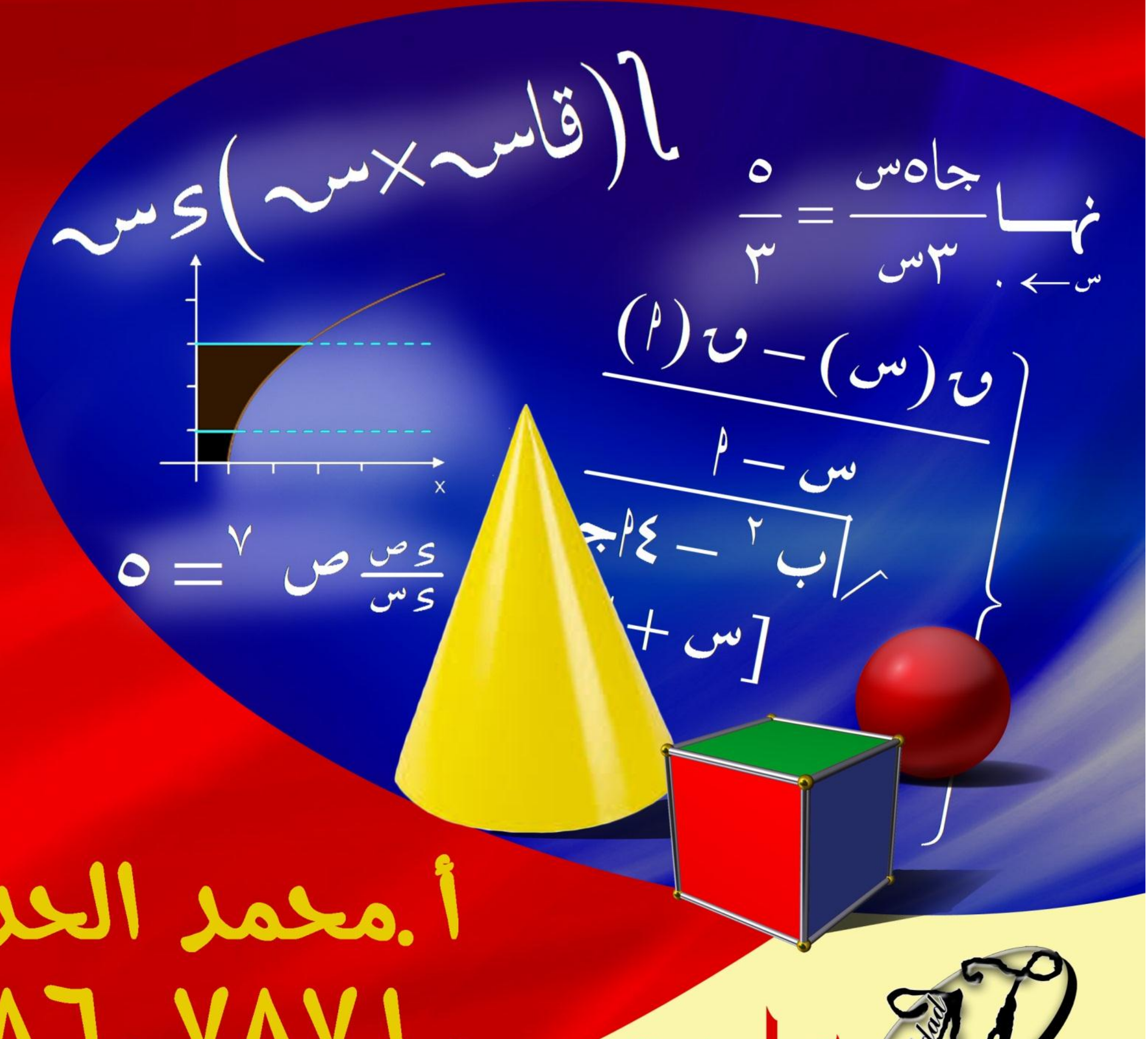
2017

المنهاج الجديد

الآفاق في تبسيط الرياضيات

الطبعة الجديدة



أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

علمي

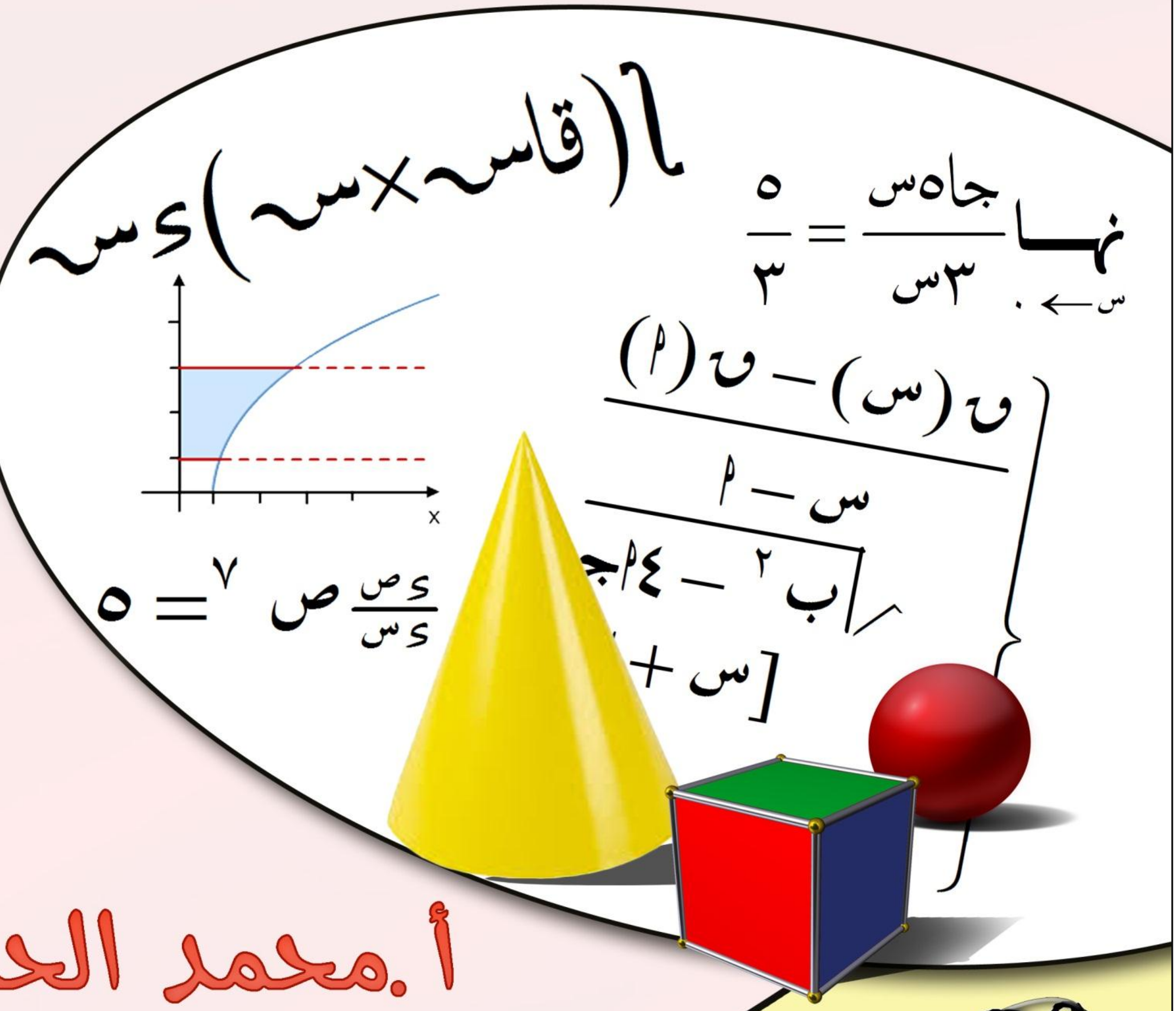
Haddad

2017

المنهاج الجديد

وحـــدة النهايات والاتصال

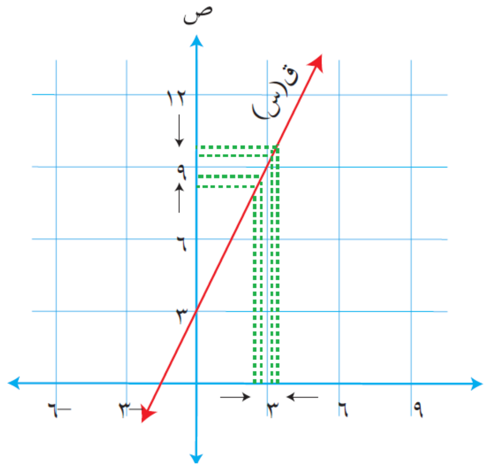
الطبعة الجديدة



أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

مفهوم النهايات



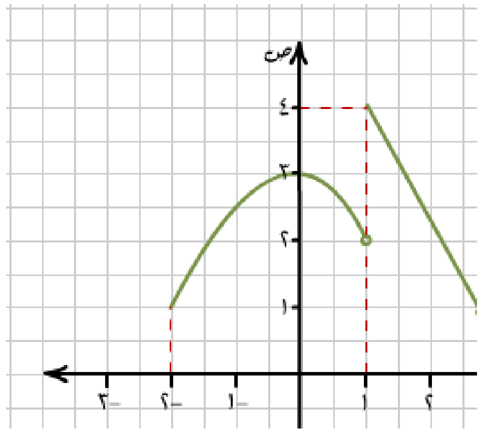
عندما نأخذ النهاية نأخذها من اليمين واليسار لأقرب نقطة للرقم، مثل رقم ٣

<u>لا نأخذ الرقم نفسه</u>

نرمز للنهاية بكلمة نها
كلما اقتربنا من اليمين واليسار للرقم نقول أن س تؤول لـ ٣
ويرمز له برمز $\underset{س \leftarrow}{\text{نها}}$

والان نقول أن نهاية الاقتران ق(س) عندما س تؤول الى ٣ تساوي ٩
ويرمز له برمز $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\ ق(س) = ٩$

مثال:



١- جد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ ق(س)$

الحل: من اليمين $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نها}}\ ق(س) = ٤$

من اليسار $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}}\ ق(س) = ٣$

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نها}}\ ق(س) \neq \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}}\ ق(س)$

إذا $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ ق(س)$ غير موجودة

٢- جد $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}}\ ق(س)$

الحل: من اليمين $\underset{س \leftarrow -١^+}{\text{نها}}\ ق(س) = ٢.٥$

من اليسار $\underset{س \leftarrow -١^-}{\text{نها}}\ ق(س) = ٢.٥$

$\underset{س \leftarrow -١^+}{\text{نها}}\ ق(س) = \underset{س \leftarrow -١^-}{\text{نها}}\ ق(س) = ٢.٥$

إذا $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة

تعميم

إذا كانت : $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \leftarrow أ^-}{\text{نهـا}}\ ق(س) =$ ل، حيث أ ، ل أعداد حقيقية، فإنَّ:

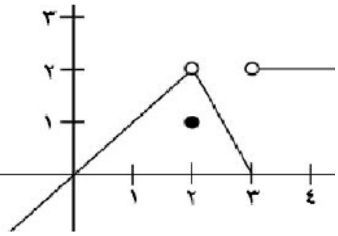
$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ موجودة، وتكون $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) =$ ل

وإذاكانت $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهـا}}\ ق(س) \neq \underset{س \leftarrow أ^-}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ ، فـإنَّ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ غير موجودة.

Mohammed Haddad
أ.محمد الحداد
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

تمارين مفهوم النهايات

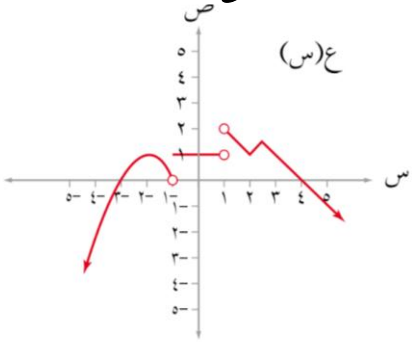
س١: معتمد على الشكل المجاور



١) جد $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س)

٢) جد $\lim\limits_{س \to ٣}$ ق(س)

س٢: معتمد على الشكل المجاور



جد

١) مجموع قيم أ حيث $\lim\limits_{س \to أ}$ ع(س) = ١

٢) مجموع قيم ب حيث $\lim\limits_{س \to ب^+}$ ع(س) = ١

٣) مجموع قيم ج حيث $\lim\limits_{س \to ج}$ ع(س) غير موجودة

٤) مجموع قيم ل حيث $\lim\limits_{س \to ل}$ ع(س) = ٠

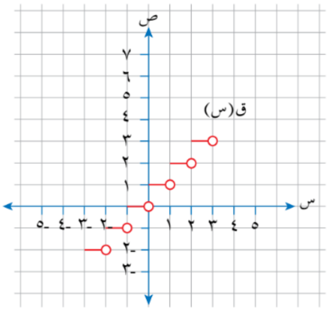
س٣:

معتمدا على الجدول الآتي

س	٣	٢,٥	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١		١,٩٩٩	١,٩	١,٥	١,١	١
ق(س)	٤	٣,٥	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩	٢,٥	٢,١	٢

جد $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س)

س٤: معتمد على الشكل المجاور



جد

١) $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س)

٢) $\lim\limits_{س \to ١}$ ق(س)

٣) $\lim\limits_{س \to -٢}$ ق(س)

٤) $\lim\limits_{س \to -\frac{١}{٢}}$ ق(س)

س٤: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س^{٢} - ٢ , & س \notin ص \\ ٢ - س , & س \in ص \end{cases}$$

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة، جد

١) $\lim\limits_{س \to -٢}$ ق(س)

٢) $\lim\limits_{س \to -\frac{١}{٢}}$ ق(س)

أ.محمد الحداد

Mohammed Haddad

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

نظريات النهايات

نظرية (١)

١) إذا كان أ، ب عددين حقيقيين، وكان ق(س) = ب لكلّ س $\in$ ح، فإنَّ: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} = \text{ب}$

٢) إذا كانت أ $\in$ ح ، ن عدد صحيح موجب، وكان ق(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$، فإنَّ:

$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} = \text{أ}^{\text{ن}}$

مثال: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ ٥ = ٥$

مثال: $\underset{\text{س}\to ٥٥}{\text{نها}}\ ٣ = ٣$

مثال: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ ٣\text{س} - ٢ = ٤$

النظريـ٢ـة: إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} = \text{ب}$

وكانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{هـ(س)} = \text{جـ}$

فإن

١)

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\left(\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}\right) =$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} \pm \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{هـ(س)} = \text{ب} \pm \text{جـ}$$

٢) إذا كانت م عدد حقيقي

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{م ق(س)} = \text{م}\,\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} = \text{م} \times \text{ب}$$

٣)

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\left(\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}\right) =$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} \times \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{هـ(س)} = \text{ب} \times \text{جـ}$$

٤)

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} =$$

$$= \frac{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}}{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{هـ(س)}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \quad ,\ \text{جـ} \neq ٠$$

٥) **إذا كانت ق(س) كثير حدود فإن**

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$$

٦) **إذا كانت** $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} = \text{ب}$

فإن

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$$

حيث ب $\geqslant$ صفر إذا كان ن عدد زوجي

مثال١: إذا كان ق(س) = ٢$\text{س}^{٣}$ − ٦س فجد:

١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} =$ ٢×٨ - ٦×٢ = ٤

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\left(\text{ق(س)} + \text{س}\right)^{٢} = (٤ + ٢)^{٢}$

$= ٣٦$

مثال٢: إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} = ٦$

و $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\text{ل(س)} = ٤$

فإن:

١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\text{ق(س)} + \text{ل(س)} = ٤ + ٦ = ١٠$

٢)

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\frac{٣\text{ق(س)} - ٢\text{ل(س)}}{٤\text{ل(س)ق(س)}} =$$

$$\frac{٣ \times ٦ - ٢ \times ٤}{٤ \times ٤ \times ٦} = \frac{١٠}{٩٦}$$

٣)

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\frac{٦\text{ق(س)}}{\text{ل(س)}} + ٢\text{س} = \frac{٦ \times ٦}{٤} + ٢ \times ٣$$

$$٩ + ٦ = ١٥$$

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ س ق(س) + ٢س (ل(س))^{٢} =

٣ × ٦ + ٢ × ٣ × ٤^{٢} = ١٨ + ٩٦ = ١١٤

نتائج.... بالأمثلة الآتية

مثال٣: جد $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ س^{٣} − ٢

بالتعويض المباشر

١^{٣} − ٢ = -١

مثال٤: جد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ٢س^{٣} − ٢س

بالتعويض المباشر

٢ × ٢^{٣} − ٢ × ٢

١٦ − ٤ = ١٢

مثال٥: $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ٢(س^{٣} − ٢) $\sqrt{\text{س} - ١}$ =

٢(٢^{٣} − ٢) $\sqrt{٢ - ١}$ = ١٢

مثال٦: ١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ |س + ١| = |٣| = ٣

٢) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}$ |س + ١| = |−١| = ١

٣) $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ |س + ١| = |٤| = ٤

٤) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ |س + ١| **إذا كان جواب القيمة المطلقة يساوي صفر يجب اعادة تعريفه وأخذ النهاية من اليمين واليسار فتصبح كالاتي**

ق(س) = { س + ١ , س ≥ ١ ؛ − س − ١ , س < ١ }

$\underset{س \to -١^{+}}{\text{نهـا}}$ س + ١ = ٠

$\underset{س \to -١^{-}}{\text{نهـا}}$ − س − ١ = ٠

$\underset{س \to -١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to -١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) **موجودة**

إذا $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠

٥) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ |س^{٢} − ٩|

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ س^{٢} − ٩ = ٠

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ ٩ − س^{٢} = ٠

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) **موجودة**

إذا $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ |س^{٢} − ٩| = ٠

مثال ٧: ١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\left[\frac{\text{س}}{٢}\right]$ **إذا كان جواب أكبر عدد صحيح يساوي عدد صحيح يجب اعادة تعريفه وأخذ النهاية من اليمين واليسار و فيصبح كالاتي**

ق(س) = { ٠ , ٠ ≤ س < ٢ ؛ ١ , ٢ ≤ س < ٤ }

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) **غير موجودة**

٢) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\left[\frac{\text{س}}{٣}\right] = \left[\frac{٥}{٣}\right] = [١.\overline{٦}] = ١$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ [س − ٢] = [−١] **غير موجودة**

مثال١٠: ١) $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \sqrt{س + ٣}$

$\sqrt{١ + ٣} = ٢$

بما أن الجواب تحت الجذر موجب نعوض مباشراً

٢)

$\underset{س \to -٥}{\text{نهــا}} \sqrt{س^{٢} - ٩} =$

$\sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

٣)

$\underset{س \to -٣}{\text{نهــا}} \sqrt[٣]{س - ٥} =$

$\sqrt[٣]{-٣ - ٥} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

ملاحظة: الجذر الفردي يأخذ إشارة الموجب والسالب تحت الجذر

٤)

$\underset{س \to -٢٠}{\text{نهــا}} \sqrt[٤]{س + ٤} =$

$\sqrt[٤]{-٢٠ + ٤} = \sqrt[٤]{-١٦} \neq -٢$

إذا غير موجودة

لان الشرط أن يكون داخل الجذر الزوجي موجب دائماً

٥) إذا كان

$\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} ق(س) = ٢ ،\ \underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} هـ(س) = -٤$

جد

$\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \sqrt{٦ق(س) + سهـ(س) + ١}$

الحل:

$\sqrt{٦ \times ٢ + (٣ \times -٤) + ١}$

$\sqrt{\cancel{١٢} + \cancel{-١٢} + ١}$

$\sqrt{١} = ١$

ملاحظة: إذا كانت $ق(أ) = ٠$ وكان ن عددا زوجيا

(($\underset{س \to أ}{\text{نهــا}} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{٠}$))

فإن نأخذ النهاية من اليمين واليسار

٦) جد $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \sqrt{س - ٢}$

بالتعويض المباشر الناتج

$\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \sqrt{س - ٢} = \sqrt{٠}$

إذا يجب أن نأخذ النهاية من اليمين واليسار

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهــا}} \sqrt{٢ - ٢} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} \sqrt{٢ - ٢} =$ **غير معرفة !!!!**

غير معرفة لأنه لو فرضنا أن س هي ١.٩ لأصبح الناتج $\sqrt{-٠.١}$ وهذه عبارة خاطئة لعدم وجود سالب تحت الجذور الزوجية

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} \sqrt{س - ٢} \neq \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهــا}} \sqrt{س - ٢}$

إذا $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \sqrt{س - ٢}$ **غير موجودة**

٧) جد $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \sqrt{س^{٢} - ٤}$

الحل: $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \sqrt{س^{٢} - ٤} = \sqrt{٠}$

$\underset{\text{س} \to -٢^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٤} =$ غير معرفة

$\underset{\text{س} \to -٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٤} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{\text{س} \to -٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٤} \neq \underset{\text{س} \to -٢^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٢}$

إذا $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٤}$ غير موجود

٨) جد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} - ١)^٢}$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} - ١)^٢} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} - ١)^٢} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} - ١)^٢} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} - ١)^٢} = \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} - ١)^٢}$

$\therefore \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} - ١)^٢} = ٠$

٩) مهم: جد $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤}}$

الحل:

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤}} = \sqrt{\dfrac{٠}{٠}}$

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{(\text{س} + ٤)\cancel{(\text{س} - ٤)}}{\cancel{\text{س} - ٤}}} = \underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} + ٤)}$

$\sqrt{(٤ + ٤)} = \sqrt{٨}$

١٠) مهم: جد $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ١٦}}{\sqrt{\text{س} - ٤}}$

الحل:

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ١٦}}{\sqrt{\text{س} - ٤}} = \dfrac{٠}{٠}$

لكن هنا نقول غير موجودة وذلك لان الجذر الزوجي موزع والنهاية تحت الجذر من اليسار غير موجودة

فرق بين

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤}}$ و $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ١٦}}{\sqrt{\text{س} - ٤}}$

$\sqrt{٨}$ غير موجودة

مثال٨: ١) إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٢, & \text{س} \geq ٢ \\ ٢ - \text{س}, & \text{س} < ٢ \end{cases}$

جد $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$

الحل: يجب أن نعيد تعريف الاقتران

$\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \text{س} - ٢ = ٠$

$\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} ٢ - \text{س} = ٠$

$\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ موجود

إذا $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ٠$

٢) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س - ٢ , & س \geq ٢ \\ ٢س , & س < ٢ \end{cases}$

جد $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س)$

الحل: $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}} س - ٢ = ٠$

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}} ٢س = ٤$

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}} ق(س) \neq \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}} ق(س)$

إذا $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س)$ غير موجودة

٣) جد $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س)$

$ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} , & س = ٢ \\ ٢س , & س \neq ٢ \end{cases}$

الحل: $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} ٢س = ٤$

ملاحظة١: لم نأخذ النهاية من اليمين واليسار لان الاقتران المتشعب لا يوجد به متباينة اكبر واصغر

ملاحظة٢: لم نأخذ المعادلة الاولى لان س=٢ وفي النهاية يجب أن لا نأخذ الرقم نفسه

مثال٩: إذا كانت

$هـ(س) = \begin{cases} ٤س , & س \geq ١ \\ ٢أس , & س < ١ \end{cases}$

جد قيمة أ إذا علمت أن
$\underset{س \to ١}{\text{نها}} هـ(س)$ **موجودة**

الحل:

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نها}} هـ(س) = \underset{س \to ١^{-}}{\text{نها}} هـ(س)$

$٤ \times ١ = ٢ \times ١ \, أ$

$٤ = ٢ أ$

$أ = ٢$

مثال١٠: جد $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} ق(س)$

إذا علمت أن $ق(س) = \begin{cases} |س - ٤| & ، س < ٤ \\ \sqrt{س - ٤} & ، س \geq ٤ \end{cases}$

الحل: $\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نها}} ٤ - س = ٠$

$\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نها}} \sqrt{س - ٤} = ٠$

$\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٤^{-}}{\text{نها}} ق(س)$

$\therefore \underset{س \to ٤}{\text{نها}} ق(س) = ٠$

مثال١١: جد $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س)$

إذا علمت أن $ق(س) = \begin{cases} |س - ٢| & ، س \geq ٢ \\ [٦ - س] & ، س < ٢ \end{cases}$

الحل: $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}} [٦ - س] = ٤$

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}} س - ٢ = ٠$

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}} ق(س) \neq \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}} ق(س)$

$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س)$ **غير موجودة**

Mohammed Haddad
أ.محمد الحداد
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

مثال١٢: إذا كان

$$\text{ق}(س) = [5+س] \quad ، \quad \text{ه}(س) = [4-س]$$

جد $\lim\limits_{س\to 1} \left(\text{ق}(س) + \text{ه}(س)\right)$

$$\lim_{س\to 1^+} \text{ق}(س) = 6$$

$$\lim_{س\to 1^+} \text{ه}(س) = 2$$

$$\lim_{س\to 1^+} \left(\text{ق}(س) + \text{ه}(س)\right) = 8$$

$$\lim_{س\to 1^-} \text{ق}(س) = 5$$

$$\lim_{س\to 1^-} \text{ه}(س) = 3$$

$$\lim_{س\to 1^-} \left(\text{ق}(س) + \text{ه}(س)\right) = 8$$

$$\lim_{س\to 1^-} \left(\text{ق}(س) + \text{ه}(س)\right) = \lim_{س\to 1^+} \left(\text{ق}(س) + \text{ه}(س)\right)$$

$$\lim_{س\to 1} \left(\text{ق}(س) + \text{ه}(س)\right) = 8$$

مثال١٣: إذا كان

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 - \text{ل} & ، س \ge 2 \\ 2\text{ل} + 1 & ، س < 2 \end{cases}$$

إذا كانت $\lim\limits_{س\to 2} \text{ق}(س)$ **موجودة فما قيمة ل**

$$\lim_{س\to 2^+} \text{ق}(س) = \lim_{س\to 2^-} \text{ق}(س)$$

$$\lim_{س\to 2^+} س^2 - \text{ل} = \lim_{س\to 2^-} س\text{ل} + 1$$

$$4 - \text{ل} = 2\text{ل} + 1$$

$$4 - 1 = 2\text{ل} + \text{ل}$$

$$3\text{ل} = 3$$

$$\text{ل} = 1$$

تمارين نظريات النهايات

س١: جد $\lim\limits_{س\to 2} س^3 + 5$

س٢: اذا كان

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} 3س & , س \ge 2 \\ 2س - س^2 & , س < 2 \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{س\to 2} \text{ق}(س)$

س٣: إذا كانت $\lim\limits_{س\to 1} \text{ق}(س) = 2$

و $\lim\limits_{س\to 1} \text{ل}(س) = 3$

فجد ١) $\lim\limits_{س\to 1} \dfrac{\text{ق}(س) + \text{ل}(س)}{5}$

٢) $\lim\limits_{س\to 1} \dfrac{6\text{ق}(س)}{\text{ل}(س)}$

٣) $\lim\limits_{س\to 1} \left(3(\text{ل}(س) + \text{ق}(س)) + س\right)^2$

س٤: إذا كان $\lim\limits_{س\to 2} 4س^2 + 2أ - 4 = 2$

س٥: إذا كان

$$\lim_{س\to 1} \left(2\text{ق}(س) + 3س - 4\right) = 7$$

جد $\lim\limits_{س\to 1} \left(س\text{ق}(س) + س^2\right)$

س٦: إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤ , & \text{س} \neq ١ \\ ٥\text{س} + ٧ , & \text{س} = ١ \end{cases}$$

جد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$

س٧: إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{أس} , & \text{س} \geqslant ١ \\ ٥\text{س} + ٧ , & \text{س} < ١ \end{cases}$$

وكانت $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ **موجودة فما قيمة أ**

س٨: إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٨ , & \text{س} < \text{أ} \\ ٢\text{س}^{٢} , & \text{س} \geqslant \text{أ} \end{cases}$

وكانت $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ **موجود**

س٩: إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٥\text{س} - \text{أ} , & \text{س} < ١ \\ \text{بس}^{٢} - ٩ , & \text{س} \geqslant ١ \end{cases}$

وكانت $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = ١٦$

و $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ **موجود**

جد كلا من أ ، ب

س١٠: إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٤} , & \text{س} < ٢ \\ [\text{٥ز .س}] , & ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٦ \\ |\text{س}^{٢} - ٣٦| , & \text{س} > ٦ \end{cases}$$

جد

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} =$

$\underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} =$

س١١: إذا كان

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \left(٢\text{ق(س)}\right) = ٨$

جد $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{س ق(س)} - \text{س}^{٢}\right)^{٢}$

س١٢: إذا كان

$\text{ق(س)} = [٣ + \text{س}]$ ، $\text{هـ(س)} = [٢ - \text{س}]$

جد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \left(\text{س ق(س)} + ٢\text{هـ(س)}\right)$

نهايات اقترانات كسرية

- التحليل
- توحيد المقام
- الإضافة والطرح
- الإستبدال (التعويض)
- ضرب بالمرافق

ينقسم الدرس إلى هذه الافكار إذا كان الجواب <u>*صفر على صفر*</u>

<u>نظرية(١):</u> إذا كانت أ، ل، ك $\neq$ ٠ ،

وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = \text{ك}$

فإن

$$\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}\ \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}}{\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)}} = \frac{\text{ل}}{\text{ك}}$$

مثال١: إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = ٣$ ،

$\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = -٥$ ، فما قيمة

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}}\ \frac{٢\text{ق(س)} + ٧}{\text{هـ(س)} + ٩}$$

الحل:

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}}\ \frac{٢\text{ق(س)} + ٧}{\text{هـ(س)} + ٩} = \frac{٢ \times ٣ + ٧}{-٥ + ٩}$$

$$= \frac{٦ + ٧}{-٥ + ٩} = \frac{١٣}{٤}$$

مثال٢: جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{٢\text{س}^٢ + ٤}{\text{س} + ٢}$

الحل:

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{٢\text{س}^٢ + ٤}{\text{س} + ٢} = \frac{٢(٢)^٢ + ٤}{٢ + ٢} = \frac{٨ + ٤}{٢ + ٢}$$

$$\frac{١٢}{٤} = ٣$$

مثال٣: $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{س} + ٥} + ٣}{\text{س} + ٢}$

الحل:

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{س} + ٥} + ٣}{\text{س} + ٢} = \frac{\sqrt{٤ + ٥} + ٣}{٤ + ٢}$$

$$\frac{\sqrt{٩} + ٣}{٦} = \frac{٦}{٦} = ١$$

مثال٤: جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢}$

بالتعويض المباشر يساوي $\frac{٠}{٠}$

<u>وهذا يعني نهاية الاقتران يجب أن تحل بطرق أخرى</u>

الطريقة الأولى بالتحليل

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{(\text{س} + ٢)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{\text{س} - ٢}}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{(\text{س} + ٢)}{١} = ٤$$

مثال٥: جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{س} - ٣}$

بالتعويض المباشر يساوي $\frac{٠}{٠}$

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

الحل بالتحليل

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\cancel{(\text{س}-٣)}\,(\text{س}^٢+٦\text{س}+٩)}{\cancel{\text{س}-٣}}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \text{س}^٢+٦\text{س}+٩=٣٦$$

س١: جد $\lim_{\text{س}\to -٢} \dfrac{٢\text{س}^٢+٣\text{س}-٢}{\text{س}+٢}$

س٢: جد $\lim_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}^٤-٢\text{س}+١}{\text{س}-١}$

س٣: $\lim_{\text{س}\to ٨} \dfrac{(\text{س}+١)^٢-٨١}{٨\text{س}-\text{س}^٢}$

أسئلة وزارة

ش ٢٠١٤: $\lim_{\text{س}\to -٢} \dfrac{٥-|٣\text{س}+١|}{\text{س}^٣+٨}$

ش ٢٠١٧: $\lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^٣+٣\text{س}^٢-٤\text{س}-١٢}{\text{س}^٢-٤}$

الطريقة الثانية بتوحيد المقام

مثال٩: $\lim_{\text{س}\to ٢} \left(\dfrac{٣}{٢}-\dfrac{٣}{\text{س}}\right)\left(\dfrac{١}{\text{س}^٢-٤}\right)=\dfrac{٠}{٠}$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \left(\frac{٣\text{س}}{٢\text{س}}-\frac{٣\times ٢}{٢\text{س}}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^٢-٤}\right)$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \left(\frac{٣\text{س}-٦}{٢\text{س}}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^٢-٤}\right)$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \left(\frac{٣\text{س}-٦}{(٢\text{س})(\text{س}^٢-٤)}\right)$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \left(\frac{٣\,\cancel{(\text{س}-٢)}}{(٢\text{س})\,\cancel{(\text{س}-٢)}\,(\text{س}+٢)}\right)$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\frac{٣\cancel{(\text{س}-٢)}}{(٢\text{س})\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}\right)$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\frac{٣}{(٢\text{س})(\text{س}+٢)}\right)=\frac{٣}{١٦}$$

س٤: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{٣-\text{س}}-\frac{١}{٣+\text{س}}\right)$

مثال١١: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{١}{\text{س}+١}-\frac{٢}{\text{س}+٣}}{\text{س}-١}=\frac{٠}{٠}$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}+٣-٢(\text{س}+١)}{(\text{س}+١)(\text{س}+٣)}\times\frac{١}{\text{س}-١}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}+٣-٢\text{س}-٢}{(\text{س}+١)(\text{س}+٣)}\times\frac{١}{\text{س}-١}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\overset{-١}{\cancel{-\text{س}+١}}}{(\text{س}+١)(\text{س}+٣)}\times\frac{١}{\cancel{\text{س}-١}}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{-١}{(\text{س}+١)(\text{س}+٣)}=\frac{-١}{٨}$$

ص ٢٠١٢: $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{١}{\text{س}}-\frac{١}{٣}}{\text{س}^٢+٢\text{س}-٣}$

ش ٢٠١٣: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{(\text{س}+٢)^٢}-\frac{١}{٨}\right)$

ص٢٠١٥: $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{س}^٢+٢٧}{\text{س}^٢-٩}-\frac{\text{س}+٣}{\text{س}-٣}\right)$

الطريقة الثالثة ضرب بالمرافق

ملاحظة: $(\sqrt{\text{س}}+\sqrt{\text{ص}})(\sqrt{\text{س}}-\sqrt{\text{ص}})=\text{س}-\text{ص}$

$$(\sqrt[٣]{\text{س}}+\sqrt[٣]{\text{ص}})(\sqrt[٣]{\text{س}^٢}-\sqrt[٣]{\text{س}}\sqrt[٣]{\text{ص}}+\sqrt[٣]{\text{ص}^٢})=\text{س}-\text{ص}$$

$$(\sqrt[٣]{\text{س}}-\sqrt[٣]{\text{ص}})(\sqrt[٣]{\text{س}^٢}+\sqrt[٣]{\text{س}}\sqrt[٣]{\text{ص}}+\sqrt[٣]{\text{ص}^٢})=\text{س}-\text{ص}$$

مثال١٢:جد $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}-٩}{\sqrt{\text{س}}-٣}=\frac{٠}{٠}$

$$\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}-٩}{\sqrt{\text{س}}-٣}\times\frac{\sqrt{\text{س}}+٣}{\sqrt{\text{س}}+٣}$$

$$\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}-٩)(\sqrt{\text{س}}+٣)}{(\sqrt{\text{س}}-٣)(\sqrt{\text{س}}+٣)}$$

$$\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \frac{\cancel{(\text{س}-٩)}(\sqrt{\text{س}}+٣)}{\cancel{(\text{س}-٩)}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{س}}+٣=\sqrt{٩}+٣=٦$$

مثال١٣: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\sqrt{١+\text{س}^{٢}} - \sqrt{١-\text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢}} = \dfrac{٠}{٠}$

ضرب بالمرافق

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{١+\text{س}^{٢}} - \sqrt{١-\text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\sqrt{١+\text{س}^{٢}} + \sqrt{١-\text{س}^{٢}}}{\sqrt{١+\text{س}^{٢}} + \sqrt{١-\text{س}^{٢}}}$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\left(١+\text{س}^{٢}\right)-\left(١-\text{س}^{٢}\right)}{\text{س}^{٢}\left(\sqrt{١+\text{س}^{٢}} + \sqrt{١-\text{س}^{٢}}\right)}$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\cancel{١}+\text{س}^{٢}-\cancel{١}+\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}\left(\sqrt{١+\text{س}^{٢}} + \sqrt{١-\text{س}^{٢}}\right)}$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{٢\cancel{\text{س}^{٢}}}{\cancel{\text{س}^{٢}}\left(\sqrt{١+\text{س}^{٢}} + \sqrt{١-\text{س}^{٢}}\right)}$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{٢}{\left(\sqrt{١+\text{س}^{٢}} + \sqrt{١-\text{س}^{٢}}\right)} = \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

س٥: $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\sqrt{\text{س}+٢} - ٢}$

مثال١٤: جد $\lim\limits_{\text{س}\to ٨} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{٨\text{س} - \text{س}^{٢}} = \dfrac{٠}{٠}$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٨} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{٨\text{س} - \text{س}^{٢}} \times \frac{\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤\right)}{\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤\right)}$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٨} \frac{\text{س} - ٨}{\left(٨\text{س} - \text{س}^{٢}\right)\times ١٢} =$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٨} \frac{\cancel{\text{س} - ٨}^{\,-١}}{١٢\text{س}\cancel{(٨ - \text{س})}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٨} \frac{-١}{١٢\text{س}} = \frac{-١}{٩٦}$$

س٦: $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+١} - ٢}$

أسئلة وزارة

ش ٢٠١١: $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{\sqrt{س+١}} - ١\right)$

ص٢٠١٣: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٣س+٣} - \sqrt{٤س+١}}{س-٢}$

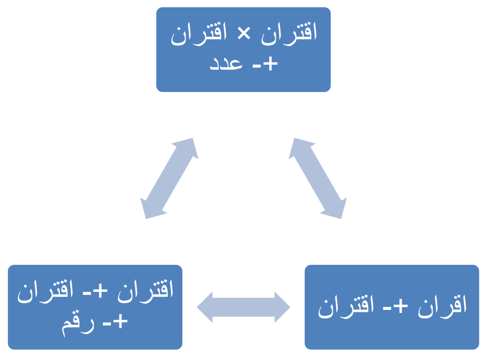
ش٢٠١٤: $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{٤ - \frac{س}{٢}}$

ص٢٠١٤: $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^{٣}} - |س|}{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}$

ش٢٠١٥: $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{س+٣}{س + \sqrt{٢س^{٢} - ٩}}$

ص٢٠١٦: $\underset{س \leftarrow -٢٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٩ - س} + ٦}{٣ + \sqrt[٣]{س}}$

الطريقة الرابعة الإضافة والطرح



مثال١٥: $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{س\sqrt{س} - ٨}{٤ - س}$

يحل بطريقة الطرح والاضافة او الضرب المرافق

$$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{س\overset{=٢}{\sqrt{س}} - ٨}{٤ - س} = \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{س\sqrt{س} - ٢س + ٢س - ٨}{٤ - س}$$

$$\underbrace{\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{س\sqrt{س} - ٢س}{٤ - س}}_{أ} + \underbrace{\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٨}{٤ - س}}_{ب}$$

$$أ = \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{س\sqrt{س} - ٢س}{٤ - س} = \frac{س\left(\sqrt{س} - ٢\right)}{٤ - س}$$

$$= \frac{س\cancel{\left(\sqrt{س} - ٢\right)}^{-١}}{\cancel{\left(٢ - \sqrt{س}\right)}\left(٢ + \sqrt{س}\right)} = \frac{-١}{٤}$$

$$ب = \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٨}{٤ - س} = \frac{٢\cancel{(س - ٤)}^{-١}}{\cancel{٤ - س}} = -٢$$

$$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{س\sqrt{س} - ٨}{٤ - س} = أ + ب = -٢.٢٥$$

س٧: $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{١ - س^{٢}}{١ - س^{٢}\sqrt[٣]{س}}$

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

س٨: $\lim\limits_{\text{س} \to 8} \dfrac{\sqrt{\text{س} - 4} - \sqrt[3]{\text{س}}}{\text{س} - 8}$

س٩: $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \dfrac{\text{س}^2 - 4\text{س}}{\sqrt{12 + \text{س}} + \sqrt[3]{2\text{س}} - 6}$

أسئلة وزارة

ش٢٠١٢: $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س}}{\text{س} - \sqrt{\text{س} + 1} - 1}$

ش٢٠١٦: $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{6 - \text{س} - \sqrt{\text{س} + 1}}{9 - 3\text{س}}$

ص٢٠١٣: $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\sqrt{3\text{س} + 3} - \sqrt{4\text{س} + 1}}{\text{س} - 2}$

ش٢٠١٥: $\lim\limits_{\text{س} \to -3} \dfrac{\text{س} + 3}{\text{س} + \sqrt{2\text{س}^2 - 9}}$

الطريقة الخامسة الاستبدال والتعويض

يستخدم التعويض في الجذور العليا والاقترانات الاسية

مثال١٦:إذا كان ق(س)= $\text{س}^{٢}$ فجد

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢}$$

الحل:

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - (٢^{٢})}{\text{س} - ٢}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}\,(\text{س} + ٢)}{\cancel{\text{س} - ٢}}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} (\text{س} + ٢) = ٤$$

مثال١٧: إذا كان ق(س)= $\text{س}^{٢}$ فجد

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق(س + هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$$

الحل:

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق(س + هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} =$$

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{هـ}} =$$

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\cancel{\text{س}^{٢}} + ٢\text{هـس} + \text{هـ}^{٢} - \cancel{\text{س}^{٢}}}{\text{هـ}} =$$

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٢\text{هـس} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\cancel{\text{هـ}}(٢\text{س} + \text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}} =$$

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠} ٢\text{س} + \text{هـ} = ٢\text{س}$$

مثال١٦: جد $\lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(٤)^{\text{س}} + (٢)^{\text{س}} - (٢٠)}{٤ - (٢)^{\text{س}}}$

الحل: نفرض $(٢)^{\text{س}} = \text{ص}$ ومنها ص←٤

$$\lim_{\text{ص}\to ٤} \frac{\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٢٠}{٤ - \text{ص}} = \lim_{\text{ص}\to ٤} \frac{\cancelto{-١}{(\text{ص} - ٤)}\,(\text{ص} + ٥)}{\cancel{٤ - \text{ص}}}$$

$$= -٩$$

س١٠: $\lim_{\text{س}\to ١} \dfrac{(٩)^{\text{س}} - ٣(٣)^{\text{س}}}{٩ - (٩)^{\text{س}}}$

س١١: $\lim_{\text{س}\to ١٦} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}} - ٢}{\sqrt{\text{س}} - ٤}$

س١٢: $\underset{س \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س} - ٥\sqrt[٤]{س} + ٦}{س - ١٦}$

أسئلة وزارة

ص٢٠١٣: $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٢٥)^{س} - (٥)^{س}}{١ - (٥)^{س}}$

تمارين نهايات اقترانات كسرية

أوجد قيمة كل من النهايات التالية (إن وجدت)

س١: $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٢س}{٢س - ٤}$

س٢: $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٣} - \sqrt{س}}{س^{٢} - ١}$

س٣: $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{١}{٢ + س} - \dfrac{١}{٢}}{س}$

س٤: $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} + ٧س - ٨}{س^{٢} - ١}$

س٥: $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٤ - س} - \sqrt{س}}{٢ - س}$

س٦: $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{س} - ٨}{س - ٤}$

س٧: **إذا كان ق(س)=** $\sqrt{س}$ **فجد**

$\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

س٨: $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٣\sqrt[٣]{٩س}}{\sqrt{٣س} - ٣}$

س٩: $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٤س} + ٣س - ٨}{\dfrac{١}{١ + س} - \dfrac{١}{٣}}$

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

نهايات اقترانات مثلثية

المتطابقات

- توحيد المقام
- فك الأقواس
- الإستبدال (التعويض)
- ضرب بالمرافق
- إخراج عامل مشترك

ينقسم الدرس إلى هذه الافكار إذا كان الجواب <u>*صفر على صفر*</u>

اعلم:

1) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$

2) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ب س}}{\text{جا أس}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{أ}}$

3) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$

4) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ب س}}{\text{ظا أس}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{أ}}$

5) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ظا أس}}{\text{جا ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$

6) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جا ب س}}{\text{ظا أس}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{أ}}$

عند حل أي سؤال يجب أن توصل إلى أحد النهايات السابقة

الطريقة الأولى المتطابقات فقط

مثال ١: $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}2\text{س}}{3(\text{س})^2} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}2\text{س}}{3(\text{س})^2} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{1 - (1 - 2\,\text{جا}^2\text{س})}{3(\text{س})^2}$$

$$\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{(2\,\text{جا}^2\text{س})}{3(\text{س})^2} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^2} = \frac{2}{3}$$

س١: $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جتا}6\text{س} - \text{جتا}2\text{س}}{2(\text{س})^2}$

أسئلة وزارة

ص٢٠١٤: $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جتا}3\text{س} - \text{جتا}5\text{س}}{2(\text{س})^2}$

ش٢٠١٦: $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{2\text{س} - \text{جاس}}{\sqrt{1 - \text{جتا}2\text{س}}}$

ش٢٠١٧: $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{2\,\text{جا}2\text{س} - \text{جا}4\text{س}}{(\text{س})^3}$

Mohammed Haddad
أ.محمد الحداد
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

الطريقة الثانية فك الأقواس

مثال٢: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} (\text{٣س})^{٢} (\text{قتا}^{٢}\text{٥س}) = \frac{٠}{٠}$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} (\text{٣س})^{٢} \left(\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{٥س}}\right) = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{(\text{٣س})^{٢}}{\text{جا}^{٢}\text{٥س}}\right)$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{٣س}}{\text{جا٥س}}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$$

س٢: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{١-جتاس}}{\text{جاس}}\right)\left(\frac{\text{١+جتاس}}{\text{س}}\right)$

أسئلة وزارة

ص٢٠١١: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{٣س} (\text{ظتا٢س+قتا٣س})$

الطريقة الثالثة إخراج عامل مشترك

مثال٣: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جاسجتاس+جاس}}{(\text{٣س})}\right) = \frac{٠}{٠}$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جاس}}{(\text{٣س})}\right)\left(\frac{\text{جتاس+١}}{١}\right) = \frac{٢}{٣}$$

س٣: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا٨س-جا٨سجتا٢س}}{(\text{س}^{٢})}\right)$

الطريقة الرابعة ضرب بالمرافق

مثال٤: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{١-جتاس}}{\text{٣س}^{٢}}\right) = \frac{٠}{٠}$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{١-جتاس}}{\text{٣س}^{٢}} \times \frac{\text{١+جتاس}}{\text{١+جتاس}}\right)$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{١-جتا}^{٢}\text{س}}{\text{٣س}^{٢}(\text{١+جتاس})}\right) = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{٣س}^{٢}(\text{١+جتاس})}\right)$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{٣س}^{٢}} \cdot \frac{١}{(\text{١+جتاس})}\right) = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$$

س٤: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س ظا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس} - \text{جاس جتاس}} \right)$

س٥: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ظا٢س} - \text{جا٢س}}{\text{س}^{٣}} \right)$

أسئلة وزارة

ش٢٠١٢: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}}$

ص٢٠١٦: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - \text{س ظاس} + ٤\,\text{جتاس}}{\text{س جا٤س}}$

الطريقة الخامسة توحيد المقام

مثال٥: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{قاس} - ١}{٣\text{س}^{٢}} \right) = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١ - \text{جتاس}}{٣\text{س}^{٢}\,\text{جتاس}} \right) =$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١ - \text{جتاس}}{٣\text{س}^{٢}\,\text{جتاس}} \times \dfrac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} \right) =$

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{٣\text{س}^{٢}\,\text{جتاس}\,(١ + \text{جتاس})} \right) = \dfrac{١}{٦}$

أسئلة وزارة

ش٢٠١٠: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٣}} \right)$

ص٢٠١٠: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{قا٢س} - ١}{\text{س}^{٢}} \right)$

الطريقة السادسة الاستبدال والتعويض

مثال٦: $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{جتاس}{٢س - \pi}\right) = \frac{٠}{٠}$

نفرض ص = ٢س $-\pi$ ومنها ص←٠

$$\lim\limits_{ص \to ٠} \left(\frac{جتا\left(\frac{ص}{٢} + \frac{\pi}{٢}\right)}{ص}\right)$$

$$\lim\limits_{ص \to ٠} \left(\frac{-جا\left(\frac{ص}{٢}\right)}{ص}\right) = \frac{-١}{٢}$$

س٦: $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{جتاس}{س - \frac{\pi}{٢}}\right)$

س٧: $\lim\limits_{س \to \pi} \left(\frac{ظاس}{س - \pi}\right)$

أسئلة وزارة

ش٢٠١١: $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٤}} \left(\frac{جتاس - جاس}{س - \frac{\pi}{٤}}\right)$

ش٢٠١٢: $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} \left(\frac{جتاس}{٢س - \pi}\right)$

ش٢٠١٣: $\lim\limits_{س \to ١} \left(\frac{جتا\frac{\pi}{٢}س}{س - ١}\right)$

ص٢٠١٣: $\lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{جا٢س}{س^{٢} - \frac{\pi}{٢}س}\right)$

ش٢٠١٤: $\lim\limits_{س \to ٢} \left(\frac{س - ٢}{ظا(\pi س)}\right)$

ش٢٠١٥: $\lim\limits_{س \to \pi} \left(\frac{١ + جتاس}{(س - \pi)^{٢}}\right)$

ص٢٠١٥: $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٦}} \left(\frac{جتاس - \sqrt{٣}جاس}{٦س - \pi}\right)$

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

تمارين نهايات اقترانات مثلثية

س١: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{س}-\text{ظا}٣\text{س}+\text{ظا}٥\text{س}}{٣\text{س}-\text{ظا}^{٢}\pi}$

س٢: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}٨\text{س}+\text{جا}٤\text{س}}{\text{س}}$

س٣: $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \left(\dfrac{\text{جتا}\pi\text{س}+١}{\text{س}-١}\right)$

س٤: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \left(٧\text{س}^{٣}\,\text{ظتا}^{٢}(٥\text{س})\,\text{قتا}(٥\text{س})\right)$

س٥: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{١+\text{جتا}(٤\text{س})-٢\text{جتا}^{٢}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}$

س٦: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{١-\text{جا}(\text{س})}{(\pi-٢\text{س})^{٢}}$

س٧: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{٢\text{س}^{٢}-\text{س}\,\text{ظا}(٢\text{س})}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$

س٨: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{١-\text{جتا}(٦\text{س})}{\text{جتا}(٨\text{س})-١}$

س٩: $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{\text{ظتا}\text{س}}{\pi-٢\text{س}}$

س١٠: $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}\,\text{جا}\dfrac{\pi}{\text{س}}}{\text{س}-١}$

س١١: $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\text{جا}(\text{س}-٤)}{\text{س}^{٢}-١٦}$

س١٢: $\lim\limits_{\text{س}\to ٣\pi} \dfrac{\text{جا}\dfrac{\text{س}}{٣}}{\dfrac{\text{س}}{٣}-\pi}$

س١٣: $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{جا}\text{س}+\text{جا}\text{أ}}{\text{س}+\text{أ}}$

س١٤: إذا كانت

$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}\text{أ}\text{س}}{٢\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{ظا}٣\text{س}}{\text{ب}\text{س}-\text{س}} = ٦$

فجد كل من قيمة أ ، ب

س١٤: إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{جا}(٢\pi-٢\text{س})}{-٥\text{س}}$

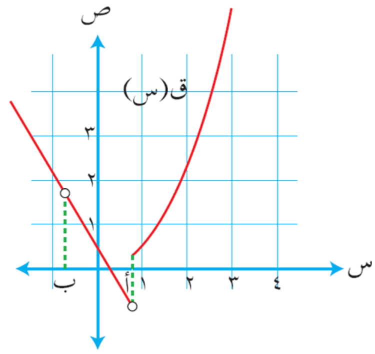
فجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س})$

أ. محمد الحداد

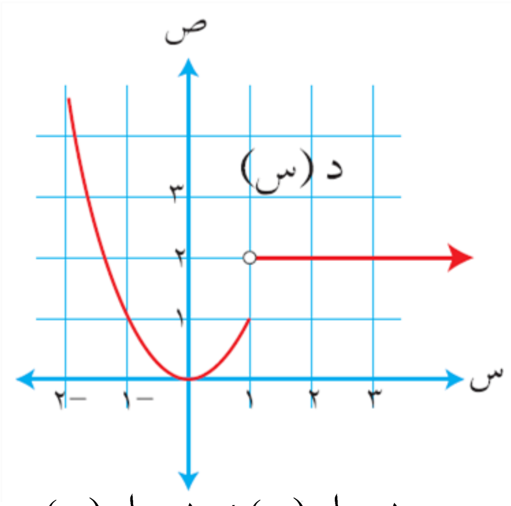
Mohammed Haddad

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

نقول إن الاقتران هـ متصل عند س= م ، إذا كان منحنى الاقتران هـ ليس فيه فجوة أو انقطاع عند س = م

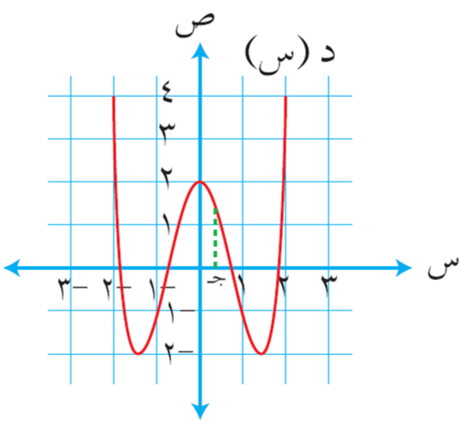


غير متصل عند أ ، ب

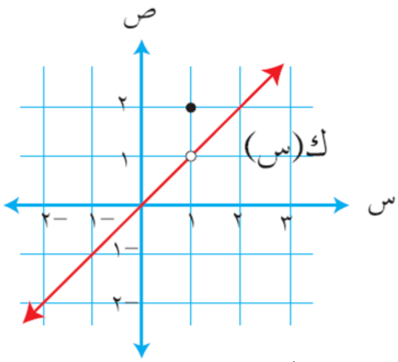


$\lim_{س \to ١^{+}} د(س) \neq \lim_{س \to ١^{-}} د(س)$

إذا الاقتران د غير متصل



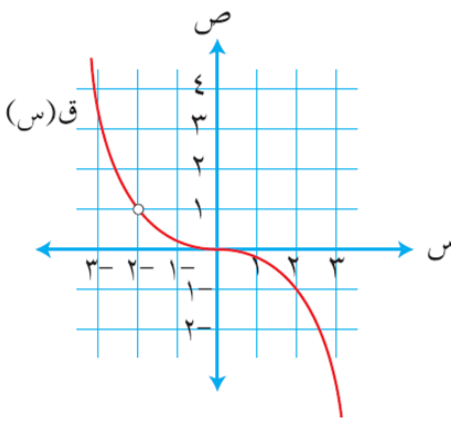
مَتصل عند جـ



غير متصل عن س=١

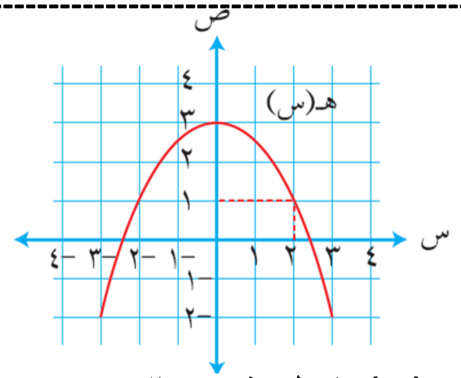
$\lim_{س \to ١^{+}} ك(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ك(س) = ١$

ك(١)=٢



ق(س)غير معرف عند س=-٢

ق(س)غير متصل عند س= -٢



هـ(س) متصل عند س=٢

هـ(س) معرف عند س=٢

هـ(٢)=١

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

$\lim\limits_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim\limits_{س \to ٢^-} هـ(س) = ١$

تعريف

يكون الاقتران ق متصلاً عند س = أ ، إذا حقق الشروط الآتية:

١) الاقتران ق معرف عند س = أ .

٢) $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) موجودة .

٣) $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ) .

مثال١: $ق(س) = \begin{cases} ٢س & ، س > ٢ \\ ٣س - ٢ & ، س = ٢ \\ س^{٢} & ، س < ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٢

الحل:

نبحث إذا الاقتران ق معرف عند س=٢

١) ق(٢)= ٣×٢ − ٢ = ٦ − ٢ = ٤

٢) $\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢^+} ٢س = ٤$

$\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢^-} س^{٢} = ٤$

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

٣) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢) = ٤$

∴ق(س) متصل عند س=٢

مثال٢: $ق(س) = \begin{cases} ٤ + ٦س & ، س < ٣ \\ س^{٣} - ٨ & ، س \geqslant ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٣

الحل:

نبحث إذا الاقتران ق معرف عند س=٣

١) ق(٣)=٤ + ٦×٣ = ٤ + ١٨ = ٢٢

٢) $\lim\limits_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^+} س^{٣} - ٨ = ١٩$

$\lim\limits_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^-} ٤ + ٦س = ١٩$

$\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) =$ **غير موجودة**

٣) $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) \neq ق(٣)$

∴ق(س) غير متصل عند س=٣

مثال٣: $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢ + س}{٢} & ، س \neq ٢ \\ ٣س - ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٢

الحل:

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س + ٢}{٢} = ٢$

ق(٢)= ٣×٢ − ٢ = ٢

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$

∴ق(س) متصل عند س=٢

مثال٤: إذا كان ق(س)=٢س^{٣} − ٢س

ابحث في اتصال ق عند س=٢

بالتعويض المباشر

=٢×٢^{٣} − ٢×٢

= ١٦ − ٤ = ١٢

ق(س)=٢×٢^{٣} − ٢×٢

= ١٦ − ٤ = ١٢

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$

∴ق(س) متصل عند س=٢

نتيجة: إذا كان ق(س) كثير الحدود فإنه متصل على جميع الأعداد الحقيقية.

س١: إذا كان $ق(س) = \frac{|س - ٤|}{س + ٤}$ ، $س \neq -٤$

ابحث في اتصال ق عند س=٤

س٢: إذا كان $ق(س) = \left[\frac{١}{٢}س + ٣\right]$

ابحث في اتصال ق عند س=٧ وعند س =٨

يجب إعادة تعريف الاقتران كما يأتي

$$ق(س) = \begin{cases} ٦ ، & ٦ \leqslant س < ٨ \\ ٧ ، & ٨ \leqslant س < ١٠ \end{cases}$$

ملاحظة: في اقتران أكبر عدد صحيح إذا عوضنا قيمة س وكان الناتج عدد صحيح

تكون النهاية غير موجودة

مثال: $\lim_{س \to ٢} = \left[\frac{١}{٢}س - ٤\right] = [-٣]$

غير موجودة عند س=٢

مثال٥: إذا كان ع(س)= $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

ابحث في اتصال ع عند س=٢

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{س - ٢}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)}{١} = ٤$$

لكن ع(٢) غير معرف

∴ع(س) غير متصل عند س=٢

مثال٦: ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ ، & س \leqslant ١ \\ م ، & س > ١ \end{cases}$$

جد قيمة م التي تجعل ق متصلا عند س=١

الحل:

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س)$$

٢×١ + ٤ = م

$\boxed{م = ٦}$

مثال٧:

ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} أس^٣ - بس + ١ , & س < ١ \\ ٥ , & س = ١ \\ س^٢ - (أ + ب)س + ٢ , & س > ١ \end{cases}$$

جد قيمة أ، ب التي تجعل ق متصلا عند س=١

الحل:

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س)$$

١– (أ+ب)+٢ = أ – ب + ١

١– أ – ب +٢= أ – ب +١

أ.محمد الحداد
Mohammed Haddad
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

$1 + 2 = 2أ + 1$

$2 = 2أ$ $\boxed{أ=1}$

الآن نعوض أ بأحد المعادلتين

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = ق(1)$

$1 - ب + 1 = 5$

$- ب + 2 = 5$

$- ب = 3$

$ب = -3$

مثال٨: ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{3 - س}{س - 3} & ، س \neq 3 \\ م س + 2 & ، س = 3 \end{cases}$$

جد قيمة م التي تجعل ق متصلا عند س=٣

الحل:

$\lim_{س \to 3} ق(س) = ق(3)$

$\lim_{س \to 3} \dfrac{\cancel{3 - س}^{\,-1}}{\cancel{س - 3}} = ق(3)$

$-1 = م \times 3 + 2$

$-3 = 3م$

$م = -1$

ش٢٠١٠: : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{أ}{س} + س^2 & ، 0 < س \leqslant 2 \\ س + 3 & ، 2 < س < 3 \\ 7 & ، س = 3 \end{cases}$$

١)جد قيمة أ التي تجعل ق متصلا عند س=٣

٢)ابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠، ٣]

ش٢٠١٣: : ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^3 + س^2 + 2س - 4}{س - 1} & ، س \neq 1 \\ 5س - 1 & ، س = 1 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س=١

ص٢٠١٣: : ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \leqslant 2 \\ [س + 3] & ، س > 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س=٢

ص٢٠١٤: : ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} \left|\dfrac{س}{2} - 1\right| & ، -1 \leqslant س < 3 \\ \left[\dfrac{1}{2}س + 3\right] & ، 3 \leqslant س < 4 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س=٣

ش٢٠١٥: : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س + ٢ , & ٠ \le س < ٢ \\ ١٠ , & س = ٢ \\ \dfrac{(٢س + ١)^٢ - ٢٥}{س - ٢} , & ٢ < س \le ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س=٢

ش٢٠١٦: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^٢}} , & -\dfrac{١}{٣} \le س < \dfrac{١}{٣} \\ -٢ , & س = \dfrac{١}{٣} \\ -٦س - [س] , & \dfrac{١}{٣} < س \le \dfrac{٤}{٣} \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س= $\frac{١}{٣}$

ص٢٠١٦: : ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{(٥ - س^٢) - [٢س + ٣]}{١ - س} ، & ٠ < س \le ١ \\ ٢س - |١ - س^٢| ، & ١ \le س < ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س= ١

ش٢٠١٧: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} (٥ - س)^٢ ، & س \ge ٤ \\ \dfrac{|[س] - س| + [س - ٤]}{س - ٤} ، & س < ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س=٤

نظريات في الاتصال

من خلال تعريف الاتصال عند نقطة يمكن التوصل إلى النظريات الآتية:

نظرية (١)

إذا كان ق اقترانًا كثير حدود، فإن ق متصل عند س لكل س ∋ ح.

نظرية (٢)

إذ كان ق، د ا قترانين متصلين عند س = أ ، فإن:

١) كلا الاقترانين ق + د ، ق − د اقتران متصل عند س = أ

٢) الاقتران ق × د متصل عند س = أ

٣) الاقتران $(\frac{ق}{د})$ متصل عند س = أ، بشرط أن د (أ) ≠ ٠

نظرية (٣)

إذا كان ق اقترانًا متصلاً عند س = أ ، ق(س) ≥ ٠ في فترة مفتوحة تحتوي أ ، فإن هـ حيث

هـ(س) = $\sqrt{ق(س)}$ اقتران متصل عند س = أ

مثال١: إذا كان $ق(س) = \dfrac{س^٢ - ١}{س - ١}$

$هـ(س) = \sqrt{س + ٢}$

فابحث في اتصال الاقتران ق × هـ عند س=٢

الحل:

$$\lim_{س \to ٢} ق(س) = \frac{٢^٢ - ١}{٢ - ١} = \frac{٣}{١} = ٣$$

$$ق(٢) = \frac{٢^٢ - ١}{٢ - ١} = \frac{٣}{١} = ٣$$

$$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$$

∴ ق(س) متصل عند س=٢

$$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = \sqrt{٢ + ٢} = \sqrt{٤} = ٢$$

$$هـ(س) = \sqrt{٢ + ٢} = \sqrt{٤} = ٢$$

$$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$$

∴ هـ (س) متصل عند س=٢

∴ الاقتران ق × هـ متصل عند س=٢

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

مثال٢: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢ ،\quad \text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ١ & ، \text{س} \leqslant ٣ \\ ٥ - \text{س} & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران (ق + هـ) عند س=٣

الحل:

ق(س) متصل ، كثير حدود

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{هـ}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣^{+}} ٥ - \text{س} = ٢$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{هـ}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{س} - ١ = ٢$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{هـ}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{هـ}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣} \text{هـ}(\text{س})$$

$$\text{هـ}(٣) = ٣ - ١ = ٢$$

$\lim_{\text{س} \to ٣} \text{هـ}(\text{س}) = \text{هـ}(٣)$ **إذن هـ(س) متصل**

∴ الاقتران (ق + هـ) متصل عند س=٣

ملاحظة: لا يمكن استخدام نظريات الاتصال (الجمع والطرح والضرب والقسمة) إذا كان أحد الاقترانين على الاقل غير متصل فالحل دمج الاقترانين باقتران واحد والبحث عن اتصال الاقتران الجديد (بعد الدمج)

مثال٣: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢ ،\quad \text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ١ & ، \text{س} \leqslant ١ \\ ٥ - \text{س} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران (ق - هـ) عند س=١

الحل:

ق(س) متصل ، كثير حدود

$$\lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{هـ}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} ٥ - \text{س} = ٤$$

$$\lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{هـ}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} ١ - ١ = ٠$$

$\lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{هـ}(\text{س}) \neq \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{هـ}(\text{س})$ **غير موجودة**

إذا هـ(س) غير متصل

فيجب البحث عن اتصالهما عن طريق <u>الدمج</u>

ل(س) = ق(س) - هـ(س)

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{س}^{٢} + ٢) - (\text{س} - ١) & ، \text{س} \leqslant ١ \\ (\text{س}^{٢} + ٢) - (٥ - \text{س}) & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

$$\lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ل}(\text{س}) =$$

$$\lim_{\text{س} \to ١^{+}} (\text{س}^{٢} + ٢) - (٥ - \text{س}) = -١$$

$$\lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ل}(\text{س}) =$$

$$\lim_{\text{س} \to ١^{-}} (\text{س}^{٢} + ٢) - (\text{س} - ١) = ٣$$

$\lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ل}(\text{س}) \neq \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ل}(\text{س})$ **غير موجودة**

إذا ل(س) غير متصل عند س = ١

ملاحظة: قد يصبح الاقترانين متصلين بعد الدمج

<u>نتيجة</u>: الاقتران النسبي هو اقتران متصل لقيم س جميعها <u>باستثناء أصفار المقام</u>

مثال٤: إذا $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$

جد قيمة س التي تجعل ق(س) غير متصل

الحل: نبحث في أصفار المقام

س – ١ = ٠

س = ١

إذا ق(س) غير متصل عند س = ١

تمارين الاتصـــال

مثال٥: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}،\quad \text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + ٢}$$ **فابحث**

في اتصال الاقتران (ق × هـ) عند س=٢

الحل:

ق(س) غير متصل عند س = ٢

هـ(س) متصل عند س = ٢

فيجب البحث عن اتصالهما عن طريق الدمج

ل(س) = ق(س) × هـ(س)

$$\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} \times \frac{١}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٤} = ١$$

بما أن ل(س)=١ إذن متصل عند س=٢

أسئلة وزارة

ش٢٠١٤: إذا كان

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ،\text{س} < ١ \\ |٢\text{س}| & ،\text{س} \geq ١ \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ + ٢\text{س} & ،\text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢} & ،\text{س} \geq ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران (ق + هـ) عند س=١

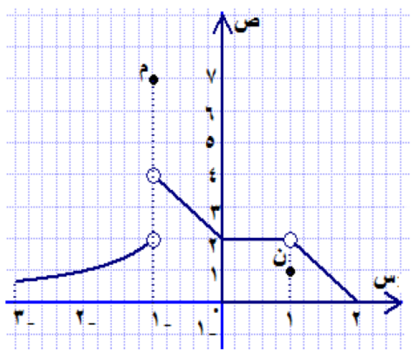
س١: $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٤$

ابحث في اتصال ق عند س=٤

س٢: $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٤ & ،\text{س} \leq ١ \\ ٨\text{س}^{٢} - ٢ & ،\text{س} > ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س=١

س٣: ابحث في اتصال ق عند س=١ وعند س=٠ وما قيم س التي تجعل الاقتران غير متصل



س٥:

س٦: $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} & ،\text{س} > ٣ \\ ٤\text{س} - ٦ & ،\text{س} = ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٣ & ،\text{س} < ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س=٣

س٧: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس} - \text{بس} + ٥ & ,\text{س} < ١ \\ ٩ & ,\text{س} = ١ \\ \text{س}^{٢} - \text{بس} + ٣ & ,\text{س} > ١ \end{cases}$$ **جد**

قيمة أ، ب التي تجعل ق متصلا عند س=١

س٨: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & ،\ س = ٢ \\ \dfrac{س^{٢} + ٢س}{س} & ،\ س \neq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٢

س٩: ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س - س^{٢}}{س^{٢} - ٩} & ،\ س \neq ٣ \\ \dfrac{م}{٤س} & ،\ س = ٣ \end{cases}$$

جد قيمة م التي تجعل ق متصلا عند س=٣

س١٠:

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} |جتاس| & ،\ س \leqslant ٠ \\ \dfrac{جاس}{س} & ،\ س > ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٠

س١١: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٦ & ،\ س \leqslant ١ \\ ٨س^{٢} & ،\ س > ١ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ،\ س \leqslant ١ \\ ٨س^{٢} - ٨ & ،\ س > ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال

١) (ق+هـ)(س) عند س=١
٢) (ق-هـ)(س) عند س=١
٣) (ق×هـ)(س) عند س=١
٤) $\left(\dfrac{ق}{هـ}\right)$(س) عند س=١

س١٢: جد قيمة س التي تجعل الاقتران غير متصل
في كل مما يلي:

١) $ق(س) = \dfrac{س - ٥}{س^{٢} - ٩}$

٢) $ع(س) = س^{٢} - ١$

٣) $ل(س) = \dfrac{س + ١}{س^{٢} - ٢س}$

٤) $ك(س) = \dfrac{س - ٢}{٤}$

٥) $ر(س) = \dfrac{٢س + ٧}{س^{٢} + ٣س - ٤}$

٦) $ط(س) = \dfrac{س + ٥٨}{س^{٢} + ٤}$

٧) $و(س) = \dfrac{س}{٣س - س^{٢}}$

٨) $ل(س) = \dfrac{س + ١}{س^{٢} - ١} + \dfrac{٢}{س}$

٩) $ق(س) = \begin{cases} صس + ١ & س \notin \\ صس & س \in \end{cases}$

س١٣: إذا كان

$ق(س) = س$ ، $هـ(س) = \dfrac{س - ٥}{س^{٢} - ٥س}$ فابحث
في اتصال الاقتران (ق × هـ) عند س=٥

س١٤: إذا كان

$ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = [٥ - س]$ فابحث
في اتصال الاقتران (ق × هـ) عند س=٥

أ.محمد الحداد
Mohammed Haddad
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

الاتصال على فترة

تعريف

ليكن ق اقترانًا معرفًا على [أ ، ب]:

١) يكون الاقتران **ق** متصلا عند س = أ من اليمين إذا كانت $\lim_{\text{س}\to \text{أ}^+} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$.

٢) يكون الاقتران **ق** متصلا عند س = ب من اليسار إذا كانت $\lim_{\text{س}\to \text{ب}^-} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{ب})$.

٣) يكون الاقتران **ق** متصلا على (أ ، ب)، إذا كان متصلا عند كل س ∈ (أ ،ب).

٤) يكون الاقتران **ق** متصلا على [أ ، ب]، إذا كان متصلا على (أ ،ب)، ومتصلا عند س = أ من اليمين، ومتصلا عند س = ب من اليسار.

مثال١ :ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٤} + \text{٦س} & \text{،} \quad \text{١} \le \text{س} < \text{٣} \\ \text{س}^{\text{٣}} - \text{٥} & \text{،} \quad \text{س} = \text{٣} \end{cases}$$

فابحث في اتصال في الفترة [١،٣]

الحل:

$$\lim_{\text{س}\to \text{١}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{١}^+} \text{٤} + \text{٦س} = \text{١٠}$$

$$\text{ق}(\text{١}) = \text{١٠}$$

إذا ق متصل من اليمين عند س=١

$$\lim_{\text{س}\to \text{٣}^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{٣}^-} \text{س}^{\text{٣}} - \text{٥} = \text{٢٢}$$

$$\text{ق}(\text{٣}) = \text{٢٢}$$

إذا ق متصل من اليسار عند س=٣

إذا ق متصل في الفترة [١،٣]

مثال٢: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٢س} & \text{،} \quad \text{س} = \text{٢} \\ \text{٣س} - \text{٢} & \text{،} \quad \text{٢} < \text{س} < \text{٤} \\ \text{س}^{\text{٢}} & \text{،} \quad \text{س} = \text{٤} \end{cases}$$

فابحث في اتصال في الفترة [٢،٤]

الحل:

$$\lim_{\text{س}\to \text{٢}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{٢}^+} \text{٣س} - \text{٢} = \text{٤}$$

$$\text{ق}(\text{٢}) = \text{٢} \times \text{٢} = \text{٤}$$

إذا ق متصل من اليمين عند س=٢

$$\lim_{\text{س}\to \text{٤}^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{٤}^-} \text{٣س} - \text{٢} = \text{١٠}$$

$$\text{ق}(\text{٤}) = \text{٤}^{\text{٢}} = \text{١٦}$$

إذا ق غير متصل من اليسار عند س=٤

إذا ق متصل في الفترة[٢،٤)

مثال٣: : ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} & \text{،} \quad \text{٣} \le \text{س} < \text{٥} \\ \text{س} + \text{٢٠} & \text{،} \quad \text{٥} \le \text{س} < \text{٧} \\ \text{٩} & \text{،} \quad \text{س} = \text{٧} \end{cases}$$

فابحث في اتصال في الفترة [٣،٧]

الحل:

١) $\lim_{\text{س}\to \text{٣}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{٣}^+} \text{س}^{\text{٢}} = \text{٩}$

$$\text{ق}(\text{٣}) = \text{٩}$$

إذا ق متصل من اليمين عند س=٣

٢) $\lim_{\text{س}\to \text{٧}^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{٧}^-} \text{س} + \text{٢٠} = \text{٢٧}$

$$\text{ق}(\text{٧}) = \text{٩}$$

إذا ق غير متصل من اليسار عند س=٧

٤) ق متصل في الفترة (٣ ، ٥) لأنه كثير حدود

٥) ق متصل في الفترة (٥ ، ٧) لآنه كثير حدود

٦) $\lim_{\text{س}\to \text{٥}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{٥}^+} \text{س} + \text{٢٠} = \text{٢٥}$

$$\lim_{\text{س}\to \text{٥}^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{٥}^-} \text{س}^{\text{٢}} = \text{٢٥}$$

$$\text{ق}(\text{٥}) = \text{٢٥}$$

إذا ق متصل من اليمين عند س=٥

إذا ق متصل في الفترة[٣،٧)

مثال٤ :ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٤} + \text{٦س} & \text{،} \quad \text{س} < \text{٣} \\ \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢٥}}{\text{س} - \text{٥}} & \text{،} \quad \text{س} \ge \text{٣} \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على مجاله

الحل:

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

ق متصل في الفترة $(-\infty ، ٣]$ كثير حدود

ق متصل في الفترة $[٣ ، \infty) - ٥$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٣^+} \frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥} = \frac{-١٦}{-٢} = ٨$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٣^-} ٤ + ٦\text{س} = ٢٢$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق(س)}$$ غير موجودة

عند س = ٣

إذا ق متصل على الفترة ح / {٣ ، ٥}

س١: ليكن

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \text{س} = ٥ \\ \dfrac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥} & ، \text{س} \neq ٥ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على مجاله

س٢: إذا كان $\text{ق(س)} = |٣\text{س} - ٩|$

فابحث في اتصال على الفترة $[١،٥]$

إعادة تعريف القيمة المطلقة على الفترة كالاتي

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٩ - ٣\text{س} & ، ١ \leqslant \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س} - ٩ & ، ٣ \leqslant \text{س} < ٥ \end{cases}$$

س٣: إذا كان $\text{ق(س)} = \left[\frac{١}{٣}\text{س} - ٢ \right]$

فابحث في اتصال على الفترة $[١،٧]$

إعادة تعريف الاقتران على الفترة كالاتي

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} -٢ & ، ١ \leqslant \text{س} < ٣ \\ -١ & ، ٣ \leqslant \text{س} < ٦ \\ ٠ & ، ٦ \leqslant \text{س} \leqslant ٧ \end{cases}$$

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

س٤: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}+١} & ، ٠ \leq \text{س} < ٣ \\ [٠.٢٥\text{س}+٢] & ، ٣ \leq \text{س} < ٦ \\ |٩-\text{س}| & ، \text{س}=٦ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على الفترة [٠،٦]

أسئلة وزارة

ش٢٠١٠: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{أ}}{\text{س}}+\text{س}^٢ & , ٠ < \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}+٣ & , ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ & , \text{س}=٣ \end{cases}$$

١) جد قيمة أ التي تجعل ق متصلا عند س=٣

٢) ابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠،٣]

ص٢٠١٠: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢-١}{\text{س}+١} & , -٢ < \text{س} \leq -١ \\ \text{س}[\text{س}]+١ & , -١ < \text{س} < ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [-٢،١)

ش٢٠١١: ابحث في اتصال الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{[\text{س}]+\text{س}}$ على الفترة [١،٢]

ص٢٠١١: إذ كان $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢-١}{\text{س}+٢}$

$\text{هـ}(\text{س}) = [\text{س}]$

فابحث في اتصال الاقتران $\text{ل}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$ على الفترة [٠،٢]

مثال٥: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}+٥ & ، \text{س} \geq ٣ \\ \frac{\text{س}^٣-٢٧}{\text{س}-٣} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على ح

الحل:

ق متصل في الفترة (-∞،٣)

ق متصل في الفترة [٣،∞) كثير حدود

$$\lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{س}+٥ = ٨$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣^-} \frac{\text{س}^٣-٢٧}{\text{س}-٣} = ٢٧$$

$\lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق}(\text{س}) \neq \lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

عند س = ٣

إذا ق متصل على الفترة ح / { ٣ }

مثال٦: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}(\text{أس})}{(\text{٥س})} & \text{،} \ -\pi \leqslant \text{س} < \text{٠} \\ \text{٢} & \text{، س} = \text{٠} \\ \text{ب}(\text{٢} + \text{س}) & \text{،} \ \text{٠} < \text{س} \leqslant \pi \end{cases}$$

اقتراناً متصلاً على الفترة $[-\pi ، \pi]$، فجد كل من أ ب

الحل:

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}^{+}}{\text{نهـا}} \ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{٠})$

٢ب=٢ ومنها ب = ١

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}^{-}}{\text{نهـا}} \ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{٠})$

$\dfrac{\text{أ}}{\text{٥}} = \text{٢}$ **ومنها أ = ١٠**

س٥: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٣٠}}{\text{أس} - \text{٦أ}} & \text{، س} > \text{٦} \\ \text{١} & \text{، س} = \text{٦} \\ \text{بس} & \text{، س} < \text{٦} \end{cases}$$

اقتراناً متصلاً على ح، فجد كل من أ ب

س٦: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٥} + \text{س} & \text{، س} = \text{٢} \\ \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢}(\text{هـ} - \text{١})\text{س} - \text{٤هـ}}{\text{س} - \text{٢}} & \text{، س} \neq \text{٢} \end{cases}$$

اقتراناً متصلاً على ح، فجد هـ

Mohammed Haddad
أ.محمد الحداد
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

تمارين الاتصال على فترة

أسئلة وزارة

ص٢٠١٥:
ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^{٢}(\text{ب}\text{س}) - ٩\text{س}^{٢}}{\text{س}\,\text{جا}(٥\text{س})} & ، -\dfrac{\pi}{٦} \leq \text{س} < ٠ \\ ١١ & ، \text{س} = ٠ \\ |٩ - \text{س}| & ، ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$$

اقتراناً متصلاً عند س= صفر، فجد كل من أ ب

ش٢٠١٢: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س} - ٩ & ، \text{س} \leq ٢ \\ \left[٢ - \dfrac{١}{٢}\text{س}\right] & ، ٢ < \text{س} \leq ٤ \\ |\text{س} - ٤| & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على ح

ص٢٠١٢: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٩ & ، \text{س} < ٣ \\ [\text{س} + ١] & ، ٣ \leq \text{س} < ٤ \\ |٩ - ٢\text{س}| & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على ح

س١:إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١ & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على ح

س٢: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{٤ - \text{س}} & ، \text{س} < ٥ \\ \text{س} - ١٦ & ، \text{س} \geq ٥ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على مجاله

س٣: ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ & ، \text{س} = ٣ \\ [\text{س}] - ٥ & ، ٣ < \text{س} < ٤ \\ ٤ & ، \text{س} = ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال في الفترة $[٣،٤]$

س٤: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ & ، \text{س} = ٣ \\ [\text{س}] - ٥ & ، ٣ < \text{س} < ٤ \\ ٤ & ، \text{س} = ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال في الفترة $[٣،٤]$

س٥: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}] + \text{س} & ، -١ \leq \text{س} < ٠ \\ \text{س} - ١٦ & ، ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال في الفترة $[-١،٢]$

س٦: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \text{س} < ٢ \\ [٠.٥\text{س} + ٢] & ، ٢ \leq \text{س} < ٤ \\ \dfrac{٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣٦} & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على ح