الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١ نهـا $س^{٣} + ٥س + ١ = ١ + ٥ + ١ = ٧$
$س \to ١$

٢ نهـا $س^{٣} + ٨ = -١ + ٨ = ٧$
$س \to -١$

٣ نهـا $\sqrt{س^{٢} + ٣} = \sqrt{٩} = ٣$
$س \to ٣$

٤ $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣س & ، س < ٢ \\ ٥س + ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

اوجد النهايات التالية:-

① نهـا ق(س) $س \to ٣$ ② نهـا ق(س) $س \to ١$ ③ نهـا ق(س) $س \to ٢$

الحل
نهـا ق(س) $= ٥ \times ٣ + ٣ = ١٨$
$س \to ٣$

نهـا ق(س) $= (١)^{٢} + ٣(١) = ٤$
$س \to ١$

نهـا ق(س) $= ٥(٢) + ٣ = ١٣$
$س \to ٢^{+}$

نهـا ق(س) $= ٤ + ٦ = ١٠$
$س \to ٢^{-}$

نهـا ق(س) $\neq$ نهـا ق(س)
$س \to ٢^{+}$ $س \to ٢^{-}$

$\Rightarrow$ نهـا ق(س) غير موجودة
$س \to ٢$

٥ $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س < -١ \\ ٦ - س & ، -١ \leq س < ٤ \\ ٥ & ، س \geq ٤ \end{cases}$

اوجد

① نهـا ق(س) $س \to -١$ ② نهـا ق(س) $س \to ٣$ ③ نهـا ق(س) $س \to ٥$

④ نهـا ق(س) $س \to ١$ ⑤ نهـا ق(س) $س \to ٤$

واجبي

٦ $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، س < ٩ \\ ٣س + ١٥ & ، س \geq ٩ \end{cases}$

اذا كانت نهـا ق(س) موجودة فما قيمة ٩
$س \to ٩$

الحل: نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
$س \to ٩^{+}$ $س \to ٩^{-}$

$٣(٩) + ١٥ = ٩^{٢} + ٩$

$٩^{٢} - ٩ - ١٥ = ٠$ ← هيئ

$(٩ - ٥)(٩ + ٣) = ٠$

٩ = ٥ مرفوض

٧ $ق = \begin{cases} س^{٢} + ٧س & ، س \neq ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases}$

① ق(٢) د ٦

② نهـا ق(س) د $(٢)^{٢} + ٧(٢) = ١٨$
$س \to ٢$

③ نهـا ق(س) د $(٥)^{٢} + ٧(٥) = ٦٠$
$س \to ٥$

٨ اذا كانت ق(س) $= \begin{cases} ٢س + ٢ & ، س < ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \\ ٩ - س & ، س > ٢ \end{cases}$

اوجد نهـا ق(س) باستخدام الجدول
$س \to ٢$

س	١	٢	١,٩	١,٩٩	①	٢,٠١	٢,١	٣
ق	٤	٤,٢	٤,٠٢	٤,٠٠٢	②	٣,٩٩	٣,٩	٣,٥

صفه ال الجدول

نهـا ق(س) $= ٤$ / نهـا ق(س) $= ٤$
$س \to ٢^{+}$ $س \to ٢^{-}$

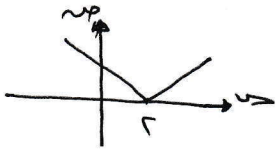
$\Rightarrow$ نهـا ق(س) موجود د $= ٤$
$س \to ٢$

٩ اذا كانت ق(س) د |س - ٢|

١- جد ق(س) وصفا/ارسم ١- جد نهـا ق(س)
$س \to ٢$

الحل

س	١	٢	٣
ق	١	٠	١



نهـا ق(س) = صفر
$س \to ٢$

١٠ اذا كانت ق(س) د $\begin{cases} \frac{|س-١|}{س-١} & ، س \neq ١ \\ ١٣ & ، س = ١ \end{cases}$

١- جد نهـا ق(س)
$س \to ١$

الحل $|س - ١| \to$ صفر عند س = ١

س	١-		١		١+
س - ١	-		٠		+
|س - ١|	- س + ١		س - ١	

ق = $\begin{cases} \frac{-س+١}{س-١} & ، س < ١ \\ \frac{س-١}{س-١} & ، س > ١ \\ ١٣ & ، س = ١ \end{cases}$

نهـا ق(س) $= \frac{-(س-١)}{س-١} = -١$ / نهـا ق(س) $= ١$
$س \to ١^{-}$ $س \to ١^{+}$

$\Rightarrow$ نهـا ق(س) غير موجودة
$س \to ١$

١١ ق د [$\frac{١}{٣}$ س + ٢] حيث س $\in$ [٠, ٨]

تعيد التعريف $ل = \frac{١}{٣}$ = ٣

ق = $\begin{cases} ٢ & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٣ & ، ٣ \leq س < ٦ \\ ٤ & ، ٦ \leq س \leq ٨ \end{cases}$

نهـا ق(س) = ٢ / نهـا ق(س) = ٣
$س \to ٣^{-}$ $س \to ٣^{+}$

نهـا ق(س) = ٤ / نهـا ق(س) = غ.م
$س \to ٦^{-}$ $س \to ٦^{+}$

$\Rightarrow$ نهـا ق(س) = غ.م
$س \to ٦$

١١ $\lim_{س\to 0^+} [\frac{1}{2}س+2] = 2$ ، $\lim_{س\to 0^-} \frac{|س|}{س} = -1$ ، $\lim_{س\to 0} ق(س)$ غير موجودة

١٢ $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq 0 \\ [\frac{1}{2}س+2] & ، س = 0 \end{cases}$

أ) جد $\lim_{س\to 0} ق(س)$

الحل نفرض $ص = \frac{1}{2}س+2$

$[ص] = 2 \Leftarrow ص = 4$

$0 \leq س < 4 \Leftarrow 2 \leq ص < 4$

$ق(س) = \begin{cases} 1 & ، 0 \leq س < 4 \\ -1 & ، س < 0 \end{cases}$

$\lim_{س\to 0^+} ق(س) = 1$ ، $\lim_{س\to 0^-} ق(س) = -1$

$\lim_{س\to 0^+} ق(س) \neq \lim_{س\to 0^-} ق(س)$ ∴ $\lim_{س\to 0} ق(س)$ غير موجودة

١٣ $\lim_{س\to 4} [\frac{س}{4}+5] = [\frac{1}{4}+5] = [5,25] = 5$

١٤ $\lim_{س\to 7} [9-\frac{س}{2}] = [5,5] = 5$

١٥ $\lim_{س\to 0} (س+1)^{[س]}$

الحل نعرف $[س]$

$[س] = \begin{cases} -1 & ، -1 \leq س < 0 \\ 0 & ، 0 \leq س < 1 \end{cases}$

$\lim_{س\to 0^+} (س+1)^{[س]} = (1)^{0} = 1$ ، $\lim_{س\to 0^-} (س+1)^{[س]} = (1)^{-1} = 1$

∴ $\lim_{س\to 0} (س+1)^{[س]} = 1$

١٦ $\lim_{س\to 3} |س-3|[ص+3]$

الحل : $|س-3|$

$[س+3]$

$ق(س) = \begin{cases} (س-3)(6) & ، 2 \leq س < 3 \\ (س-3)(5) & ، 3 \leq س < 4 \end{cases}$

$\lim_{س\to 3^+} (س-3)(6) = 0$ ، $\lim_{س\to 3^-} (س-3)(5) = 0$

∴ $\lim_{س\to 3} ق(س) = 0$

١٧ $\lim_{س\to 3} [س+5] - [س-2]$

$= \lim [س] + 5 - [س] + 2 = 7$

١٨ إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} [س+2] & ، س \leq 2 \\ س^3+2 & ، س > 2 \end{cases}$

وكانت $ق \in ص$

وكانت $\lim_{س\to 2} ق(س)$ موجودة فما قيمة $ق$

$\lim_{س\to 2^+} ق(س) = \lim_{س\to 2^-} ق(س)$

$[ق+2] = ق+2$

$ق+2 = 10 \leftarrow [2]^{+} + ق = 10$

$ق = 8$

١٩ $ق(س) = \begin{cases} [س+1] & ، ق < س < 2 \\ 7-[س] & ، 2 \leq س < ق \end{cases}$

وكانت $\lim_{س\to ق} ق(س)$ موجودة فما قيمة $ق$

الحل $\lim_{س\to ق^+} ق(س) = \lim_{س\to ق^-} ق(س)$

$\lim_{س\to ق^+} 7-[س] = \lim_{س\to ق^-} [س+1]+1$

$7-[ق]^{+} = [ق]^{-}+1$

إذا كان $ق \in ص$	$ق$ ليس $ص$
$[ق]^{+} = ق$	$[ق]^{+} = ق$
$[ق]^{-} = ق-1$	$[ق]^{-} = [ق]$
$7-ق = ق-1$	$[ق]+1 = 7-[ق]$
$2ق = 8$	$2[ق] = 6$
$ق = 4$	$[ق] = 3$
	$ق = 3,5$

∴ $ق = 4$ أو $ق = 3,5$

٢٠ $\lim_{س\to ق} |3س+2| = 14$ فما قيمة $ق$

$|3ق+2| = 14$

(١) $3ق+2 = 14$ ، $3ق = 12$ ، $ق = 4$

(٢) $3ق+2 = -14$ ، $3ق = -16$ ، $ق = -\frac{16}{3}$

٢١ $ق(س) = \begin{cases} 1 & ، |س| \geq 1 \\ صفر & ، |س| < 1 \end{cases}$

أ) جد $\lim_{س\to 1} ق(س)$

الحل $ق(س) = \begin{cases} 1 & ، س \leq -1 \\ صفر & ، -1 < س < 1 \\ 1 & ، س \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{س\to 1^+} ق(س) = صفر$ ، $\lim_{س\to 1^-} ق(س) = 1$

∴ $\lim_{س\to 1} ق(س)$ غير موجودة

ب) هل $ق(س)$ متصلة عند $س = 1$ ؟ لماذا

لا ، لأن $\lim_{س\to 1} ق(س)$ غير موجودة

٢٢ $ق(س) = \begin{cases} [\frac{س}{3}+2] & ، س < 0 \\ \frac{|س|}{س} & ، س \geq 0 \end{cases}$

أ) جد $\lim_{س\to 0} ق(س)$

$\lim_{س\to 0^+} \frac{|س|}{س} = 1$ ، $\lim_{س\to 0^-} [\frac{س}{3}+2] = 2$

∴ $\lim_{س\to 0} ق(س)$ غير موجودة

ب) هل $ق(س)$ متصلة عند $س = 0$ ؟ لماذا

لا ، لأن $\lim_{س\to 0} ق(س)$ غير موجودة

٢٣ ① نهاية $ق(س) = 6$ عند $س = 4$

② نهاية $ق(س) = 4$ عند $س = 7$

③ $\lim_{س\to ق} ق(س)$ غير موجودة عند $ق = 4$

④ $\lim_{س\to ق} ق(س) = 4$ عند $ق = 3$

$ق = \{-2, 3\}$

نظريات النهايات

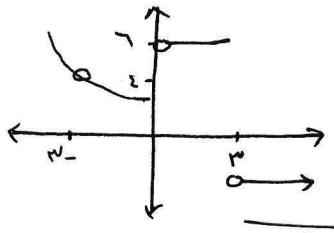
مثال ① :
اذا كانت
نها ق(س) = ٨ / نها ق(س) = -٦
س→٣ س→٣
احسب ما يلي :-
① نها ق(س) × ق(س) = ٨ × -٦ = -٤٨
س→٣
② نها ٣ ق(س) - ٢ ق(س) = ٣ × ٨ - ٢ × -٦ = ٣٦
س→٣
③ نها س ق(س) + ق(س) = ٣ × ٨ + (-٦) = ٦٠
س→٣
④ نها √(ق(س) + ١٦) = √(٨ + ١٦) = √٢٤ = ٢√٦
س→٣
⑤ نها ق(س) / س - ١ = ٨ / ٢ = ٤
س→٣

مثال ② :
اذا كانت نها ق(س) = ٥ ، نها [ق(س) + ع(س)] = ٢٥
س→٣ س→٣
احسب نها [ق(س) + ٤ / ق(س)]
س→٣
الحل : نجزئ الاقواس
نها ق(س) + نها ٤ / ق(س) = ٢٥
س→٣ س→٣
نها ق(س) + ٤ / نها ق(س) = ٢٥
س→٣ س→٣
نها ق(س) = ٢١
س→٣
نها ق(س) = ٤
س→٣
⇐ نها [ق(س) + ٤ / ق(س)] = ٤ + ٤ / ٤ = ٤ + ١ = ٥
س→٣

مثال ③ :
اذا كانت نها ق(س) = ١٥٠ فاوجد نها [ق(س)]^٢
س→٥ س→٥
الحل : نها ق(س) = ١٥٠ ⇐ نها ق(س) = √١٥٠
س→٥ س→٥
نها ق(س) = ٦
س→٥
⇐ نها ٤ ق(س) + [ق(س) + ٨]
س→٥
= ٤ × ٦ + [٦ + ٨] = ٢٤ + ١٤ = ٣٨

مثال ④ :
اذا كانت نها ق(س) = ٧ ، ق(٧) = ٣
س→٧
اوجد نها ق(س - ٤)
س→٦
الحل ∵ س → ٩ ⇐ س → ٧ فان ق(س) → ٧
⇐ نها ق(س - ٤) = ق(٧) = ٣
س→٦

⑤ اذا كانت ق(س) = { س^٢ + ٦ ، س < ٣ / ٣ ق(س) ، س > ٣ }
① نها ق(س + ٢)
س→١
س → ١ ⇐ س + ٢ → ٣ ← ص
ص → ٣ ⇐ ص = س + ٢
= نها ق(ص) = ٣ × ٥ = ١٥
ص→٣
② نها ق(-٧ - س)
س→٤
س → ٤ ⇐ ص = -٧ - س ← ص → -١١
= نها ق(ص) = (-١١)^٢ + ٦ = ١٢٧
ص→-١١

⑥ من خلال الرسم المقابل احسب ما يلي :


① نقطة P حيث
نها ق(س) غير موجودة
س→P
P = {٣ ، ٥}
② نها ٣ ق(س) + √(ق(س) + ٨)
س→٣
= ٣ × ٤ + √(٩ + ٨) = ١٢ + ٣ = ١٥
③ قيم P حيث نها ق(س) = -٢
س→P
P = {(٣ ، ٥)}
④ نها ٤ ق(٥ - س)
س→٢
س → ٢ ⇐ ٥ - س → ٣ ← ص
= نها ٤ ق(ص) = ٤ × ٦ = ٢٤
ص→٣

⑦ اذا كانت نها ق(س) / س = ٤ فاوجد نها ق(س) / س
س→٠ س→٠
الحل
نها ق(س) / س × س = نها ق(س) × نها ١ / ٤ = ٤ × ١/٤ = ١
س→٠ س→٠ س→٠

⑧ اذا كان نها ق(س) / س - ٥ = ٥ فاوجد نها ق(س) / س - ٣
س→٣ س→٣
الحل
نها ق(س) / س - ٣ = نها ق(س) / س - ٣ × س + ٣ / س + ٣
س→٣ س→٣
= نها ق(س) / س - ٣ × نها س + ٣ = ٥ × ٦ = ٣٠
س→٣ س→٣

⑨ نها √(ق(س) - ٤) / ق(س) - ٢
س→٢
نها √(ق(س) - ٤) / ق(س) - ٢ × √(ق(س) + ٢) / √(ق(س) + ٢)
س→٢
= نها (ق(س) - ٤) / (ق(س) - ٢) (√(ق(س) + ٢))
س→٢
= نها ١ / √(ق(س) + ٢) = ١ / √٤ = ١/٢
س→٢

⑩ ق(س) = { ٥ س + ١ ، س < ٢ / ٢ ق(س) + ٥ ، س > ٢ }
نها ق(س)
س→P
P = ؟
نها ق(س) = نها ق(س)
س→P- س→P+
٥ P + ١ = ٢ P + ٥
٣ P = ٤
P = ٤/٣ ∉ مجال ق
∴ لا توجد نهاية

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

الاقترانات الكسرية

اسئلة صفية

① التحليل ② الضرب بالمرافق ③ توحيد المقام

④ الاضافة والطرح.

1 التحليل بأنواعه :-

① $\lim_{س\to٤} \frac{س^{٢}-٤س}{س^{٢}-١٢} = \frac{٠}{٠}$ صفر

$= \lim_{س\to٤} \frac{س(س-٤)}{٣(س-٤)} = \lim_{س\to٤} \frac{س}{٣} = \frac{٤}{٣}$

② $\lim_{س\to٧} \frac{س^{٢}+٣س-٧٨}{س^{٣}-٣٤٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to٧} \frac{(س-٦)(س+١٣)}{(س-٧)(س^{٢}+٧س+٤٩)} = \lim_{س\to٧} \frac{س-٦}{س^{٢}+٧س+٤٩} = \frac{١}{١٤٧}$

③ $\lim_{س\to-٢} \frac{س^{٣}+٢س^{٢}-س-٢}{س+٢} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to-٢} \frac{(س+٢)(س^{٢}-١)}{(س+٢)} = \lim_{س\to-٢} (س^{٢}-١) = ٣-$

④ $\lim_{س\to٣} \frac{س^{٣}-٢س^{٢}-٥س+٦}{س^{٣}-٣س^{٢}-س+٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to٣} \frac{(س-٣)(س^{٢}+س-٢)}{(س-٣)(س^{٢}-١)} = \lim_{س\to٣} \frac{س^{٢}+س-٢}{س^{٢}-١} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$

⑤ $\lim_{س\to٢} \frac{س^{٣}-٨}{س^{٣}-٣س^{٢}+٤} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to٢} \frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{(س-٢)(س^{٢}-س-٢)} = \lim_{س\to٢} \frac{س^{٢}+٢س+٤}{س^{٢}-س-٢} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

⑥ $\lim_{س\to٢} \frac{س^{٤}-١٦}{س^{٣}-س^{٢}-٢س} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to٢} \frac{(س^{٢}-٤)(س^{٢}+٤)}{س(س^{٢}-س-٢)} = \lim_{س\to٢} \frac{(س-٢)(س+٢)(س^{٢}+٤)}{س(س-٢)(س+١)} = \frac{٤ \times ٨}{٢ \times ٣} = \frac{١٦}{٣}$

⑦ $\lim_{س\to٣} \frac{س^{٣}-٥س+٦}{س^{٣}-٩} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to٣} \frac{(س-٣)(س-٢)}{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)} = \lim_{س\to٣} \frac{س-٢}{س^{٢}+٣س+٩} = \frac{١}{٢٧}$

⑧ $\lim_{س\to١} \frac{(٣س-٢)^{٥}-٥س^{٢}+٤}{س^{٣}-٢س+١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to١} \frac{(٣س-٢-١)(٢س-١+٥)}{س^{٢}-س-٢}$

$= \lim_{س\to١} \frac{(٣س-٣)(٢س^{٤}-٢س^{٣}+٢س^{٢}-٢س+٥)}{(س-٢)(س+١)} = \lim_{س\to١} \frac{٣(س-١)(٢س^{٤}-٢س^{٣}+٢س^{٢}-٢س+٥)}{(س-٢)(س+١)}$

$= \frac{٣ \times ١٥}{-٢ \times ٢} = \frac{٤٥}{٤}$

⑨ $\lim_{س\to١} \frac{(٢س+١)^{٣}-٢٧}{س^{٤}-١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to١} \frac{(٢س-٢)((٢س+١)^{٢}+٣(٢س+١)+٩)}{(س-١)(س+١)(س^{٢}+١)}$

$= \lim_{س\to١} \frac{٢(س-١)(٤س^{٢}+٤س+١+٦س+٣+٩)}{(س-١)(س+١)(س^{٢}+١)} = \lim_{س\to١} \frac{٢(٤س^{٢}+١٠س+١٣)}{(س+١)(س^{٢}+١)} = \frac{٢٧ \times ٢}{٢ \times ٢} = ٢٧$

⑩ $\lim_{س\to١} \frac{(س^{٥}-١)^{١٠}}{(س^{٣}-٢س+١)^{٥}} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س\to١} \frac{((س-١)(س^{٤}+س^{٣}+س^{٢}+س+١))^{١٠}}{((س-١)(س^{٢}+س-١))^{٥}} = \lim_{س\to١} \frac{(س-١)^{١٠}(س^{٤}+س^{٣}+س^{٢}+س+١)^{١٠}}{(س-١)^{٥}(س^{٢}+س-١)^{٥}}$

$= \lim_{س\to١} \frac{(س-١)^{١٠}(س^{٤}+س^{٣}+س^{٢}+س+١)^{١٠}}{(س-١)^{٥}(س^{٢}+س-١)^{٥}} = \frac{(١+١+١+١+١)^{١٠}}{(٢)^{٥}} = \frac{(٥)^{١٠}}{(٢)^{٥}}$

⑪ $\lim_{س\to٠} \frac{(٢س^{٣}+س)^{٤}}{س^{٤}} = \lim_{س\to٠} \frac{س^{٤}(٢س^{٢}+١)^{٤}}{س^{٤}} = (١)^{٤} = ١$

⑫ $\lim_{س\to١} \left(\frac{س^{٥}-١}{س-١}\right)^{٥} = \lim_{س\to١} \frac{(س-١)^{٥}(س+١)^{٥}}{(س-١)^{٥}} = (٢)^{٥} = ٣٢$

⑬ $\lim_{س\to١} \sqrt{\frac{س^{٤}-١}{س-١}}$

نوعه أخذ مجال الجذر ـ سوف يكون عندنا ١، ٢ .

$= \lim_{س\to١} \sqrt{\frac{(س-١)(س+١)}{س-١}}$

⑭ $\lim_{س\to٣} \sqrt{\frac{٢س^{٢}-١٨}{س^{٢}-٩}}$

نوعه أخذ مجال الجذر ـ سوف يكون عندنا ٣،

$\lim_{س\to٣} \sqrt{\frac{٢(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}} = \lim_{س\to٣} \sqrt{\frac{٢}{س+٣}} = \sqrt{\frac{٢}{٦}} = \sqrt{\frac{١}{٣}}$

١٥ $\lim_{س\to ٢} \frac{س^٣ - ٣س - ١٠}{س^٣ - ٤س} = \div$

نستخدم القسمة التركيبية.

$س^٣ - ٣س - ١٠ = ٠$ بالقسمة على $س - ٢$

	١	٠	-٣	-١٠
ثابت		$س^٠$	$س^١$	$س^٢$
٢	١	٢	٤	٠

$= \lim_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٥)}{س(س-٢)(س+٢)} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

١٦ إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \le ٣ \\ ٢س + ٤ & ، س > ٣ \end{cases}$

$ه(س) = \frac{س^٣ - ٥س + ٦}{س^٣ - ٣س}$

أ) أوجد $\lim_{س\to ٣} ق(س) + ه(س)$

$\lim_{س\to ٣^-} ق(س) = ١٠$ ، $\lim_{س\to ٣^+} ق(س) = ١٠$ ∴ $\lim_{س\to ٣} ق(س) = ١٠$

$\lim_{س\to ٣} ه(س) = \lim_{س\to ٣} \frac{س^٣ - ٥س + ٦}{س^٣ - ٣س} = \div$

$= \lim_{س\to ٣} \frac{(س-٣)(س-٢)}{س(س-٣)} = \frac{١}{٣}$

$\Leftarrow$ المطلوب $= ١٠ + \frac{١}{٣} = \frac{٣١}{٣}$

أسئلة اختر الإجابة الصحيح

١ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س|}{٥س}$

نعرف $|س| \to$ عند $س = ٠$ ، $س = ٠$

$\lim_{س\to ٠^+} \frac{س}{٥س} = \frac{١}{٥}$ | $\lim_{س\to ٠^-} \frac{-س}{٥س} = \frac{-١}{٥}$

$\Leftarrow$ غ م

٢ $\lim_{س\to ١} \frac{|س-١|}{س-١}$

$س - ١ = ٠$ عند $س = ١$ ، $س < ١$ ، $س > ١$

$\lim_{س\to ١^+} \frac{س-١}{س-١} = ١$ | $\lim_{س\to ١^-} \frac{-(س-١)}{س-١} = -١$

$\Leftarrow$ غ م

٣ $\lim_{س\to ٧} \frac{|س-٧|}{س-٧}$

$س - ٧ = ٠$ عند $س = ٧$ ، $س < ٧$ ، $س > ٧$

$\lim_{س\to ٧^+} \frac{س-٧}{س-٧} = ١$ | $\lim_{س\to ٧^-} \frac{-(س-٧)}{س-٧} = -١$

$\Leftarrow$ غ م

٤ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س|}{س}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{|س|}{س} = |١| = ١$

٥ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س^٢ + ٤س|}{س}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{|س(س+٤)|}{س}$

$س(س+٤) = ٠$ عند $س = ٠$ ، $س = -٤$

$س < -٤$: $س(س+٤) > ٠$ ، $-٤ < س < ٠$: $س(س+٤) < ٠$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{س^٢ + ٤س}{س} = \lim_{س\to ٠} \frac{س(س+٤)}{س} = ٤$

$\Leftarrow$ غ م

٦ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س|}{س^٢}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{|س|}{س^٢}$

$س^٢ = ٠$ عند $س = ٠$

$س < ٠$: $س^٢ > ٠$ ، $س > ٠$: $س^٢ > ٠$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{س}{س^٢} = \lim_{س\to ٠} \frac{١}{س}$

$\lim_{س\to ٠^+} \frac{١}{س} = \frac{١}{٠^+} = +\infty$ | $\lim_{س\to ٠^-} \frac{-١}{س} = \frac{-١}{٠^+} = -\infty$

$\Leftarrow$ غ م

٧ $\lim_{س\to ١} \frac{|س^٢ - ٢س + ١|}{|س - ١|}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{|(س-١)(س-١)|}{|س-١|} = \lim_{س\to ١} \frac{(س-١)^٢}{|س-١|}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{|س-١|}{|س-١|}$ ق [١]

٨ $\lim_{س\to ٢} \frac{س^٣ - ٤س + ٤}{س - ٢}$

$= \lim_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س - ٢)}{س-٢} = \lim_{س\to ٢} (س^٢ + ٢س - ٢)$

$= ٤ + ٤ - ٢ = ٦$

٩ $\lim_{س\to ٠} [س]$

$\lim_{س\to ٠^+} [س] = ٠$ ، $\lim_{س\to ٠^-} [س] = -١$

$\Leftarrow$ غ م

$س = ١$ ، $س = -١$

$\{-١ ، ٠ ، ١\} - ح$

١٠ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س^٢ - ٤|}{س - ٢}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{|(س-٢)(س+٢)|}{س-٢}$

$(س-٢)(س+٢) = ٠$ عند $س = ٢$ ، $س = -٢$

$س < -٢$: $(س-٢)(س+٢) > ٠$ ، $-٢ < س < ٢$: $(س-٢)(س+٢) < ٠$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{-(س^٢ - ٤)}{س-٢} = \lim_{س\to ٠} \frac{-(س-٢)(س+٢)}{س-٢}$

$= \lim_{س\to ٠} -(س+٢) = -(٠+٢) = -٢$

١١ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س^٢ + ٢س|}{س}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{|س(س+٢)|}{س}$

$س(س+٢) = ٠$ عند $س = ٠$ ، $س = -٢$

$س < -٢$: $س(س+٢) > ٠$ ، $-٢ < س < ٠$: $س(س+٢) < ٠$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{-(س^٢ + ٢س)}{س} = \lim_{س\to ٠} \frac{-س(س+٢)}{س}$

$= \lim_{س\to ٠} -(س+٢) = -(٠+٢) = -٢$

١٢ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س^٢ - ٤س|}{س}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{|س(س-٤)|}{س}$

$س(س-٤) = ٠$ عند $س = ٠$ ، $س = ٤$

$س < ٠$: $س(س-٤) > ٠$ ، $٠ < س < ٤$: $س(س-٤) < ٠$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{-(س^٢ - ٤س)}{س} = \lim_{س\to ٠} \frac{-س(س-٤)}{س}$

$= \lim_{س\to ٠} -(س-٤) = -(٠-٤) = ٤$

١٣ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س^٢ + ٣س|}{س}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{|س(س+٣)|}{س}$

$س(س+٣) = ٠$ عند $س = ٠$ ، $س = -٣$

$س < -٣$: $س(س+٣) > ٠$ ، $-٣ < س < ٠$: $س(س+٣) < ٠$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{-(س^٢ + ٣س)}{س} = \lim_{س\to ٠} \frac{-س(س+٣)}{س}$

$= \lim_{س\to ٠} -(س+٣) = -(٠+٣) = -٣$

١٤ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س^٢ - ٩|}{س - ٣}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{|(س-٣)(س+٣)|}{س-٣}$

$(س-٣)(س+٣) = ٠$ عند $س = ٣$ ، $س = -٣$

$س < -٣$: $(س-٣)(س+٣) > ٠$ ، $-٣ < س < ٣$: $(س-٣)(س+٣) < ٠$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{-(س^٢ - ٩)}{س-٣} = \lim_{س\to ٠} \frac{-(س-٣)(س+٣)}{س-٣}$

$= \lim_{س\to ٠} -(س+٣) = -(٠+٣) = -٣$

١٥ $\lim_{س\to ٢} \frac{س^٣ - ٣س - ١٠}{س^٣ - ٤} = \div$

نستخدم القسمة التركيبية.

$س^٣ - ٣س - ١٠ = ٠$ بالقسمة على $س - ٢$

	١	٠	-٣	-١٠
٢	↓	٢	٤	١٠
	١	٢	٧	صفر

$= \lim_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٥)}{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)} = \frac{١٣}{١٢}$

١٦ اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^٣ + ١ & ، س \le ٣ \\ ٣س^٢ - ٥س + ٦ & ، س > ٣ \end{cases}$

$ق = \frac{س^٣ - ٥س + ٦}{س - ٣}$

اقسم $\lim_{س\to ٣}$ على $س - ٣$

$\lim_{س\to ٣^+} ق(س) = \lim_{س\to ٣^+} (٣س^٢ - ٥) = ٢٢$

$\lim_{س\to ٣^-} ق(س) = \lim_{س\to ٣^-} (س^٣ + ١) = ٢٨$

$\lim_{س\to ٣^+} ق(س) \neq \lim_{س\to ٣^-} ق(س)$ ∴ $\lim_{س\to ٣}$ غير موجود

$\lim_{س\to ٣} ق(س) = \lim_{س\to ٣} \frac{س^٣ - ٥س + ٦}{س - ٣} = \div$

$\lim_{س\to ٣} (س-٣)(س-٢)$

$\lim_{س\to ٣} (س-٣)(س+٣)$

$= \frac{١}{٦}$

← اطلاقا $\lim_{س\to ٣}$ موجود $= \frac{٢٢}{٣} = \frac{١}{٦} + ٧ = ق + ٥$

أسئلة اختر الصحيح

١ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س|}{س}$

نعرف $|س| = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$\lim_{س\to ٠^+} \frac{س}{س} = ١$ | $\lim_{س\to ٠^-} \frac{-س}{س} = -١$

← غير موجود

٢ $\lim_{س\to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

$\lim_{س\to ١} \frac{(س-١)(س+١)}{س-١} = \lim_{س\to ١} (س+١) = ٢$

٣ $\lim_{س\to ٧} \frac{|س-٧|}{س-٧}$

$س - ٧ = ٠ \Leftarrow س = ٧$

$س$	٧^-	٧^+
$س-٧$	$-$	$+$
$|س-٧|$	$-(س-٧)$	$س-٧$

$\lim_{س\to ٧^+} \frac{س-٧}{س-٧} = ١$ | $\lim_{س\to ٧^-} \frac{-(س-٧)}{س-٧} = -١$

غير موجود

٤ $\lim_{س\to ٠} \frac{س}{|س-١|-س}$

$|س-١| - س = ٠ \Leftarrow |س-١| = س$

$س - ١ = س$ أو $-(س-١) = س$

$-١ = ٠$ (مرفوض) | $-س + ١ = س \Leftarrow ٢س = ١ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س\to ٠} \frac{س}{|س-١|-س} = \lim_{س\to ٠} \frac{س}{-(س-١)-س} = \lim_{س\to ٠} \frac{س}{-٢س+١} = \frac{٠}{١} = ٠$

٥ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س+٤|}{س}$

$س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = -٤$

$س$	-٤	٠
$س+٤$	٠	$+$
$|س+٤|$	$-(س+٤)$	$س+٤$

$\lim_{س\to ٠^+} \frac{س+٤}{س} = ١$ | $\lim_{س\to ٠^-} \frac{-(س+٤)}{س} = \lim_{س\to ٠^-} \frac{-س-٤}{س} = -١$

$\frac{-٤}{٠^-}$

$\frac{+}{-٤}$ $\frac{-}{٠}$

$\frac{-(س+٢)(س+٢)}{(س+٢)} = -(س+٢)$

$\frac{-(س+٢)(س-٢)}{(س+٢)} = -(س-٢)$

$\frac{-س^٢ + ٤}{س+٢}$

$\frac{-س^٢ - ٤س - ٤}{س+٢}$

$\frac{+}{-٣}$ $\frac{-}{٠}$

$\lim_{س\to ٠^+} -(س+٢) = -٢$ | $\lim_{س\to ٠^-} -(س-٢) = ٢$

$\lim_{س\to ٠^+} ق(س) \neq \lim_{س\to ٠^-} ق(س)$ ∴ $\lim_{س\to ٠}$ غير موجود

٦ $\lim_{س\to ٠} \frac{|س+٣|}{س}$

$س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٣$

$س$	-٣	٠
$س+٣$	٠	$+$
$|س+٣|$	$-(س+٣)$	$س+٣$

$\lim_{س\to ٠^+} \frac{س+٣}{س} = \lim_{س\to ٠^+} \frac{س}{س} + \lim_{س\to ٠^+} \frac{٣}{س} = ١ + \frac{٣}{٠^+} = \infty$

$\lim_{س\to ٠^-} \frac{-(س+٣)}{س} = \lim_{س\to ٠^-} \frac{-س}{س} + \lim_{س\to ٠^-} \frac{-٣}{س} = -١ + \frac{-٣}{٠^-} = \infty$

$\lim_{س\to ٠^+} ق(س) = \lim_{س\to ٠^-} ق(س)$ ∴ $\lim_{س\to ٠}$ موجود

٧ $\lim_{س\to ١} \frac{س^٢ - ٢س + ١}{|س-١|}$

$|س-١| = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\lim_{س\to ١} \frac{(س-١)(س-١)}{|س-١|} = \lim_{س\to ١} \frac{(س-١)^٢}{|س-١|}$

$\lim_{س\to ١} \frac{|س-١|}{|س-١|}$ ∴ $= ١$

٨ $\lim_{س\to ٢} \frac{س^٣ - ٤س + ٤}{س - ٢}$

$\lim_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س - ٢)}{س-٢} = \lim_{س\to ٢} (س^٢ + ٢س - ٢) = ٦$

٩ $\lim_{س\to ٠} [س]$

$\lim_{س\to ٠^+} [س] = ٠$ | $\lim_{س\to ٠^-} [س] = -١$

$\lim_{س\to ٠^+} ق(س) \neq \lim_{س\to ٠^-} ق(س)$ ∴ $\lim_{س\to ٠}$ غير موجود

$س$	-١	٠	١
$[س]$	-١	٠	١

$ق = \{(-١، -١)، (٠، ٠)، (١، ١)\}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

(١٠) $\lim_{س \to 1^+} \frac{س^2 - [س]}{|س-1| - س^2 - |س|}$

$[س] \leftarrow ل = 1$ ، $ص = ٠$

$1 \le س < 2 \Leftarrow 1$

$|س-1|$ ← ص = ٠

$\lim_{س \to 1^+} \frac{س^2 - [س]}{|س-1| - س^2 - |س|} = \lim \frac{س^2 - 1}{س - س^2} = \lim \frac{(س-1)(س+1)}{س(1-س)} = \frac{2}{-1} = \boxed{-2}$

(١١) $\lim_{س \to 2^+} \frac{[س-2]}{|س-1| - 1}$

$[س-2] \leftarrow ل = 1 \leftarrow س - 2 = ٠$ ، س = ٢

$٠ \le س - 2 < 1$ ، $2 \le س < 3$

$|س-1| - 1$ ← ص = ٢

$\lim_{س \to 2^+} \frac{[س-2]}{|س-1| - 1} = \lim \frac{صفر}{س-2}$ ∴ صفر .

(١٢) $\lim_{س \to 2^+} \frac{س^2 - 3س + [س]}{س - 2}$

$[س] \leftarrow ل = 1$ / س = ٠ ،

$1 \le س < 2$ ، $2 \le س < 3$

$= \lim \frac{س^2 - 3س + 2}{س - 2} = \lim \frac{(س-1)(س-2)}{س-2} = \lim (س-1) = 2 - 1 = ①$

(١٣) $\lim_{س \to 4} \frac{|3س - 5| - 7}{س^2 - س - 12}$

$|3س - 10|$ ← ص = $\frac{10}{3}$

$= \lim_{س \to 4} \frac{3س - 5 - 7}{س^2 - س - 12} = \lim \frac{3س - 12}{س^2 - س - 12}$

$= \lim \frac{3(س-4)}{(س-4)(س+3)} = \lim \frac{3}{س+3} = \frac{3}{7}$

(١٤) $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 \times |س-1| - 18}{س^2 - 9}$

$|س - 1|$ ← ص = ١

$= \lim_{س \to 3} \frac{س^2 (س - 1) - 18}{س^2 - 9} = \lim_{س \to 3} \frac{س^3 - س^2 - 18}{س^2 - 9}$

س³	س²	س	ثابت
1	-1	٠	-18
↓	3	6	18
1	2	6	صفر

$= \lim \frac{(س-3)(س^2 + 2س + 6)}{(س-3)(س+3)} = \frac{21}{6}$

(١٥) $\lim_{س \to 1} \frac{|2س - 1| - |4 - 5س|}{س - 1}$

$|2س - 1| \leftarrow 2س - 1 = ٠$ ، س = $\frac{1}{2}$

$|4 - 5س|$ ← $4 - 5س = ٠$ ، س = $\frac{4}{5}$

$\lim \frac{(2س - 1) - (5س - 4)}{س - 1} = \lim \frac{2س - 1 - 5س + 4}{س - 1}$

$= \lim \frac{-3س + 3}{س - 1} = \lim \frac{3(1 - س)}{س - 1} = \boxed{-3}$

(١٦) $\lim_{س \to 1} \frac{|س + أ| - 2}{س - 1} = -1$ ، جد قيمة أ

بما أن التعويض بالمقام صفر فإن البسط = صفر

$|1 + أ| - 2 = ٠ \leftarrow |1 + أ| = 2$

اما : $1 + أ = 2$ | $1 + أ = -2$

$أ = 1$ | $أ = -3$

حالة ① أ = ١ ⟸ $\lim_{س \to 1} \frac{|س+1| - 2}{س - 1} = \lim \frac{س + 1 - 2}{س - 1}$

$= \lim \frac{س - 1}{س - 1} = 1$ ✗ مرفوض .

حالة ② أ = −٣ ⟸ $\lim \frac{|س - 3| - 2}{س - 1} = \lim \frac{3 - س - 2}{س - 1}$

$= \lim \frac{1 - س}{س - 1} = -1$ ✓ ⟸ أ = −٣ .

(١٧) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س - 3}{|س - 3|} & ، س \le 3 \\ أ س^2 + 11 & ، س > 3 \end{cases}$

جد قيمة أ اذا كان $\lim_{س \to 3}$ ق(س) موجودة

لكي $\lim_{س \to 3^+} أ س^2 + 11 = \lim_{س \to 3^-} \frac{س - 3}{|س - 3|}$

$9أ + 11 = \lim_{س \to 3^-} \frac{س - 3}{3 - س}$

$9أ + 11 = -1 \leftarrow أ = \frac{-12}{9}$

(١٨) ق(س) = $\begin{cases} [س + 2] & ، س \le صفر \\ \frac{|س|}{س} & ، س > صفر \end{cases}$

احسب نها ق(س) س ← ٠

$[س + 2] \leftarrow ل = 1$ / س = −٢

ق(س) = $\begin{cases} 1 & ، -1 \le س \le صفر \\ \frac{س}{س} & ، س > صفر \end{cases}$ ، $-1 \le س < ٠$.

= $\begin{cases} 1 & ، -1 \le س \le صفر \\ 1 & ، س > صفر \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ١ ، $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ١ ⟸ نها ق(س) = ١

الاستاذ
ايـــاد عمـــاد عبـــاد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١ $\lim_{س \to 0} \frac{(٢٥)^{س} - (٥)^{س}}{٥^{س} - ١}$

نفرض $ص = ٥^{س}$ ، $س \to 0 \Leftarrow ص \to ١$

$\lim_{س \to 0} \frac{(٥^{س})^{٢} - ٥^{س}}{٥^{س} - ١}$

$\lim_{ص \to ١} \frac{ص^{٢} - ص}{ص - ١} = \lim_{ص \to ١} \frac{ص(ص-١)}{ص-١} = \lim_{ص \to ١} ص = ١$

---

٢ $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{س+١} - ٣}{٩^{س} - ١}$

$ص = ٣^{س}$ ، $س \to 0 \Leftarrow ص \to ١$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٣(٣^{س} - ١)}{(٣^{س})^{٢} - ١}$

$\lim_{ص \to ١} \frac{٣(ص-١)}{ص^{٢}-١} = \lim_{ص \to ١} \frac{٣(ص-١)}{(ص-١)(ص+١)} = \frac{٣}{٢}$

---

٣ $\lim_{س \to 0} \frac{٤^{س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦}{٤^{س} - ١}$

$ص = ٢^{س}$ ، $س \to 0$ فإنه $ص \to ١$

$\lim_{س \to 0} \frac{(٢^{س})^{٢} - ١٧(٢^{س}) + ١٦}{(٢^{س})^{٢} - ١}$

$\lim_{ص \to ١} \frac{ص^{٢} - ١٧ص + ١٦}{ص^{٢} - ١} = \lim \frac{(ص-١٦)(ص-١)}{(ص+١)(ص-١)}$

$\lim_{ص \to ١} \frac{ص - ١٦}{ص + ١} = \frac{١ - ١٦}{١ + ١} = \frac{-١٥}{٢}$

---

٤ $\lim_{س \to ١} \frac{٩^{س} - ٤ \times ٣^{س+١} + ٢٧}{٣^{س} - ٣}$

$ص = ٣^{س}$ ، $س \to ١$ فإنه $ص \to ٣$

$\lim_{ص \to ٣} \frac{ص^{٢} - ١٢ص + ٢٧}{ص - ٣} = \lim_{ص \to ٣} \frac{(ص-٩)(ص-٣)}{ص-٣} = ٣ - ٩ = -٦$

توحيد المقامات

١ $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{س-٢}\right)$

$\lim \frac{٢-س}{٢س} \times \frac{١}{س-٢} = \frac{-١}{٤}$

---

٢ $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{٣}{س} - \frac{٣}{٢}\right)\left(\frac{١}{س^{٢}-٤}\right)$

$= \lim \frac{٦ - ٣س}{٢س} \times \frac{١}{س^{٢}-٤}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{٣(٢-س)}{٢س} \times \frac{١}{(س+٢)(س-٢)} = \frac{-٣}{٤ \times ٤} = \frac{-٣}{١٦}$

---

٣ $\lim_{س \to 0} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{٣+س} - \frac{١}{٣-س}\right)$

$\lim \frac{١}{س}\left(\frac{٣-س-٣-س}{(س-٣)(س+٣)}\right)$

$= \lim \frac{١}{س}\left(\frac{-٢س}{(س-٣)(س+٣)}\right) = \frac{-٢}{(٠-٣)(٠+٣)} = \frac{-٢}{٩}$

---

٤ $\lim_{س \to ٢^{-}} \frac{\left|\frac{٣}{س+٥}\right| - \frac{٣}{٧}}{|س-٢|}$

$|س+٥| \leftarrow س = -٥ \leftarrow$ ، $س+٥$: -٥ ؛ $\boxed{٢}$

$|س-٢| \leftarrow س = ٢$: $-$ (س<٢) ، $+$ (س>٢)

$\lim_{س \to ٢^{-}} \frac{\frac{٣}{س+٥} - \frac{٣}{٧}}{٢-س} = \lim_{س \to ٢} \frac{٢١ - ٣س - ١٥}{(٢-س)(٧)(س+٥)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٦ - ٣س}{(٢-س)(٧)(س+٥)} = \lim \frac{٣(٢-س)}{(٢-س)(٧)(س+٥)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣}{(٧)(س+٥)} = \frac{٣}{٧ \times ٧} = \frac{٣}{٤٩}$

---

٥ $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{٧}{س^{٣}-٨}}{س-١}$

$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ٨ - ٧س + ١٤}{(س-١)(س^{٣}-٨)(س-٢)}$

$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{(س-١)(س^{٣}-٨)(س-٢)}$ ← تركيب

١	١	٠	−٧	٦
	↓	١	١	−٦
	١	١	−٦	٠

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{٢}+س-٦)}{(س-١)(س^{٣}-٨)(س-٢)} = \frac{١+١-٦}{(١-٨)(١-٢)} = \frac{-٤}{٧}$

---

٦ $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^{٢}+١٢}{س^{٢}-٤} - \frac{س+٢}{س-٢}\right)$

$\lim \frac{س^{٢}+١٢}{س^{٢}-٤} - \frac{س+٢}{س-٢} \times \frac{س+٢}{س+٢}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢}+١٢ - (س+٢)^{٢}}{س^{٢}-٤} = \lim \frac{س^{٢}+١٢ - س^{٢} - ٤س - ٤}{س^{٢}-٤}$

$\lim \frac{٨ - ٤س}{س^{٢}-٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{٤(٢-س)}{(س+٢)(س-٢)} = \frac{-٤}{٤} = -١$

---

٧ $\lim_{س \to ٣} \frac{١}{س-٣}\left(\frac{١}{س+٢} - \frac{٤}{٣س+١١}\right)$

$\lim \frac{١}{س-٣}\left(\frac{٣س + ١١ - ٤س - ٨}{(٣س+١١)(س+٢)}\right)$

$\lim \frac{١}{س-٣}\left(\frac{٣ - س}{(٣س+١١)(س+٢)}\right)$

$\lim_{س \to ٣} \frac{-١}{(٣س+١١)(س+٢)} = \frac{-١}{٢٠ \times ٥} = \frac{-١}{١٠٠}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

الضرب بالمرافق التربيعي :

١ $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٣س+١} - ٤}{س - ٥} = \div$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(\sqrt{٣س+١} - ٤)(\sqrt{٣س+١} + ٤)}{(س-٥)(\sqrt{٣س+١} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{(س-٥)(\sqrt{٣س+١} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٣(س-٥)}{(س-٥)(\sqrt{٣س+١} + ٤)} = \frac{٣}{٨}$

٢ $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{٥س+٤} - ٣} = \div$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(\sqrt{٥س+٤} + ٣)}{(س-١)(\sqrt{٣س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٥س+٤} + ٣}{\sqrt{٣س+١} + ٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٤س+١} - ١}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٤س+١} - ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)}{س(\sqrt{٤س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤س}{س(\sqrt{٤س+١} + ١)} = \frac{٤}{٢} = ٢$

٤ $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} = \div$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س+١} - ٢)(\sqrt{س+١} + ٢)}{(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)} = \frac{١}{٤}$

٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+١} - ١}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{س+١} - ١)(\sqrt{س+١} + ١)}{س(\sqrt{س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س(\sqrt{س+١} + ١)} = \frac{١}{٢}$

٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢س+١} - ١}{\sqrt{٣س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٢س+١} - ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س(\sqrt{٣س+١} + ١)}{٣س(\sqrt{٢س+١} + ١)} = \frac{٢}{٣}$

٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٤} - ٢}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{س+٤} - ٢)(\sqrt{س+٤} + ٢)}{س(\sqrt{س+٤} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س(\sqrt{س+٤} + ٢)} = \frac{١}{٤}$

٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢س+١} - ١}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٢س+١} - ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)}{س(\sqrt{٢س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{س(\sqrt{٢س+١} + ١)} = \frac{٢}{٢} = ١$

٩ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣س+١} - ١}{\sqrt{٢س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)}{(\sqrt{٢س+١} - ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س(\sqrt{٢س+١} + ١)}{٢س(\sqrt{٣س+١} + ١)} = \frac{٣}{٢}$

١٠ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٩} - ٣}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{س+٩} - ٣)(\sqrt{س+٩} + ٣)}{س(\sqrt{س+٩} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س(\sqrt{س+٩} + ٣)} = \frac{١}{٦}$

١١ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٤س+١} - ١}{\sqrt{٣س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٤س+١} - ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤س(\sqrt{٣س+١} + ١)}{٣س(\sqrt{٤س+١} + ١)} = \frac{٤}{٣}$

١٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢س+١} - ١}{\sqrt{س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٢س+١} - ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)(\sqrt{س+١} + ١)}{(\sqrt{س+١} - ١)(\sqrt{س+١} + ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س(\sqrt{س+١} + ١)}{س(\sqrt{٢س+١} + ١)} = \frac{٢}{٢} = ١$

١٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣س+١} - ١}{\sqrt{٢س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)}{(\sqrt{٢س+١} - ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س(\sqrt{٢س+١} + ١)}{٢س(\sqrt{٣س+١} + ١)} = \frac{٣}{٢}$

١٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٥س+٤} - ٢}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٥س+٤} - ٢)(\sqrt{٥س+٤} + ٢)}{س(\sqrt{٥س+٤} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥س}{س(\sqrt{٥س+٤} + ٢)} = \frac{٥}{٤}$

١٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣س+١} - ١}{\sqrt{٤س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)}{(\sqrt{٤س+١} - ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س(\sqrt{٤س+١} + ١)}{٤س(\sqrt{٣س+١} + ١)} = \frac{٣}{٤}$

١٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٥س+١} - ١}{\sqrt{٣س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٥س+١} - ١)(\sqrt{٥س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٥س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥س(\sqrt{٣س+١} + ١)}{٣س(\sqrt{٥س+١} + ١)} = \frac{٥}{٣}$

١٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢س+٩} - ٣}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٢س+٩} - ٣)(\sqrt{٢س+٩} + ٣)}{س(\sqrt{٢س+٩} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{س(\sqrt{٢س+٩} + ٣)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

١٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣س+٤} - ٢}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٣س+٤} - ٢)(\sqrt{٣س+٤} + ٢)}{س(\sqrt{٣س+٤} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س}{س(\sqrt{٣س+٤} + ٢)} = \frac{٣}{٤}$

١٩ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٤س+١} - ١}{\sqrt{٢س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٤س+١} - ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)}{(\sqrt{٢س+١} - ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤س(\sqrt{٢س+١} + ١)}{٢س(\sqrt{٤س+١} + ١)} = \frac{٤}{٢} = ٢$

٢٠ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٥س+٩} - ٣}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٥س+٩} - ٣)(\sqrt{٥س+٩} + ٣)}{س(\sqrt{٥س+٩} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥س}{س(\sqrt{٥س+٩} + ٣)} = \frac{٥}{٦}$

٢١ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣س+١} - ١}{\sqrt{٥س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٥س+١} + ١)}{(\sqrt{٥س+١} - ١)(\sqrt{٥س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س(\sqrt{٥س+١} + ١)}{٥س(\sqrt{٣س+١} + ١)} = \frac{٣}{٥}$

٢٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٤س+٩} - ٣}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٤س+٩} - ٣)(\sqrt{٤س+٩} + ٣)}{س(\sqrt{٤س+٩} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤س}{س(\sqrt{٤س+٩} + ٣)} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

٢٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٥س+٤} - ٢}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٥س+٤} - ٢)(\sqrt{٥س+٤} + ٢)}{س(\sqrt{٥س+٤} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥س}{س(\sqrt{٥س+٤} + ٢)} = \frac{٥}{٤}$

٢٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣س+١} - ١}{\sqrt{٤س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)}{(\sqrt{٤س+١} - ١)(\sqrt{٤س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س(\sqrt{٤س+١} + ١)}{٤س(\sqrt{٣س+١} + ١)} = \frac{٣}{٤}$

٢٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢س+١} - ١}{\sqrt{٣س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٢س+١} - ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)}{(\sqrt{٣س+١} - ١)(\sqrt{٣س+١} + ١)(\sqrt{٢س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س(\sqrt{٣س+١} + ١)}{٣س(\sqrt{٢س+١} + ١)} = \frac{٢}{٣}$

المرافقة التكعيبي

١ $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt[٣]{٣س+١} - ٣} = \div$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt[٣]{(٣س+١)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{٣س+١} + ٩)}{(\sqrt[٣]{٣س+١} - ٣)(\sqrt[٣]{(٣س+١)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{٣س+١} + ٩)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt[٣]{(٣س+١)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{٣س+١} + ٩)}{٣س - ٢٦}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt[٣]{(٣س+١)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{٣س+١} + ٩)}{٣(س-٨)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(\sqrt[٣]{(٣س+١)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{٣س+١} + ٩)}{٣(س^{٢}+٢س+٤)} = \frac{٢٧}{٣ \times ١٢} = \frac{٣}{٤}$

٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٨س+١} - ١}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٨س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٨س}{س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)} = \frac{٨}{٣} = ٨$

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}{س(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢٧س}{س(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)} = \frac{٢٧}{٣} = ٩$

٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢٧س+٨} - ٢}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٢٧س+٨} - ٢)(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)}{س(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢٧س}{س(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)} = \frac{٢٧}{١٢} = \frac{٩}{٤}$

٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢٧س+٨} - ٢}{س} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٢٧س+٨} - ٢)(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)}{س(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢٧س}{س(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)} = \frac{٢٧}{١٢} = \frac{٩}{٤}$

٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٨س+١} - ١}{\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٨س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}{(\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٨س(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}{٢٧س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)} = \frac{٨}{٢٧}$

٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢٧س+٨} - ٢}{\sqrt[٣]{٨س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٢٧س+٨} - ٢)(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{(\sqrt[٣]{٨س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢٧س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{٨س(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)} = \frac{٢٧}{٣٢}$

٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١}{\sqrt[٣]{٨س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{(\sqrt[٣]{٨س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢٧س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{٨س(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)} = \frac{٢٧}{٨}$

٩ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٨س+١} - ١}{\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٨س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}{(\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٨س(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}{٢٧س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)} = \frac{٨}{٢٧}$

١٠ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢٧س+٨} - ٢}{\sqrt[٣]{٨س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٢٧س+٨} - ٢)(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{(\sqrt[٣]{٨س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢٧س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{٨س(\sqrt[٣]{(٢٧س+٨)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{٢٧س+٨} + ٤)} = \frac{٢٧}{٣٢}$

١١ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١}{\sqrt[٣]{٨س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{(\sqrt[٣]{٨س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢٧س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}{٨س(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)} = \frac{٢٧}{٨}$

١٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٨س+١} - ١}{\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt[٣]{٨س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}{(\sqrt[٣]{٢٧س+١} - ١)(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٨س(\sqrt[٣]{(٢٧س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٢٧س+١} + ١)}{٢٧س(\sqrt[٣]{(٨س+١)^{٢}} + \sqrt[٣]{٨س+١} + ١)} = \frac{٨}{٢٧}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

[3] $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^3}-1\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x^3}{x^3}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)\times\frac{1+x^3+x^6}{1+x^3+x^6}$

$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x^3}\times\frac{1}{x-1}\times\frac{1}{1+x^3+x^6}$

$=\frac{3}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

[4] $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1}$

نفرض $x=y^5$, $x\to 1\Rightarrow y\to 1$

$\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^5-1}$, $\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}$

$=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{1}{5}$

الاضافة والطرح

[1] $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

[2] $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{-\sqrt[3]{x^2+7}+2}{x-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-16}{(x-1)(\sqrt{x^2+9}+5)}+\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+8}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)}$

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-1)(x+4)}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2-8)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2-8)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{\sqrt[3]{x^2+7}-2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2-8)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^2+7)^3}-8)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{\sqrt[3]{x^2+7}-2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2-8)}{(x-1)(x^2+7-8)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{\sqrt[3]{x^2+7}-2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2-8)}{(x-1)(x^2-1)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{\sqrt[3]{x^2+7}-2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2-8)}{(x-1)^2(x+1)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{\sqrt[3]{x^2+7}-2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2-8)}{(x-1)^2(x+1)}\times\frac{x^2-1}{(\sqrt[3]{x^2+7}-2)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2-8)}{(x-1)(x+1)}\times\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2+7}-2)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)}$

$\frac{5}{10}+\frac{-7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{-7}{12}=\frac{6-7}{12}=\frac{-1}{12}$

مرافقة تكعيبي

مرافقة تربيعي

[3] $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-2}-\sqrt{7}}{x-3}$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{7}}{x-3}+\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8}{(x-3)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{7})}+\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{7})}+\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{7})}+\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\times\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{7})}+\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}+1}{(x-3)(x-2-1)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{7})}+\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}+1}{(x-3)^2}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{7})}+\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}+1}{(x-3)^2}\times\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}-1}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{7})}+\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)^2(\sqrt{x-2}-1)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{7})}+\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)(\sqrt{x-2}-1)}$

$\frac{1}{5\sqrt{7}}+\frac{1}{2}=\frac{2+5\sqrt{7}}{10\sqrt{7}}$

[4] $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6}{x^3-2x^2-7x+6}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6}{(x-3)(x^2+x-2)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6}{(x-3)(x+2)(x-1)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6}{(x-3)(x+2)(x-1)}\times\frac{x^2+3x+9}{x^2+3x+9}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6}{(x-3)(x+2)(x-1)(x^2+3x+9)}$

$\frac{3}{5\times 19}=\frac{3}{95}$

[5] $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)^2\sqrt{x}-3x^2}$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)^2\sqrt{x}-3x(x-3)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)(x-3)\sqrt{x}-3x(x-3)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)(x-3-3\sqrt{x})}$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)(x-3\sqrt{x}-3)}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-3\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$\frac{1}{(3-3\sqrt{3}-3)(\sqrt{3+1}+2)}$

$\frac{1}{(-3\sqrt{3})(4)}=\frac{-1}{12\sqrt{3}}$

تضعيف ونعوض $(x+2)^2\sqrt{x}=16\sqrt{3}$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)^2\sqrt{x}-16\sqrt{3}}{x-3}+\lim_{x\to 3}\frac{16\sqrt{3}-16\sqrt{x}}{x-3}$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)^2\sqrt{x}-16\sqrt{3}}{x-3}+\lim_{x\to 3}\frac{16(\sqrt{3}-\sqrt{x})}{x-3}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)^2\sqrt{x}-16\sqrt{3}}{x-3}+\lim_{x\to 3}\frac{16(3-x)}{(x-3)(\sqrt{3}+\sqrt{x})}$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)^2\sqrt{x}-16\sqrt{3}}{x-3}+\lim_{x\to 3}\frac{-16}{\sqrt{3}+\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x+7)(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+2)}+\frac{-16}{2\sqrt{3}}$

$\lim_{x\to 3}(x+7)+\frac{-8}{\sqrt{3}}$

$10+\frac{-8}{\sqrt{3}}$

$\frac{10\sqrt{3}-8}{\sqrt{3}}$

$3x+6=33$

$3x=27$

$x=9$

٦ $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٢}$

نضيف ونطرح ٤ بسط

$= \lim \frac{\sqrt{س+٢} - ٤}{س-٢} + \lim \frac{-٤+٧}{س-٢}$

$= \lim \frac{س-٢}{(س-٢)(\sqrt{س+٢}+٤)} + \lim \frac{٣}{س-٢}$

$= \frac{١}{٤+٤} + \infty = \infty$

٧ $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س - ٧}$

$= \lim \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{(س-٧)(\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤)} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}{\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}$

$= \lim \frac{س-٧}{(س-٧)(\sqrt[٣]{(س+١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤)}$

$= \frac{١}{٤+٤+٤} = \frac{١}{١٢}$

٨ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{\sqrt[٣]{س} - ١}$

$= \lim \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{(\sqrt[٣]{س}-١)(\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+١)} \times \frac{\sqrt{س+٣}+٢}{\sqrt{س+٣}+٢} \times \frac{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+١}{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+١}$

$= \lim \frac{س-١}{(س-١)(\sqrt{س+٣}+٢)} \times \frac{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+١}{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+١}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٣} = \frac{٣}{٤}$

٩ $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س+٥} - ٣}{س - ٤}$

$= \lim \frac{\sqrt{س+٥} - ٣}{(س-٤)(\sqrt{س+٥}+٣)} \times \frac{\sqrt{س+٥}+٣}{\sqrt{س+٥}+٣}$

$= \lim \frac{س-٤}{(س-٤)(\sqrt{س+٥}+٣)}$

$= \frac{١}{٣+٣} = \frac{١}{٦}$

١٠ $\lim_{س \to ٢} \frac{٤-س^٢}{س-٢} + \frac{س^٣-٤س}{٢-س}$

$= \lim \frac{٤-س^٢}{س-٢} + \frac{س^٣-٤س}{-(س-٢)}$

$= \lim \frac{(٢-س)(٢+س)}{س-٢} + \frac{س(س^٢-٤)}{-(س-٢)}$

$= \lim \frac{-(س-٢)(٢+س)}{س-٢} + \frac{-س(س-٢)(س+٢)}{س-٢}$

$= \lim -(٢+س) - س(س+٢)$

$= -٤ - ٨ = -١٢$

١١ إذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{م س^٣ - ١}{س - ١} = ٦$ فما قيمة م

$= \lim \frac{(م س - ١)(م^٢ س^٢ + م س + ١)}{(م س - ١)} = م^٢ + م + ١ = ٦$

$م^٢ + م - ٥ = ٠$

$(م + ٥)(م - ١) = ٠$

$م = -٥$ أو $م = ١$

١٢ إذا كان $\lim_{س \to ٣} \frac{ب}{س-٣} + \frac{٩-س^٢}{أ} = \frac{١}{٦}$ فما قيم أ، ب

$\lim \frac{ب}{س-٣} + \frac{(٣-س)(٣+س)}{أ} = \frac{١}{٦}$

$\lim \frac{ب(س+٣) + أ}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦}$

بما أن المقدار $\to$ صفر فإن البسط $\to$ صفر

$ب(٣+٣) + أ = ٠ \Rightarrow ٦ب + أ = ٠ \Rightarrow أ = -٦ب$

$\lim \frac{ب(س+٣) - ٦ب}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦}$

$\lim \frac{ب س + ٣ب - ٦ب}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦}$

$\lim \frac{ب(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦} \Rightarrow \frac{ب}{٦} = \frac{١}{٦} \Rightarrow ب = ١$

$أ = -٦ب \Rightarrow أ = -٦$

١٣ إذا كان $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + أس + ب}{س - ٥} = ٧$ فما قيم أ، ب

بما أن المقدار $\to$ صفر فإن البسط $\to$ صفر.

$٥^٢ + ٥أ + ب = ٠ \Rightarrow ب = -٥أ - ٢٥$

$\lim \frac{س^٢ + أس - ٥أ - ٢٥}{س - ٥} = ٧$

$\lim \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)} + \lim \frac{أ(س-٥)}{(س-٥)} = ٧$

$١٠ + أ = ٧ \Rightarrow أ = -٣$

$ب = -٥أ - ٢٥$

$= -٥ \times -٣ - ٢٥$

$= ١٥ - ٢٥ = -١٠$

٩ إذا كان $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+٦} - ٣}{س - ٣}$ واجب

١٠ إذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{٤-س^٢}{س-٢} + \frac{س^٣-٤س}{٢-س}$

$= \lim \frac{٤-س^٢}{س-٢} + \frac{س^٣-٤س}{-(س-٢)}$

$= \lim \frac{(٢-س)(٢+س)}{س-٢} + \frac{س(س^٢-٤)}{-(س-٢)}$

$= \lim -(٢+س) - س(س+٢)$

$= -٤ - ٨ = -١٢$

١١ إذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{م س^٣ - ١}{س - ١} = ٦$ فما قيمة م

$= \lim \frac{(م س - ١)(م^٢ س^٢ + م س + ١)}{(م س - ١)} = م^٢ + م + ١ = ٦$

$م = ٥$

١٢ إذا كان $\lim_{س \to ٣} \frac{ب}{س-٣} + \frac{٩-س^٢}{أ} = \frac{١}{٦}$ فما قيم أ، ب

$\lim \frac{ب}{س-٣} + \frac{(٣-س)(٣+س)}{أ} = \frac{١}{٦}$

$\lim \frac{ب(س+٣) + أ}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦}$

بما أن المقدار $\to$ صفر فإن البسط $\to$ صفر

$ب(٣+٣) + أ = ٠ \Rightarrow ٦ب + أ = ٠ \Rightarrow أ = -٦ب$

$\lim \frac{ب(س+٣) - ٦ب}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦}$

$\lim \frac{ب س + ٣ب - ٦ب}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦}$

$\lim \frac{ب(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦} \Rightarrow \frac{ب}{٦} = \frac{١}{٦} \Rightarrow ب = ١$

$أ = -٦ب \Rightarrow أ = -٦$

١٣ إذا كان $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + أس + ب}{س - ٥} = ٧$ فما قيم أ، ب

بما أن المقدار $\to$ صفر فإن البسط $\to$ صفر.

$٥^٢ + ٥أ + ب = ٠ \Rightarrow ب = -٥أ - ٢٥$

$\lim \frac{س^٢ + أس - ٥أ - ٢٥}{س - ٥} = ٧$

$\lim \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)} + \lim \frac{أ(س-٥)}{(س-٥)} = ٧$

$١٠ + أ = ٧ \Rightarrow أ = -٣$

$ب = -٥أ - ٢٥$

$= -٥ \times -٣ - ٢٥$

$= ١٥ - ٢٥ = -١٠$

١٤) $\lim_{س\to ٢} \frac{أ س^{٣} + ب س - ١٢}{س^{٢} - ٤} = ٧$ ، أوجد قيم أ، ب

بما أن $\lim_{س\to ٢} (س^{٢} - ٤) = ٠$ فإن $\lim_{س\to ٢} (أ س^{٣} + ب س - ١٢) = ٠$

$٨أ + ٢ب - ١٢ = ٠$ ← $٤أ + ب = ٦$ ← $ب = ٦ - ٤أ$

$\lim_{س\to ٢} \frac{أ س^{٣} + (٦ - ٤أ) س - ١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} = ٧$

$\lim_{س\to ٢} \frac{أ س^{٢} + ٢أ س + ٦ - ٤أ}{س + ٢} = ٧$

$\frac{٤أ + ٦ - ٤أ}{٤} = ٧$ ← $٦ = ٢٨$ ← $أ = ١١$

$ب = ٦ - ٤(١١) = -٣٨$

١٥) إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ب س^{٢} - ١١ & ، س < ٢ \\ \frac{س^{٣} - ٢س + ٦}{س - ٢} & ، س > ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س\to ٢} هـ(س)$ موجودة فما قيمة أ

الحل:

بما أن النهاية موجودة فإنه ينتج العين موجودة

ونتج اليسار موجودة.

$\lim_{س\to ٢} \frac{س^{٣} - ٢س + ٦}{س - ٢}$ موجودة

والمقام = صفر فإنه البسط = صفر

$\lim_{س\to ٢} س^{٣} - ٢س + ٦ = صفر$ ← $٨ - ٤ + ٦ = صفر$ ← $صفر = ١٠$

$\lim_{س\to ٢} \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{س - ٢}$ ÷ (قسمة تركيبية)

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	ثابت
	١	٠	-٧	٦
٢	↓	٢	٤	-٦
	١	٢	-٣	٠

$\lim_{س\to ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س - ٣)}{س - ٢}$ = ٥

$\lim_{س\to ٢} هـ(س) = \lim_{س\to ٢} ب س^{٢} - ١١ = ٤ب - ١١ = ٥$

ب = ٤

١٦) إذا كانت $\lim_{س\to ٣} \frac{س - ٣}{أ س^{٢} - س - ٦}$ غير موجودة فما قيمة أ

الحل: $\lim_{س\to ٣} س - ٣ = ٠$

$\lim_{س\to ٣} (س - ٣)(س + ٢) = صفر$

$٣ + ٢ = ٠ = ٣أ - ٦$ ← $أ = -٢$

١٧) $\lim_{س\to ٣} \frac{س - ٣}{س^{٣} + أ س + ب}$ غير موجودة حيث أ، ب ثوابت

الحل:

$\lim_{س\to ٣} س^{٣} + أ س + ب = صفر$

$٢٧ + ٣أ + ب = صفر$ ← $ب = -٣أ - ٢٧$

البسط = صفر ← $\lim_{س\to ٣} س^{٣} + أ س + ب = صفر$

$٩ + ٣أ + ب = صفر$ ← $ب = -٣أ - ٩$

$\lim_{س\to ٣} \frac{س^{٣} + أ س - ٣أ - ٩}{س - ٣} = صفر$

$\lim_{س\to ٣} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + أ + ٣)}{س - ٣} = صفر$

$\lim_{س\to ٣} س^{٢} + ٣س + أ + ٣ = صفر$ ← $٩ + ٩ + أ + ٣ = صفر$

$أ = -٢١$ ← $ب = -٣(-٢١) - ٩ = ٥٤$

١٨) $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س < ٣ \\ ٤س - ١٢ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

فما قيمة أ إذا كانت $\lim_{س\to ٣} هـ(س)$ موجودة

الحل:

بما أن $\lim_{س\to ٣}$ موجودة فإنه $\lim_{س\to ٣^{+}} = \lim_{س\to ٣^{-}}$

$\lim_{س\to ٣^{+}} ٤س - ١٢ = \lim_{س\to ٣^{-}} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

$٤أ - ١٢ = \lim_{س\to ٣^{-}} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$

$٤أ - ١٢ = ٦$ ← $٤أ = ١٨$ ← $أ = ٥$

١٩) إذا كانت $\lim_{س\to ٣} \frac{هـ(س) - ٩}{س - ٣} = ١٤$

أوجد $\lim_{س\to ٣} \frac{هـ(س) - ٤س}{س - ٣}$

الحل: نضيف ونطرح ٩ ← $\lim_{س\to ٣} \frac{هـ(س) - ٤س + ٩ - ٩}{س - ٣}$

$\lim_{س\to ٣} \frac{هـ(س) - ٩}{س - ٣} + \lim_{س\to ٣} \frac{٩ - ٤س}{س - ٣}$

$١٤ + \lim_{س\to ٣} \frac{(٣ - س)(٣ + س)}{س - ٣} = ٦ + ٨ = ١٤$

٢٠) إذا كانت $\lim_{س\to ٥} \frac{هـ(س) - ٧}{س - ٥} = ١٨$

فأوجد $\lim_{س\to ٥} \frac{س^{٢} - ٢س + ١٥}{هـ(س) - ٧}$

الحل: اقسم البسط والمقام على $(س - ٥)$

$\lim_{س\to ٥} \frac{\frac{س^{٢} - ٢س + ١٥}{س - ٥}}{\frac{هـ(س) - ٧}{س - ٥}} = \frac{\lim_{س\to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٥}}{١٨}$

$= \frac{\lim_{س\to ٥} س + ٣}{١٨} = \frac{٨}{١٨}$

٢١) إذا كانت $\lim_{س\to ٢} \frac{هـ(س) - ٣}{س - ٢} = ٥$

أوجد $\lim_{س\to ٢} \frac{س^{٢} هـ(س) - ١٢}{س - ٢}$

الحل: نضيف ونطرح ٤ هـ(س)

$\lim_{س\to ٢} \frac{س^{٢} هـ(س) - ٤هـ(س)}{س - ٢} + \lim_{س\to ٢} \frac{٤هـ(س) - ١٢}{س - ٢}$

$هـ(٢) \times (س + ٢) + ٤ \times ٥$

$س \times ٤ + ٤ \times ٥ = ٣٢$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

تدريبات وتمارين الكتاب

١ $\lim_{س\to٣} \frac{س^٢-٤س+٣}{س-٣}$ و $\lim_{س\to٣} \frac{(س-٣)(س-١)}{س-٣} = ٣-١ = ٢$

٢ $\lim_{س\to٥} \left(\frac{١}{س-٥} - \frac{٥}{س^٢-٢٥}\right)$

$= \lim_{س\to٥} \frac{س^٢-١٠س+٢٥}{س^٢-٢٥} \times \frac{١}{س-٥} = \lim_{س\to٥} \frac{(س-٥)^٢}{(س-٥)(س+٥)} \times \frac{١}{(س-٥)}$

$= \frac{٥-٥}{٥+٥} \times \frac{١}{١٠} = \frac{٠}{٢٥} = ٠$

٣ $\lim_{س\to٢} \frac{س^٣-٣س+٢}{س^٢-٧}$ ← قسمة تركيبية

$\lim_{س\to٢} \frac{(س-٢)(س^٢+٢س+١)}{(س-٢)(س+٣)} = \frac{٩}{٥} = \frac{١٢}{٤}$

٤ $\lim_{س\to٢} \frac{س^٣-٧}{س^٢-٤}$ و $\lim_{س\to٢} \frac{(س-٢)(٤+٢س+س^٢)}{(س-٢)(س+٢)} = ١٢$

٥ $\lim_{س\to٧} \frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{س-٨} \times \frac{(\sqrt[٣]{س+١})^٢+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤}{(\sqrt[٣]{س+١})^٢+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤}$

$= \lim_{س\to٧} \frac{س+١-٨}{(س-٨)((\sqrt[٣]{س+١})^٢+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤)} = \frac{١}{٢١}$

١ $\lim_{س\to١} \frac{(س+١)^٦-١٧}{س-١}$

$\lim_{س\to١} \frac{(س-١)(٩+٩+٩)(س+١+٩)}{(-١)(س-١)} = -٧١$

٢ $\lim_{س\to\frac{١}{٢}} \frac{٨س-٤}{٧-٣س^٢}$

$\lim_{س\to\frac{١}{٢}} \frac{٨(س-\frac{١}{٢})}{٧(\frac{١}{٢}-س^٢)} = \lim_{س\to\frac{١}{٢}} \frac{٨(س-\frac{١}{٢})}{٧(\frac{١}{٢}-س)(\frac{١}{٢}+س)} = \frac{٨}{٧(١)} = \frac{٨}{٧}$

٣ $\int_{-١}^{٢} \frac{٣س^٢-٥س+٢}{س^٣-٣س+١}$ د س

فما تتبع ب وبالتالي تكامل صواب.

$\lim_{س\to١} \frac{(س-١)(٣س-٢)}{(س-١)(س^٢+س-٢)} = \frac{١}{٣} = ب \Leftarrow ب = ١$

٤ $\lim_{س\to٢} \frac{|س-٣|-١}{س-٢}$

س	٢		٣		٤
س−٣	−		٠	+	+
|س−٣|−١	+		−		+

$\lim_{س\to٢^+} \frac{س-٣+١}{س-٢} = \lim_{س\to٢^+} \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

$\lim_{س\to٢^-} \frac{-(س-٣)-١}{س-٢} = \lim_{س\to٢^-} \frac{-س+٢}{س-٢} = -١$

∴ النهاية غير موجودة

٥ $\lim_{س\to٠} \frac{[٢س]}{٣-س}$

$\lim_{س\to٠^+} \frac{٠}{٣-س} = ٠$

$\lim_{س\to٠^-} \frac{-١}{٣-س} = -\frac{١}{٣}$

∴ النهاية غير موجودة

٦ $\lim_{س\to٥} \frac{س^٢-٢٥}{س^٣-٣س-٥}$

$\lim_{س\to٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)(س^٢+٥س+٢٨)} = \frac{١٠}{١٥٣} \neq ٠$

∴ النهاية غير موجودة

٧ $\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{٣-٣س+س^٢}}{س-٢}$

$\lim_{س\to٢^+} \frac{\sqrt{(س-١)(س-٢)}}{س-٢} = \lim_{س\to٢^+} \frac{|س-١|}{س-٢} = +\infty$

$\lim_{س\to٢^-} \frac{\sqrt{(س-١)(٢-س)}}{٢-س} = \lim_{س\to٢^-} \frac{|س-١|}{٢-س} = -\infty$

∴ النهاية غير موجودة

٨ $\lim_{س\to٧} \frac{\sqrt{س-٨}}{٧-س}$

س	٧		٨
٧−س	+		−
√(س−٨)	٠	+	

$\lim_{س\to٧^+} \frac{\sqrt{س-٨}}{٧-س}$ غير معرفة لأن $\sqrt{س-٨}$ غير معرفة على ح، ٨

$\lim_{س\to٧^-} \frac{\sqrt{س-٨}}{٧-س} = \frac{\sqrt{-١}}{٠^+} = -\infty$

∴ النهاية غير موجودة

٩ $\lim_{س\to٧} \frac{\sqrt[٣]{س-٨}-١}{س-٧}$

$\lim_{س\to٧} \frac{\sqrt[٣]{س-٨}-١}{س-٧} \times \frac{(\sqrt[٣]{س-٨})^٢+\sqrt[٣]{س-٨}+١}{(\sqrt[٣]{س-٨})^٢+\sqrt[٣]{س-٨}+١}$

$= \lim_{س\to٧} \frac{س-٨-١}{(س-٧)((\sqrt[٣]{س-٨})^٢+\sqrt[٣]{س-٨}+١)} = \frac{١}{٣}$

١٠ $\lim_{س\to٠} \frac{\sqrt{٤+٣س}-٢}{س^٢+٣س}$

$\lim_{س\to٠} \frac{\sqrt{٤+٣س}-٢}{س^٢+٣س} \times \frac{\sqrt{٤+٣س}+٢}{\sqrt{٤+٣س}+٢}$

$= \lim_{س\to٠} \frac{٤+٣س-٤}{(س^٢+٣س)(\sqrt{٤+٣س}+٢)} = \frac{٣}{٤}$

١١ $\lim_{ص\to١} \frac{ص^٣-٣ص+٢}{ص^٤-٤ص+٣}$

$\lim_{ص\to١} \frac{(ص-١)(ص^٢+ص-٢)}{(ص-١)(ص^٣+ص^٢+ص-٣)} = \lim_{ص\to١} \frac{ص^٢+ص-٢}{ص^٣+ص^٢+ص-٣}$

$= \frac{١+١-٢}{١+١+١-٣} = \frac{٠}{٠}$ ← صيغة غير معينة

$= \lim_{ص\to١} \frac{(ص-١)(ص+٢)}{(ص-١)(ص^٢+٢ص+٣)} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

١٢ $\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٤}-٢}{ص}$

$\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٤}-٢}{ص} \times \frac{\sqrt{ص+٤}+٢}{\sqrt{ص+٤}+٢}$

$= \lim_{ص\to٠} \frac{ص+٤-٤}{ص(\sqrt{ص+٤}+٢)} = \frac{١}{٤}$

١٣ $\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٩}-٣}{ص^٢+ص}$

$\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٩}-٣}{ص^٢+ص} \times \frac{\sqrt{ص+٩}+٣}{\sqrt{ص+٩}+٣}$

$= \lim_{ص\to٠} \frac{ص+٩-٩}{(ص^٢+ص)(\sqrt{ص+٩}+٣)} = \frac{١}{٦}$

١٤ $\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٤}-٢}{\sqrt{ص+٩}-٣}$

$\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٤}-٢}{\sqrt{ص+٩}-٣} \times \frac{\sqrt{ص+٤}+٢}{\sqrt{ص+٤}+٢} \times \frac{\sqrt{ص+٩}+٣}{\sqrt{ص+٩}+٣}$

$= \lim_{ص\to٠} \frac{(ص+٤-٤)(\sqrt{ص+٩}+٣)}{(ص+٩-٩)(\sqrt{ص+٤}+٢)} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

١٥ $\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٤}-٢}{\sqrt{ص+٩}-٣}$

$\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٤}-٢}{\sqrt{ص+٩}-٣} \times \frac{\sqrt{ص+٤}+٢}{\sqrt{ص+٤}+٢} \times \frac{\sqrt{ص+٩}+٣}{\sqrt{ص+٩}+٣}$

$= \lim_{ص\to٠} \frac{(ص+٤-٤)(\sqrt{ص+٩}+٣)}{(ص+٩-٩)(\sqrt{ص+٤}+٢)} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

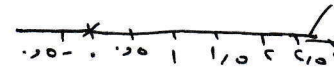
١٦ $\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٤}-٢}{\sqrt{ص+٩}-٣}$

$\lim_{ص\to٠} \frac{\sqrt{ص+٤}-٢}{\sqrt{ص+٩}-٣} \times \frac{\sqrt{ص+٤}+٢}{\sqrt{ص+٤}+٢} \times \frac{\sqrt{ص+٩}+٣}{\sqrt{ص+٩}+٣}$

$= \lim_{ص\to٠} \frac{(ص+٤-٤)(\sqrt{ص+٩}+٣)}{(ص+٩-٩)(\sqrt{ص+٤}+٢)} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

١٠ ما مجموعة قيم م التي تجعل
$\lim_{س \to م} [\![س]\!] = ٣$

الحل $ل = \frac{١}{٢}$ عند $س = ٠$



$[\![س]\!] = \begin{cases} ٢ & ٠ \le س < ١ \\ ٣ & ١,٥ \le س < ٢ \\ ٤ & ٢ \le س < ٣ \end{cases}$

$\therefore \lim_{س \to م} [\![س]\!] = ٣$ عندما $١,٥ \le م < ٢$

١١ اذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} & ، س < ك \\ ٣ س - ٢ & ، س \ge ك \end{cases}$

ما مجموعة قيم ك التي تجعل $\lim_{س \to ك} د(س)$ موجود

الحل $\lim_{س \to ك^+} د(س) = \lim_{س \to ك^-} د(س)$

$\lim_{س \to ك^+} ٣ س - ٢ = \lim_{س \to ك^-} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

$٣ ك - ٢ = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س + ٢}$

$٣ ك - ٢ = ك - ٢ \Leftarrow ك = ٠$

١٢ $\lim_{س \to ٣} \frac{س}{س^٢ - ٩} + \frac{٣}{٣ س - س^٢}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س}{(س - ٣)(س + ٣)} + \frac{٣}{-س(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س + ٣) س}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{١}{س(س + ٣)} = \frac{١}{١٨}$

١٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{(٤٩)^س - (٧)^س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٧^٢)^س - ٧^س}{س}$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{ص^{٢س} - ١}{ص^س - ١}$

$= \lim_{ص \to ١} \frac{(ص^س + ١)(ص^س - ١)}{ص^س - ١}$ ، $\lim_{ص \to ١} ص^س + ١ = ٢$

١٤ اذا كانت م، ب ∈ ح وكانت

$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - م س + ٣}{س - ١} & ، س < ١ \\ ب س - ٥ & ، س \ge ١ \end{cases}$

فما قيم م، ب التي تجعل $\lim_{س \to ١} د(س)$ موجود

نهـا $د(س)$ موجود ع $س = ١$ وبما أن المقام = صفر

فإن البسط = صفر.

$\Leftarrow$ نهـا $س^٣ - م س + ٣ =$ صفر

$١ - م + ٣ =$ صفر $\Leftarrow$ $م = ٤$

نهـا $\frac{س^٣ - ٤ س + ٣}{س - ١}$ صفحة تركيب

نهـا $\frac{(س - ١)(س^٢ + س - ٣)}{س - ١}$ ، $١ + ١ - ٣ = -١$

نهـا $ب س - ٥ = ب - ٥ = -١$

$ب = ٤$

١٥ اذا كانت

نهـا $\frac{م س^٢ - ب س - ٦}{س - ٢} = ٥$

فما قيم م، ب.

$\Leftarrow$ نهـا $\frac{(س - ٢)(م س + ٣)}{س - ٢} = ٥$

$٢ م + ٣ = ٥ \Leftarrow م = ١$

$م س^٢ - ب س - ٦ = (س - ٢)(س + ٣)$

$= س^٢ + س - ٦$

$م س^٢ - ب س - ٦ = س^٢ + س - ٦$

$م = ١$ / $ب = -١$

١٦ اذا كانت نهـا $\frac{د(س) + ٥}{س^٢ + ٢} = ٩$ ، فجد نهـا $د(س) + س$

$س \to ٢$

① نهـا $د(س) + س$

$س \to ٢$

② نهـا $ق(س) + س$

$س \to ٢$

الحل: نهـا $\frac{د(س) + ٥}{س^٢ + ٢} = ٩ \Leftarrow$ نهـا $د(س) + ٥ = ٩$

$س \to ٢$ $س \to ٢$

فإن البسط = صفر ع $س = ٢$ وبما أن المقام = صفر

$د(٢) + ٥ =$ صفر

$د(٢) = -٥$

① نهـا $د(س) + ٣ س$

$س \to ٢$

$= -٥ + ٣ \times ٢ = -٥ + ٦ = ١$

② نهـا $ق(س) + ٤ س$

$س \to ٢$

$(-٥)^٢ + ٢ \times ٢$

$٢٥ + ٨ = ٣٣$

7- نهـا $\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{س^2+7}}\right]\left[\frac{1}{س-3}\right]$ ، س ← 3

الحل:

5- اذا كان ق(س)= $س^2\sqrt{س}$ أثبت أن :

نهـا $\frac{ق(س^2-1) - ق(س+1)}{ق(س-1) - ق(1)} = ق(3)$ ، س ← 2

الحل:

8- أوجد نهـا $\frac{\sqrt{س}}{3 - \sqrt{س+9}}$ ، س ← 0^+

الحل:

6- اذا كانت نهـا $\frac{س-3}{س^2 + أ س + ب}$ ، س ← 3

غير موجودة، فجد قيم أ ، ب ؟؟؟؟

الحل: