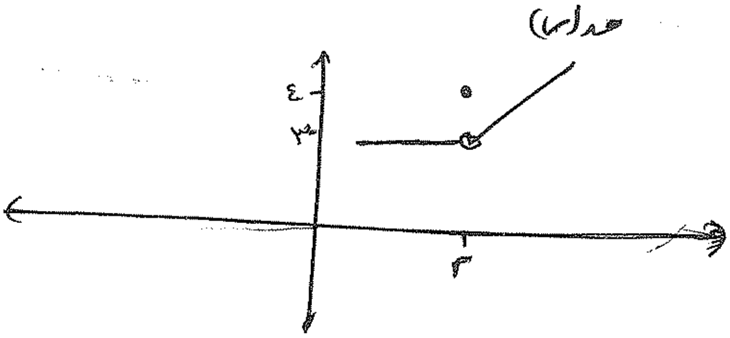
③ 


غير متصل عند (س = ٣)

لانه ق(٢) $\neq$ النهاية .

---

مثال: بالاعتماد على التمثيل البياني التالي ، ابحث في الاتصال عند (س=٢)






الحل: ① ق(٢) = ٤

② $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٣ ، $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٣ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة .

③ ق(٢) $\neq$ $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) ∴ ق غير متصل عند (س=٢)

# أمثلة على إيجاد المجاهيل إذا كانت الاقتران متصل .

**مثال**

إذا كانت د(س) = { أس + ٧ ، س ≥ ٣ ؛ س + ١ ، س < ٣ }

وكانت د متصل عند س = ٣ فجد قيمة الثابت (أ) .

الحل : بما أنه د متصل عند س = ٣

⟸ نها د(س) (س ← ٣⁺) = نها د(س) (س ← ٣⁻)

نها (س + ١) (س ← ٣⁺) = نها أس + ٧ (س ← ٣⁻)

٤ = ٣أ + ٧

⟸ ٣أ = −٣

أ = −١

**مثال**

إذا كانت د(س) = { س³ + ١٠ ، س ≠ ٢ ؛ أ²س ، س = ٢ }

وكانت د متصلاً عند س = ٢ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

د(٢) = نها د(س) (س ← ٢)

٢أ² = ٨ + ١٠

٢أ² = ١٨

أ² = ٩ ⟸ أ = ± ٣

**مثال**

إذا كانت د(س) = { (٣ − س) / (س − ٣) ، س ≠ ٣ ؛ مس + ٢ ، س = ٣ }

جد قيمة الثابت (م) التي تجعل د متصلاً عند س = ٣

الحل :

د(٣) = نها د(س) (س ← ٣)

٣م + ٢ = نها $\cancel{(٣ - س)}$ / $\cancel{(س - ٣)}$ (س ← ٣)

٣م + ٢ = −١

٣م = −٣

م = −١

**مثال**

إذا كانت د(س) = { ٢س³ + ٤ ، س < −٢ ؛ أس + ٦ ، س ≥ −٢ }

وكانت الاقتران د متصلاً عند س = −٢

فجد قيمة الثابت أ .

الحل : بما أنه د متصل عند س = −٢

⟸ نها د(س) (س ← −٢⁺) = نها د(س) (س ← −٢⁻)

نها (أس + ٦) (س ← −٢⁺) = نها ٢س³ + ٤ (س ← −٢⁻)

−٢أ + ٦ = −١٦ + ٤

−٢أ + ٦ = −١٢ ⟸ −٢أ = −١٨ ⟸ أ = ٩

استاذ
جهاد كساسبة
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

**مثال**

اذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٣س} - ١٢}{\text{س}^{٢} - \text{٣س} - ٤} & \text{، س} \neq ٤ \text{ ، س} \neq -١ \\ \text{م} & \text{، س} = ٤ \end{cases}$$

اوجد قيمة م التي تجعل ق متصل عند س = ٤

الحل:

$$\text{ق(٤)} = \underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \text{ ق(س)}$$

$$\text{م} = \underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{٢س} - ١٢}{\text{س}^{٢} - \text{٣س} - ٤}$$

$$\text{م} = \underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{٢\cancel{(\text{س} - ٤)}}{(\text{س} + ١)\cancel{(\text{س} - ٤)}}$$

$$\boxed{\text{م} = \frac{٢}{٥}}$$

---

**مثال**

اذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٤} + \text{٢٧س}}{\text{س} + ٣} & \text{، س} \neq -٣ \\ \text{أس} + ٢ & \text{، س} = -٣ \end{cases}$$

ما قيمة الثابت أ التي تجعل ق متصل عند س = −٣

الحل:

$$\text{ق(}-٣\text{)} = \underset{\text{س} \to -٣}{\text{نها}} \text{ ق(س)}$$

$$-٣\text{أ} + ٢ = \underset{\text{س} \to -٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٤} + \text{٢٧س}}{\text{س} + ٣}$$

$$-٣\text{أ} + ٢ = \underset{\text{س} \to -٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}(\text{س}^{٣} + ٢٧)}{\text{س} + ٣}$$

$$-٣\text{أ} + ٢ = \underset{\text{س} \to -٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}\cancel{(\text{س} + ٣)}(\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٩)}{\cancel{(\text{س} + ٣)}}$$

$$\Leftarrow -٣\text{أ} + ٢ = -٣(٢٧)$$

$$\Leftarrow -٣\text{أ} = -٨٣ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{٨٣}{٣}}$$

---

**مثال**

اذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + \text{ب} & \text{؛ س} > ٢ \\ ١٦ & \text{؛ س} = ٢ \\ \text{٣أس} + ١ & \text{؛ س} < ٢ \end{cases}$$

اوجد قيم الثوابت أ ، ب التي تجعل ق متصلاً عند س = ٢

الحل: نبحث عن الاقتران الذي فيه مجهول واحد ونساويه بالصورة.

$$\Leftarrow * \text{ ق(٢)} = \underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نها}} \text{ ق(س)}$$

$$١٦ = \underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نها}} \text{٣أس} + ١$$

$$١٦ = ٦\text{أ} + ١$$

$$٦\text{أ} = ١٥$$

$$\text{أ} = \frac{١٥ \div ٣}{٦ \div ٣}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{٥}{٢}}$$

$$* \text{ ق(٢)} = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نها}} \text{ ق(س)}$$

$$١٦ = \frac{٥}{٢}(٢)^{٢} + \text{ب}$$

$$١٦ = ١٠ + \text{ب}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٦}$$

سبحان الله
الحمد لله
الله أكبر

مثال

إذا كان د(س) =
أس + ٣ ، س < ١
٧ ، س = ١
س - ب ، س > ١

وكان د متصلاً عند س = ١ ، فأوجد قيمتي الثابتين أ ، ب

الحل:

* د(١) = نها د(س) ، س ← ١⁺

٧ = نها (س - ب) ، س ← ١⁺

٧ = ١ - ب

⟸ ب = -٦

* د(١) = نها د(س) ، س ← ١⁻

٧ = نها (أس + ٣)

٧ = أ + ٣

أ = ٤

مثال

إذا كان د(س) =
أس - ب ، س < ١
٤ ، س = ١
أس³ + ب + ٢ ، س > ١

وكان الاقتران د متصلاً عند س = ١ ، فما قيمتي الثابتين أ ، ب.

الحل:

* د(١) = نها د(س) ، س ← ١⁺

٤ = أ + ب + ٢

⟸ أ + ب = ٢ .... (١)

* د(١) = نها د(س) ، س ← ١⁻

٤ = أ - ب .... (٢)

نأخذ المعادلتين ونحلهما حذف أو تعويض:

بالجمع
أ + ب = ٢
أ - ب = ٤

٢أ = ٦

أ = ٣ عوض في معادلة (١) أو (٢) لإيجاد (ب)

⟸ ٣ + ب = ٢

ب = -١

## مثال

اذا كان د(س) =
$$\begin{cases} ٢أس + ب & : س < ٢ \\ ٨ & : س = ٢ \\ أس^٢ + ٣ب س & : س > ٢ \end{cases}$$

وكانت د متصلاً عند س = ٢ ، فأوجد قيم كل من الثوابت أ ، ب

الحل :

* د(٢) = $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ د(س)

٨ = ٤أ + ٦ب ... (١)

* د(٢) = $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ د(س)

٨ = ٤أ + ب ... (٢)

⟸ بالحذف او التعويض .

٤أ + ٦ب = ٨ (بالطرح)

٤أ + ب = ٨

---

٥ب = ٠

⟸ ب = ٠ عوض قيمة (ب) في معادلة (١) او (٢)

⟸ ٤أ + ٠ = ٨

٤أ = ٨

أ = ٢

## ملاحظة

١) مجهول واحد ولا يوجد اشارة ≠ يكون بداية الحل

نهاية $^{-}$ = نهاية $^{+}$

٢) مجهول واحد ويوجد اشارة ≠ يكون الحل .

الصورة = النهاية

٣) مجهولين : نبحث عن المعادلة التي تحوي مجهول واحد ثم

الصورة = النهاية

من اليمين او اليسار حسب وجود مجهول واحد .

٤) مجهولين : وكلاهما موجودين في المعادلات تكوّن معادلات ونحل حذف او تعويض .

مثال: إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين عند س = ٢ ، وكان ق(٢) = ١٢

نها (ق(س) - ٤هـ(س)) = ٢٠ ، جد هـ(٢)
س←٣

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

الحل: بما أن ق، هـ متصلين عند س = ٢ فإن:

ق(٢) = نها ق(س) ، هـ(٢) = نها هـ(س)
س←٢ س←٢

سبحان الله
الحمد لله
الله اكبر

⇐ نها ق(س) - ٤ نها هـ(س) = ٢٠
س←٢ س←٢

ق(٢) - ٤هـ(٢) = ٢٠

١٢ - ٤هـ(٢) = ٢٠

⇐ -٤هـ(٢) = ٨ ⇐ هـ(٢) = -٢

---

مثال: إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين عند س = ٥

وكان هـ(٥) = ٤ ، نها (ق(س) + س) / ٢هـ(س) = ١
س←٥

جد ق(٥)

الحل: ق، هـ متصلين

⇐ (ق(٥) + ٥) / ٢هـ(٥) = ١

⇐ ق(٥) + ٥ = ١٢

⇐ $\boxed{\text{ق(٥)} = ٧}$

**مثال:** اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} \text{هـ}^{(\text{س}+٣)} & ، \text{س} \geq ٠ \\ \text{هـ}^{(\text{أ}+\text{س})} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

اوجد قيمة الثابت (أ) اذا كانت ق متصلة عند (س = ٠)

الحل: بما أن ق متصلة عند س = ٠ فإن شروط الاتصال متحققة

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \text{ق(س)}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \text{هـ}^{(\text{س}+٣)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \text{هـ}^{\text{أ}+\text{س}}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{٣} = \text{هـ}^{\text{أ}}$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٣}$

**مثال:** اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} \sqrt[٣]{\text{أ}+\text{س}} & ، \text{س} \geq ٢ \\ \text{س}+١ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

وكانت ق متصلة عند س = ٢ فما قيمة الثابت (أ).

الحل: بما أن ق متصلة فإن شروط الاتصال متحققة

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٢^+} \text{ق} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^-} \text{ق}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢^+} \text{س}^٣ - ٤ = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^-} \text{أس}+٣$

$٤ = ٢\text{أ} + ٣$

$\Leftarrow ٢\text{أ} = ١$

$\text{أ} = \frac{١}{٢}$

**مثال:** اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} \sqrt[٣]{\text{أ}+\text{س}} & ، \text{س} \geq ٢ \\ \text{س}+١ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

اوجد قيمة الثابت (أ) التي تجعل ق متصلة عند (س = ٢)

الحل:

بما أن ق متصلة عند (س = ٢) فإن:

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢^+} \text{ق} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^-} \text{ق}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢^+} \sqrt[٣]{\text{أ}+\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^-} \text{س}+١$

$\sqrt[٣]{\text{أ}+٢} = ٣$

خذ التكعيب للطرفين

$\left(\sqrt[٣]{\text{أ}+٢}\right)^٣ = (٣)^٣$

$\text{أ}+٢ = ٢٧$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٢٥}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

# ثانياً: نظريات الاتصال

**نظرية:** اذا كان الاقترانان ق ، هـ متصلين عندما (س = أ) ، فإنه:-

1) ق + هـ متصل عند س = أ ، ناتج الجمع متصل.
2) ق − هـ متصل عند س = أ ، ناتج الطرح متصل.
3) ق × هـ متصل عند س = أ ، ناتج الضرب متصل.
4) $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = أ ، ناتج القسمة متصل ، بشرط هـ(أ) ≠ ٠

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

**ملاحظة:** تفشل النظرية السابقة اذا كان احد الاقترانين او كلاهما غير متصل عند النقطة (أ) وفي هذه الحالة نجري العملية المطلوبة على الاقترانين اولاً ثم نبحث في شروط الاتصال للاقتران الناتج.

**مثال**

اذا كان ق(س) = س³ + ٥س ، هـ(س) = { ٥س : س ≤ ٠ ، س² : س > ٠

وكان ل(س) = (ق × هـ)(س) ، ابحث في اتصال ل(س) عند س = ٠

الحل: نستخدم نظريات الاتصال:

* ق متصل عند س = ٠ وذلك لانه كثير حدود متصل على ح وبالتالي متصل عند س = ٠

* نبحث في اتصال هـ(س):-

1) هـ(٠) = ٠
2) نهـا هـ (س ← ٠⁺) = ٠ ، نهـا هـ (س ← ٠⁻) = ٠ ⇐ نهـا هـ (س ← ٠) موجودة = ٠
3) هـ(٠) = نهـا هـ (س ← ٠) = ٠ ∴ هـ متصل عند س = ٠

⇐ الاقتران ل متصل عند س = ٠ لانه حاصل ضرب اقترانين متصلين عند س = ٠

**مثال**

إذا كانت ق(س) = $س^2 - 3س + 1$ ، هـ(س) = $\begin{cases} 4س + 3 & ، س \ge 2 \\ س^2 + 7 & ، س < 2 \end{cases}$

وكانت ل(س) = $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) ، ابحث في اتصال ل عند س = 2

الحل : باستخدام نظريات الاتصال .

* ق متصل عند س = 2 ، لأنه كثير حدود .

* نبحث في اتصال هـ عند س = 2

1) هـ(2) = 11

2) $\lim_{س \to 2^+}$ هـ = 11 ، $\lim_{س \to 2^-}$ هـ = 11 ⟸ $\lim_{س \to 2}$ هـ = 11

3) هـ(2) = $\lim_{س \to 2}$ هـ = 11 ، ∴ هـ متصل عند س = 2

⟸ ل(س) متصل عند س = 2 ، لأنه ناتج قسمة اقترانين متصلين .

---

**مثال** **واجب**

إذا كانت ق(س) = $5س^2 + 4$ ، هـ(س) = $\begin{cases} س + 4 & : س < 0 \\ 4 - س^3 & : س \ge 0 \end{cases}$

وكانت ل(س) = (ق × هـ)(س) ، ابحث في اتصال ل عند س = 0

**مثال**

اذا كان عـ(س) = س² + ١٥ ، هـ(س) = { س³ : س ≥ ٥ ، ٣س : س < ٥

م(س) = (عـ − هـ)(س) ، فابحث في اتصال الاقتران م عند س = ٥

الحل: نستخدم اولاً نظريات الاتصال:

* عـ متصل عند س = ٥ ، لانه كثير حدود.

* نبحث في اتصال هـ عند س = ٥

هـ(٥) = ١٢٥

نهـا هـ (س ← ٥⁺) = ١٥

∴ هـ غير متصل عند س = ٥

⇐ تفشل نظرية الاتصال لذلك في هذه الحالة نجري عليه العمليات على الاقترانات ثم نبحث في شروط الاتصال عند س = ٥ على الاقتران الناتج.

⇐ م(س) = عـ(س) − هـ(س)

= س² + ١٥ − { س³ : س ≥ ٥ ، ٣س : س < ٥

م(س) = { س² + ١٥ − س³ : س ≥ ٥ ، س² + ١٥ − ٣س : س < ٥

⇐ تكملة المثال السابق.

* نبحث في شروط الاتصال عند س = ٥

١) م(٥) = ٢٥ + ١٥ − ١٢٥
= −٨٥

٢) نهـا م (س ← ٥⁺) = ٢٥ + ١٥ − ١٥
= ٢٥

نهـا م (س ← ٥⁻) = −٨٥

⇐ نهـا م (س ← ٥) غير موجودة

∴ م غير متصل عند س = ٥

مثال: اذا كان ق(س) = $\text{س}^2 + 5$ ، هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + 6 & : \text{س} \leq -1 \\ 35 - \text{س} & : \text{س} > -1 \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران م(س) = ق(س) × هـ(س) عندما س = $-1$

الحل :- نستخدم نظرية الاتصال :-

* ق متصل عند س = $-1$ ، لانه كثير حدود

* نبحث في اتصال هـ(س) عند س = $-1$

1) هـ($-1$) = $(-1)^2 + 6$

$= 7$

2) $\lim_{\text{س} \to -1^+}$ هـ(س) = $36$ ، $\lim_{\text{س} \to -1^-}$ هـ(س) = $7$

$\Leftarrow$ $\lim_{\text{س} \to -1}$ هـ غير موجودة $\Leftarrow$ هـ غير متصل عند س = $-1$

$\Leftarrow$ تفشل نظرية الاتصال :

نجري العملية المطلوبة على الاقترانات اولاً ثم نبحث في الاتصال عند س = $-1$ على الاقتران الناتج من العملية :-

$\Leftarrow$ م(س) = ق(س) × هـ(س)

$= (\text{س}^2 + 5) \times \begin{cases} \text{س}^2 + 6 & : \text{س} \leq -1 \\ 35 - \text{س} & : \text{س} > -1 \end{cases}$

م(س) = $\begin{cases} (\text{س}^2 + 5)(\text{س}^2 + 6) & : \text{س} \leq -1 \\ (\text{س}^2 + 5)(35 - \text{س}) & : \text{س} > -1 \end{cases}$

يتبع الصفحة $\Leftarrow$

⇐ نبحث في اتصال م(س) عند س = -١

١) م(-١) = ((-١)² + ٥)((-١)² + ٦) = (٦)(٧) = ٤٢

٢) نها م (س ← -١⁻) = ٤٢

نها م (س ← -١) غير موجودة

نها م (س ← -١⁺) = (٦)(٣٦) = ٢١٦

∴ م غير متصل عند س = -١

سبحان الله
الحمد لله
الله أكبر

**مثال** اذا كانت هـ(س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٢٥}$ ، عد(س) = { ٥ - س : س < ٥ ؛ س - ٥ : س ≥ ٥

ابحث في اتصال (عد × هـ)(س) عند س = ٥

الحل : باستخدام نظريات الاتصال :

١) هـ غير متصل عند س = ٥ لان هـ(٥) غير معرف

وهو احد شروط الاتصال . هـ(٥) = $\frac{٢}{\text{صفر}}$

⇐ باجراء عملية الضرب على فرض ل(س) = (عد × هـ)(س)

⇐ ل(س) = عد × هـ

= { ٥ - س : س < ٥ ؛ س - ٥ : س ≥ ٥ × $\left(\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٢٥}\right)$



يتبع ⇐

$$\Leftarrow \quad ل(س) = \begin{cases} \dfrac{(٢-س)(س-٥)}{٢٥-س^{٢}} & ; \quad ٥ > س \\[2ex] \dfrac{(٢-س)(٥-س)}{٢٥-س^{٢}} & ; \quad ٥ \leq س \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(٢-س)(س-\cancel{٥})}{(٥+س)(\cancel{٥}-س)} & ; \quad ٥ > س \\[2ex] \dfrac{(٢-س)(٥-\cancel{س})}{(٥+س)(٥-\cancel{س})} & ; \quad ٥ \leq س \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-(٢-س)}{٥+س} & ; \quad ٥ > س \\[2ex] \dfrac{٢-س}{٥+س} & ; \quad ٥ \leq س \end{cases}$$

نبحث عن الشروط :

١) $ل(٥) = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$

٢) $\lim_{س \to ٥^{+}} ل(س) = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$

$\lim_{س \to ٥^{-}} ل(س) = \frac{-٢}{١٠} = \frac{-١}{٥}$

$\lim_{س \to ٥} ل(س)$ غير موجودة

∴ ل غير متصل عند س = ٥

نتيجة ٤ - الاقتران النسبي ق(س) = $\frac{ل(س)}{م(س)}$ ، يكون متصل على الاعداد الحقيقية (ح)

باستثناء اصفار المقام .

ملاحظة :- اصفار المقام ← قيم (س) التي اذا عوضت في المقام كانت الناتج صفر .

مثال : اوجد قيم (س) التي تجعل ق(س) غير متصل ، او ماهي نقط عدم الاتصال .

① ق(س) = ٣ ، لا يوجد نقط عدم اتصال ، لانه كثير حدود متصل على (ح) .

② ق(س) = ٢س + ٣ ، لا يوجد نقط عدم اتصال ، لانه كثير حدود متصل على (ح) .

③ ق(س) = $\frac{٥}{س}$ ، س = ٠

④ ق(س) = $\frac{س - ١}{س - ٤}$ ، س = ٤

⑤ ق(س) = $\frac{٣س + ١}{س + ٣}$ ، س = -٣

⑥ ق(س) = $\frac{س^٢}{(س - ١)(س + ٢)}$ ، س = ١ ، -٢

⑦ ق(س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤س + ٤}$ ، س² - ٤س + ٣ = ٠

← (س - ١)(س - ٣) = ٠

← س = ١ ، ٣

⑧ ق(س) = $\frac{س - ٥}{س^٢ - ٢س + ١}$ ، س² - ٢س + ١ = ٠

← (س - ١)(س - ١) = ٠

← س = ١

⑨ ق(س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س + ٧}$ ، س = -٧

⑩ ق(س) = $\frac{س}{(س + ٤)(س - ٥)}$ ، س = -٤ ، ٥

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠١٢٠٤٢

(١١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}} + \frac{3}{\text{س}-1}$ ، $\text{س} = 0 ، 1$

(١٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}+5}{\text{س}^2 - \text{س}}$ ، $\text{س}^2 - \text{س} = 0$

$\Leftarrow \text{س}(\text{س}-1) = 0$

$\Leftarrow \text{س} = 0 ، 1$

(١٣) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^3 - 4\text{س}^2}$ ، $\text{س}^3 - 4\text{س}^2 = 0$

$\Leftarrow \text{س}^2(\text{س}-4) = 0$

$\Leftarrow \text{س} = 0 ، 4$

(١٤) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^2 - 9}$ ، $\text{س}^2 - 9 = 0$

$\Leftarrow \text{س}^2 = 9$

$\Leftarrow \text{س} = \pm 3$

(١٥) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^2 + 9}$ ، لا يوجد نقاط عدم اتصال لأن المقام لا يتحلل .

(١٦) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}+4)(\text{س}^2 - 25)$ ، لا يوجد نقط عدم اتصال لأنه حاصل ضرب كثير حدود .

(١٧) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1 - 4\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س} - 6}$ ، $\text{س}^2 + \text{س} - 6 = 0$

$\Leftarrow (\text{س}+3)(\text{س}-2) = 0$

$\Leftarrow \text{س} = -3 ، 2$

(١٨) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 1 & ، \text{س} < 4 \\ 6 & ، \text{س} = 4 \\ \text{س} + 2 & ، \text{س} > 4 \end{cases}$

الحل : نتأكد عند $\text{س} = 4$

* $\text{ق}(4) = 6$

* $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\text{س} \to 4^+} \text{ق}(\text{س}) = 6 \\ \lim\limits_{\text{س} \to 4^-} \text{ق}(\text{س}) = 17 \end{array}\right\}$ النهاية غير موجودة

$\therefore$ غير متصل عند $\text{س} = 4$ .

(١٩) $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}+٢} + \dfrac{\text{س}-٣}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}$

الحل: $\text{س}+٢ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٢$

$\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س}-٣) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = ٠ \text{ ، } ٣$

$\therefore$ مجـ $\text{س} = \{٠ \text{ ، } -٢ \text{ ، } ٣\}$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

(٢٠) $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}+٢}{\text{س}^{٢}-١} + \dfrac{٥}{\text{س}}$

الحل: $\text{س} = ٠$

$\text{س}^{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pm ١$

$\therefore$ مجـ $\text{س} = \{٠ \text{ ، } ١ \text{ ، } -١\}$.

(٢١) $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{٥ - \text{س}}{\text{س}^{٣}-١}$

الحل: $\text{س}^{٣} - ١ = ٠$

$\text{س}^{٣} = ١$

$\text{س} = ١$

(٢٢) $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٢}$

الحل: $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢ = ٠$

$(\text{س}-٢)(\text{س}-١) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = ٢ \text{ ، } ١$

(٢٣) $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}} + \dfrac{\text{س}-٣}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}$

الحل:

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س}-٢) = ٠$

$\text{س} = ٠ \text{ ، } ٣$

$\Leftarrow$ مجـ $\text{س} = ٠ \text{ ، } ٣$

نجد الاصفار قبل الاختصار

**مثال** اذا كان $ق(س) = ٥س^2 + ٣س - ١$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س + ٩ & : س \geq ٢ \\ ٥س + ١ & : س < ٢ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س)$ ، فابحث في اتصال ل عند $س = ٢$

الحل : نستخدم نظريات الاتصال

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

* ق متصل عند $س = ٢$ ، لانه كثير حدود

$\Leftarrow$ ٢ق(س) متصل ايضاً لانه ينتج كثير حدود ايضاً .

* نبحث في اتصال هـ عند $س = ٢$

١) $هـ(٢) = ١١$

٢) $\lim\limits_{س \to ٢^+} هـ = ١١$ ، $\lim\limits_{س \to ٢^-} هـ = ١١$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{س \to ٢} هـ$ موجودة وتساوي ١١

٣) $هـ(٢) = \lim\limits_{س \to ٢} هـ = ١١$ $\therefore$ هـ متصل عند $س = ٢$

$\therefore$ ل(س) متصل عند $س = ٢$ لانه ناتج جمع اقترانين متصلين .

**واجب**

**مثال** اذا كان $ق(س) = س + ٣$ ، $م(س) = \frac{س - ٣}{س^2 - ٩}$

وكان $ل(س) = ق(س) \times م(س)$ ، فابحث اتصال الاقتران

ل عندما $س = ٣$

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

مثال

اذا كان كل من الاقترانين ق ، هـ متصلاً عندما س = ٥ ، وكان هـ(٥) = ٤

$$\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س) + س}{٣هـ(س)} = ١$$ ، فجد ق(٥)

الحل :

$$\frac{\lim_{س \to ٥} ق(س) + \lim_{س \to ٥} س}{٣ \lim_{س \to ٥} هـ(س)} = ١$$

، لكن ق ، هـ متصل عند س = ٥
وهذا يعني أن

$$ق(٥) = \lim_{س \to ٥} ق(س)$$

$$هـ(٥) = \lim_{س \to ٥} هـ(س)$$

$$\Leftarrow \frac{ق(٥) + ٥}{٢هـ(٥)} = ١$$

لكن هـ(٥) = ٤

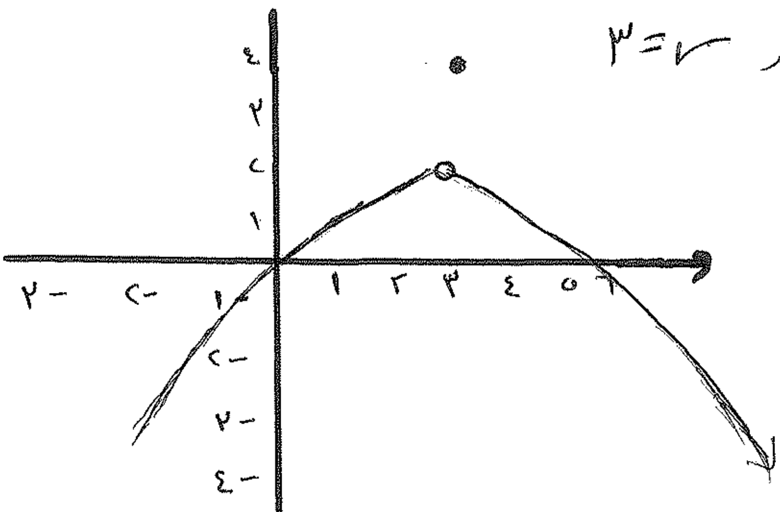
$$\Leftarrow \frac{ق(٥) + ٥}{١٢} = ١ \Leftarrow ق(٥) + ٥ = ١٢$$

$$\boxed{ق(٥) = ٧}$$

مثال

اعتماداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى ق(س)

ابحث في اتصال ق عند س = ٣




الحل :

١) ق(٣) = ٤

٢) $\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٢$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} ق(س) \neq ق(٣) \Leftarrow$ ق غير متصل عند س = ٣

## مثال

اذا كان ق(س) = (٤ - ٢س) ÷ (س² + س - ٦)

أجب عما يلي:

١) ما قيم س التي يجعل ق غير متصل

٢) نها ق(س)
س ← ٢

الحل: ١) س² + س - ٦ = ٠

(س - ٢)(س + ٣) = ٠

س = -٣ ، ٢

٢) نها (٤ - ٢س) ÷ (س² + س - ٦)
س ← ٢

= نها ٢(~~٢ - س~~) ÷ ((~~س - ٢~~)(س + ٣))
س ← ٢

= -٢ ÷ ٥

* كلنا كالقمر ... له جانب مظلم.

ممتاز

## واجب

## مثال

اذا كان ق(س) = (٤س - ٨) ÷ (س³ - ٤س)

أجب عما يلي:

١) ما قيم س التي يجعل ق غير متصل

٢) نها ق(س)
س ← ٢

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢

# ورقة عمل على الوحدة الاولى :

استاذ
جهاد كساسبه
هاتف ٠٧٧٩٠٠٢٠٤٢
اربد

س١) اوجد قيمة النهايات الاتية :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{١٢ - ٣\text{س}}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٧}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤٩}$

٤) $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{١}{\text{س} - ٢} - \dfrac{١}{٢}}{٢\text{س} - ٨}$

س٢) ما قيم س التي يكون ق غير متصل عندها .

١) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٣}{١٢ - ٤\text{س}}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٧}{\text{س}} + \dfrac{٥ - \text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٣}{\text{س} + ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} + ١} - \dfrac{٤}{\text{س}}$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}$

س٣) اوجد قيمة النهايات الاتية :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نها}} \sqrt{٣ - \text{س}} + \dfrac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ١}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{٥}{\text{س}} - \dfrac{٣}{٢}}{\text{س} + ١}$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢}{\text{س} + ١}$

س٤) اذا كانت ق(س) = |س − ٣| ، هـ(س) = 
$$\begin{cases} ١ & ٣ > س \\ ٠ & ٣ = س \\ -١ & ٣ < س \end{cases}$$

ابحث في اتصال ل(س) = (ق × هـ)(س) عند س = ٣