

Math

التفوق

فهم الرياضيات

للمرحلة الثانوية الفرع (الأدبي) م٤  
شرح مفصل ، أمثلة محلولة ، تمارين إضافية

إعداد

أ . بشار أبو العماش

٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦



وقف  
علمك  
على  
مقامك

قواعد التكامل غير المحدود ....

القاعدة الاولى :  $\int u \cdot v = \frac{u}{n} - \int \frac{u'}{n} v$  دس = أس + جـ

حيث (أ) اي عدد حقيقي .

أمثلة :

1-  $\int 7x \cdot dx = \frac{7x^2}{2} + C$  دس = 7س + جـ .

2-  $\int (4x - 3) \cdot dx = \frac{4x^2}{2} - \frac{3x}{1} + C$  دس = 4س - 3س + جـ .

3-  $\int \sqrt{4x} \cdot dx = \frac{2\sqrt{4x}}{3/2} + C = \frac{4\sqrt{x}}{3} + C$  دس =  $\sqrt{4x}$  + جـ .

➤ (لاحظ وجود (جـ) نهاية كل تكامل مما سبق

ويبدل على أي عدد ثابت ، لذا من الضروري

وضع (جـ) في نهاية كل تكامل غير محدود .

➤ جد التكاملات التالية :

1-  $\int (4x - 3) \cdot dx$  دس .

2-  $\int x \cdot dx$  دس . ← (هنا الحد الثابت = 1)

3-  $\int \frac{5}{13} \cdot dx$  دس .



الدرس الأول : التكامل غير المحدود .

➤ عزيزي الطالب ، لو طلب منك إيجاد اشتقاق

الاقتران  $Q(s) = s^3 + 3s^2$  ، لكان اشتقاقهكما مر معك في المستوى الثالث  $(3s^2 + 6s)$ 

➤ لكن لو قلت لك ما هي قاعدة الاقتران الذي

مشتقته  $(3s^2 + 6s)$  ؟ لكنت الاجابة ... $s^3 + 3s^2 - 5$  أو  $s^3 + 3s^2 + 4$  ، .... الخ .

فلاحظ انه يختلف فقط في الحد الثابت (جـ) وهذا

ما يسمى بالتكامل .

➤ اذا مما سبق يتبين ان التكامل ويرمز له بالرمز  $\int$ 

ويقرأ (تكامل دس) ، هو عملية عكسية للاشتقاق .

➤ تحذف اشارة التكامل مع الاشتقاق ومثال ذلك ..

1- جد  $Q(s) = 2s^3 + 3s$  دس .

نلاحظ بالمثال السابق انه طلب اشتقاق مع وجود

تكامل ، لذا في هذه الحالة نأخذ الاقتران كما هو ،

فيكون جواب المثال السابق  $(2s^3 + 3s)$  .2- اذا كانت  $Q(s) = 5s - 3$  ، جد  $Q'(2)$  .

كما قلنا سابقا ، عند وجود تكامل مع اشتقاق نرجع

للاقتران الاصلي  $(5s - 3)$  فيكون حل السؤالالسابق هو  $(5 \times 2 - 3) = 7$  .3- اذا كان  $Q(s) = s^2 - 4$  ، فجد  $Q'(3)$  .

4-  $Q(s) = \sqrt{s} - 5$  ، فجد  $Q'(4)$  .

تذكر ....

عند وجود تكامل مع مشتقة نأخذ الاقتران كما هو .



القاعدة الثانية :

$$س^ن = \frac{س^{1+n}}{1+n} + ج .$$

اي نضيف (1) للاس ونضع الاس بعد الاضافة في المقام .

أمثلة للتوضيح :

1- جد  $س^1$  . دس . أولاً نلاحظ ان الاس وهي قيمة

(ن) = (1) لذا نضيف له (1) ثم نضعه في المقام

$$كالتالي .. \quad س^2 + \frac{2}{2} = \frac{س^{1+1}}{1+1}$$

2- جد  $س^5$  . دس . أولاً قيمة (ن) = 5 فيكون الناتج

$$كالتالي ... \quad س^6 + \frac{6}{6} = \frac{س^{1+5}}{1+5}$$

3-  $س^{\sqrt{3}}$  . دس . ( عزيزي الطالب هنا يجب تجهيز

المقدار اولاً ، اي وضع الجذر التربيعي على شكل اس ثم نجري عملية التكامل ) . فيصبح

$$\text{المقدار } س^{\frac{1}{2}} \text{ . دس فيكون الناتج} =$$

$$\frac{3}{2} س^{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{2} س}{\frac{3}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

قواعد مهمة ...

$$(1) \quad س^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{س^3} \text{ مثال : } س^{-3} = \frac{1}{س^3}$$

$$(2) \quad س^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{س} \text{ مثال : } س^{\frac{5}{2}} = \sqrt[5]{س^5}$$

$$(3) \quad س^{2-6} = س^{-4} = \frac{س^6}{س^2} \text{ مثال : } س^{-6} = \frac{س^6}{س^2}$$

جد ما يلي :

$$1- \quad س^{-\frac{1}{4}} \text{ دس .}$$

$$2- \quad س^{\sqrt{3}} \text{ دس .}$$

$$3- \quad س^{\sqrt[3]{5}} \text{ دس .}$$

تذكر ..

$$\frac{أ + ب}{پ} = 1 + \frac{أ}{پ}$$

$$\frac{\text{البسط} + \text{المقام}}{\text{المقام}} \text{ أي}$$

سلم النجاح يبدأ بخطوة





جد ما يلي :

$$-1 \int 2 \text{ س} . \text{ دس}$$

$$-2 \int \sqrt[3]{\text{س}} \text{ دس}$$

القاعدة الرابعة :

$$\int \text{ق}(\text{س}) \pm \text{ه}(\text{س}) = \int \text{ق}(\text{س}) \pm \text{ه}(\text{س})$$

أي ان التكامل يوزع في حال الجمع والطرح .

أمثلة :

$$-1 \int 2\text{س}^2 + 3 \text{ دس} = \frac{2}{3} \int 2\text{س}^2 + 3 \text{ دس} + \text{ج}$$

$$-2 \int 4\text{س}^3 - 6 \text{ دس} =$$

$$\int 4\text{س}^3 - 6 \text{ دس} = \int 4\text{س}^3 + 3 \text{ دس} + \text{ج}$$

حل الأمثلة التالية :

$$-1 \int 3\text{س}^2 - 2 \text{ دس} . \text{ دس}$$

$$-2 \int \frac{1}{\text{س}^2} + \sqrt{\text{س}} \text{ دس} .$$

كلما كبر الله في قلبك ..  
كلما صغر كل شيء

القاعدة الثالثة :

$$\int \text{أ} \text{ق}(\text{س}) = \text{أ} \text{ق}(\text{س}) . \text{ دس} .$$

أي عند وجود ثابت يتم استخراجه خارج التكامل وأجراء التكامل ثم نضرب الثابت بالنتيجة من عملية التكامل .

أمثلة ....

$$-1 \int 6 \text{س}^2 . \text{ دس} = \dots = \int 6 \text{س}^2 . \text{ دس} \text{ (لاحظ اننا}$$

$$= \text{استخرجنا الثابت خارج التكامل) =}$$

$$\int 6 \text{س}^2 = \left[ \frac{6 \text{س}^{1+2}}{1+2} \right] = \left[ \frac{6 \text{س}^3}{3} \right] = 2 \text{س}^3 + \text{ج}$$

عملية اختصار ( العامل المشترك الأكبر بين 6 و 3 )

$$-2 \int \frac{2}{\sqrt[3]{\text{س}}} \text{ دس}$$

( تذكر انه يجب تجهيز المقدار على شكل (س<sup>n</sup>) قبل إجراء عملية التكامل )

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\text{س}}} = \text{س}^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3 \times 2}{2} = \frac{2}{3}$$

الأول × مقرب الثاني

$$\int \frac{2}{\sqrt[3]{\text{س}}} \text{ دس} = \int 2 \text{س}^{-\frac{1}{3}} \text{ دس} = \frac{2 \text{س}^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2 \text{س}^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = 3 \text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{ج}$$

تذكر انه يجب توحيد المقامات

تذكر عزيزي الطالب أن

$$\int \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \frac{\text{أ}}{1-\text{ن}} \text{س}^{1-\text{ن}}$$



القاعدة السادسة :

أ جاس : لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها - جتا س + ج ، مثال ...

$$\int جاس = - جتا س + ج$$

الثانية اذا كان معامل س غير الـ (1) فيكون تكاملها  $\frac{1}{أ} جتا أس + ج$  ، مثال

$$\int جاس = \frac{1}{2} جتا 2س + ج$$

أ جتا س : لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها جاس + ج ، مثال ...

$$\int جتا س = جاس + ج$$

الثانية اذا كان معامل س غير الـ (1) فيكون تكاملها  $\frac{1}{أ} جا أس + ج$  ، مثال

$$\int جتا س = \frac{1}{2} جا 2س + ج$$

أ قاس : لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها ظا + ج ، مثال ...

$$\int قاس = ظا + ج$$

الثانية اذا كان معامل س غير الـ (1) فيكون تكاملها  $\frac{1}{أ} ظا أس + ج$  ، مثال

$$\int قاس = \frac{1}{2} ظا 2س + ج$$

أمثلة : -

1- أ جاس . دس = - جتا س + ج .

2- أ جتا 3 س + 2 س . دس =  $\frac{3}{4} ظا 3س + 2س + ج$

3- أ جتا س + جا 5س - 4س<sup>2</sup> . دس ( اكمل حل السؤال)

4- أ جتا س ظاس . دس ( اكمل حل السؤال)

5- أ- قاس جتا س . دس

تذكر أن :

$$\frac{1}{جتا س} = قاس$$

$$\frac{جتا س}{جتا س} = قاس$$

القاعدة الخامسة :

أ ق(س) × ه(س) ( يتم ايجاد عملية الضرب

اولا ثم نجري التكامل ونفس الحال في عملية

القسمة .

أمثلة : -

1- جد أ س (س<sup>2</sup> + 2) . دس ( ن فك الأقواس قبل

اجراء عملية التكامل ) .

$$\int س (س^2 + 2) = \int س^3 + 2س . دس ( اكمل الحل)$$

2- أ (3س - 2)<sup>2</sup> . دس ( فك التربيع قبل إجراء

عملية التكامل حسب القاعدة....

$$(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2 \dots \text{أي}$$

(الحد الأول تربيع - 2 × الحد الاول × الحد الثاني + الحد الثاني تربيع)

$$= (3س - 2)^2 = 9س^2 - 12س + 4 . دس ( لا تنسى توزيع التكامل )$$

$$= 3س^3 - 6س^2 + 4س + ج$$

$$= 3س^3 - 6س^2 + 4س + ج$$

3-

$$\int \frac{6س^3 - 8س^2 - 4}{س^2} . دس ( يتم اولا توزيع المقام على البسط )$$

$$\int = \int \frac{6س^3}{س^2} - \frac{8س^2}{س^2} - \frac{4}{س^2}$$

$$= \int (6س + 8 - 4س^{-2}) . دس ( اكمل الحل )$$

الجواب (3س<sup>2</sup> + 8س +  $\frac{4}{س}$  + ج)

$$\text{تذكر أن } \frac{س^ن}{س^م} = \frac{س^{ن-م}}$$



✓ لايجاد قاعدة الاقتران ، نجد التكامل ونعوض  
النقطة المعطاه لايجاد قيمة (ج) .  
✓ أمثلة ...

**مثال** يتحرك جسيم بخط مستقيم حيث ان سرعته بعد  
(ن) ثانية تُعطي بالعلاقة ع(ن) =  $2ن^2 - 2ن$  ج  
المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (ن) ثانية علما بأن  
موقعه الابتدائي = 5 م .

الحل . عزيز الطالب نلاحظ بالمثل السابق انه طلب  
قاعدة الاقتران لسرعة الجسيم بعد (ن) ثانية ،  
واعطاني موقعه الابتدائي أي ف(0) = 5 ، ومن هذه  
المعلومة نجد أولا التكامل ثم نعوض ف(0) لايجاد  
قيمة الثابت ج ، كالتالي ...

- أولا نأخذ التكامل للاقتران .  
∫  $2ن^2 - 2ن$  . دس =  $ن^3 - 2ن^2 + ج$  (أخذنا التكامل مباشرة)
- ثانيا نعوض ف(0) = 5 في  $ن^3 - 2ن^2 + ج$   
لايجاد قيمة ج .  
ف(0) =  $ن^3 - 2ن^2 + ج = 5$   
 $0^3 - 2 \cdot 0^2 + ج = 5$  ؛ ... ج = 5
- ثالثا نكتب قاعدة الاقتران كما طلب السؤال .  
قاعدة الاقتران لسرعة الجسيم بعد(ن) ثانية  
هي :  $ن^3 - 2ن^2 + 5$  وهو المطلوب .

**مثال** إذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران ق(س)  
عند النقطة (س ، ص) =  $6 - 2س$  ، فجد قاعدة  
الاقتران عند النقطة (1 ، 2) .  
الحل . ∫  $6 - 2س$  . دس =  $6س - س^2 + ج$   
نحن نعرف ان النقطة (1 ، 2) تعني ان  
ق(1) = 2 ، ومنه نجد قيمة ج .. ( اكمل الحل ) .

قاعدة الاقتران =  $6س - س^2 - 3$

## طريقة أخرى لحل الكسور

$$\text{مثال ج د } \int \frac{س^2 - 5س}{س^3} . \text{ دس}$$

$$\text{الحل . أولا نجيز المقار } \frac{1-}{س} = \frac{1-}{س^2}$$

$$\text{ثم نرفع هذا المقار الى البسط فيصبح } \frac{1-}{س}$$

$$= \int (س^2 - 5س) \times \frac{1-}{س} \text{ (نجري عملية الحسب قبل التكامل)}$$

$$\begin{aligned} س^2 \times \frac{1-}{س} &= \frac{(1-2 \times 3)}{س} = \frac{1-6}{س} = \frac{-5}{س} \\ س^1 \times \frac{1-}{س} &= \frac{(1-1 \times 3)}{س} = \frac{1-3}{س} = \frac{-2}{س} \end{aligned}$$

$$= \int (س^2 - 5س) \times \frac{1-}{س} . \text{ دس ( اكمل الحل )}$$

## سلم النجاح





القاعدة الثانية :

$$\int \frac{b \cdot n^{1+n} - \frac{b}{1+n}}{1+n} = \left| \frac{b \cdot n^{1+n}}{1+n} = \text{دس} \cdot \frac{b}{1+n} \right|$$

حيث ن ≠ صفر

وبلغة أخرى نأخذ التكامل ثم نطرح ق (أ) - ق (ب)

$$\frac{1+n}{1+n}$$

ملاحظة . يمكن حل الامثلة ( 2+1 ) على قانون ق(أ) - ق(ب) . فمثلا حل مثال 1 كالتالي :

ق(4) - (2) = (3×4) - (3×2) = 12 - 6 = 6

**مثال :** إذا كان ق(2) = 5 ؛ ق(1) = 2 فما قيمة  $\int_1^2 \text{هـ(س)} \cdot \text{دس}$  .

الحل :

$$\text{هـ(س)} = \text{ق(2)} - \text{ق(1)} = 5 - 2 = 3$$

تذكر أن وحدات القياس ...  
المسافة (ف) .... م  
الزمن (ن) ..... ث

**مثال :** إذا كان ق(2) = 5 ؛ ق(1) = 2 فما قيمة  $\int_1^2 \text{ق(س)} \cdot \text{دس}$  .

الحل :



الدرس الثاني : التكامل المحدود .

القاعدة الأولى ...

$$\int_a^b \text{ك} \cdot \text{دس} = \left( \text{حيث ك عدد ثابت} \right) = \text{ك} ( \text{ب} - \text{أ} ) .$$

حيث ( ب ) يمثل الحد العلوي ، و( أ ) يمثل الحد السفلي

**مثال 1 :**  $\int_2^4 3 \cdot \text{دس} = 3 \cdot ( 4 - 2 ) = 6$

**مثال 2 :**  $\int_{-3}^2 4 \cdot \text{دس} = 4 \cdot ( 2 - (-3) ) = 20$

**مثال 3 :** إذا كانت  $\int_1^m \text{م} = 6$  - فما قيمة ( م ) .

الحل :

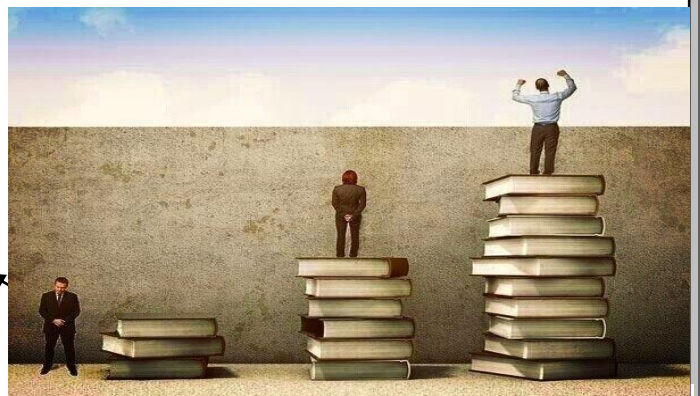
$$6 = \int_1^m ( 1 - \text{م} ) = ( 1 - \text{م} ) \cdot \text{م} = 6$$

3 - م = 3 - ( جمع 3 للطرفين )

3 - م = 6 - ( بقسمة 3 على الطرفين )

م = 1 -

ت(ن)  
التسار







مثال :

مثال :

إذا علمت ان  $\int_3^m 3^x dx = 35$  . فسجد قيمة الثابت (م)  
الحل :

$$35 = \int_3^m \frac{3^{1+2x}}{1+2}$$

$$35 = \int_3^m \frac{3^x}{x}$$

$$35 = (m) - (3)$$

$$35 = 27 - 3 \quad (\text{جمع الطرفين})$$

$$38 = 3 \quad (\text{الجزر التكعيبي لـ 3 = 3})$$

$$2 = m$$

$$3^m = (m)$$

$$27 = (3) = (3)$$

جد  $\int_2^5 \frac{10^x}{x} dx$  . فسجد  
تذكر يجب تجهيز على صورة  $\int \frac{a^x}{x} dx$  المقدار قبل اجراء التكامل

$$\text{الحل : } \int_2^5 \frac{10^x}{x} dx = \int_2^5 \frac{10^{1+2x}}{x} dx$$

$$\int_2^5 \frac{10^{1+2x}}{x} dx =$$

$$\int_2^5 \frac{10^x}{x} dx =$$

$$3 = 5 + 2 = \frac{10^5}{5} - \frac{10^2}{2} =$$

مثال :

$$\text{جد } \int_1^3 \frac{1+2^x}{x} dx$$

الحل :  $\int_1^3 \frac{1+2^x}{x} dx$  يمكن ايجاد ق(3) لوحدها وق(1) لوحدها ثم تطبيق القانون

$$\text{ق(3)} = \frac{1+2^3}{3} = 3$$

$$\text{ق(1)} = \frac{1+2^1}{1} = 3$$

$$= \text{ق(3)} - \text{ق(1)}$$

$$= 3 - 3 = 0 \quad (\text{اعراج 3 عامل مشترك})$$

$$= 3(3-1) = 6$$





الدرس الثالث : خواص التكامل المحدود.

الخاصية الاولى :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

حيث ج عدد ثابت .  
بمعنى انه نستطيع إخراج الحد الثابت خارج التكامل ثم إجراء عملية التكامل .

مثال : جد  $\int_1^3 3x^2 dx$

$$\int_1^3 3x^2 dx = \left[ x^3 \right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$$

الحل :  $\int_1^3 3x^2 dx = \left[ \frac{3x^3}{3} \right]_1^3 = \left[ x^3 \right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$

$$26 = \left( \frac{1}{3} - \frac{27}{3} \right) \times 3 =$$

الخاصية الثانية

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

مثال : جد  $\int_1^1 3x^2 dx$  = صفرا .

لاحظ عزيز الطالب ان الحد العلوي = الحد السفلي فالنتائج دائما في هذه الحالة = صفرا

قولوا :

اللهم لا اله الا انت  
تفليحوا

الخاصية الثالثة

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

أي عند قلب حدود التكامل فقط نقلب الإشارة التكامل الأصلي

مثال : اذا كان  $\int_3^6 f(x) dx = 3$  . فإن  $\int_6^3 f(x) dx = -3$

لاحظ عزيز الطالب انه في هذا المثال قمنا فقط بعكس اشارة ناتج التكامل الاصلي لاننا قمنا بعكس حدود التكامل

مثال : اذا كان  $\int_2^4 f(x) dx = 10$  . فإن  $\int_4^2 f(x) dx = -10$

عزيزي الطالب في هذا المثال لاحظ ان تكامل  $f(x)$  مضروب في العدد (2) ، لذا يجب ان نتخلص من العدد 2 اي جعل معامل  $f(x)$  = 1 ، وذلك بقسمة الطرفين على 2 ، ثم نقلب إشارة الناتج أي تصبح كالتالي...

مثال : اذا كان  $\int_2^4 f(x) dx = 10$  . ومنه  $\int_2^4 \frac{1}{2} f(x) dx = 5$  . وعليه فإن  $\int_4^2 \frac{1}{2} f(x) dx = -5$

مثال : اذا كان  $\int_2^4 f(x) dx = 3$  . فإن  $\int_4^2 2f(x) dx = -6$

في هذا المثال نلاحظ ان المضروب في الحد 2 هو معكوس حدود التكامل ، لذا نأخذ اولا عكس اشارة ناتج التكامل الاصلي ثم نضرب الناتج في 2

لاحظنا ان ناتج هذا السؤال بدون معامل  $f(x)$  هو -3 ، وبعد ضرب الناتج في معامل  $f(x)$  وهذا 2 يكون الناتج  $-3 \times 2 = -6$

$$\int_2^4 2f(x) dx = -6$$



مثال :

إذا كانت  $\int_1^3 f(x) dx = 6$  و  $\int_1^5 f(x) dx = 2$  فجد قيمة  $\int_3^5 f(x) dx$

عزيزي الطالب قبل البدء بعملية الحل ، عليك ان ترتب حدود التكامل من الاصغر الى الاكبر كالتالي :

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx$$

تم بعد ذلك نبدأ بتطبيق خصائص التكامل الباقية  
عكسنا الاشارة لان حدود التكامل معكوسة  
 $2 = 6 + \int_3^5 f(x) dx$

ومنه  $\int_3^5 f(x) dx = 4$  وهو المطلوب

مثال :

إذا كانت  $\int_1^4 2f(x) dx = 6$  فجد قيمة  $\int_1^4 f(x) dx + 3$

تذكر ان من خواص التكامل توزيع الجمع والطرح لذا فإن مثل هذه الامثلة تقوم بتوزيع الجمع او الطرح على عملية التكامل وفي هذا المثال ...

$$\int_1^4 2f(x) dx + 3 = 6 + 3 = 9$$

لأن  $\int_1^4 2f(x) dx = 6$  (قسمة الطرفين على 2)

قلب حدود التكامل  $\int_4^1 f(x) dx = -3$

ومنه  $\int_1^4 f(x) dx + 3 = 9 - 3 = 6$

الخاصية الرابعة اذا كانت (أ ب ج) أعداد حقيقية ، حيث  $a > b > c$  فإن ...

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

التأكد من صحة الخاصية .

1  $\int_2^4 2f(x) dx = 12$   $\int_2^4 f(x) dx = 6$   $12 = 4 - 16 = 2 - 2 = 4 = 2$

2  $\int_4^5 2f(x) dx = 9$   $\int_4^5 f(x) dx = 4.5$   $9 = 16 - 25 = 4 - 5 = 2 = 2$

3  $\int_2^5 2f(x) dx = 21$   $\int_2^5 f(x) dx = 10.5$   $21 = 4 - 25 = 2 - 5 = 2 = 2$

نلاحظ ان

3 = 2 + 1

21 = 9 + 12





مثال

$$\left. \begin{array}{l} 5 \\ 1 > 2 > 3 \\ 2 > 3 > 4 \\ 3 > 4 > 5 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

تدريب

$$\left. \begin{array}{l} 7 \\ 1 > 2 > 3 \\ 2 > 3 > 4 \\ 3 > 4 > 5 \end{array} \right\} = \text{إذا كانت ق(س)}$$

مثال :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \\ \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \\ \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx &= -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

إذا كان  $\int_1^4 (x^2 + 3x + 6) dx = 6$  ، فجد قيمة جـ

الحل :  $\int_1^4 (x^2 + 3x + 6) dx = 6$

$$\begin{aligned} \text{ق(ج)} &= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x \\ \text{ق(1)} &= 1 + \frac{3}{2} + 6 = \frac{17}{2} \\ \text{ق(4)} &= 64 + 24 + 24 = 112 \end{aligned}$$

ومنه

$$\text{ق(ج)} - \text{ق(1)} = 6$$

$$112 - \frac{17}{2} = 6 \quad (\text{ب طرح 6 من الطرفين})$$

$$112 - \frac{17}{2} = 6 \quad (\text{بتحليل العبارة التربيعية})$$

$$112 - \frac{17}{2} = 6 \quad (\text{ج + 5}) = (ج - 2) \text{ صفر}$$

$$112 - \frac{17}{2} = 6 \quad (\text{وعليه فإن مجموعة الحل (2, 5)})$$

**تحديد أوقات الاستراحة**

كل من يتعب له الحق أن يستريح بل أن الاستراحة هي واجب حتى يستطيع الطالب أن يتابع مهماته بنشاط وكفاءة وبعض الطلاب ينسون حقهم في الاستراحة فيرتكبون أحد الأخطاء التالية :-

- 1 - بعض الطلاب يذكرون على حساب علاقاتهم الاجتماعية فلا أصدقاء لهم ولا زيارات اجتماعية يقومون بها وهذا قد يسبب لهم مشكلات في التكيف الاجتماعي مستقبلا
- 2 - بعض الطلاب يذكرون لمدة خمس ساعات وهذا إرهاق ويمكن أن تتخذ الاستراحة أشكالاً متنوعة منها :-
- أ - إن تناول وجبة الطعام وهو شكل من أشكال الاستراحة من المذاكرة
- ب - إن أداء الصلاة هو أيضا استراحة من المذاكرة
- ج - إن الاستحمام هو أيضا استراحة من المذاكرة
- د - إن الاستماع الى كل ما هو مفيد سواء من الإذاعة أو عن طريق التلفاز يعد من أشكال الاستراحة
- هـ - إن ممارسة الرياضة هي أيضا استراحة من

الله لا يعطي النجاح على  
أجزاء، لكن الشخص الذي  
يعطيه الله نجاحا يمتد في كل  
جوانب حياته.





الدرس الرابع : التكامل بالتعويض

- نتذكر مع ان التكامل يوزع في حال الجمع والطرح ولا يوزع في حال الضرب والقسمة .
  - الذي يميز هذا التكامل وجود اقتران مرفوع لقوة او مقسوم على مشتقة اقتران ، وان أحد الاقترانيين يكون مشتقة الاخر .
  - خطوات الحل بهذا التكامل .
- 1- نفرض ان ص = الاقتران أي ص = ع(س)
  - 2- نجد مشتقة ص وهي ع'(س)
  - 3- نجد دس بدلالة دص .
  - 4- الرجوع الى التكامل الاصلي ونعوض ص مكان ع(س) ونختصر .
  - 5- كتابة التكامل بدلالة ع(س) اي نعوض قيمة ص في التكامل في النهاية .

تذكر ان  $\frac{دص}{المشتقة} = دس$

لا تنتظر أن يأتيك النجاح

بل ابحث عنه

ولكن ...

قبل أن تبحث عنه حولك

ابحث عنه في داخلك

فإنك لا تعلم حجم القدرات

التي وهبها الخالق لك

محمد الفقي

حالات التكامل بالتعويض .

\* الحالة الاولى .

( مشتقة اقتران ) ( اقتران )

مثال :-

$$\int (3س^2) (س^3 + 2) دس$$

لاحظ ان الاقتران المرفوع لقوة (س<sup>3</sup>+2) هو مشتقة الاقتران الاول

خطوات الحل :

$$\text{اولا نفرض ان ص} = س^3 + 2$$

$$\text{ثانيا : نجد مشتقة ص} = 3س^2$$

$$\text{ثالثا نجد دس بدلالة دص} = \frac{دص}{3س^2}$$

رابعا نعوض ص في  $\int (3س^2) (س^3 + 2) دس$  كالتالي :

$$\int (3س^2) (س^3 + 2) \frac{دص}{3س^2} (حذف 3س^2)$$

خامسا نحري عملية التكامل

$$\int (س^3 + 2) دص = \frac{س^4}{4} + 2ص + ج$$

وفي النهاية نعوض فيه ص في ناتج التكامل النهائي  $\frac{س^4}{4} + 2(س^3 + 2) + ج$



\* الحالة الثالثة :-

( مشتقة اقتران ) × ( جتا اقتران الزاوية )

الفرض دائما في هذه الحالات ان ص = اقتران الزاوية

ما ينطبق على جتا ينطبق على جا الزاوية وقا للزاوية

مثال :

$$\int \text{جدا} (2\text{س}) \times (\text{جتا} (3 - 2\text{س})) \text{دس}$$

الحل :

نفرض ان جتا الزاوية هو ص

$$\text{ص} = 3 - 2\text{س}$$

$$\text{مشتقة ص} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} \text{؛ ومنه دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$$

$$= \int 2\text{س} \text{جتا} \text{س} \times \frac{\text{دص}}{2\text{س}} \text{دس}$$

= جا ص + جـ (نعوض قيمة ص)

$$= \text{جا} (3 - 2\text{س}) + \text{جـ}$$

## الخطوات الخمس للنجاح



\* الحالة الثانية :

مشتقة اقتران

( اقتران )

مثال :

$$\int \text{جدا} \frac{\text{س}^2 + 5}{(10 + \text{س} + \text{س}^2)} \text{دس}$$

لاحظ ان البسط مشتقة المقام

الحل :- نفرض أن ص = 10 + س + س<sup>2</sup>

$$\text{نجد مشتقة دص} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 1 \text{ اذا دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س} + 1}$$

نرجع للتكامل الاصيل ونعوض ص

$$= \int \frac{\text{س}^2 + 5}{(10 + \text{س} + \text{س}^2)} \times \frac{\text{دص}}{2\text{س} + 1} \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{دص}}{2\text{س} + 1} \text{دس} = \int \frac{\text{دص}}{2\text{س} + 1} \text{دس} = \int \frac{\text{دص}}{2\text{س} + 1} \text{دس}$$



إذا كان مصعد النجاح

معطلا ... إستخدام

السلم درجة درجة



مثال :

$$\int (س) \times (جا (س-٢) - ٣) دس$$

الحل :

تقرض ان جا الزاوية هو ص

$$\boxed{ص = س - ٢}$$

$$\frac{دص}{س} = \frac{دص}{س-٢} \leftarrow \text{مشتقة ص}$$

$$\int \frac{دص}{س} \times جا س = \int \frac{دص}{س-٢} \times جا س \text{ دس (اختصار س مع س)}$$

$$\int \frac{١}{س} جا ص = \int \frac{١}{س-٢} جا ص + ج$$

$$\boxed{= \frac{١}{٣} جا (س-٢) + ج} \text{ (نعوض قيمة ص)}$$

مثال :

$$\int \frac{س٢ + ٣}{جا (س٣ + س٢)} دس$$

الحل

$$\boxed{\text{تقرض ان ص} = س٢ + ٣}$$

$$\frac{دص}{س٢ + ٣} = \frac{دص}{ص} \leftarrow$$

$$\int \frac{دص}{س٢ + ٣} \times \frac{س٢ + ٣}{جا (ص)} دس$$

$$\int \frac{١}{جا (ص)} دس$$

$$\int \frac{١}{ص} دس = \ln |ص| + ج$$

$$= \ln |س٢ + ٣| + ج$$

$$\boxed{\text{تذكر ان قا} = \frac{١}{جا}}$$

## مهارات قراءة أسئلة الاختبارات النهائية

أصدقائي الأعزاء: السلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

الاجتهاد يا أحبائي يحتاج إلى تركيز وهدوء وثقة بالنفس، وللأسف نجد بعض الطلاب يجتهدون ويحفظون الدروس عن ظهر قلب، ولكنهم يرتكبون في أثناء تقديم الاختبار ويضطربون، ويتسرعون في الإجابة فيمضي الوقت قبل أن يكملوا حل الأسئلة. لذا أأمل أن تنبهوا إلى هذه التصانح المفيدة، وتعملوا بها:

- ١ سَمُوا الله، وتوكلوا عليه، وكونوا اليقين من أنفسكم.
- ٢ اقرؤوا السؤال بتمعن وتركيز، وقرؤوه أكثر من مرة لفهموا المطلوب منه، ولا تكفوا بقراءة جزء من السؤال.
- ٣ انبهوا لعلامات الترقيم لأنها تساعد على فهم السؤال ( الفاصلة - النقطة - إشارة الاستفهام - إشارة التعجب - الثقفان الرأسيان بعد القول).

٤ انبهوا لضبط أواخر الكلمات، والكلمات المشابهة ( إنسان - أسنان - فلاح - فلاح - ذهب - ذهب).

٥ التأكد من الكلمة الرئيسية في السؤال ( عَرَف - عُلل - اشرح - اذكر السبب - عَدَد - اختر الإجابة الصحيحة).

٦ أعيدوا قراءة ما كتبتموه، وتأكدوا أن ما كتبتموه مقروءاً وصحيحاً من الناحية الإملائية. أتمنى لكم النجاح والتوفيق





الحالة الرابعة :

﴿ مشتقة اقتران ﴾ هـ ق(س)

تفرض في هذه الحالة ان ص = ق(س)

مثال :

جد ﴿ ٦ س هـ ٢ س ﴾

الحل :

تفرض أن ص = س٢

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

﴿ ٣ هـ ٣ هـ ٣ هـ ﴾

﴿ ٣ هـ ٣ هـ ٣ هـ ﴾ بس = ٣ هـ + ج (تضع قيمة ص)

$$٣ = ٣ هـ + ج$$

الحالة الخامسة :

﴿ اقتران من الدرجة الاولى ﴾ ن دس

تفرض ان ص = الاقتران

مثال :

جد ﴿ ٥ س + ٢ ﴾ دس

تفرض ان ص = ٥ س + ٢

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

﴿ ٧ ص ٧ ص ﴾ دس = ٧ ص + ج

٧ ص + ج = ٧ ص + ج (تكتب قيمة ص)

$$٧ ص + ج = ٧ ص + ج$$



إذا أردت أن  
تكون فاشلاً؛  
فحاول أن  
تُرْضِي جميع  
الناس!

إروين روميل

(إحتمالات نتائج التوجيهي !!)

إذا رسبت !!

أبوك... إخضر عليك سودت وجهي والله يسود وجهك.. تقوووو

إمك... يا خسارة سهري وتعبي عليك راح خسارة.. إهيه إهيه

أصحابك... مهو عظة واحد هامل فضاه روجات وجيات ولا مسك كتاب.. كيف بدو ينجح !!

الجيران... يختي إنهم فضاه دابر بالشوارع ومعلى المسجل وبدهم إياه ينجح !!

المجتمع... إلهي ما معو توجيهي هالأيام راحت في طم...!

المستقبل... مطلوب مندوبي مبيعات براتب مغري

إذا نجحت !!

أبوك... والله إنك ابن أبوك بيضت وجهي.. هاتلك بوسه إموهوه

إمك... والله سهري وتعبي ما راح خسارة يمه.. لولولولوليشش

أصحابك... هالأزعر كابين يدرس من ورائنا وبطلنا نشوفو عشان هيك نجح

الجيران... يختي إنهم نجح لانو دبح خالو دراسة.. إي ما كنا نشوفو بالشارع يا مستورة..!!

المجتمع... أي هالأيام إلهي معو شهادة جامعية يا دهب يلاقي شغل

المستقبل... مطلوب خمشة طلاب للدراسة في أوكرانيا

medooo, thegoo, us

نتائج التوجيهي برعاية MEDOOO





التكامل بالتعويض عند وجود حدود تكامل

\* هناك طريقتين لتعويض حدود التكامل ...

الطريقة الأولى : اجراء التكامل بخطواته السابقة  
الذكر ثم بعد كتابة بدلالة (س) نعوض حدود التكامل  
كالمعتاد .

مثال :

$$\int (2s + 1) ds$$

نفرض ان  $v = 2s + 1$

$$dv = 2 ds$$

$$\int \frac{1}{2} dv$$

$$\int \frac{1}{2} (2s + 1) ds$$

$$= \frac{1}{2} (s^2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (4 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (8.5) = 4.25$$

( لاحظ عزيزي الطالب انه اتمنا عملية التكامل كما

هو الحال في التكامل غير المحدود ثم بعد كتابة ص

بدلالة س عوضنا حدود التكامل ) .

قاعدة عامة عندما  $\int (أس + ب) ds$

$$\int (أس + ب) ds = \frac{أ(س + ١)^{١+١}}{(١ + ١) \times ١} + ج$$

مثال على هذه القاعدة :

$$\int (٥س + ٣) ds$$

$$\int (٥س + ٣) ds = \frac{٥(س + ١)^٤}{٤} + ج$$

ملاحظة .

لا تستخدم هذه القاعدة الا  
للتأكد من الحل او عندما  
يكون المطلوب خيار متعدد .

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم

من غشنا فليس منا

حكم  
الفشل في  
الاجتهادات





قواعد :

$$ج + \frac{(ب + ا)^{1+n}}{(1+n)ا} = ا س^n (ب + ا) \quad (1)$$

$$ج + \frac{(ب + ا)جا - جتا}{ا} = ا س (ب + ا)جا \quad (2)$$

$$ج + \frac{(ب + ا)جا}{ا} = ا س جتا (ب + ا)جا \quad (3)$$

$$ج + \frac{(ب + ا)ظا}{ا} = ا س قا^2 (ب + ا) \quad (4)$$



الطريقة الثانية :

نجري خطوات التكامل كما هي ، لكن قبل كتابة ص بدلالة س نجد حدود التكامل الجديدة اي نعوض الحد السفلي من التكامل بقانون ص ، ( فرض ( ص ) ، ونعوض كذلك الحد العلوي كما هو الحال في الحد السفلي لنحصل على حدود جديدة للتكامل ، ولنحل المثال السابق بهذه الطريقة كالتالي .

$$\int_{-2}^2 6s(s+2) \cdot ds$$

نعوض حدود التكامل .

الحد السفلي (٠) . ص = س + ٢ = ٢ + ٢ = ٤  
الحد العلوي (١) . ص = س + ٢ = ٢ + ١ = ٣  
حدود التكامل الجديدة . السفلي = ٢ ، العلوي = ٣

نفرض ان ص = س + ٢

$$ds = \frac{dص}{1} = \frac{dص}{1}$$

$$\int_{-2}^2 6s(s+2) \cdot ds = \int_{-2}^2 6 \cdot \frac{ص-2}{1} \cdot ds$$

$$\int_{-2}^2 3(ص-2) \cdot ds = \int_{-2}^2 3ص - 6 \cdot ds$$

$$= 3 \cdot \frac{ص^2}{2} - 6 \cdot ص = \frac{3}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - \left( \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) \right) = 9$$

( في هذه الطريقة بعد ايجاد التكامل عوض مباشرة حدود التكامل الجديدة مكان ص بدون ان تكتب ص بدلالة س )

تدريب 1.

$$\int_{-2}^2 (5 + 3s^2) \cdot ds$$

تدريب 2

$$\int_{-2}^2 3(5 - s) \cdot ds$$





تطبيقات فيزيائية وهندسية

**مثال** - يتحرك جسيم بسرعة مُعطى بالعلاقة :

ع(ن) =  $3ن^2 - 2ن$  م/ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (3) ثواني من بدء الحركة علما بأن موقعه الابتدائي = 5 م .

الحل .  $3ن^2 - 2ن$  م/ث . دس =  $3ن^3 - 2ن^2 + ج$  .

موقعه الابتدائي = 5 م ؛ اذا ف(0) = 5 منها نجد ج

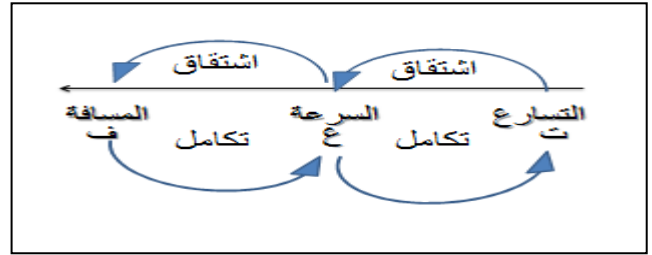
ف(0) =  $3ن^2 - 2ن + ج = 5$  م

( لكن السؤال طلب السرعة بعد 3 ثواني ؛ اذا بعد كتابة قاعدة الاقتران نعوض (3) فيها لنجد مسافته بعد هذا الزمن . ف (3) =  $3ن^2 - 2ن + 5$  ) لاحظ هنا اننا عوضنا مكان (ج) قيمتها التي هي (5) . وبعد التعويض يكون ف(3) = 23 م . وهو المطلوب .

**مثال** : يتحرك جسيم بخط مستقيم بتسارع ثابت =

ت(ن) =  $6 - 2$  م/ث<sup>2</sup> ؛ جد المسافة التي يقطعها بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علما بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع (0) = 5 م / ث ، وموقعه الابتدائي ف(0) = 6 م .

الحل . عزيزي الطالب في مثل هذه الاسئلة سوف نعتمد على هذه القاعدة للحل وهي ..



من المخطط السابق نلاحظ ان  $\int$  التسارع يعطينا سرعة ، و  $\int$  السرعة يعطينا مسافة :-

اذا نجد أولا تكامل التسارع لنجد قاعدة السرعة من خلال ع (0) = 6 كالتالي ...

$ا - 6 . دس = 6ن - 2ن + ج$  ..... ع (0) = 5

ع (0) =  $6ن - 2ن + ج = 5$  ..... اذا ج = 5 .

ومنه قاعدة السرعة لهذا الجسيم =  $6س + 5$  .

نجد الان، تكامل، السرعة لنجد قاعدة المسافة

ا -  $6ن + 5$  .. دس =  $3ن^2 + 5س + ج$  .

من السؤال ف (0) = 6 ... لنجد قيمة (ج)

ف(0) =  $3ن^2 + 5ن + ج = 6$  ومنه ج = 6

اذا قاعدة الاقتران للمسافة =  $3ن^2 + 5ن + 6$  .

عزيزي الطالب لا تنسى مطلوب السؤال (جد المسافة التي يقطعها بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة) اذا نعوض قيمة (1) في اقتران المسافة ....

ف(1) =  $3ن^2 + 5ن + 6 = 8$  م . وهو المطلوب .

سؤال : يتحرك جسيم بتسارع ثابت مُعطى بالعلاقة

ت(ن) =  $8$  م/ث<sup>2</sup> ؛ جد المسافة التي يقطعها الجسيم

بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علما بأن السرعة

الابتدائية ع(0) = 2 م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(0) =

10 م .

قال الخشب للمسمار : " لقد كسرتني "

فرد المسمار : " لو رأيت الضرب فوق رأسي لعذرتني "

ما أجمل أن يعذر بعضنا بعض

لأننا لا نعلم عن ظروف الآخرين الغائبة عن أعيننا





**تدريب:** اذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران ق  
يساوي (2س + 2) <sup>3</sup> وكان المنحنى يمر بالنقطة  
(6,1) فجد قاعدة الاقتران.

**تدريب:** يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انتقل  
من الموقع الابتدائي ف(0) = 4م، اذا كانت سرعته  
بعد مرور ن ثانية معطى بالعلاقة ف(ن) = -6 -  
2ن + 6ن<sup>2</sup> م/ث، جد موقعه بعد مرور ثلاث ثوان من  
بدء الحركة.

**تدريب:** يتحرك قطار بخط مستقيم بتسارع ثابت  
مقداره ت(ن) = 12ن - 6 م/ث<sup>2</sup> اذا علمت ان موقعه  
الابتدائي ف(0) = 2م ، وسرعته الابتدائية  
ع(0) = 3م/ث جد ما يلي :  
1- سرعته بعد مرور ثانية واحدة .  
2- موقعه بعد مرور 3 ثواني .

النجاح الذي تستمتع به  
اليوم هو نتيجة الثمن  
الذي دفعته في الماضي .





الدرس الخامس : تطبيقات التكامل ( المساحات )

- سوف نقوم بتقسيم الدرس الى عدة حالات .

الحالة الأولى .

مساحة المنطقة المحصورة بين اقتران ومحور السينات ومستقيمين  $s_1 = أ$  ،  $s_2 = ب$  ، حيث ان الاقتران لا يقطع محوسر السينات بين العددين أ و ب فتكون مساحة المنطقة المحصورة هي ...

$$م = \int_a^b ق(س) . دس$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) =  $3س^2$  ومحور السينات خلال الفترة [ 1 ، 3 ] .

الحل .

أولا : نرى ان الاقتران ق(س) لا يقطعه خلال الفترة المحددة [ 1 ، 3 ] ، من خلال ق(س) = صفر أي...  $3س^2 = صفر$  ومنه  $س = صفر$  .

نلاحظ ان الصفر لا يقع ضمن الفترة [ 1 ، 3 ] اذا الاقتران لا يقطعه .

ثانيا نأخذ تكامل الاقتران ق(س) وحدود التكامل تكون الفترة المحددة في السؤال كالتالي ...

$$م = \int_1^3 3س^2 . دس$$

$$= \left[ س^3 \right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$$

ومنه المساحة المطلوبة = 26 وحدات

مثال : احسب المساحة المحصورة بين منحنى

الاقتران ق(س) =  $2س - 4$  ، ومحور السينات

والمستقيمين  $s_1 = -1$  ،  $s_2 = 2$  .

الحل : ..

$2س - 4 = صفر$  ؛  $2س = 4$  ؛  $س = 2$  ؛ اذا

المنحنى لا يقطع ق(س) .

$$م = \int_{-1}^2 ق(س) . دس$$

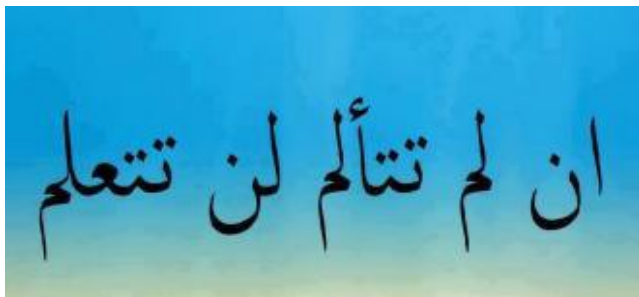
$$= \int_{-1}^2 2س - 4 . دس$$

$$= \left[ س^2 - 4س \right]_{-1}^2 = ق(2) - ق(-1)$$

$$= (4 - 8) - (1 - 4) = -4 - (-3) = -1$$

$$= |-1| = 1 \text{ وحدات}$$

ملاحظة : اذا كان الجواب سالبا للمساحة نأخذ القيمة المطلقة لان المساحة  $\neq$  سالب .

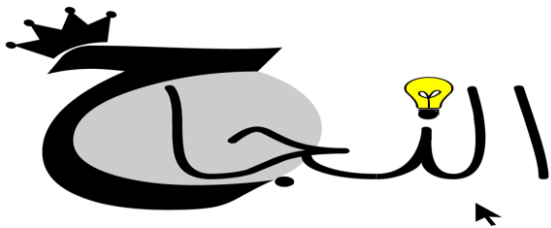


**تدريب :**

جد المساحة المحصورة بين ق(س) = 2س - 6 والمستقيم س<sub>1</sub> = 0 ، س<sub>2</sub> = 5 .

**تدريب**

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س - 4 ، ومحور السينات خلال الفترة [ 1 ، 3 ] .



**الحالة الثانية :**

مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) والمستقيمين س<sub>1</sub> = 1 ، س<sub>2</sub> = 2 ، والاقتران ق(س) يقطع محور السينات بين العددين 1 ، 2 ، اي عندما نعمل ق(س) = 0 ، تكون قيمة س تقع بين العددين 1 ، 2 .

$$M = \int_1^2 Q(S) + \int_2^3 Q(S) . DS$$

**مثال :** اذا كان ق(س) = 4 - 2س ، فأحسب المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات خلال الفترة [ -1 ، 3 ] .

**الحل :**

ق(س) = 0 ... 4 - 2س = 0 ؛ اذا س = 2  
نلاحظ (2) تقع ضمن الفترة [ -1 ، 3 ] ، اذا الاقتران يقطع محور السينات لذا يكون الحل على فترتين الاولى من -1 لـ 2 ، والثانية من 2 لـ 3 كالتالي :

$$M = \int_{-1}^2 Q(S) + \int_2^3 Q(S) . DS$$

$$M = \int_{-1}^2 (4 - 2S) . DS = \left[ 4S - S^2 \right]_{-1}^2 = (8 - 4) - (-4 + 1) = 9$$

$$M = \int_2^3 (4 - 2S) . DS = \left[ 4S - S^2 \right]_2^3 = (12 - 9) - (8 - 4) = 1$$

المساحة الكلية = م<sub>1</sub> + م<sub>2</sub>

$$= 1 + 9 = 10 \text{ وحدات}$$



**مثال :** احسب المساحة المحصورة بين منحنى

الاقتزان ق(س) =  $s^2 - 4s + 3$  ، ومحور السينات .

الحل :

ق(س) = صفر .

$$s^2 - 4s + 3 = 0 \quad (s-3)(s-1) = 0$$

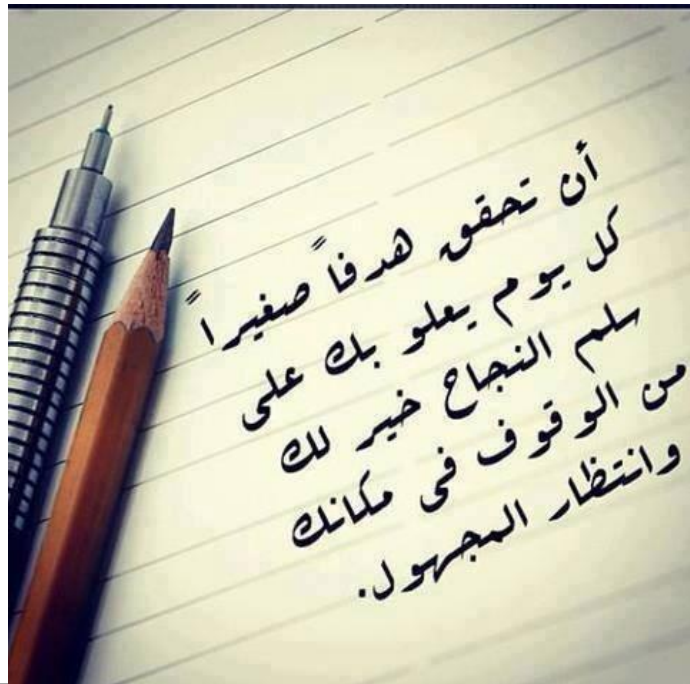
ومنه  $s_1 = 1$  ،  $s_2 = 3$  .

$$\text{إذا المساحة} = \int_1^3 (s^2 - 4s + 3) \, ds$$

$$M = \int_1^3 (s^2 - 4s + 3) \, ds$$

$$M = \left[ \frac{s^3}{3} - 2s^2 + 3s \right]_1^3 = \frac{27}{3} - 18 + 9 - \left( \frac{1}{3} - 2 + 3 \right)$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0 \text{ وحدة .}$$



الحالة الثالثة .

المساحة المحصورة بين اقتزان ومحور السينات ،

اي نجد نقاط تقاطع الاقتزان مع محور السينات عن

طرق جعل ق(س) = صفر ، ومنه نجد  $s_1$  و  $s_2$

$$M = \int_{s_1}^{s_2} (s^2 - 4s + 3) \, ds$$

**مثال :** اذا كان ق(س) =  $s^2 - 9$  ، فأحسب المساحة

المحصورة بين منحنى الاقتزان ومحور السينات .

الحل :

- أولاً نجد  $s_1$  و  $s_2$  من خلال جعل ق(س) = صفر

$s^2 - 9 = 0$  .  $s = 9$  ، اذا النقطة  $[3, -3]$

$$\text{إذا المساحة} = \int_{-3}^3 (s^2 - 9) \, ds$$

$$M = \int_{-3}^3 (s^2 - 9) \, ds = \left[ \frac{s^3}{3} - 9s \right]_{-3}^3$$

$$M = \left( \frac{27}{3} - 27 \right) - \left( \frac{-27}{3} - 27 \right) = (9 - 27) - (-9 - 27) = -18 - (-36) = 18$$

$$M = 18 - (-18) = 36 \text{ وحدة}$$



**تدريب :**

جد مساحة المنقطة المغلقة بين منحنيني الاقترانيين  
 $ق(س) = 2س - 2$  ،  $هـ(س) = 2س$  .

**تدريب :**

جد مساحة المنقطة المحصورة بين الاقترانيين  
 $ق(س) = 3س^2$  ،  $هـ(س) = 6س$  .



**كن عظيماً في  
 الفعل ، كما  
 كنت عظيماً  
 في الفكرة ..  
 | ويليم شكسبير |**

**الحالة الرابعة :**

المساحة المحصورة بين اقترانين  $ق(س)$  و  $هـ(س)$   
 نجد اولا نقطة تقاطع الاقترانين بجعل ....  
**ق(س) = هـ(س)** فتكون المساحة هي : -

$$م = \int_{س_1}^{س_2} ق(س) - هـ(س) . دس$$

أو

$$م = \int_{س_1}^{س_2} هـ(س) - ق(س) . دس$$

**مثال :** جد مساحة المنقطة المحصورة بين منحنيني

الاقترانيين  $ق(س) = 3س - 2$  ، و  $هـ(س) = 2س$  .  
 الحل :

أولا نساوي  $ق(س)$  مع  $هـ(س)$  ليجاد  $س_1$  و  $س_2$  .  
 $ق(س) = هـ(س)$

$$0 = 3س - 2س^2 + 2س$$

$$\text{إذا } 0 = (3س + 2س) (س - 1) \text{ ومنه } 3س = 1 - 2س$$

$$م = \int_{س_1}^{س_2} ق(س) - هـ(س) . دس$$

$$= \int_{س_1}^{س_2} 3س - 2س^2 + 2س . دس$$

$$= \left[ \frac{3س^2}{2} - \frac{2س^3}{3} + 2س \right]_{س_1}^{س_2}$$

$$= \left| \frac{32}{3} - \frac{32}{3} \right| = \text{وحدة}$$



الحل :

١-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = ٨$  (لأنه تحت محور السينات)

٢-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = ٤$  (خاصية المعكوس) لأن  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = ٤$

٣-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = ٣م + ٢م = ٥م$   $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس}$   
٤-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = ٤ - ٦ = -٢$  (خاصية المعكوس) إذا  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = ٢$

٤-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = ٤ + ٨ = ١٢$   
لأنه تحت محور السينات

٥-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس}$  (لاحظ هنا انه طلب مساحة)

$\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} = \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس}$

$١٨ = |٦| + ٤ + |٨|$  وحدة  
(لاحظ اننا اخذنا القيمة المطلقة لانها مساحة)



ايجاد التكامل من خلال الرسم .

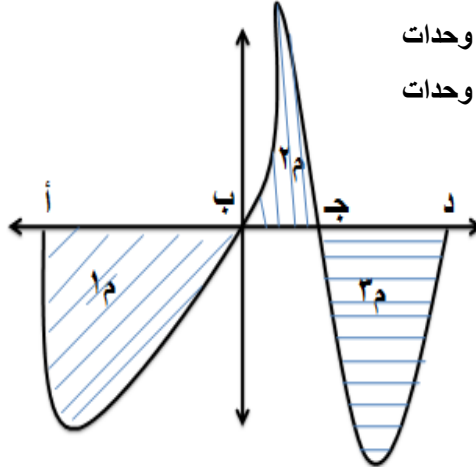
- دائما التكامل فوق محور السينات موجب .
- دائما التكامل تحت محور السينات سالب .

مثال : بالاعتماد على الشكل التالي جد ما يلي

حيث : 1م = 8 وحدات

2م = 4 وحدات

3م = 6 وحدات



١-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس}$

٢-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس}$

٣-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس}$

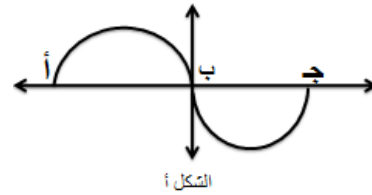
٤-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس}$

٥-  $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{رق(س)} \cdot \text{دس}$



مثال :

معتمداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) خلال الفترة [أ ، ج] ، فاذا علمت ان المساحة المخلقة خلال الفترة [أ ، ج] = ١٤ وحدة مربعة ، وكان  $\int_1^p \vec{C}(S) \cdot ds = 6$  فما قيمة  $\int_1^p \vec{C}(S) \cdot ds$  ؟



الحل :

$$\int_1^p + \int_p^B = \int_1^B$$

$$6 + \int_p^B = 14 \quad \text{ومنه}$$

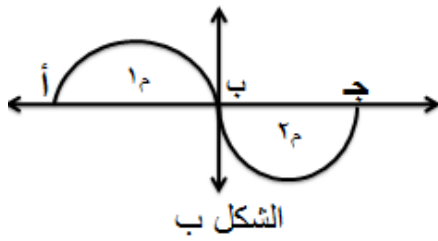
$$\int_p^B = 8 \quad (\text{لكن لاحظ ان } \int_p^B \text{ تحت محور السينات})$$

$$\int_1^p = 8 - \int_p^B$$

لأنها تحت محور السينات

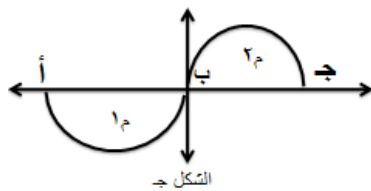
تدريب :

بالاعتماد على الشكل ب الذي يبين المنطقة المخلقة بين منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ج] ، فاذا علمت ان  $\int_1^p \vec{C}(S) \cdot ds = 9$  وحدات و  $\int_1^p \vec{C}(S) \cdot ds = 4$  وحدات ، فما قيمة  $\int_1^p \vec{C}(S) \cdot ds$  ؟



تدريب :

بالاعتماد على الشكل ج الذي يبين المنطقة المخلقة بين منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ج] ، فاذا علمت ان  $\int_1^p \vec{C}(S) \cdot ds = 5$  وحدات و  $\int_1^p \vec{C}(S) \cdot ds = 3$  وحدات ، فما قيمة المساحة خلال الفترة من [أ ، ج] .





### الاقتران اللوغاريتمي والأسّي الطبيعي

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي ...

$$\text{إذا كانت ص} = \text{لوس} ، \text{ فإن } \frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$$

وبشكل عام ...

$$\text{مشتقة ما بداخل اللوغاريتم} = \frac{دص}{دس} = \frac{د(ما بداخل اللوغاريتم)}{د(ما بداخل اللوغاريتم)}$$

مثال ...

$$\text{إذا كانت ص} = \text{لو} (٢س + ٤س - ٥) \text{ فإن } \frac{دص}{دس} :$$

$$\frac{4 + 4س}{5 - 4س + 2س^2} = \frac{د(مشتقة ما بداخل اللوغاريتم)}{د(ما بداخل اللوغاريتم)}$$

مشتقة الاقتران الأسّي ...

$$\text{إذا كانت ص} = \text{هـ}^س \text{ فإن } \frac{دص}{دس} = \text{هـ}^س$$

وبشكل عام ...

$$\text{إذا كانت ص} = \text{هـ}^{\text{ق}(س)} \text{ فإن } \frac{دص}{دس} = \text{ق}'(س) \times \text{هـ}^{\text{ق}(س)}$$

مثال ...

$$\text{إذا كانت ص} = \text{هـ}^{٣س + ٤س + ٥} ، \text{ جد } \frac{دص}{دس} . \text{ الحل ....}$$



$$\frac{دص}{دس} = \text{ق}'(س) \times \text{هـ}^{\text{ق}(س)}$$

$$= ١٢س^٢ \times \text{هـ}^{٣س + ٤س + ٥}$$

### تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي

$$\int \text{هـ}^س = \frac{\text{هـ}^س}{س} + \text{ج} \quad \text{الحالة الاولى اذا كان معامل س} = 1$$

$$\int \text{هـ}^{\frac{1}{س}} = \frac{\text{هـ}^{\frac{1}{س}}}{\frac{1}{س}} + \text{ج} \quad \text{الحالة الثانية اذا كان معامل س} \neq 1$$

مثال :

$$\int \text{هـ}^{\frac{1}{3}} = \frac{\text{هـ}^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \text{ج}$$

### تكامل الاقتران اللوغاريتمي

$$\int \frac{1}{س} = \ln |س| + \text{ج}$$

لاحظ ان اس (س) = 1

إذا كان مصعد النجم

معطلا ... إستخدام

@sarah\_awfi\_

السلم درجة درجة



## النمو والإضمحلال

القاعدة العامة للنمو والإضمحلال ،،،،

\* قاعدة:

قيمة الظاهرة المدروسة ص = ع (ن) هي:

ص = ع (ن) = ع (0) × هـ<sup>أ</sup> ، حيث: ع = ع (0) = القيمة الابتدائية.

هـ = العدد النيبيري ≈ ٢,٧.

ن = الزمن.

أ = ثابتاً عددياً يمثل ثابت التناسب.

ملحوظة مهمة...

⇐ إذا كان  $0 < \alpha$  ، فإن  $ص = ع(ن)$  تزداد بزيادة قيمة  $ن$  ، فتكون المعادلة  $ص = ع(ن)$  معادلة النمو ، ويكون معامل النمو.

⇐ إذا كان  $0 > \alpha$  ، فإن  $ص = ع(ن)$  تنقص بزيادة قيمة  $ن$  ، فتكون المعادلة  $ص = ع(ن)$  معادلة الاضمحلال ، ويكون معامل الاضمحلال.

**مثال:** اقترض احمد مبلغ 10000 دينار من البنك، فإذا حسب البنك ربح مقداره 4% سنويا جد جملة المبلغ الذي سيسدده أحمد بعد مرور 25 عاما؟.

الحل : أولاً يجب ان نجد قيمة...

$$4\% = \alpha$$

$$ع(0) = 10000 \text{ دينار}$$

$$ن = 25 \text{ عاما}$$

$$\text{جملة المبلغ} = ع(0) \times هـ^{\alpha \times ن}$$

$$= 10000 \times 2.7^{0.04 \times 25}$$

$$= 27000 = 2.7 \times 10000 \text{ دينار.}$$

**مثال:** يتناقص عقار بمرور الزمن وبصورة مستمرة وفق قانون الإضمحلال فإذا كان ثمنه الاصلي 80000 دينار فكم يصبح ثمنه بعد مرور 40 سنة؟

الحل :

$$ع(0) = 80000 \text{ دينار}$$

$$\alpha = 5\% \text{ ( لكنه لانه يتناقص فيكون ) } (-0.05)$$

$$ن = 40 \text{ عاما}$$

$$\text{ثمن العقار} = ع(0) \times هـ^{\alpha \times ن}$$

$$= 80000 \times 2.7^{-0.05 \times 40}$$

$$= 10973.9 \text{ دينار}$$

قال الخشب للمسمار : " لقد كسرتني "

فرد المسمار : " لو رأيت الضرب فوق رأسي لعذرتني "

ما أجمل أن يعذر بعضنا بعض

لأننا لا نعلم عن ظروف الآخرين الغائبة عن أعيننا



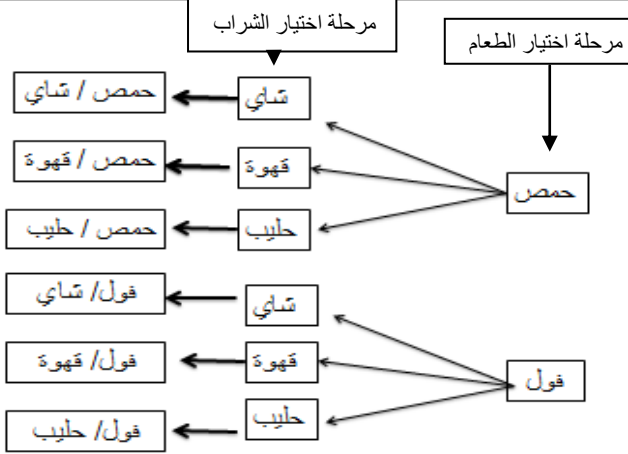


# أهلهمة

الوحدة الثانية

( الاحصاء والاحتمالات )

لا تحزن  
إذا منع الله  
عنا شيئاً تحببه  
فلو علمت كيف  
يدبر أمورك لذاب  
قلبك لحبه



**مثال** : نجحت في الثانوية العامة وأردت ان تكمل دراستك الجامعية فوجدت أمامك 8 جامعات وفي كل جامعة 5 كليات وفي كلية 3 تخصصات ترغب ان تكمل دراستك بها ، بكم طريقة يمكن لك ان تكمل دراستك الجامعية في التخصص الذي تحبه ؟

الحل :

- عدد طرق اختيار الجامعة = 8 .
  - عدد طرق اختيار الكلية = 5 .
  - عدد طرق اختيار التخصص = 3 .
- ومنه طرق اختيار العينة كاملة =  $1 \times 2 \times 3 \times 8 = 120$  طريقة .



إذا أردت أن  
تكون فاشلاً؛  
فحاول أن  
تُرْضِيَ جميع  
الناس!

إروين روميل

## الدرس الأول : مبدأ العد

\* القاعدة العامة لمبدأ العد هو ...

( عند إجراء تجربة تتكون من (ن) خطوة ، وكان عدد إجراء الخطوة الأولى  $1$  والخطوة الثانية  $2$  والخطوة الثالثة  $3$  ... الخ . فإن عدد طرق إجراء العملية كاملة هو  $1 \times 2 \times 3 \dots \dots$  ن ) .

**مثال** : دخل أحد الأشخاص مطعم لتناول وجبة الفطور ، وهذا المطعم يقدم وجبتان من الطعام ( حمص أو فول ) وثلاث أنواع من المشروبات ( شاي ، قهوة ، حليب ) . بكم طريقة يمكن لهذا الشخص ان يختار وجبة مكونه من وجبة طعام ومشروب واحد ؟ .

الحل :

لمعرفة عدد الطرق التي يمكن ان يختار بها هذا الشخص وجبة الفطور المكونة من طعام وشراب علينا ان نحدد كم نوعا من الطعام موجود وكم نوعا من الشراب موجود .

عدد طرق اختيار الطعام ... 2 .

عدد طرق اختيار الشراب ... 3 .

اذا عدد طرق اختيار الوجبة كاملة =  $1 \times 2 \times 3$

=  $3 \times 2 = 6$  طرق

لاحظ انه يمكن تمثيل ذلك عن طريق الشجرة بالشكل التالي ..



**مثال :** بكم طريقة يمكن ان يجلس بها اربع اشخاص على اربع مقاعد مرقمة .

**الحل :** لاحظ انه لا يمكن ان يجلس على المقعد اثنان لذلك يكون امام الشخص الاول 5 مقاعد والرجل الثاني 4 مقاعد والثالث 3 مقاعد والرابع 2 والخامس مقعد واحد فقط .

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ طريقة .}$$

- يطلق على العملية السابقة  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  مضروب العدد ويكتب 5! ويقرأ خمسة مضروب

$$n! = (n) \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 .$$

**مثال :** جد قيمة ما يلي :

$$-(2) - (10) - (3-4) \times 3!$$

**الحل :**

$$-(2) = 1 \times 2 = 2 - (10) = 1$$

$$-(3-4) \times 3! = 1 \times 2 \times 3 \times 1 = 6 = 6$$

**تدريب :** جد ما يلي .

$$- 4! - 6!$$

- بكم طريقة يمكن جلوس 3 اشخاص على 3 مقاعد

$$\text{مرقمة ؟} =$$

$$- (2 + 3)!$$

$$- (2 \div 6)!$$

$$- 2! \div 6!$$

**مثال :** اذا كان لديك ( 1 ، 2 ، 3 ، 4 ) كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من هذا الرقم .

أ- اذا سمح بتكرار الرقم .

ب- اذا لم يسمح بتكرار الرقم .

**الحل :**

أ- اذا سمح بتكرار الرقم ( اي الرقم الذي

نختاره أول مرة يمكن ان تختاره مرة

اخرى ) .

عدد مرات اختيار الرقم الاول  $\times$  عدد طرق اختيار الرقم الثاني

$$4 \times 4 = 16 \text{ طريقة .}$$

ب- اذا لم يسمح بتكرار الرقم ( اي الرقم الذي

نختاره اول مرة لا يمكن اختياره المرة

الثانية ) بمعنى عدد مرات الرقم الثاني تقل

عن الرقم الاول بمقدار 1 وهكذا ...

عدد مرات اختيار الرقم الاول  $\times$  عدد طرق اختيار الرقم الثاني

$$4 \times 3 = 12 \text{ طريقة .}$$







-  $96 = 4! - 1$  .  $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$

-  $96 = 24 - 1$  ( جمع 24 من الطرفين )

-  $24 + 96 = 1$

-  $120 = 1$  ( استخرجنا 120 على شكل

مضروب بالسؤال السابق وهو 5 )

-  $5 = 1!$  ومنه  $5 = 1$  .

-  $120 = (1 + 2)!$  .

-  $5 = (1 + 2)!$  ومنه

-  $5 = 1 + 2$  ( طرح 1 من الطرفين )

-  $4 = 2$  ومنه  $2 = 2$

**تدريب :** جد قيمة ن في كل من :

-  $720 = (3n)!$

-  $120 = (1 - 3n)!$

-  $72 = 3n!$

-  $24 = (1 - n)!$

-  $8 = 3 + n!$



**مثال :** جد قيمة ن في كل مما يلي .

-  $6 = 1 - n!$  -  $1 = n!$  -  $360 = 3n!$

-  $4 = 1 - n!$  -  $120 = (1 + 2n)!$

الحل :

-  $6 = 1 - n!$  ( نبحت عن الرقم مجموعة ارقام

متتالية حاصل ضربها 6 .. وهي 3 ، 2 ، 1

-  $3 = 1 \times 2 \times 3 = 3!$  ومنه  $3 = 1!$  اذا  $3 = 1$

-  $1 = 1 - n!$  هنا يوجد رقمان مضروبهما 1 وهما

( 1 ، 0 ) اذا  $1 = 0!$  ،  $1 = 1!$

ومنه  $n = (1 ، 0)$  .

-  $360 = 3n!$  ( بقسمة الطرفين على 3 )

-  $120 = 120!$  لمعرفة مضروب 120 نقسمة

120 على اعداد بدأ من العدد 1 كالتالي ..

نلاحظ انه في قسمة الشجرة

1	120
2	120
3	60
4	20
5	5
	1

ان الاعداد هي

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

وهذه تمثل 5!

-  $5 = 1!$

-  $5 = 1$



الدرس الثاني : التباديل والتوافيق .

• التباديل .

- عندما يتأهل لمباراة نهائية 3 أفرقة مثلا فريق الاردن ومصر وفلسطين ( لتحديد المركز الاول والثاني منهم ، فان الترتيب ( الاردن وفلسطين ) يختلف عن الترتيب ( فلسطين والاردن ) لان في الاول تعني ان الاردن هي المركز الاول وفلسطين هي في المركز الثاني ويمكن حل هذا السؤال بمبدأ العد

عدد طرق اختيار المركز الاول × عدد طرق اختيار المركز الثاني  
 $3 \times 2 = 6$  طرق ( لاحظ ان الترتيب مهم )

ويمكن حل هذا السؤال بالتباديل حيث تكتب :

ل ( 3 ، 2 ) وتقرأ تباديل 3 مأخوذه 2 في كل مرة وتحل وفق القانون التالي :

$$ل ( ن ، ر ) = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

حيث ر تمثل عدد الحدود

وفي السؤال السابق يحل بالتباديل ...

$$ل ( 3 ، 2 ) = \frac{3!}{(3 - 2)!}$$

$$ل ( 3 ، 2 ) = \frac{3!}{1!} = 6 \text{ طرق}$$

مثال : جد ما يلي :

$$ل ( 3 ، 9 ) ؛ ل ( 2 ، 8 ) ؛ ل ( 0 ، 9 ) ؛ ل ( 1 ، 3 ) ؛ ل ( 3 ، 3 )$$

الحل :

-1

$$ل ( 3 ، 9 ) = \frac{9!}{(9 - 3)!}$$

$$ل ( 3 ، 9 ) = \frac{9!}{(9 - 3)!}$$

$$ل ( 3 ، 9 ) = \frac{9!}{6!}$$

$$ل ( 3 ، 9 ) = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

$$ل ( 3 ، 9 ) = \frac{9 \times 8 \times 7}{1} = 504$$

$$ل ( 3 ، 9 ) = 9 \times 8 \times 7 = 504$$



سلم النجاح للمدرب



النجاح

التعاون مع الآخرين

الاعتماد علي النفس

الاعتماد علي الآخرين



-2

$$\frac{n!}{!(r-n)} = (r, n)$$

$$\frac{18!}{!(2-8)} = (2, 8)$$

$$\frac{18!}{16!} = (2, 8)$$

لاحظ ان  $18! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18$   
 $16! =$

$$\frac{18!}{16!} = (2, 8)$$

$$56 = 7 \times 8 = (2, 8)$$

-3

$$\frac{n!}{!(r-n)} = (r, n)$$

$$\frac{9!}{!(0-9)} = (0, 9)$$

$$1 = \frac{9!}{9!} = (0, 9)$$

قاعدة :

$$1 = (0, n)$$

-4

$$\frac{n!}{!(r-n)} = (r, n)$$

$$\frac{3!}{!(1-3)} = (1, 3)$$

$$3 = \frac{3!}{2!} = (1, 3)$$

قاعدة

$$n = (1, n)$$

-5

$$\frac{3!}{!(3-3)} = (3, 3)$$

$$\frac{3!}{!(3-3)} = (1, 3)$$

$$3! = \frac{3!}{1!} = (1, 3)$$

$$6 = 3! = (1, 3)$$

قاعدة

$$n! = (n, n)$$



مثال : جد قيمة المتغير فيما يلي .

1- ل ( 7 ، ر ) = 210 .

2- ل ( 6 ، ر ) = 60 .

3- ل ( ن ، 2 ) = 56 .

4- ل ( ن ، 3 ) = ل ( ن ، 2 ) .

الحل :

1- ل ( 7 ، ر ) = 210 .

في هذه الحالة هناك طريقتين للحل .

**الطريقة الأولى** وهي ان تكتب العدد 210 على شكل

حاصل ضرب اعداد متتالية اكبرها 7 ، ويكون قيمة ( ر ) مساويا لعدد هذه الاعداد اي ..

$210 = 5 \times 6 \times 7$  فتكون قيمة ( ر ) = 3

**الطريقة الثانية** وهي ان تقسم العدد 210 على

العدد 7 أولا ثم تقسم الناتج على 6 وهكذا الى

7	210	ان تصل الى الناتج 1 كالتالي ..
6	30	فيكون العدد 210 هو حاصل ضرب
5	6	الاعداد $5 \times 6 \times 7$
	1	فتكون قيمة ر = 3

3- ل ( ن ، 2 ) = 56 .

نبحث عن رقمين متتالين حاصل

ضربهما 56 حسب القانون  $n \times (n-1)$

$56 = 7 \times 8$  ( نأخذ أكبر رقم )

ومن ن = 8

4- ل ( ن ، 3 ) = ل ( ن ، 4 ) .

تذكر ان ل ( ن ، ر ) =  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)$

ل ( ن ، 3 ) =  $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{\text{عدد الحدود}}$

ل ( ن ، 4 ) =  $\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{\text{عدد الحدود}}$

ومنه ... ل ( ن ، 3 ) = ل ( ن ، 4 ) .

$\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{\cancel{4}} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{\cancel{4}}$

اختصار مع بعض

4 = ( ن - 3 ) ومنه ن = 7 وهو المطلوب .

## الخطوات الخمسة للنجاح



2- ل ( 6 ، ر ) =  $\frac{60}{2}$  ( تقسم الطرفين على 2 )

ل ( 6 ، ر ) = 30 .

نستخدم لإيجاد قيمة ر إحدى الطريقتين في الفرع الاول .

$30 = 5 \times 6$  ومنه ر = 2

( نؤكد من الحل باستخدام طريقة القسمة )



تدريبات :

1- ما عدد تباديل مجموعة من خمس عناصر مأخوذ ثلاث في كل مرة؟

2- بكم طريقة يمكن ان يجلس ثلاث اشخاص على ثلاث مقاعد مرقمة؟

3-  $3! = (n, 1) = 21$  ، جد قيمة n .

4-  $120 = (r, 6)$  فما قيمة r .

5- ل  $(n, n) = 120$  فيما قيمة n .

6-  $\frac{1}{3}! = (n, 3) = (n, 2)$  ، فجد قيمة n





• التوافيق .

- عند اختيار لجنة ثنائية مكونة من ثلاث افراد ( احمد ، محمد ، بشار ) ، فنلاحظ ان اختيار ( احمد، بشار ) هو نفسه الاختيار ( بشار ، احمد ) - الترتيب غير مهم في التوافيق .

قانون التوافيق :

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} \text{ أو } \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال : - - جد ما يلي :

$$\binom{8}{8} ؛ \binom{7}{0} ؛ \binom{5}{3} \times \binom{5}{2} ؛ \binom{6}{2} ؛ \binom{4}{2} ؛ \binom{4}{1}$$

الحل :

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{4}{1}^{-1}$$

$$\frac{4!}{1!(4-1)!} =$$

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

$$4 =$$

$$\text{قاعدة } \binom{n}{1} = n$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{4}{2}^{-2}$$

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} =$$

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 =$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{6}{2}^{-3}$$

$$\frac{6!}{2!(6-2)!} =$$

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15 = \frac{3!}{2!} =$$

سلم النجاح يبدأ بخطوة





$$\frac{n!}{!(r-n) \times r!} = \binom{n}{r} \quad -5$$

$$\frac{!7}{!(7-7) \times !0} =$$

$$1 = \frac{!7}{!7} =$$

$$1 = \binom{n}{0} \text{ قاعدة}$$

$$\frac{n!}{!(r-n) \times r!} = \binom{n}{r} \quad -6$$

$$\frac{!8}{!(8-8) \times !8} =$$

$$1 = \frac{!8}{!8} = \frac{!8}{!0 \times !8} =$$

$$1 = \binom{n}{n} \text{ قاعدة}$$

$$\frac{n!}{!(r-n) \times r!} = \binom{n}{r} \quad -4$$

$$\frac{!5}{!(5-0) \times !2} =$$

$$\frac{!5}{!(3-0) \times !3} =$$

$$\frac{!5}{!2 \times !3} = \frac{!5}{!2 \times !3} =$$

$$\frac{!5}{!2 \times !3} = \frac{!5}{!2 \times !3} =$$

$$10 = \frac{!5}{!2} =$$

$$10 = \frac{!5}{!2} =$$

$$100 = 10 \times 10 = \binom{5}{3} \times \binom{5}{2}$$

لاحظ أن ...

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

أي أنه

$$\binom{n}{r-n} = \binom{n}{r} \text{ أو } \binom{n}{r} = \binom{n}{r}$$

وسيجاد شرح ذلك في حينه

$$\text{قاعدة: } n = \binom{n}{1-n}$$

$$\text{مثال: } 9 = \binom{9}{8}$$



تدريب .

جد ما يلي :

-1

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

( ماذا تلاحظ بعد عملية الحل )

- لاحظ ان  $9 = 2 + 7$  أي  $9 = 2 + 7$

وبصورة عامة :-

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \text{ أو } \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$$

مثال : جد قيمة  $s$  في كل من :

$$-1 \quad \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ s \end{pmatrix}$$

الحل :

(في هذه الحالة سيكون هناك قيمتان لـ  $s$ )

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \leftarrow \text{القيمة الاولى : } s = 5 \text{ حسب قانون}$$

القيمة الثانية:  $s + 5 = 12$   
ومنه  $s = 7$  حسب قانون

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$$

تذكر انه في حال طلب قيمة  $r$  في مثل هذه الاسئلة يكون لها قيمتان دائما ، وهما أما

$$s = r \text{ أو } s + r = n$$

$$-2 \quad \begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$$

الحل :

$$\text{قيمة } n = r_1 + r_2$$

$$5 + 3 =$$

$$8 =$$

$$-3 \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

الحل :

القيمة الاولى :  $r_1 = 2$

$$6 = 2s \text{ ومنه } s = 3$$

القيمة الثانية:  $n = r_1 + r_2$

$$8 = 6 + 2s \text{ ومنه } s = 1$$







$$28 = \binom{n}{2} - 5$$

الحل

$$\text{تذكر ان } \frac{\binom{n}{2}}{!2} = \binom{n}{2} \quad (\text{حسب قانون التوافيق})$$

$$\frac{\binom{n}{2}}{!2} = 28 \quad (\text{ضرب تبادلي})$$

$$!2 \times 28 = \binom{n}{2}$$

$$\binom{n}{2} = 56 \quad (\text{عديدين متتاليين حاصل ضربهما 56})$$

$$n \times (n-1) = 56 \quad \text{ومنه } n = 8$$

$$!n - 4 = \binom{4}{1} + \binom{2,5}{1}$$

$$!n - 4 = 4 \times 5 + \frac{!4}{!3 \times !1} =$$

$$!n - 4 = 20 + 4 = 24$$

$$!n = 24$$

$$!n = 24 \quad \text{ومنه } n = 4$$

٦- إذا كانت  $\binom{n}{r} = 210$ ، وكان  $\binom{n}{r} = 35$  فجد قيمة  $(n, r)$

الحل:

$$\frac{\binom{n}{r}}{r!} = \binom{n}{r} \quad (\text{قانون التوافيق})$$

من السؤال:  $\binom{n}{r} = 35$ ؛ ول  $\binom{n}{r} = 210$  إذا ...

$$\frac{210}{r!} = 35 \quad (\text{ضرب تبادلي})$$

$$210 = !r \quad (\text{قسمة الطرفين على 35})$$

$$!r = 210 \quad \text{ومنه } r = 3$$

$$\text{ومنه } \binom{n}{3} = 210 \quad (\text{البحث عن 3 رقم متتالية حاصل ضربها 210، } 5 \times 6 \times 7 = 210 \text{، ومنه } n = 7)$$

يمكن حل التبديل مباشرة بشكل ذهني عن طريق ضرب  $n \times n-1$  للوصول الى  $(r)$   
فمثلا هنال  $(2, 5)$ ،  $n = 5$ ،  $r = 2$ ، اذا نضرب  $n \times n-1 = 5 \times 4 = 20$  وتكون قيمة التبديل .

### تحديد أوقات الاستراحة

كل من يتعب له الحق أن يستريح بل أن الاستراحة هي واجب حتى يستطيع الطالب أن يتابع مهماته بنشاط وكفاءة وبعض الطلاب ينسون حقهم في الاستراحة فيرتكبون أحد الأخطاء التالية :-

1 - بعض الطلاب يذكرون على حساب علاقاتهم الاجتماعية فلا أصدقاء لهم ولا زيارات اجتماعية يقومون بها وهذا قد يسبب لهم مشكلات في التكيف الاجتماعي مستقبلا

2 - بعض الطلاب يذكرون لمدة خمس ساعات وهذا إرهاق ويمكن أن تتخذ الاستراحة أشكالاً متنوعة منها :-

أ - إن تناول وجبة الطعام وهو شكل من أشكال الاستراحة من المذاكرة

ب - إن أداء الصلاة هو أيضا استراحة من المذاكرة

ج - إن الاستحمام هو أيضا استراحة من المذاكرة

د - إن الاستماع الى كل ما هو مفيد سواء من الإذاعة أو عن طريق التلفاز يعد من أشكال الاستراحة

هـ - إن ممارسة الرياضة هي أيضا استراحة من



8- مجموعة مكونة من 8 معلمين و 4 طلاب ، ما عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنة ثلاثية يبحث تتكون من معلم واحد على الاقل ؟.

الحل :

عدد الطرق الممكنة لتكوين اللجنة ...

معلم واحد + معلمان + 3 معلمين

$$\binom{4}{1} \times \binom{8}{3} + \binom{4}{2} \times \binom{8}{2} + \binom{4}{3} \times \binom{8}{1}$$

لاحظ انه دائما 1 + 2 = عدد اللجنة المطلوبة

لاحظ عزيز الطالب انه عدد اختيار معلم واحد يتبقى لدينا 2 لاكمال اللجنة لذا نكملهما من الطلبة .

$$(1 \times 56) + (4 \times 28) + (6 \times 8)$$

$$216 = 56 + 112 + 48 \text{ طريقة}$$

7- بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من 3 طلاب على الاقل من بين 5 طلاب ؟.

الحل : نلاحظ في السؤال كلمة على الاقل . وهنا نبدأ بالزيادة لحين الوصول الى قيمة ن . أي سنجد اولاً عدد الطرق الممكنة لـ

أ- لجنة ثلاثة .

ب- لجنة رباعية .

ت- لجنة خماسية .

ثم نجمع الناتج في ( أ + ب + ت ) لنحصل على عدد الطرق الممكنة لتكوين لجنة من 3 طلاب على الاقل من بين 5 طلاب .

$$\boxed{\text{اختيار لجنة ثلاثية}} + \boxed{\text{اختيار لجنة رباعية}} + \boxed{\text{اختيار لجنة خماسية}}$$

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

$$10 + 5 + 1$$

عدد الطرق الممكنة لتكوين اللجنة = 16 طريقة

## أسباب عادات الدراسة الخاطئة

### 1- عدم معرفة طرق الدراسة الصحيحة:

لا يعرف كثير من الطلاب كيف يدرسون، كونهم لم يتعلموا مهارات الدراسة الصحيحة في المدرسة أو في المنزل من قبل، أو أنها علمت لهم لكنهم لم يستخدموها أو لا توجد لديهم الدافعية الكافية لاستخدامها، أو لأن عادات الدراسة الخاطئة قد تحكمت بهم نتيجة ممارستها من قبل.



تدريبات :

- مجموعة مكونة من 4 معلمين و 7 طلاب ، ما عدد الطرق الممكنة لتكوين لجنة رباعية بحيث تتكون اللجنة من طالب معلمان على الأكثر ؟ .

- بكم طريقة يمكن تشكيل مجلس الطلبة من 4 طلاب و 3 طالبات في احدى المدراس من بين 10 طلاب و طالبات ؟ .

$$- \text{ اذا كان ل } ( 3 , ن ) = \binom{ن}{4} \text{ فما قيمة ن}$$

- اذا كانت ل ( ن ، 3 ) = ل ( ن ، 2 ) فيما قيمة الثابت ( ن ) .

9- مجموعة مكونة من 4 معلمين و 6 طلاب ، فاذا طلب منك اختيار مجموعة من 4 اشخاص يبحث يكون رئيس اللجنة ونائبة من المعلمين والباقي من الطلبة ، ما عدد الطرق المتاحة لديك لتكوين هذه اللجنة ؟ .

الحل :

$$\text{عدد المعلمين} = 4 \quad \text{عدد الطلبة} = 6 \quad \text{اللجنة} = 4$$

- لكن السؤال حدد لك ان رئيس اللجنة ونائبة من المعلمين ( لاحظ الترتيب مهم هنا ) لذلك عدد طرق اختيار الرئيس والنائب يكون ل ( 4 ، 2 ) . والباقي من الطلبة اي

$$\text{يكون عدد طرق اختيار الباقيين} \binom{6}{2}$$

طرق اختيار الرئيس والنائب  $\times$  طرق اختيار الباقي

$$= \binom{6}{2} \times ( 4 ، 2 )$$

$$= 15 \times 12 =$$

$$= 180 \text{ طريقة}$$

الجميع يفكر في تغيير العالم, ولكن لا أحد يفكر في تغيير نفسه



ليو تولستوي



الدرس الثالث : المتغير العشوائي وتوزيع ذو الحدين

مثال : إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول التالي ...

س	0	1	2	3
ل(س)	0.2	ج	0.3	0.1

فجد قيمة (ج) ؟ .

الحل : تذكر ان مجموع ل(س) = 1 .

$$1 = 0.1 + 0.3 + ج + 0.2$$

$$0.6 + ج = 1 \implies ج = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$ج = 0.4$$

( ما عليك هنا سوى ان تطرح 10 من 6 والنتاج اجلعه جزء من عشرة ) .

مثال : إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول التالي ...

س	0	1	2	3
ل(س)	أ2	أ	أ3	أ4

جد قيمة الثابت (أ) .

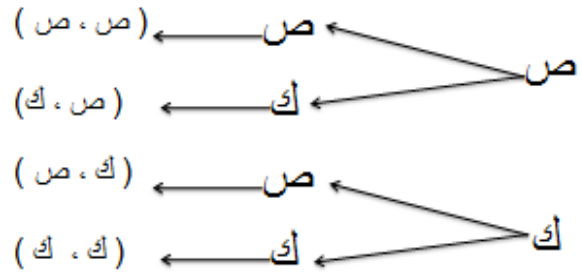
الحل :  $\sum ل(س) = 1$

$$1 = أ2 + أ + أ3 + أ4 \implies 1 = أ10 \implies أ = 1$$

لا تيأس إذا رجعت  
خطوة للوراء  
فلا تنس أن السهم  
يحتاج أن ترجعه  
للوراء لينطلق بقوة  
إلى الأمام

- عند رمي قطعة نقد مرتين فإن الفضاء العيني والذي يرمز له بالرمز  $\Omega$  يكون ...

الرمية الأولى الرمية الثانية نواتج التجربة



$$\Omega = \{ (ص، ص) (ص، ك) (ك، ص) (ك، ك) \}$$

فمثلا لو سألتك كم مرة ظهرت صورة ؟ لقت مرة ظهرت في الرمتين ومرتان ظهرت في رمية واحدة .

احتمال الحادث = عدد مرات ظهور الحادث / عدد الفضاء العيني  
ويمكن كتابة ذلك بالجدول التالي :

س	0	1	2
ل(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

حيث س تمثل عدد مرات الظهور فمثلا عندما لم

تظهر الصورة نهائيا كان احتمالها  $\frac{1}{4}$  وعند ظهورها في المرتان كان احتمالها  $\frac{2}{4}$  وعند ظهورها في رمية واحد كان الاحتمال  $\frac{1}{4}$

وهذا يسمى جدول التوزيع الاحتمال ، حيث ان مجموع ل(س) = واحد صحيح .

مثال

إذا دل المتغير س على عدد الاطفال الإناث من بين 3 اطفال ، أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير س .

الحل : أولاً نكتب الفضاء العيني ...

$\Omega = \{ (و، و، و) ، (و، و، ب) ، (و، ب، ب) ، (ب، ب، ب) ، (و، ب، و) ، (و، و، ب) ، (ب، و، و) ، (ب، و، ب) \}$

ثانياً نكتب قيم (س) ودائماً لقيم س نبدأ من الصفر لغاية عدد مرات التجربة ، وهنا يكون قيم س هي ..

(0 ، 1 ، 2 ، 3) حيث ...

0 تعني انه لا يوجد ضمن المواليد الثلاثة انثى .

1 يعني انه يوجد طفل واحد انثى ضمن المواليد الثلاثة .

2 تعني انه يوجد طفلان انثى ضمن المواليد الثلاثة .

3 تعني ان جميع المواليد إناث .

ثانياً : نكتب جدول التوزيع الاحتمالي ...

س	0	1	2	3
P(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

قول يارب وانت تطمن  
قول يارب وانت هاتجج  
قول يارب وانت هاتوصل



بس انت قول يارب كل مشاكلك هاتحل

معييار النجاح والفشل

MaryEllen Tribby

الناجحون

الفاشلون

<p>العمل مع الفريق</p> <p>الإمتان</p> <p>إعطاء الاخرين الفضل في النجاح</p> <p>القراءة المستمرة</p> <p>التحدث عن الأفكار</p> <p>مشاركة المعلومات</p> <p>نشر الفرحه</p> <p>تقدير التغيير</p>	<p>المسامحة</p> <p>تحمل مسؤولية الأخطاء</p> <p>التنظيم</p> <p>السعي لنجاح الاخرين</p> <p>إعداد قائمة مهام</p> <p>تحديد أهداف وتطوير الذات</p> <p>التعلم المستمر</p> <p>قيادة تحويلية</p> <p>عن طريق تعاون الفريق في إنجاز العمل</p>	<p>الشعور بالإستحقاق</p> <p>أخذ الفضل على نجاح الفريق</p> <p>مهاذمة</p> <p>الانفجار بكثرة الخوف من التغيير</p> <p>كثرة النقد</p> <p>حمل الضغينة والحقد</p> <p>لوم الاخرين على الفشل</p> <p>إدعاء التنظيم</p> <p>إن بالعكس في الواقع</p> <p>معرفة كل شيء</p> <p>قيادة تبادلية</p> <p>عن طريق الكواب والظلم</p> <p>تمني الفشل للاخرين</p> <p>عدم معرفة ماذا سيحدثون</p> <p>عدم تحديد الأهداف</p>
--	---	--



2- ل (س > 1) تعني ان س = صفرا . اي المطلوب هو ل (س = 0) =

$$= \binom{n}{r} (a)^r (1-a)^{n-r}$$

$$= \binom{5}{0} (0.3)^0 (0.7)^{5-0}$$

$$= \frac{1 \times (0.3)^0 (0.7)^5}{1} = (0.7)^5$$

تذكر أن  $\binom{n}{1} = 1$

قانون توزيع ذو الحدين

$$L (S = r) = \binom{n}{r} a^r (1-a)^{n-r}$$

حيث :

ن ← عدد مرات إجراء التجربة .  
ر ← احتمال نجاح التجربة كاملة .  
أ ← احتمال نجاح التجربة في مرة واحدة

مثال اذا كان س متغيرا عشوائيا ذا حدين معاملاه ن = 5

، أ = 0.3 ، فجد كلا من ...

أ- ل (س = 2) . ب- ل (س > 1) .

الحل :-

1- ل (س = 2)

( لحل مثل هذه الاسئلة عليك أولا ان تحدد عدد مرات

اجراء التجربة ( ن ) ، واحتمال نجاح التجربة ( ر ) ،

وقيمة ( 1 - أ ) وهنا ما عليك سوى ان تكمل للعشرة

الصحيح وتجعل الناتج جزءا من عشرة ، فمثلا هنا في

هذا السؤال ( 1 - 0.3 ) = نطرح 10 - 3 فيكون الناتج

7 ، ثم نجعل الناتج جزءا من عشرة أي 0.7 ، وقيمة

( أ ) والتي تكون على صيغة ل (س = ..... ) .

اذا من معيطات السؤال فإن ل (س = 2) =

$$= \binom{n}{r} (a)^r (1-a)^{n-r}$$

$$= \binom{5}{2} (0.3)^2 (0.7)^{5-2}$$

$$= \frac{10 \times (0.09) (0.343)}{12}$$

$$= 0.4087 = 0.343 \times 0.09 \times 10 =$$



4- إصابة الهدف مرة واحد على الأكثر تعني انه اما يصيب مرة واحدة او لا يصيب اي س = 1 ؛ س = 0  
ل (س = 1) + ل (س = 0) =

$$\left\{ \binom{n}{r} (1-p)^r p^{n-r} \right\} + \left\{ \binom{n}{r} (1-p)^r p^{n-r} \right\} =$$

$$\left\{ \binom{5}{0} (0.3)^0 (0.7)^5 \right\} + \left\{ \binom{5}{1} (0.3)^1 (0.7)^4 \right\} =$$

$$\left\{ \binom{5}{0} (0.3)^0 (0.7)^5 \right\} + \left\{ \binom{5}{1} (0.3)^1 (0.7)^4 \right\} =$$

$$(0.00081 \times 0.7 \times 5) + (0.00243) =$$

ر- إصابة الهدف مرة واحدة على اقل من تعني اما يصيب الهدف مرة واحدة او مرتين او ثلاثة او اربعة او خمسة .  
بمعنى ...

ل (س=1) + ل (س=2) + ل (س=3) + ل (س=4) + ل (س=5) =  
أو يمكن التعبير عنها بصورة اخرة حيث تلاحظ انه من ل (س=1) لغاية ل (س=5) هي قيم س كاملة باستثناء الصفر ، لذا فل (س ≤ 1) = 1 - ل (س = 0)  
0.00243 - 1 =

النجاح ليس عدم  
فعل الأخطاء



النجاح هو عدم  
تكرار الأخطاء

مثال : اطلق صياد 5 طلقات تجاه سربا من العصافير فاذا كان احتمال ان يصيب 0.7 ، فجد ما يلي :  
1- قيم (س) .  
2- إصابة الهدف 3 مرات .  
3- عدم إصابة الهدف .  
4- إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر .  
5- إصابة الهدف مرة واحدة على الاقل .

الحل :

نحدد (ن = 5 " مجموع الطلقات التي اطلقها الصياد " )  
(أ = 0.7) . (أ - 1 = 0.7 - 1 = -0.3)

1- قيم س = (0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5) . تذكر ان قيم س تأخذ من الصفر لغاية ن .

2- إصابة الهدف 3 مرات . اي ل (س = 3) =

$$\binom{n}{r} (1-p)^r p^{n-r} =$$

$$\binom{5}{3} (0.3)^3 (0.7)^2 =$$

$$\frac{\binom{5}{3} (0.3)^3 (0.7)^2}{1} =$$

$$0.9 \times 0.343 \times 20 =$$

3- عدم إصابة الهدف تعني ل (س = 0) =

$$\binom{n}{r} (1-p)^r p^{n-r} =$$

$$\binom{5}{0} (0.3)^0 (0.7)^5 =$$

$$\frac{\binom{5}{0} (0.3)^0 (0.7)^5}{1} =$$

$$0.00243 = \binom{5}{0} (0.3)^0 =$$



الدرس الرابع : العلامة المعياريّة

العلامة الأصليّة - الوسط الحسابي  
العلامة المعياريّة (زس) =  $\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{العلامة الأصليّة - الوسط الحسابي}}$

وبالرموز (زس) =  $\frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$

مثال : اذا كان الوسط الحسابي لأحد الصفوف في مبحث الرياضيات 60 ، والانحراف المعياري 4 فما العلامة المعياريّة لطالب حصل على علامة 48 ؟

الحل :

$$z_s = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$z_{48} = \frac{60 - 48}{4}$$

$$z_{48} = \frac{60 - 48}{4}$$

$$z_{48} = \frac{12}{4} = 3$$

مثال : في توزيع تكراري كانت العلامة الخام 78 تقابل العلامة المعياريّة 4 وكان الوسط الحسابي 60 فجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل :

$$z_s = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$3 = \frac{60 - 78}{\text{ع}} \quad (\text{ضرب تبادلي})$$

$$3\text{ع} = 60 - 78$$

$$3\text{ع} = 18 \quad (\text{بقسمة الطرفين على 3})$$

$$\text{ع} = 6$$

مثال : اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة قيم = 80 والانحراف المعياري = 4 فجد القيمة التي تنحرف انحرافين تحت الوسط الحسابي ؟

الحل :

بما ان الانحرافين تحت الوسط اذا تكون العلامة المعياريّة -2 ومنه ...

$$z_s = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$-2 = \frac{\text{س} - 80}{4} \quad (\text{ضرب تبادلي})$$

$$-8 = \text{س} - 80 \quad (\text{جمع 80 للطرفين})$$

$$\text{س} = 72 \quad (\text{ومنه العلامة الخام التي تنحرف تحت الوسط انحرافين = 72})$$







**مثال:** ثلاث طلاب علاماتهم المعيارية 1.5 ، 1- ، 2- ، وكان الوسط الحسابي لجميع العلامات 70 والفرق بين علامة الطالب الاول والثاني 10 فما العلامات الفعلية للطلبة الثلاثة؟

الحل : معطيات السؤال :

علامة الطالب الاول ( أ ) المعيارية = 1.5

علامة الطالب الثاني ( ب ) المعيارية = 1-

علامة الطالب الثالث ( ج ) المعيارية = 2-

الفرق بين أ وب = 10 ( أ - ب = 10 ) .

الوسط الحسابي لجميع الطلبة = 70

نجد اولا الانحراف المعياري (ع) من خلال (أ-ب = 10)

الطريقة الأولى للحل :

$$z_1 = \frac{س - س}{ع}$$

$$1.5 = \frac{70 - أ}{ع} \quad (\text{ضرب تبديلي})$$

$$1.5ع = 70 - أ \quad \text{م ١}$$

$$z_2 = \frac{س - س}{ع}$$

$$1- = \frac{70 - ب}{ع} \quad (\text{ضرب تبديلي})$$

$$1-ع = 70 - ب \quad \text{م ٢}$$

(بطرح المعادلة ١ من ٢)

$$70 - أ = 1.5ع$$

$$70 - ب = 1-ع$$

$$2.5ع = أ - ب$$

( لكن من السؤال ( أ - ب = 10 ) )

$$2.5ع = 10 \quad (\text{بقسمة الطرفين على 2.5})$$

$$ع = 4$$

بالتعويض في المعادلات لمعرفة العلامات الحقيقة للطلبة  
أكمل الحل ...

**مثال:** في امتحان رياضيات حصل طالبان على 70 و 84 على التوالي ، وكانت علامتهما المعيارية 1 ، 3 ، فجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لذلك الامتحان؟

الحل : نلاحظ ان العلامة 70 علامتها المعيارية = 1 .

والعلامة 84 علامتها المعيارية = 3 .

ومنه ...

$$z_1 = \frac{س - 70}{ع} \quad (\text{ضرب تبديلي})$$

$$ع = 70 - س \quad (\text{المعادلة الاولى})$$

$$z_2 = \frac{س - 84}{ع} \quad (\text{ضرب تبديلي})$$

$$ع = 84 - س \quad (\text{المعادلة الثانية})$$

بطرح المعادلة الاولى من المعادلة الثانية ...

$$ع - 70 = ع$$

$$ع - 84 = ع$$

$$-14 = ع - ع$$

اذا ع = 7 . ( الانحراف المعياري ) .

ولايجاد قيمة الوسط الحسابي نعوض في المعادلة 1 او 2

$$ع = 70 - س \quad \text{ومنه الوسط الحسابي} = 63$$



لقد قررت أن تكون عظيماً وعلى  
العالم أن يفسح لك الطريق.



الطريقة الثانية .. وهي على قانون ...

$$\frac{\text{علامة الطالب الأول (أ) - علامة الطالب الثاني (ب)}}{\text{العلامة المعيارية للطالب الأول (أ) - العلامة المعيارية للطالب الثاني (ب)}} = \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{10 - \text{ب}}{2.5 - \text{زب}} = \epsilon$$

ومنه علامات الطلبة الثلاثة هي ...

$$76 = \frac{70 - \text{س}}{\epsilon} = (1.5) = \text{علامة أ}$$

$$66 = \frac{70 - \text{س}}{\epsilon} = (1-) = \text{علامة ب}$$

$$62 = \frac{70 - \text{س}}{\epsilon} = (2-) = \text{علامة ج}$$

**تدريب :** في توزيع تكراري كانت العلامة الخام 66 تقابل العلامة المعيارية 4 وكان الوسط الحسابي 54 فجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟ .





## الدرس الخامس : التوزيع الطبيعي .

3- اذا كانت ل (  $z \leq a$  ) في هذه الحالة نستخرج القيمة من الجدول ثم نطرحها من الواحد الصحيح ، وبصيغة رياضية تكون ل (  $z \leq a$  ) = 1 - ل (  $z \geq a$  )

**مثال :** جد ل (  $z \leq 2$  )

الحل : اولاً نلاحظ ان قيمة س اكبر من او يساوي 2 اي نستخرج قيمة 2 من الجدول ثم نطرحها من الواحد صحيح كالتالي : ل (  $z \leq 2$  ) = 1 - ل (  $z \geq 2$  )

$0.9772 - 1 =$   
 $0.0228 =$

طريقة طرح الواحد صحيح من الأجزاء

اولاً نكمل الحد الاول من اليمين للعشرة تم الاعداد الباقية للحد ٩

مثال ١ - ٩٧٧٢ .

العدد من اليمين ٢ نكملة للحد ١٠  
الاعداد المتبقية نكملها للحد ٩

٩٧٧٢  
↓ ↓ ↓ ↓  
٠.٠٢٢٨

لاحظ اننا اكملنا ٢ للعشرة فأصبحت ٨  
والاعداد الباقية اكملناها للحد ٩

4- اذا كانت ل (  $z \geq a$  ) هنا نستخرج قيمة أ من الجدول ثم نطرحها من الواحد الصحيح . اي انها تكون ..

ل (  $z \geq a$  ) = 1 - ل (  $z \leq a$  ) .

**مثال :** جد ل (  $z \geq 0.45$  )

الحل : اولاً نستخرج قيمة (0.45) من الجدول ، وقيمتها = 0.5160 ، ثم بعد ذلك نطرحها من الواحد الصحيح ...

$0.2946 = 0.7054 - 1$

ل (  $z \geq 0.45$  ) = 1 - ل (  $z \leq 0.45$  )

$0.7054 - 1 =$   
 $0.2946 =$

التوزيع الطبيعي هو التوزيع الذي وسطه الحسابي = صفر وانحرافه المعياري = 1 .

قواعد عامه ( يجب ان تحفظ ) .

1- اذا كانت ل (  $z \geq a$  ) فاننا نستخرجها من الجدول مباشرة .

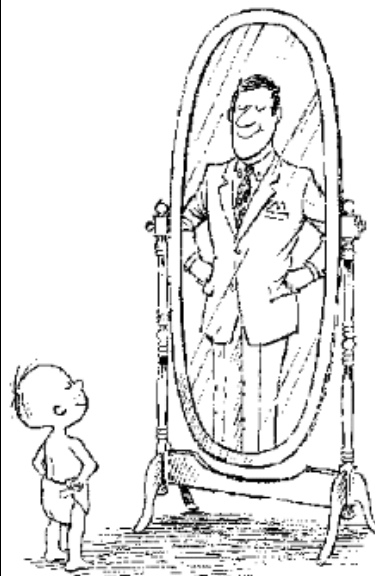
**مثال :** جد ل (  $z \geq 0.33$  ) .

الحل : هنا نستخرج القيمة من جدول التوزيع الطبيعي مباشرة فتكون قيمة ل (  $z \geq 0.33$  ) = 0.6293 .

2- اذا كانت ل (  $z \leq a$  ) فاننا نقوم بعكس اشارة أ مع عكس اشارة المقارنة اي تصبح ل (  $z \geq a$  ) وهنا تكون مثل القاعدة الأولى اي نستخرجها من الجدول مباشرة .

**مثال :** جد ل (  $z \leq 0.33$  ) .

الحل : اولاً نقوم بعكس اشارة ( أ ) وعكس اشارة المقارنة فتصبح ل (  $z \geq 0.33$  ) " من الجدول مباشرة " فتكون ل (  $z \geq 0.33$  ) = 0.6293 .



الصورة الإيجابية الذاتية  
مطلوبة، ولكن إلى أي  
مدى تفيدك هذه الصورة  
الإيجابية إذا كنت تفتقد  
المهارات المطلوبة  
للوصول إلى النجاح؟  
طور مهاراتك  
وتعرف على أخطائك  
عندها تستطيع  
أن تفكر

إيجابية



تدريب : جد كلا من ...

1- ل (  $0.34 \geq z$  ) .

2- ل (  $1.32 \leq z$  ) .

3- ل (  $2 \geq z \geq 1.2$  ) .

4- ل (  $3 \geq z \geq 2.4$  ) .

5- اذا كانت ل (  $-أ \leq z \leq ب$  ) حيث  $ب < أ$  دائما ، في هذه الحالة نجعل ل (  $z \geq ب$  ) وهنا من الجدول مباشرة ، ثم ل (  $z - \geq أ$  ) وهنا نجد قيمة أ من الجدول ثم نطرحها من الجدول ویمعنى اخر ...

$$ل (-أ \leq z \leq ب) = ل (z \geq ب) - (1 - ل (z \geq ب))$$

مثال : جد ل (  $-0.4 \leq z \leq 1.8$  ) .

$$\text{الحل : ل} (-0.4 \leq z \leq 1.8) =$$

$$ل (z \geq 1.8) \dots \text{ من الجدول مباشرة} = 0.9641$$

ل (  $z \geq -0.4$  ) ... نستخرج قيمة 0.4 من الجدول ثم

$$\text{نطرحها من الواحد الصحيح} (1 - 0.6554 = 0.3446)$$

ثم نطرح جواب ل (  $z \geq 1.8$  ) من جواب ل (  $z \geq -0.4$  )

$$ل (-0.4 \leq z \leq 1.8) = ل (z \geq 1.8) - (1 - ل (z \geq -0.4))$$

$$(0.9641) - (1 - 0.3446) =$$

$$0.9641 - 0.3446 =$$

$$0.6195 =$$

أنا  
إيجابي





**مثال** : تقدم لامتحان الرياضيات للثانوية العامة 5000 طالب وطالبة فاذا كانت نتائجهم تتخذ توزيع طبيعي وسطه الحسابي 70 وانحرافه المعياري 5 ، فاذا كانت علامة النجاح في الامتحان 60 واختير طالب عشوائيا منهم ، فجد ..

- 1- ان يكون الطالب من الناجحين .
- 2- ان يكون الطالب من الراسبين .
- 3- عدد الطلبة الناجحين .

الحل :

1- احتمال ان يكون الطالب المختار من الناجحين ....  
لاحظ من السؤال ان علامة النجاح هي 60 ، وكل طالب حصل على 60 فأعلى فهو من الناجحين ، ومنه السؤال يكون بالصيغة التالية :  $J \leq 60$  .  
 نجد العلامة المعيارية للعلامة 60 ...

$$Z = \frac{60 - 70}{5} = -2$$

ومنه  $J \leq 60$  " من الجدول مباشرة "  $0.9772 =$

2- احتمال ان يكون من الراسبين تعني ان  $60 \geq$

$$0.0228 = 0.9772 - 1 = (J \geq 60)$$

3- عدد الطلبة الناجحين ، دائما اذا طلب السؤال عدد فما عليك الا ان تأخذ أولا الاحتمال ثم تضرب الناتج بالعدد الكلي ... وهنا أخذنا احتمال الناجحين في الفرع الاول من السؤال وهو 0.9772 ... اذا

عدد الناجحين = العدد الكلي  $\times$  الاحتمال

$$= 5000 \times 0.9772 = 4886 \text{ طالب وطالبة}$$

**مثال** : اذا كان س متغير عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 65 وانحرافه المعياري 6 ، فجد  
1-  $J \leq 68$  (س)  $J \leq 55$  .

الحل :

1-  $J \leq 68$  (س) ... اولا نجد قيمة العلامة المعيارية لنستطيع ايجاد الاحتمال وذلك عن طريق قانون العلامة المعيارية كالتالي :

$$Z = \frac{68 - 65}{6} = 0.5$$

ومنه  $J \leq 68$  (س)  $J \leq 0.5$  من الجدول مباشرة  $0.6915 =$

$$J \leq 55 \text{ (Z)} = \left[ \frac{55 - 65}{6} \leq Z \right]$$

$$\left[ \frac{-10}{6} \leq Z \right]$$

لتحويلها الى كسر عشري استخدم القسمة الطويلة

$$\left[ -1.66 \leq Z \right]$$

اذل  $J \leq 55$  (س)  $J \leq -1.66$  (من الجدول مباشرة)  $0.9515 =$



التعلم يأخذ خطوات صغيرة في سلم النجاح.

لاحظ تقدمك و النجاحات التي تحققتها!

ابتهج لقدراتك!



**تدريب :** اذا كان رواتب 10000 دينار موظف تتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي 200 دينار وانحراف معياري 10 دناينر ، اختير احد الموظفين عشوائيا فجد ..  
1- عدد الموظفين الذين تقل رواتبهم عن 180 دينار .  
2- عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين 190 و 220 دينار .

**تدريب :** اذا علمت ان علامات 1000 طالب في امتحان الرياضيات تتخذ التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 65 وانحراف معياري 10 ، فاذا اختير أحد الطلبة عشوائيا .  
1- ان يكون الطالب ممن تزيد علامتهم عن 60 .  
2- ان يكون الطالب ممن تنحصر علاماتهم بين 70 - 80  
3- عدد الطلبة الناجحين اذا علمت ان علامة النجاح في هذا الامتحان 50 .

**مثال :** اذا كانت أوزان طلبة إحدى المدراس يتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي 45 وانحرافه المعياري 4 ، فاذا اختير أحد الطلبة عشوائيا فما احتمال ان يكون ممن تنحصر اوزانهم بين 43 كغم و 49 كغم ؟  
الحل ...

نلاحظ من السؤال ان الاوزان المطلوبة تنحصر بين 43 و 49 أي ان ل (  $43 \leq س \leq 49$  ) ...  
نجد العلامة المعيارية لـ 43 و 49 ...

$$Z_1 = \left[ \frac{45 - 49}{4} \leq Z_1 \leq \frac{45 - 43}{4} \right] \quad 0.5 = \left[ \frac{45 - 43}{4} \leq Z_2 \leq \frac{45 - 49}{4} \right]$$

$$P(43 \leq س \leq 49) = P(0.5 \leq Z \leq -1)$$

$$P(0.5 \leq س \leq 49) = P(1 \geq س) - P(س \geq 0.5)$$

$$P(س \geq 1) - (1 - P(س \geq 0.5))$$

$$0.2420 - (1 - 0.7088)$$

$$0.5328 = 0.3088 - 0.2420$$

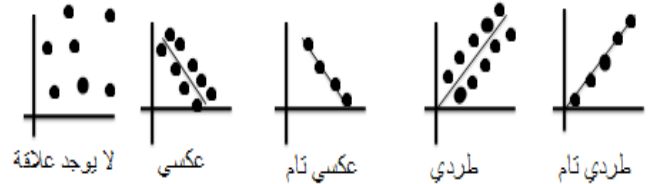
## الخطوات الخمسة للنجاح





الدرس السادس : معامل الارتباط

- الارتباط هو علاقة تربط بين متغيرين اما عكسية او طردية سواء كانت قوية او ضعيفة .
- اشكال الارتباط ...



تذكر ...  
الوسيط الحسابي =  $\frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}}$

$$\text{معامل ارتباط بيرسون} = \frac{\sum (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

حيث :

- س<sub>ي</sub> ← ترمز لكل قيمة من قيم س
- ص<sub>ي</sub> ← ترمز لكل قيمة من قيم ص
- س̄ ← ترمز للوسيط الحسابي لقيم س
- ص̄ ← ترمز للوسيط الحسابي لقيم ص

ان لم تتألم لن تتعلم

مثال : بين الجدول التالي العلاقة بين الخبرة والاجرة اليومية لاحدى الشركات ، احسب معامل ارتباط بيرسون

سنوات الخبرة	س	5	6	7	8	14
الاجرة	ص	6	7	8	9	10

الحل :

أولا : نقوم بحساب الوسيط الحسابي لقيم س وقيم ص

$$\bar{س} = \frac{(١٤ + ٨ + ٧ + ٦ + ٥)}{٥} = ٨$$

$$\bar{ص} = \frac{(١٠ + ٩ + ٨ + ٧ + ٦)}{٥} = ٨$$

ثانيا نكون الجدول التالي :

س	ص	(س - س̄)	(ص - ص̄)	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄) <sup>٢</sup>	(ص - ص̄) <sup>٢</sup>
٥	٦	-٣	-٢	٦	٩	٤
٦	٧	-٢	-١	٢	٤	١
٧	٨	-١	٠	٠	١	٠
٨	٩	٠	١	٠	٠	١
١٤	١٠	٦	٢	١٢	٣٦	٤
المجموع		٠	٠	٢٠	٥٠	١٠

$$\text{معامل ارتباط بيرسون} = \frac{\sum (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{٢٠}{\sqrt{١٠ \times ٥٠}}$$



- اذا كان معامل الارتباط بين س ، ص يساوي ( م )  
و عدلت المشاهدات حسب العلاقة التالية .  
س \* = أ س + ب ، ص \* = ج ص + د  
فان معامل الارتباط في هذه الحالة إما ..

- 1- ( م ) اذا كانت اشارة أ ( معامل س ) و اشارة (ج)  
معامل ص متشابهتين .  
2- ( م - ) اذا كانت اشارة أ ( معامل س ) و اشارة  
(ج) معامل ص مختلفتين .

مثال : اذا كان معامل الارتباط بين قيم س ص = 0.4  
فجد س \* و ص \* في كل من ..  
1- س \* = 3 س + 2 ، ص \* = 5 ص + 1 .  
الحل : نلاحظ ان معامل س (3) ومعامل ص (5) وهما  
متشابهين في الاشارة اذا معامل الارتباط الجديد هو (م)  
اي الارتباط القديم لكن موجب ... ( 0.4 ) .

2- س \* = س - 9 ، ص \* = ص - 2  
الحل : لاحظ ان معامل س = 1 ، معامل ص = -1 وهما  
مختلفين في الاشارة اذا معامل الارتباط = م - = 0.4

تدريب : اذا كان معامل الارتباط بين س و ص = -0.1  
فجد معامل الارتباط بين س \* و ص \* في كل من الحالات  
التالية ...

1- س \* = س + ب ، ص \* = ص - 3 + 1

2- س \* = س - 5 ، ص \* = ص - 3

3- س \* = س - 5 - 8 ، ص \* = ص - 3 - 3

تدريب : يبين الجدول التالي علامات 5 طلاب في مبحثي  
الرياضيات والعلوم في امتحان قصيرة من 10 علامات ،  
احسب معامل ارتباط بيرسون بين س و ص .

رقم الطالب	1	2	3	4	5
الرياضيات	2	5	3	7	9
العلوم	5	6	7	9	3

## سلم النجاح







### الانحدار

- معادلة خط الانحدار هي  $ص = أس + ب$
- وتستخدم هذه المعادلة للتنبؤ بقيمة ص اذا علمت قيم س
- عندما يطلب السؤال معادلة خط الانحدار عليك اولاً ايجاد قيمة ( أ ) وقيمة ( ب ) من خلال القانون ..

$$أ = \frac{\text{مجموع (قيم س - الوسط الحسابي لـ س)} - (\text{قيم ص} - \text{الوسط الحسابي لـ س})}{\text{مجموع (قيم س} - \text{الوسط الحسابي لقيم س)}^2}$$

$$\text{وبالرموز } أ = \frac{\sum (س - \bar{س}) (ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2}$$

ب = (الوسط الحسابي لقيم ص) - أ (الوسط الحسابي لقيم س)

وبالرموز ب = (ص - أ س)

- مثال : يبين الجدول التالي علامات 6 طلاب في امتحان الرياضيات وعدد ساعات الدراسة اليومية ، فجد
- 1- معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيمة ص
  - 2- قدر علامة طالب درس على الامتحان 5 ساعات .
  - 3- الخطأ بالتنبؤ لطالب درس 6 ساعات .

عدد ساعات الدراسة	6	4	8	7	2	3
العلامة	9	8	10	8	5	2

الحل : أولاً نجد الوسط الحسابي لقيم س وقيم ص .

$$\bar{س} = \frac{30}{6} = \frac{3+2+7+8+4+6}{6}$$

$$\bar{ص} = \frac{42}{6} = \frac{2+5+8+10+8+9}{6}$$

$$\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \text{تذكر ان الوسط الحسابي}$$

ثانياً نكون الجدول التالي :

س	ص	(س - $\bar{س}$ )	(ص - $\bar{ص}$ )	(س - $\bar{س}$ ) <sup>2</sup>	(س - $\bar{س}$ ) (ص - $\bar{ص}$ )
6	9	1	2	1	2
4	8	-1	1	1	-1
8	10	3	3	9	9
7	8	2	1	4	2
2	5	-3	-2	9	6
3	2	-2	-5	4	10
30	42	0	0	28	28

قولوا :  
الله الله  
تفليحوا .



تدريب : يبين الجدول التالي عدد الساعات اليومية التي يدرسها 5 طلاب على امتحان الرياضيات ، حيث س عدد الساعات التي يدرسها الطالب وص العلامة الحقيقية التي حصل عليها ، جد ..

- 1- معادلة خط الانحدار .
- 2- العلامة المتنبأ بها لطالب درس 6 ساعات .
- 3- الخطأ بالتنبؤ لطالب درس 7 ساعات .

1	5	7	4	3	عدد ساعات الدراسة
9	11	20	16	14	العلامة

لايجاد قيمة (أ) ...

$$1 = \frac{28}{28} = \frac{\sum (س - \bar{س}) (\ص - \bar{\ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = أ$$

لايجاد قيمة (ب) ...

$$ب = \ص - \text{أس} = 2 = 5 \times 1 - 7$$

1- معادلة خط الانحدار ( $\hat{\ص} = \text{أس} + ب$ )

$$\hat{\ص} = 2 + س$$

2- تقدير علامة الطالب الذي يدرس 5 ساعات

، هنا فقط نعوض (5) في معادلة خط

الانحدار ...

$$\hat{\ص} = 2 + س = 2 + 5 = 7$$

$$7 = 2 + 5 =$$

3- الخطأ بالتنبؤ لطالب درس 6 ساعات . أولاً

نجد كم العلامة التي سيتم التنبؤ بها ...

$$\hat{\ص} = 2 + س = 2 + 6 = 8$$

إذا العلامة المقدرة لطالب درس 6 ساعات

هو 8 .

الخطأ بالتنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

$$9 - 8 =$$

$$1 =$$

الخطأ بالتنبؤ = 1 .

## السير الى النجاح



النجاح





و في النهاية أطلب دعواتكم الصالحة لي و لوالدي  
لكم تحياتي و بالتوفيق للجميع إن شاء الله

الأستاذ بشار أبو الععاش

0772887066