الفصل الاول : النهايات

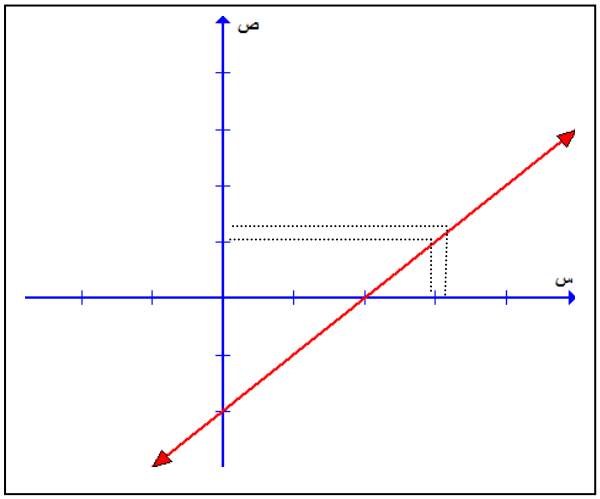
الدرس الاول : مفهوم النهاية

مفهوم النهاية :النهاية تعني دراسة سلوك الاقتران (قيم ص ، مسار الاقتران) عندما تقترب قيم المتغير فيه (س) من العدد أ.
اي: ماذا يحدث لمنحنى الاقتران عندما تقترب (تؤول) قيم (س) من العدد (أ).

ويعبر عنها بالرمز $\lim_{س \to أ}$ ق(س)

تعريف : يكون العدد ل هو نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد أ اذا كانت قيم الاقتران ق(س) تقترب من العدد ل كلما اقتربت قيم المتغير س من العدد أ ويرمز لها بالرمز $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل .

مثال : اذا كان ق(س)= س-٢ ،فجد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) ؟



الحل : لكي نجد نهاية الاقتران عند العدد ٣

ننشئ جدولا نضع فيه قيم للمتغير س قريبة من العدد ٣ بعضها اكبر منه والأخرى اصغر منه ثم نجد قيم ق(س) لكل منها كما يلي :

٣ ←

س	٣,١	٣,٠١		٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	١,١	١,٠١		٠,٩٩	٠,٩

→ ١

من خلال تتبع الجدول نلاحظ انه كلما اقتربت قيم س من العدد ٣ من جهة اليمين (قيم قريبة عليه اكبر منه) اقتربت قيم الاقتران ق(س) من العدد ١ ونعبر عن ذلك بالرمز $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ١ ويقرأ نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٣ من جهة اليمين تساوي ١ .

وايضاً من خلال تتبع الجدول نلاحظ انه كلما اقتربت قيم س من العدد ٣ من جهة اليسار (قيم قريبة عليه اصغر منه) اقتربت قيم الاقتران ق(س) من العدد ١ ونعبر عن ذلك بالرمز $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ١ ويقرأ نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٣ من جهة اليسار تساوي ١ .

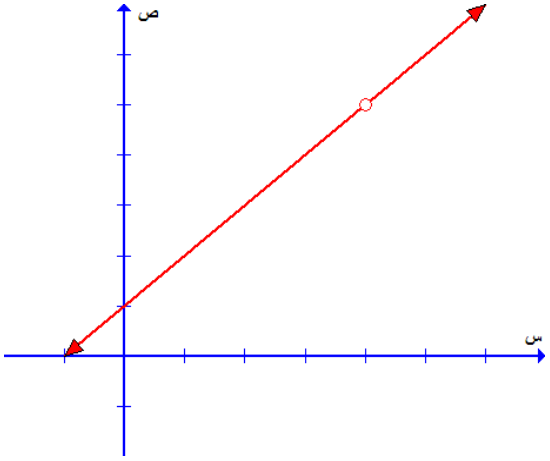
وكما ترى فان $\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ١$ ، وهنا نقول ان نهاية الاقتران ق(س) موجودة وتساوي ١ ويعبر عنها رمزا $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ١$.

مهم جدا :

اذا كانت $\lim_{س \to أ^+} ق(س) \neq \lim_{س \to أ^-} ق(س)$ عندا نقول ان

$\lim_{س \to أ} ق(س)$ = غير موجودة

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى



الاقتران النسبي $ق(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س - ٤}$

جد قيمة النهايات التالية (ان وجدت):

١) $\lim_{س \to ٤^+} ق(س) =$

٢) $\lim_{س \to ٤^-} ق(س) =$

٣) $\lim_{س \to ٤} ق(س) =$

الحل : تذكر ان مجال الاقتران النسبي = ح- {اصفار مقامه} = ح-{٤}

اي ان ق غير معرف عند س = ٤ ولذلك وضعنا دائرة مفتوحة على المنحنى عند س = ٤.

١) $\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٥$

٢) $\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = ٥$

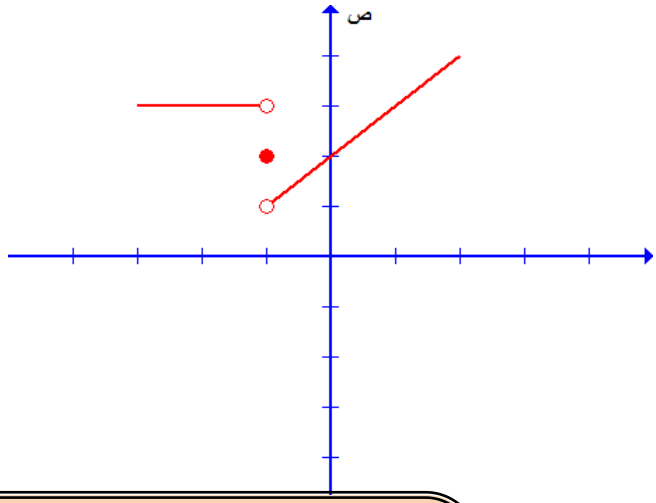
٣) $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٥$

لان $\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = \lim_{س \to ٤^-} ق(س) = ٥$

مهم جدا:

في الاقتران السابق لاحظنا ان الاقتران عند العدد ٤ غير معرف بينما كانت نهايته موجودة عند العدد ٤ ، وهذا يؤكد ان النهاية لا تهتم بقيمة الاقتران عند النقطة وإنما ماذا يحصل للاقتران عندما نقترب من تلك النقطة.

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران المتشعب



$$ق(س) = \begin{cases} ٣ & ، س < -١ \\ ٢ & ، س = -١ \\ س+٢ & ، س > -١ \end{cases}$$

جد قيمة النهايات التالية (ان وجدت):

١) $\lim_{س \to -١^+} ق(س) =$

٢) $\lim_{س \to -١^-} ق(س) =$

٣) $\lim_{س \to -١} ق(س) =$

٤) ق(-١) =

الحل : ١) $\lim_{س \to -١^+} ق(س) = ٣$

٢) $\lim_{س \to -١^-} ق(س) = ١$

٣) $\lim_{س \to -١} ق(س)$ = غير موجودة

٤) ق(-١)= ٢

ملاحظة

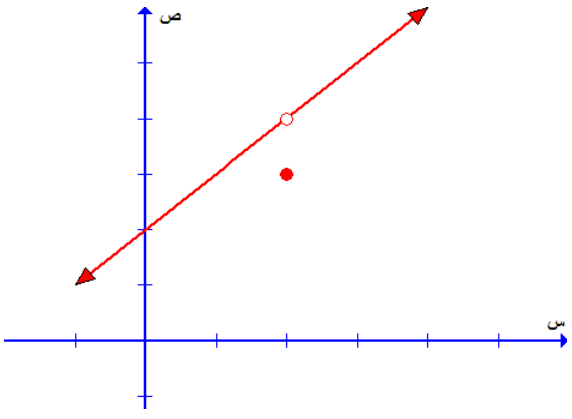
لاحظ ان منحنى الاقتران افترق طرفاه عند العدد س=-١ وهاذا ما نسميه قفزة، ودائما النهاية غير موجودة عند نقطة اذا كانت هناك قفزة لمنحنى الاقتران عندها

ملاحظة

لاحظ ان الاقتران معرف عند س=-١ لكن نهايته غير موجودة عند س=-١ ، وهذا يؤكد انه لا غلاقة بين قيمة الاقتران عند نقطة ونهاية الاقتران عند تلك النقطة.

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = \dfrac{س^٢ - ٤}{س-٢}$

جد قيمة ما يلي (ان وجدت):



الحل : ١) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) =$

٢) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) =$

٣) $\lim_{س \to ٢} ق(س) =$

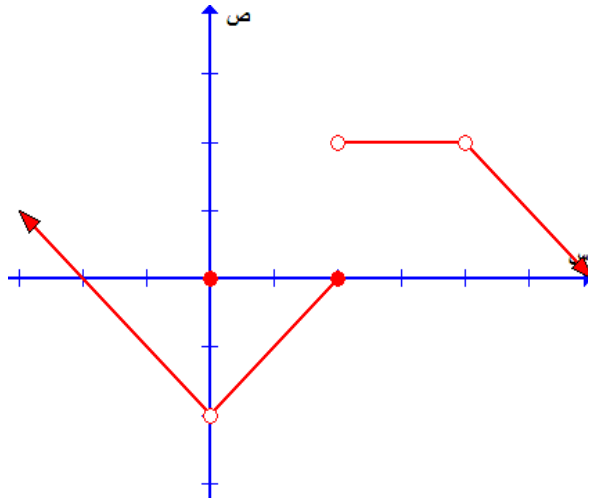
٤) ق(٢) =

الحل: ١) ٤ ٢) ٤ ٣) ٤ ٤) ٣

ملخص

- يمكن ان يكون الاقتران معرفا عند نقطة ونهايته غير موجودة عند تلك النقطة.
- يمكن ان يكون الاقتران غير معرف عند نقطة ونهايته موجودة عند تلك النقطة.
- يمكن ان يكون الاقتران غير معرف عند نقطة ونهايته غيرموجودة عند تلك النقطة.
- يمكن ان تتساوى قيمة النهاية مع قيمة الاقتران عند نقطة ويمكن ان تختلفا .
- حتى تكون النهاية موجودة عند س=أ يجب ان تكون النهاية موجودة على يمين أ ويسارها وقيمتها متساوية في الطرفين.
- عند وجود قفزة لمنحنى الاقتران عند نقطة فان النهاية غير موجودة عند تلك

سؤال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد قيمة ما يلي (ان وجدت):



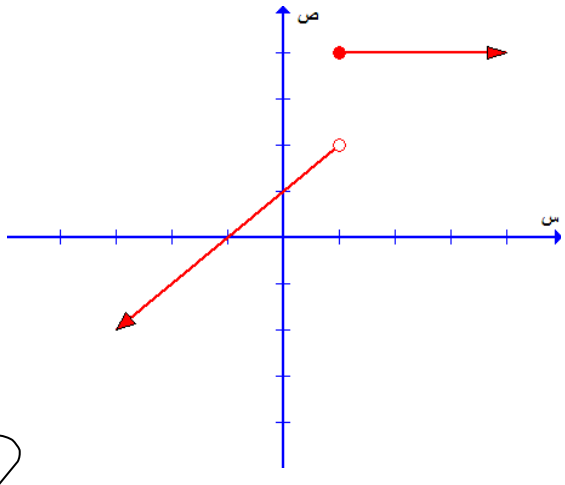
١) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س)　　٢) ق(-٢) =

٣) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)　　٤) ق(٠) =

٥) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)　　٦) ق(٢) =

٧) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س)　　٨) ق(٤) =

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق جد كلا مما يلي :



١) قيمة أ اذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = -١

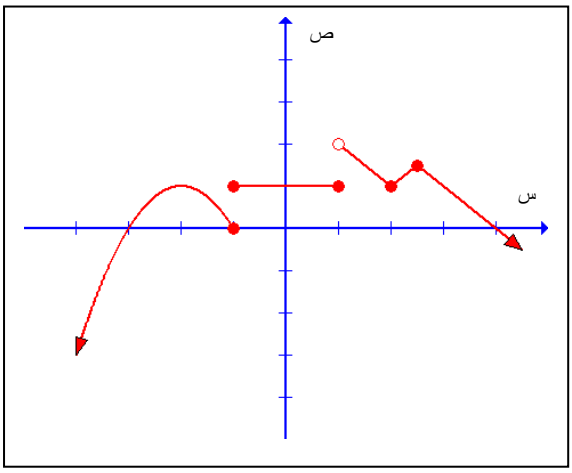
٢) قيمة ب اذا كانت $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = ٠

٣) قيمة جـ اذا كانت $\lim_{س \to جـ}$ ق(س) غير موجودة .

الحل : ١) أ = -٢

٢) ب = -١　　٣) جـ = ١

سؤال : معتمدا الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ع(س) جد كلا مما يلي :



أ) مجموعة قيم أ حيث : $\lim_{س \to أ}$ ع(س) = ١

ب) مجموعة قيم جـ حيث : $\lim_{س \to جـ}$ ع(س) = ١

جـ) مجموعة قيم ك حيث : $\lim_{س \to ك}$ ع(س) = غ.م

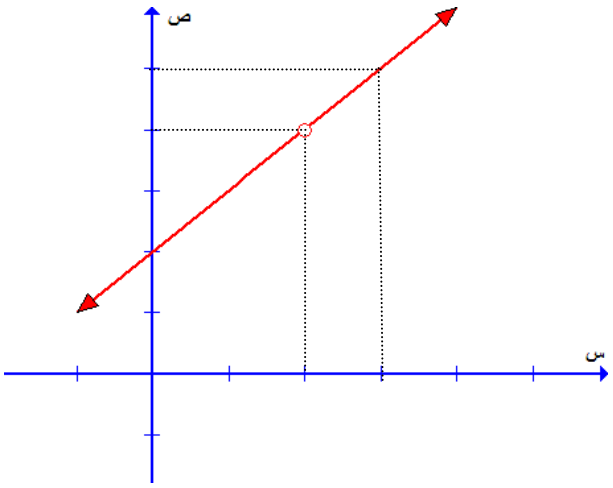
د) مجموعة قيم ل حيث : $\lim_{س \to ل}$ ع(س) = ٠

حل الاسئلة ص(٢٠):

١) اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل

منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

جد قيمة كل مما يأتي (ان وجدت):



أ) ق(٢) = غير معرف

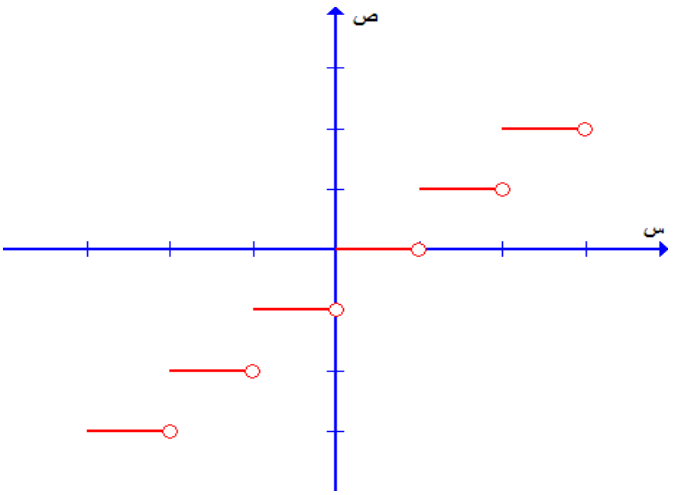
ب) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤

جـ) ق(٣) = ٥

د) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٥

٢) اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل

منحنى الاقتران ق جد قيمة ما يلي:



أ) $\lim_{س \to ٠,٥}$ ق(س) = ١

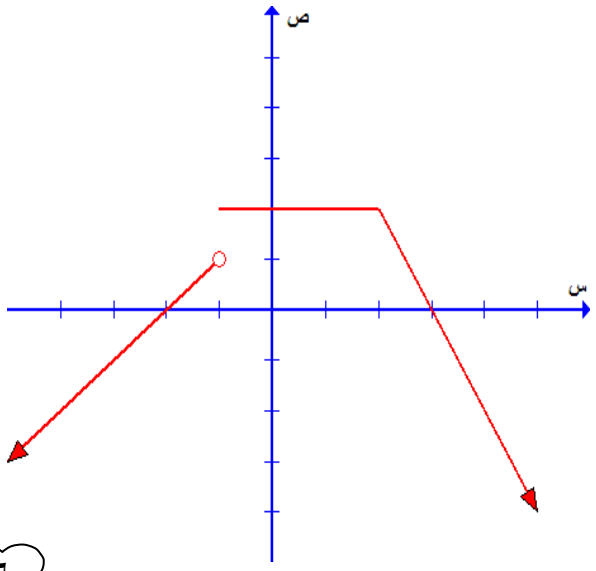
ب) $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = ٣

جـ) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢

د) $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) غير موجودة .

٣) اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل

منحنى الاقتران ق جد قيمة ما يلي:



أ) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢

ب) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢

جـ) قيمة أ حيث $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة

قيمة أ= ١-

د) قيم ب ، حيث $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = ٠

قيم ب= ٢،٣-

الدرس الثانى : نظريات النهايات

نظرية١:

اذا كانت أ،جـ ∈ ح ، فان :

١) $\lim_{س \to أ}$ جـ = جـ :أي ان نهاية الثابت تساوي الثابت نفسه

٢) $\lim_{س \to أ}$ س = أ : أي ان نهاية المتغير س هي تعويض أ مكان س.

نظرية٢:

اذا كانت أ،ل،ك ∈ ح ، وكانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ك فان:

١) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) + هـ(س) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) + $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ل+ك.

٢) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) - هـ(س) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) - $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ل- ك.

٣) $\lim_{س \to أ}$ ق(س)×هـ(س) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س)×$\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ل×ك.

ملخص : النهاية تتوزع في حالات الجمع والطرح والضرب ويمكن تعميم ذلك على اكثر من اقترانين..

نتائج:

- اذا كانت أ،جـ،ل ∈ ح ، وكانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل فان :

  $\lim_{س \to أ}$ جـ×ق(س) = جـ×ل (نستطيع اخراج الثابت من النهاية).

- $\lim_{س \to أ}$ (ق(س))^{ن} = ($\lim_{س \to أ}$ ق(س))^{ن} ، ن عدد طبيعي

- اذا كان ق كثير حدود فان ، $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(س)

  بمعنى : اذا كان الاقتران كثير حدود فان نهايته هي التعويض المباشر لقيمة أ في الاقتران ق(س).

- بالنسبة للاقتران المتشعب نطبق النهاية من اليمين واليسار ثم نحكم على النهاية بعد ذلك كما تعلمنا في الدرس الاول.

مثال : اذا علمت ان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = -٥ فجد قيمة كل مما يلي :

أ) $\lim_{س \to ١}$ (٢ق(س) + ٣هـ(س))

ب) $\lim_{س \to ١}$ (- ق(س) × هـ(س))

جـ) $\lim_{س \to ١}$ (٥ق(س) - هـ(س))

د) $\lim_{س \to ١}$ (-٤ق(س) + ٣س - ٥

هـ) $\lim_{س \to ١}$ ((ق(س))^{٣} – (هـ(س))^{٢})

و) $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) × هـ(س)) + س

الحل: أ) وزع النهاية $\Longleftarrow$ ٢× $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + ٣× $\lim_{س \to ١}$ هـ(س)

= ٢×٢ + ٣×-٥ = ٤- ١٥ = ١١-

ب) -١× $\lim_{س \to ١}$ - ق(س) × $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = - ٢×- ٥ = ١٠

جـ) ٥× $\lim_{س \to ١}$ ق(س) - $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = ٥×٢ - -٥ = ١٥

د) -٤× $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + $\lim_{س \to ١}$ (٣س – ٥) = -٤× ٢ + (٣×١ – ٥) = ١٠-

لاحظ في الفرع (د) لم نوزع النهاية على كثير الحدود وتم ايجاد النهاية بالتعويض المباشر.

هـ) ($\lim_{س \to ١}$ ق(س))^{٣} - ($\lim_{س \to ١}$ ق(س))^{٢} = (٢)^{٣} – (-٥)^{٢} = ٨ – ٢٥ = ١٧-

و) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) × $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) + $\lim_{س \to ١}$ س = ٢ × -٥ + ١ = ٩-

مثال : اذا كانت $\lim_{س \to -١}$ ٢ق(س) +س^{٥} – ٥ = صفر فجد قيمة $\lim_{س \to -١}$ (ق(س))^{٢} ؟

الحل : =٢× $\lim_{س \to -١}$ ق(س) + $\lim_{س \to -١}$ س^{٥}- ٥ = ٢× $\lim_{س \to -١}$ ق(س) + ((-١)^{٥}– ٥)

$\Longleftarrow$ ٢× $\lim_{س \to -١}$ ق(س) - ٦ = ٠ $\Longleftarrow$ ٢× $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ٦

$\Longleftarrow$ $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ٣

$\Longleftarrow$ $\lim_{س \to -١}$ (ق(س))^{٢} = ($\lim_{س \to -١}$ ق(س))^{٢} = (٣)^{٢} = ٩

مثال : جد قيمة النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to -١}$ س^{٦} – ٥س^{٢} + ٤س + ٩

الحل: تعويض مباشر = (-١)^{٦} – ٥(-١)^{٢} + ٤(-١) + ٩ = ١

٢) نهـــا (٧س^{٢} + ٥س)(س^{٢} + س - ١٠)
س← -١
الحل:تعويض مباشر : =(٧(-١)^{٢} + ٥×-١)((-١)^{٢} + -١ – ١٠)
= ٢×-١٠ = -٢٠

٣) نهـــا (س^{٢} + ٥س)^{٣}
س← -١
الحل : تعويض مباشر : = ((-١)^{٢} + ٥×-١)^{٣}
= (١ – ٥)^{٣} = - ٦٤

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ \text{ ، } س \leq ٣ \\ ٤س - ٢ \text{ ، } س > ٣ \end{cases}$ فجد قيمة كل مما يلي (ان وجدت)

أ) ق(٢)
ب) نهـــا ق(س)
س← ١
جـ) نهـــا ق(س)
س← ٤
د) نهـــا ق(س)
س← ٣

الحل : أ) ق(٢) = (٢)^{٢} + ١= ٤ + ١ = ٥ ، لاحظ ان العدد ٢ < ٣.

ب) نهـــا ق(س) = (١)^{٢} + ١= ٥ ، لاحظ ان العدد ١ < ٣.
س← ١

جـ) نهـــا ق(س) = ٤×٤ – ٢ = ١٤ ، لاحظ ان العدد ٤ > ٣.
س← ٤

د) العدد ٣ هو نقطة تشعب لذلك نجد النهاية من اليمين واليسار ثم نقارن

نهـــا ق(س) = (٣)^{٢} + ١= ١٠ ، نهـــا ق(س) = ٤×٣ – ٢ = ١٠
س← ٣- س← ٣+

وبما ان النهايتين متساويتين فان نهـــا ق(س) = ١٠
س← ٣

مثال : اذاكان ق(س) = $\begin{cases} س+٦ \text{ ، } س \ni ص \\ ٤س+١ \text{ ، } س \notin ص \end{cases}$ حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة

فجد نهـــا ق(س) (ان وجدت).
س← ٣

الحل : العدد ٣ عدد صحيح وبما انه يطلب النهاية عندما تقترب من العدد ٣ فاننا نعوض هنا في القاعدة التي فيها س ليست عدد صحيحا.(يؤول تعني لا يساوي).

نهـــا ق(س) = ٤×٣+١= ١٣
س← ٣

مثال : اذا كان ق (س)= $\begin{cases} ٢س^{٢}+٢أ ، س \leq ١ \\ أس- ٢ \quad ، س > ١ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \to ١}$ ق(س) موجودة فجد قيمة أ ؟

الحل : بما ان النهاية موجودة والعدد ١ نقطة تشعب فان

$\lim_{س \to ١+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١-}$ ق(س)

$٢(١)^{٢} + ٢أ = أ(١) - ٢ \Leftarrow ٢+٢أ = أ-٢$

بنقل المتغيرات والثوابت عند بعضها ينتج أ = -٤

النهاية موجودة ساوي النهايتين من اليمين واليسار ثم اوجد قيمة الثوابت المطلوبة

مثال : اذا كان ق (س)= $\begin{cases} ٥س - أ \quad ، س < ٢ \\ ب س^{٢}+٧ \quad ، س \geqslant ٢ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة وكانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٢٥ فجد قيمة أ ،ب ؟

الحل: $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٢٥ $\Leftarrow$ ب(٣)^{٢} + ٧ = ٢٥

$\Leftarrow$ ٩ ب = ٢٥ – ٧

$\Leftarrow$ ٩ ب = ١٨ $\Leftarrow$ ب = ٢

ايضا $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٢+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢-}$ ق(س)

$\Leftarrow$ ب(٢)^{٢} + ٧ = ٥×٢ - أ

$\Leftarrow$ ٤ب + ٧ = ١٠ – أ

وبتعويض قيمة ب ينتج $\Leftarrow$ ٤×٢ + ٧ = ١٠ – أ

وبنقل الثوابت عند بعضها $\Leftarrow$ ٨ + ٧ – ١٠ = - أ $\Leftarrow$ أ = - ٥

مثال : اذا كان ق|(س)= $\begin{cases} ٤س^{٣} - ٣ ، س < أ \\ ٢٩ \quad ، س \geqslant أ \end{cases}$ ، وكانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة فجد قيمة أ ؟

الحل : بما ان النهاية موجودة والعدد أ نقطة تشعب فان

$\lim_{س \to أ+}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ-}$ ق(س)

$٤(أ)^{٣} - ٣ = ٢٩ \Leftarrow ٤أ^{٣} = ٢٩+٣$

$\Leftarrow ٤أ^{٣} = ٣٢ \Leftarrow أ^{٣} = ٨$

$\Leftarrow \sqrt[٣]{أ^{٣}} = \sqrt[٣]{٨} \Leftarrow أ = ٢$

(وزارة ٢٠١٤ شتوي)

اذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = -٦$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤$ ،فجد $\lim_{س \to ٢} ق(س) + (هـ(س)+١)^{٢} - ٣س$

الحل : نوزع النهاية $= \lim_{س \to ٢} ق(س) + (\lim_{س \to ٢} هـ(س) + ١)^{٢} - \lim_{س \to ٢} ٣س$

$= -٦ + (٤+١)^{٢} - ٣ \times ٢$

$= -٦ + ٢٥ - ٦$

$= ١٣$

(وزارة ٢٠١٣ صيفي)

اذا كان ك عدد ثابت وكانت $\lim_{س \to ١} ٨س + ٢ك = ٦$ فجد قيمة ك ؟

الحل : بالتعويض المباش $\Leftarrow ٨ \times ١ + ٢ك = ٦$

$\Leftarrow ٢ك = -٦ - ٨$

$\Leftarrow ٢ك = -٢ \Leftarrow ك = -١$

سؤال : اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ٢ق(س) = -٤$ ، $\lim_{س \to ٣} -٣هـ(س) = م$ ، فاوجد ما يلي :

١) قيمة م التي تجعل $\lim_{س \to ٣} (ق(س))^{٣} + هـ(س) + ٣س = ٢$

٢) $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

الحل:

حلول الاسئلة ص(٣١)

١) اذا علمت ان $\lim_{س\to ٣} ق(س) = ٨$ ، $\lim_{س\to ٣} هـ(س) = -٢$ فجد قيمة كل مما يلي (ان وجدت):

أ) $\lim_{س\to ٣} ٤ق(س) + ٢هـ(س) = ٤ \lim_{س\to ٣} ق(س) + ٢ \lim_{س\to ٣} هـ(س)$

$= ٤ \times ٨ + ٢ \times -٢$

$= ٣٢ + -٤ = ٢٨$

ب) $\lim_{س\to ٣} ق(س) - ٢هـ(س) = \lim_{س\to ٣} ق(س) - ٢ \lim_{س\to ٣} هـ(س)$

$= ٨ - ٢ \times -٢$

$= ٨ + ٤ = ١٢$

جـ) $\lim_{س\to ٣} ق(س) \times هـ(س) = \lim_{س\to ٣} ق(س) \times \lim_{س\to ٣} هـ(س)$

$= ٨ \times -٢ = -١٦$

د) $\lim_{س\to ٣} ٥ق(س) = ٥ \times ٨ = ٤٠$

هـ) $\lim_{س\to ٣} ٢ق(س) + ١ = ٢ \times ٨ + ١ = ١٧$

و) $\lim_{س\to ٣} (هـ(س))^{٣} + ٣س - ٧ = (\lim_{س\to ٣} هـ(س))^{٣} + \lim_{س\to ٣} ٣س - ٧$

$= (-٢)^{٣} + ٣ \times ٧ - ٧$

$= -٨ + ٢١ - ٧ = ٦$

ز) $\lim_{س\to ٣} ٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٢س + ٤ = ٢ \lim_{س\to ٣} ق(س) + ٣ \lim_{س\to ٣} هـ(س) + \lim_{س\to ٣} ٢س + ٤$

$= (٢ \times ٨) + (٣ \times -٢) + (٢ \times ٣ + ٤)$

$= ١٦ - ٦ + ١٠ = ٢٠$

اسماء اقترانات بدون قواعد نوزع ثم نعوض

٢) جد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\lim_{س\to -٢} ٣س^{٤} - ٥س^{٣} + ٦س - ٧ = ٣(-٢)^{٤} - ٥(-٢)^{٣} + ٦ \times -٢ - ٧$

$= ٤٨ + ٤٠ - ١٢ - ٧$

$= ٦٩$

ب) $\lim_{س\to ١} (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٥س - ٢) = ((١)^{٢} + ١)((١)^{٣} + ٥ \times ١ - ٢)$

$= ٢ \times ٤ = ٨$

جـ) $\lim_{س\to -١} (س^{٣} + ١)^{٥} = (-١ + ١)^{٥} =$ صفر

كثيرات الحدود تعويض مباشر

٣) اذا كانت $\lim_{س \to -٢}$ (٣ق(س) + ٢س +١)=٢٧ فجد $\lim_{س \to -٢}$ (ق(س))^{٣}

نوزع النهاية $\lim_{س \to -٢}$ ٣ق(س) + $\lim_{س \to -٢}$ ٢س + ١ = ٢٧

$\lim_{س \to -٢}$ ٣ق(س) + ٢×-٢ + ١ =٢٧

$\lim_{س \to -٢}$ ٣ق(س) - ٤+١ = ٢٧

$\lim_{س \to -٢}$ ٣ق(س) = ٢٧ +٣ ⟸ $\lim_{س \to -٢}$ ٣ق(س) = ٣٠ بالقسمة على ٣

$\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = ١٠

الان نعوض في المطلوب $\lim_{س \to -٢}$ (ق(س))^{٣} = (١٠)^{٣} = ١٠٠٠

٤) اذا كانت $\lim_{س \to ٣}$ م س^{٢} + ٥س + ١ = ٢٥ فما قيمة الثابت م ؟

نعوض ⟸ م(٣)^{٢} + ٥×٣ + ١ = ٢٥

٩م +١٦ = ٢٥

٩م = ٢٥ - ١٦ ⟸ ٩م = ٩ ⟸ م = ١

٥) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س+١ \text{ ، } س < ٠ \\ ٥- س^{٢} \text{ ، } س \geq ٠ \end{cases}$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٥ - (١)^{٢} = ٤

ب) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = ٤×-٢ +١ = -٧

جـ) $\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = ٥ – ٠ = ٥ ، $\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = ٠ + ١ = ١

⟸ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) غير موجودة .

المتشعب
**ليست نقطة تشعب ⟸ عوض
** نقطة تشعب ⟸ جد النهاية من اليمين ومن اليسار ثم حدد.

٦) اذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ \text{ ، } س \neq ٣ \\ ٨ \text{ ، } س = ٣ \end{cases}$ فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\lim_{س \to ٥}$ هـ(س) = (٥)^{٢} +١ = ٢٦

ب) $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = (٣)^{٢} +١ = ١٠ (لاحظ هنا العدد يقترب من ٣ ولا يساويها)

جـ) هـ(٣) = ٨

٧) اذا كان ق(س) = { أس+٤ ، س< ٢ ؛ ٥س^{٢}+أ ، س ≥ ٢ } ،وكانت نهـــا ق(س) موجودة ، فما قيمة أ ؟
س←٢

الحل : العدد ٢ نقطة تشعب والنهاية موجودة ⟸ نأخذ النهاية من اليمين واليسار

نهـــا أس+٤ = نهـــا ٥س^{٢} + أ
س←٢- س←٢+

أ×٢+٤ = ٥(٢)^{٢} + أ

٢أ +٤ = ٢٠ + أ بنقل المتغيرات والثوابت عند بعضها

أ = ١٦

٨) اذا كان ق(س) = { س^{٢} + ١ ، س< ٢ ؛ ٥س ، ٢≤س≤ ٦ ؛ ٨ ، س> ٦ } ، فجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت):

أ) نهـــا ق(س) = ٠+١ = ١
س←٠

ب) نهـــا ق(س) ⟸ نهـــا ٥س = ٥×٢ = ١٠ ، نهـــا س^{٢}+١ = ٤+١ = ٥
س←٢ س←٢+ س←٢-

⟸ نهـــا ق(س) غير موجودة.
س←٢

جـ) نهـــا ٥س = ٥×٤ = ٢٠
س←٤

د) نهـــا ق(س) ⟸ نهـــا ٨ = ٨ ، نهـــا ٥س = ٥×٦ = ٣٠
س←٦ س←٦+ س←٦-

⟸ نهـــا ق(س) غير موجودة.
س←٦

٩) اذا كان ق(س)= { ٣س ـ أ ، س< ٢ ؛ ١٠ ، س ≥ ٢ } ، وكانت نهـــا ق(س) موجودة ، فما قيمة أ ؟
س←٢

العدد ٢ نقطة تشعب والنهاية موجودة ⟸ نأخذ النهاية من اليمين واليسار

نهـــا ٣س ـ أ = نهـــا ١٠
س←٢- س←٢+

٣×٢ ـ أ = ١٠

⟸ ـ أ = ١٠ ـ ٦

⟸ ـ أ = ٤

⟸ أ = ـ٤

الدرس الثالث : نهاية خارج قسمة اقترانين :

نظرية:

اذا كانت أ،ل،ك ∈ ح ، وكانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ك فان:

١) $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} ق(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$ ، حيث ك ≠ صفر

٢) $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ غير موجودة ، اذا كان ل≠ صفرا ، ك = صفر.

ملخص : النهاية تتوزع في حالة القسمة اذا لم يكن ناتج التعويض في المقام صفرا اما اذا كان ناتج التعويض في المقام صفر وفي البسط عدد غير الصفر عندها تكون النهاية غير موجودة .

مثال : اذا علمت ان $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤ ، $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = -٢ ، فجد قيمة كل مما يلي :

أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) + ٢س}{هـ(س) + ٣}$

الحل : أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ٢} ق(س)}{\lim_{س \to ٢} هـ(س)} = \frac{٤}{-٢} = -٢$

ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) + ٢س}{هـ(س) + ٣} = \frac{\lim_{س \to ٢} ق(س) + ٢س}{\lim_{س \to ٢} هـ(س) + ٣} = \frac{٤ + ٢ \times ٢}{-٢ + ٣} = \frac{٨}{١} = ٨$

جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س}{س^٣ - ٨} = \frac{٨}{٠}$ ⟸ النهاية غير موجودة ← البسط ثابت والمقام صفر

انتبه

لاحظ اننا في المثال السابق قمنا بالتوزيع لان هناك اسماء اقترانات بدون قواعد مثل ق(س) ، هـ(س) ، اما اذا كان البسط والمقام كثيري حدود فنقوم بالتعويض المباشر بعد التأكد من قيمة كل من البسط والمقام كل على حدة.

تدرب(١) ص ، ٣٥

أ) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٢٥}{س + ٥} = \frac{١ - ٢٥}{١ + ٥} = \frac{-٢٤}{٦} = -٤$

ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س + ٣} = \frac{٢ \times ٢ - ٤}{٢ + ٣} = \frac{صفر}{٥} = صفر$

جـ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٤} = \frac{٢ + ٣}{٤ - ٤} = \frac{٥}{\text{صفر}}$ = غير موجودة

د) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٢} - ١}{س + ٣} = \frac{٩ - ١}{٣ + ٣} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

مهم جدا

اذا كان ناتج التعويض المباشر داخل النهاية يساوي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عندها لا بد من التخلص من هذه الوضعية باحدى الطرق التالية :

١) التحليل الى العوامل
٢) الضرب بالمرافق
٣) توحيد المقامات

مهم جدا : تذكر

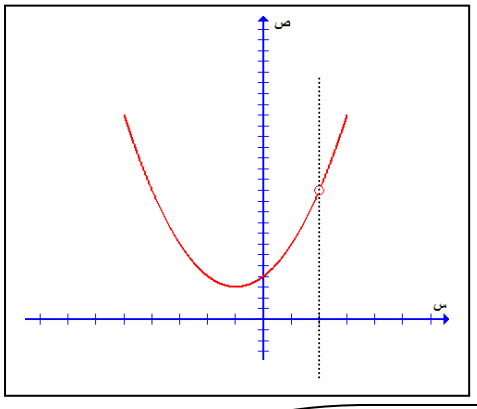
* $أ^{٢} - ب^{٢} = (أ - ب)(أ + ب)$
* $أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أ \times ب + ب^{٢})$
* $أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} - أ \times ب + ب^{٢})$

١ التحليل الى العوامل:تستخدم هذه الطريقة عندما يكون البسط والمقام كثيرا حدود : نقوم بتحليل كل من البسط والمقام ثم نختصر العوامل المشتركة ثم نجد قيمة النهاية (ان وجدت) :

مثال : $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{(س^{٣} - ٨)}{(س - ٢)}$، التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} (س^{٢} + ٢س + ٤)$

$= (٢^{٢} + ٢ \times ٢ + ٤) = ١٢$.



للتحقق من صحة الحل نقوم برسم الاقتران بيانيا بتعويض قيم حول العدد ٢ في الاقتران كما في الشكل المجاور.

لاحظ خطوات الحل:

١) عوض تعويض مباشر لمعرفة قيمة النهاية $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$
٢) حلل كلا من البسط والمقام
٣) اختصر العوامل المشتركة
٤) عوض س بعد الاختصار للحصول على الناتج

مثال : نهـــا $\frac{٣س^{٣}-٦س^{٢}}{س^{٢}}$ ، التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$
س ← ٠

نهـــا $\frac{٣س^{٢}(س-٢)}{س^{٢}}$ = نهـــا ٣(س-٢)
س ← ٠ — س ← ٠

= ٣(٠ - ٢)=-٦.

البسط عبارة تربيعية بدون حد ثابت وتحلل بإخراج العامل المشترك

تدريب(٢) ص ٣٦

١) نهـــا $\frac{س^{٢}+٣س}{س+٣}$ بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$
س ← -٣

= نهـــا $\frac{س(س+٣)}{س+٣}$ = نهـــا س = -٣
س ← -٣ — س ← -٣

٢) نهـــا $\frac{س^{٢}-٢س}{٥س-١٠}$ بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$
س ← ٢

= نهـــا $\frac{س(س-٢)}{٥(س-٢)}$ = نهـــا $\frac{س}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$
س ← ٢ — س ← ٢

٣) نهـــا $\frac{س^{٤}+٢٧س}{س+٣}$ = نهـــا $\frac{س(س^{٣}+٢٧)}{س+٣}$ = نهـــا $\frac{س(س+٣)(س^{٢}-٣س+٩)}{س+٣}$
س ← -٣ — س ← -٣ — س ← -٣

= نهـــا س(س^{٢}-٣س+٩) = ٢((-٣)^{٢} -٣×-٣ +٩)
س ← -٣ = ٢(-٢٧ + ٩ + ٩) = ٢×-٩ = -١٨

٤) نهـــا $\frac{س^{٢}-٦س+٩}{س^{٢}-٩}$ بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$
س ← ٣

= نهـــا $\frac{(س-٣)(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}$ = نهـــا $\frac{(س-٣)}{(س+٢)}$
س ← ٣ — س ← ٣

= $\frac{٣-٣}{٣+٣}$ = $\frac{٠}{٦}$ = صفر

٢ الضرب بالمرافق : يستخدم اذا كان البسط او المقام يحتوي جذور :في مثل هذا النوع من الاسئلة نستعمل طريقة الضرب بالمرافق للتخلص من الجذر ثم نجري التحليل والاختصار ثم نجري التعويض لمعرفة قيمة النهاية ان وجدت.

مثال : جد $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣}$ ، التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ نستخدم المرافق التربيعي.

الحل : $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢}$

انتبه : لاحظ اننا في هذا المثال في البسط نضرب كفرق بين مربعين
(الاول × الاول) - (الثاني×الثاني) بينما المقام ابقينا الضرب كما هو دون تنفيذه.

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س+١) - ٤}{(س - ٣)(\sqrt{س+١} + ٢)} = \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{١}{\sqrt{س+١} + ٢} = \frac{١}{٤} .$$

مثال : جد $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س+٣٤} - ٦}$ التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$

الحل : $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س+٣٤} - ٦} \times \frac{\sqrt{س+٣٤} + ٦}{\sqrt{س+٣٤} + ٦} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{س+٣٤} + ٦)}{(س+٣٤)-٣٦}$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{س+٣٤} + ٦)}{(س-٢)} = \lim_{س \to ٢} \sqrt{س+٣٤} + ٦ = ٦+٦=١٢$$

انتبه : لاحظ اننا في هذا المثال في المقام نضرب كفرق بين مربعين
(الاول × الاول) - (الثاني×الثاني) بينما البسط ابقينا الضرب كما هو دون تنفيذه.

مثال : جد $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^٢+١} - \sqrt{١-٢س^٢}}{س^٢}$ التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$

الحل : $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^٢+١} - \sqrt{١-٢س^٢}}{س^٢} \times \frac{\sqrt{س^٢+١} + \sqrt{١-٢س^٢}}{\sqrt{س^٢+١} + \sqrt{١-٢س^٢}}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{(س^٢+١) - (١-٢س^٢)}{س^٢(\sqrt{س^٢+١} + \sqrt{١-٢س^٢})} = \lim_{س \to ٠} \frac{٣س^٢}{س^٢(\sqrt{س^٢+١} + \sqrt{١-٢س^٢})}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣}{(\sqrt{س^٢+١} + \sqrt{١-٢س^٢})} = \frac{٣}{٢}$$

تدريب(٣) ص ٣٧

١) $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س+٢٠} - ٥}$ التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$

الحل : $= \lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س+٢٠} - ٥} \times \frac{\sqrt{س+٢٠} + ٥}{\sqrt{س+٢٠} + ٥} =$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(٣س-١٥)(\sqrt{س+٢٠} + ٥)}{(س+٢٠)-٢٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{٣(س-٥)(\sqrt{س+٢٠} + ٥)}{(س-٥)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٣(\sqrt{س+٢٠} + ٥)}{١} = ٣(٥+٥) = ٣٠$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٢}$ التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ نستخدم المرافق التربيعي.

الحل : $= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س+٢} + ٢}{\sqrt{س+٢} + ٣}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س+٢) - ٤}{(س - ٢)(\sqrt{س+٢} + ٢)} = \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٢}{(س-٢)(\sqrt{س+٢} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{١}{\sqrt{س+٢} + ٢} = \frac{١}{٤}$.

وزارة ٢٠١٣ ص جد $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س+١} - ٢}{س - ١}$

الحل :

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س+١} - ٢}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٣س+١} + ٢}{\sqrt{٣س+١} + ٢} = \lim_{س \to ١} \frac{(٣س+١) - ٤}{(س - ١)(\sqrt{٣س+١} + ٢)} =$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٣(س - ١)}{(س-١)(\sqrt{٣س+١} + ٢)} = \lim_{س \to ١} \frac{٣}{\sqrt{٣س+١} + ٢}$

$= \frac{٣}{٤}$

٣ توحيد المقامات : يستخدم اذا احتوى البسط او المقام على كسور جبرية.

نقوم بتوحيد المقامات للكسور الجبرية ثم نختصر العوامل المشتركة ثم نعوض .

تذكر $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{(أ\times د)+(ب\times جـ)}{ب\times د}$

مثال: جد $\lim_{س\to 0} \frac{\frac{١}{س-٥} + \frac{١}{٥}}{س}$

الحل :

$\lim_{س\to 0} \frac{(١\times ٥)+(١\times(س-٥))}{٥\times(س-٥)\times س} = \lim_{س\to 0} \frac{\cancel{س}}{٥\cancel{س}(س-٥)}$ بالاختصار والتعويض

$= \frac{-١}{٢٥}$

مثال : جد $\lim_{س\to ٥} \frac{\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}}{س^{٢} - ٢٥}$ يكتب ايضا $(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}) \times (\frac{١}{س^{٢}-٢٥})$

الحل:

$\lim_{س\to ٥} \frac{(٢\times ٥) - (٢س)}{٥س\times(س^{٢} - ٢٥)} = \lim_{س\to ٥} \frac{\cancel{-٢(س-٥)}}{٥س\cancel{(س-٥)}(س+٥)}$

$= \lim_{س\to ٥} \frac{-٢}{٥س(س+٥)}$

$= \frac{-٢}{٢٥٠}$

$= \frac{-١}{١٢٥}$

تدريب(٤) ص ٣٨

جد : $\lim_{س\to ٢} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٣}}{س-٢}$

الحل : $\lim_{س\to ٢} \frac{(١\times ٣) - (١\times(س+١))}{٣\times(س+١)\times(س-٢)} = \lim_{س\to ٢} \frac{\cancel{-١}}{\cancel{س-٢}\times ٣\times(س+١)\cancel{\times(س-٢)}}$

$= \lim_{س\to ٢} \frac{-١}{٣\times(س+١)}$

$= \frac{-١}{٩}$

حلول الاسئلة ص(٣٩)

١) اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٩$ فجد قيمة ما يلي :

أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س)+١}{ق(س)+س-٥}$

الحل: ا) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ٢} ق(س)}{\lim_{س \to ٢} هـ(س)}$

$= \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س)+١}{ق(س)+س-٥} = \frac{\lim_{س \to ٢} هـ(س)+١}{\lim_{س \to ٢} ق(س)+س-٥}$

$= \frac{٩+١}{٥-٣+٣} = \frac{١٠}{١} = ١٠$

٢) جد قيمة النهايات التالية :

أ) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢+١}{س+٨}$ بالتعويض المباشر $= \frac{١}{٨}$

ب) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢+٥س}{س-١}$ بالتعويض المباشر $= \frac{٦}{٠}$ = غير موجودة

جـ) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢-٣س-٤}{١٢-٣س}$ بالتعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ نحلل

$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س+١)}{٣(٤-س)} = \lim_{س \to ٤} \frac{س+١}{-٣}$

$= \frac{-٥}{٣}$

د) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣-٢٧}{٣س^٢-٩س}$ بالتعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ نحلل

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س^٢+٣س+٩)}{٣س(س-٣)} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س^٢+٣س+٩)}{٣س}$

بالتعويض $= \frac{٢٧}{٩} = ٣$

هـ) $\lim_{س \to ٧} \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{١}{٥}}{٢س-١٤}$ بالتعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ نوحد المقامات

$= \lim_{س \to ٧} \frac{(١\times٥) - (س-٢)}{٥(س-٢)(٢س-١٤)} = \lim_{س \to ٧} \frac{-١}{٥\times٢(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{-١}{١٠\times٥} = \frac{-١}{٥٠}$

و) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س+١} - ٣}{س - ٨}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س+١} - ٣}{س - ٨} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٣}{\sqrt{س+١} + ٣} = \lim_{س \to ٨} \frac{(س+١) - ٩}{(س - ٨)(\sqrt{س+١} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س - ٨)}{(س-٨)(\sqrt{س+١} + ٣)} = \lim_{س \to ٨} \frac{١}{\sqrt{س+١} + ٣}$

$= \frac{١}{٦}$

ز) $\lim_{س \to ٧} \frac{س-٧}{\sqrt{س+٢} - ٣}$ تعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{س-٧}{\sqrt{س+٢} - ٣} \times \frac{\sqrt{س+٢} + ٣}{\sqrt{س+٢} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{(س-٧)(\sqrt{س+٢} + ٣)}{(س+٢) - ٩} = \lim_{س \to ٧} \frac{(س-٧)(\sqrt{س+٢} + ٣)}{س-٧}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س+٢} + ٣}{١-} = \frac{٣+٣}{١-} = -٦$

٣) ق(س) = س جد $\lim_{س \to -٣} \frac{ق^{٢}(س) - ق(٩)}{س+٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س+٣}$ بالتعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ تحليل

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{س+٣} = -٣-٣ = -٦$

٤) $\lim_{س \to ٥}$ ق(س)= -٧ ، $\lim_{س \to ٥}$ هـ(س)= ٢ بين ان

$$\lim_{س \to ٥} \frac{٢ق(س) - ٣هـ(س)}{ق(س) + س + ٧} = -٤$$

الحل: هنا يجب اجراء التوزيع لان السؤال يطلب اثبات فنوزع النهاية حسب النظريات ثم نعوض

$$\text{الحل:} = \frac{٢ \lim_{س \to ٥} ق(س) - ٣ \lim_{س \to ٥} هـ(س)}{\lim_{س \to ٥} ق(س) + \lim_{س \to ٥} س + ٧} = \frac{٢ \times -٧ - ٣ \times ٢}{-٧ + ٥ + ٧}$$

$$= \frac{-١٤ - ٦}{٥} = \frac{-٢٠}{٥} = -٤$$

٥) ق(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ ، جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{س+هـ-٢} - \frac{١}{س-٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س-٢)-(س+هـ-٢)}{هـ(س+هـ-٢)(س-٢)}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-١ \times هـ}{هـ(س+هـ-٢)(س-٢)} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-١}{(س+هـ-٢)(س-٢)}$$

عند التعويض بدلا من هـ تعتبر س ثابتا وتنزل كما هي

$$= \frac{-١}{(س-٢)(س-٢)} = \frac{-١}{(س-٢)^{٢}}$$

٦) جد $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$

الحل : $= \lim_{س \to ١} \frac{(س+٢)(س-١)}{(س-١)(س+١)}$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(س+٢)}{(س+١)}$$

$$= \frac{٣}{٢}$$

الدرس الرابع : نـهاية اقتران الجذر النوني :

نظرية:

١) اذا كانت أ،ل ∈ ح ، وكان ن عدد طبيعي فردي، $\lim_{س \to أ}$ ق(س)= ل ،

فان:

$\lim_{س \to أ}$ $\sqrt[ن]{ق(س)}$ = $\sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)}$ = $\sqrt[ن]{ل}$

اما اذا كان ن زوجيا فيشترط ان تكون ل > صفر

٢) اذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س)= ٠ ، ن عدد زوجي فان

$\lim_{س \to أ}$ $\sqrt[ن]{ق(س)}$ = ٠ ، اذا كان ق(س) > ٠ على يمين ويسار أ وتكون

غير موجودة اذا كان ق(س) < ٠ على احدى جهتي أ او كلتيهما.

مثال : جد النهايات التالية ان وجدت :

١) $\lim_{س \to ٣}$ $\sqrt[٣]{٣س - ١}$ = $\sqrt[٣]{٣×٣-١}$

لاحظ اننا في هذا المثال عوضنا مباشرة لان ن فردي.

= ٢

٢) $\lim_{س \to ٤}$ $\sqrt[٤]{٣س + ٤}$ = $\sqrt[٤]{٣×٤+٤}$ = $\sqrt[٤]{١٦}$

لاحظ اننا في هذا المثال عوضنا مباشرة لان ن زوجي وما داخل الجذر موجب.

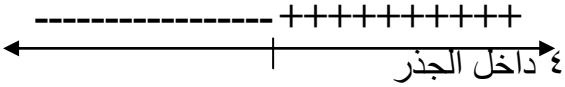
= ٢

٣) $\lim_{س \to ٤}$ $\sqrt{س - ٤}$ ،

لاحظ ان ناتج التعويض داخل الجذر الزوجي يساوي صفر وهنا ندرس الاشارة للاقتران على يمين العدد ٤ وعلى يساره .

الحل : ناتج التعويض داخل الجذر يساوي صفر لذلك نقوم بدراسة اشارة الاقتران على يمين العدد ٤ وعلى يساره. ⟸ س – ٤ = ٠

س=٤



ملاحظة :كيف نعرف الاشارة :عوض عدد اكبر من ٤ داخل الجذر

ونعرف اشارة التعويض وعوض عدد اصغر من ٤ كذلك.

$\lim_{س \to ٤+}$ $\sqrt{س - ٤}$ = ٠ ، $\lim_{س \to ٤-}$ $\sqrt{س - ٤}$ غير موجودة

⟸ $\lim_{س \to ٤}$ $\sqrt{س - ٤}$ غير موجودة

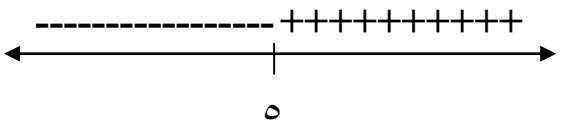
٤) $\lim_{س \to ٥^+} \sqrt{س - ٥}$ ، ملاحظة :هنا طلب النهاية من اليمين فقط.

الحل : ناتج التعويض داخل الجذر يساوي صفر لذلك نقوم بدراسة اشارة الاقتران على يمين العدد ٥.

$\Leftarrow$ س – ٥ = ٠

$\Leftarrow$ س=٥

$\lim_{س \to ٥^+} \sqrt{س - ٥} = ٠$

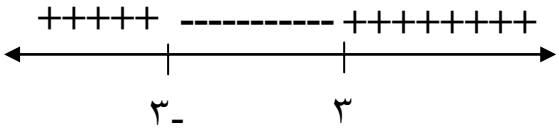


٥) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^٢ - ٩}$

الحل: $س^٢ - ٩$ = صفر

$\Leftarrow$ $س^٢ = ٩$ باخذ الجذر للطرفين

$\Leftarrow$ س = ٣ ، س = -٣



$\lim_{س \to ٣^+} \sqrt{س^٢ - ٩} = ٠$

$\lim_{س \to -٣^-} \sqrt{س^٢ - ٩}$ غير موجودة

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^٢ - ٩}$ غير موجودة

٦) $\lim_{س \to ٣} (س+١)\sqrt{س^٢ + ١٦}$ ، هنا نوزع النهاية اولا :

الحل: = $\lim_{س \to ٣} (س+١) \times \lim_{س \to ٣} \sqrt{س^٢ + ١٦}$

= (٣+١)× $\sqrt{٢٥}$ = ٤×٥ = ٢٠

تدريب(١) ص ٤٢ اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢٤$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٨$ فجد :

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{ق(س) - هـ(س)} + س\ هـ(س)$

الحل: = $\sqrt{\lim_{س \to ٣} ق(س) - هـ(س)} + \lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

= $\sqrt{٢٤ - ٨}$ + ٣ × ٨

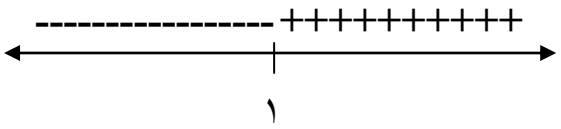
= ٤+٢٤ = ٢٨

تدريب(٢) ص ٤٤

١) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{٢س+١} = \sqrt{٢\times٤+١} = ٣$

٢) $\lim_{س \to -١} س^{٢} = \sqrt{(-١)^{٢}} = ١$

٣) $\lim_{س \to -١} \sqrt[٤]{س-١} =$

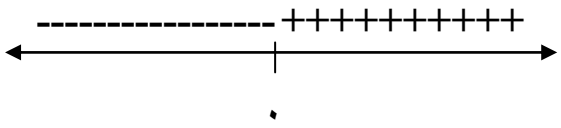


$\Leftarrow$ س – ١ = ٠

$\Leftarrow$ س=١

$\lim_{س \to -١} \sqrt{س-١}$ = غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٢س}$



$\Leftarrow$ ٢س = ٠

$\Leftarrow$ س=٠

$\lim_{س \to ٠^{-}} \sqrt{٢س}$ = غير موجودة

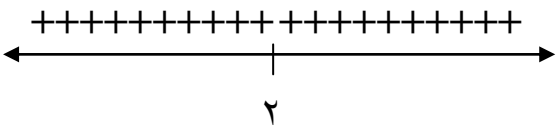
$\lim_{س \to ٠^{+}} \sqrt{٢س}$ = ٠

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٢س}$ = غير موجودة

ملاحظة : نهاية الجذر اذا كان ما بداخله صفر ليست دائما غير موجودة والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال :جد $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{(س-٢)}$

الحل : س-٢ = ٠ ، $\Leftarrow$ س=٢



من التعويض لقيم اكبر واقل من ٢ نلاحظ ان

$\lim_{س \to ٢^{+}} \sqrt[٤]{(س-٢)}$ = ٠

$\lim_{س \to ٢^{-}} \sqrt[٤]{(س-٢)}$ = ٠

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{(س-٢)}$ = ٠

حلول الاسئلة ص(٤٥)

١) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = -٦٤ ، جد قيمة ما يلي :

أ) $\lim_{س \to ٣} \sqrt[٣]{\text{ق(س)}} = \sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$

ب) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{\text{ق(س)}}$ غير موجودة

جـ) $\lim_{س \to ٣} (\sqrt[٣]{\text{ق(س)}} + س^{٢} + ٥س - ٣)$

وزع اولا : $= \lim_{س \to ٣} \sqrt[٣]{\text{ق(س)}} + \lim_{س \to ٣}$ س^{٢} + ٥س - ٣

$= -٤ + ٩ + ١٥ - ٣$

$= ١٧$

د) $\lim_{س \to ٣} (\sqrt{\frac{\text{ق(س)}}{٢}} + س - ٥)$

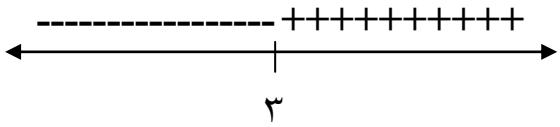
وزع اولا : $\lim_{س \to ٣} \sqrt{\frac{\text{ق(س)}}{٢}} + \lim_{س \to ٣}$ س - ٥

$= \sqrt{\frac{-٦٤}{٢}} + ٣ - ٥$

$= -٢ + ٣ - ٥ = -٤$

٢) جد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\lim_{س \to ٣^{+}} \sqrt{س - ٣}$



الحل : س – ٣ = ٠

س = ٣

$\Longleftarrow \lim_{س \to ٣^{+}} \sqrt{س - ٣}$ = صفر

ب) $\lim_{س \to -٥} \sqrt[٣]{س^{٣} - ٣} + س^{٢} - ٤ = \sqrt[٣]{٨} + ٢٥ - ٤$

$= ٢ + ٢١$

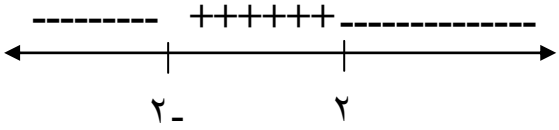
$= ٢٣$

جـ) $\lim_{س \to -٢} \sqrt[٣]{٤ - س^٢} = \sqrt[٣]{٠} = ٠$

د) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^٢}$

$٤ - س^٢ = ٠$

$س = ٢، -٢$



$\Longleftarrow$ $\lim_{س \to -٢} \sqrt[٤]{٤ - س^٢}$ = غير موجودة

$\Longleftarrow$ $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^٢}$ غير موجودة.

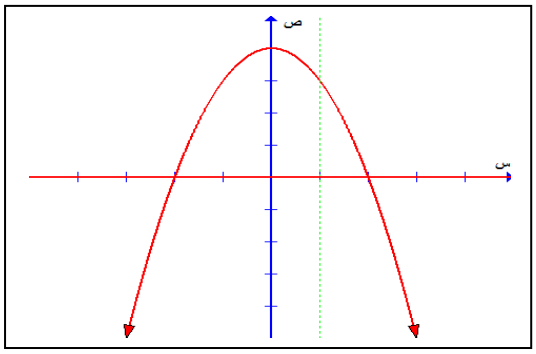
الفصل الاول : الاتصال

الدرس الاول : الاتصال عند نقطة:

الاتصال هندسيا

عند تتبع مسار اقتران عند اقترابه من قيمة معينة لـ س نلاحظ الحالات التالية:

١) الاقتران يحافظ على المسار ولا يوجد عند قيمة س اي دوائر مفتوحة او فجوات او قفزات عندها نقول ان الاقتران متصل عند النقطة س لان قيمة الاقتران عند س تكون مساوية لنهاية الاقتران عندما تقترب القيم من س.كما في الشكل التالي:



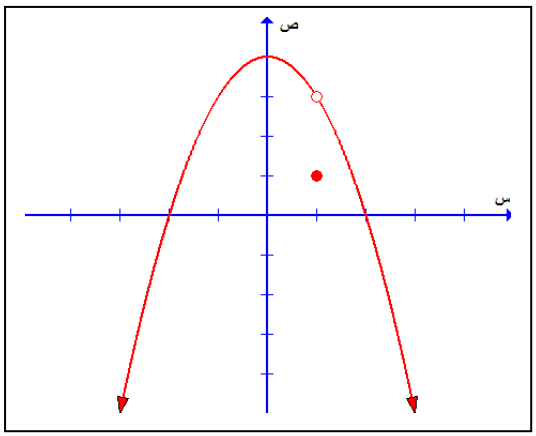
الاقتران متصل عند س = ١

لاحظ ان ق(١) = ٣ وايضا

$$\lim_{س \to ١} ق(س) = ٣$$

٢) الاقتران يحافظ على المسار ولكن يوجد على المسار عند قيمة س ثقب (دائرة مفتوحة) هنا يكون الاقتران غير متصل عند س لان قيمة الاقتران عند س تكون غيرمساوية لنهاية الاقتران عندما تقترب القيم من س.

كما في الشكل التالي:

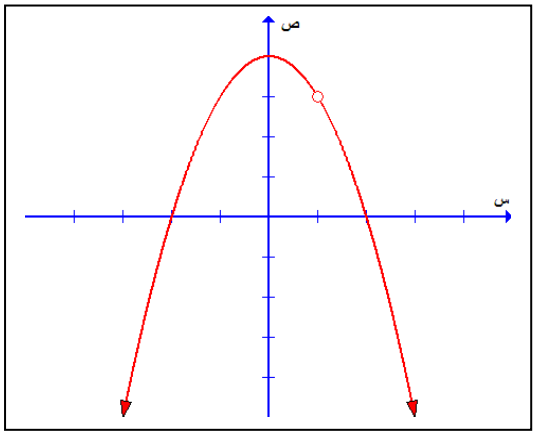


الاقتران غير متصل عند س = ١

لاحظ ان ق(١) = ١ وايضا

$$\lim_{س \to ١} ق(س) = ٣$$

٣) الاقتران يحافظ على المسار ولكن يوجد على المسار عند قيمة س ثقب (دائرة مفتوحة) هنا يكون الاقتران غير متصل عند س لان قيمة الاقتران عند س تكون غيرمعرفة وبالتالي غير مساوية لنهاية الاقتران عندما تقترب القيم من س.كما في الشكل التالي:

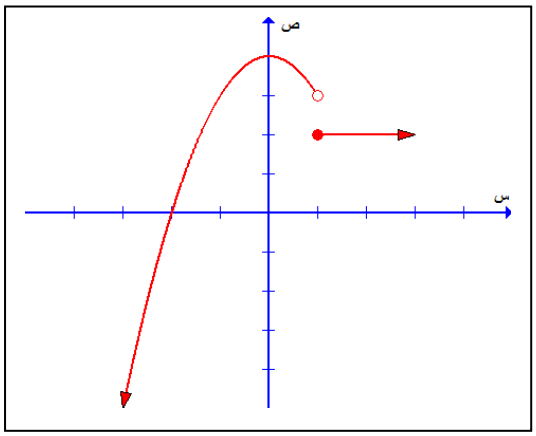


الاقتران غير متصل عند س = ١

لاحظ ان ق(١) = غير معرف وايضا

$$\lim_{س \to ١} ق(س) = ٣$$

٤) الاقتران لايحافظ على المسار ولكن عند قيمة س يقفز محدثا نقلة في المسار هنا يكون الاقتران غير متصل عند س لان نهاية الاقتران عندما تقترب القيم من س تكون غير موجودة.كما في الشكل التالي:



الاقتران غير متصل عند س = ١

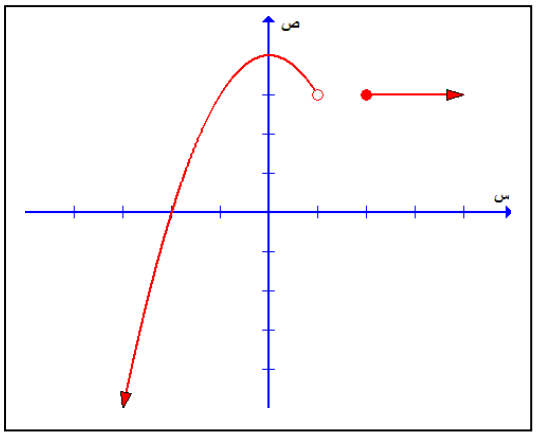
لاحظ ان

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٢$

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٣$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} ق(س) =$ غير موجودة.

٥) الاقتران عند $س_١$ يقف وينتقل الى $س_٢$ محدثا (فجوة) انقطاع يكون فيها الاقتران غير معرف هنا يكون الاقتران غير متصل عند $س_١$ ، ولا عند $س_٢$ لان النهاية عند كل منهما غير موجودة. كما في الشكل التالي:



الاقتران غير متصل عند س = ١

لاحظ ان

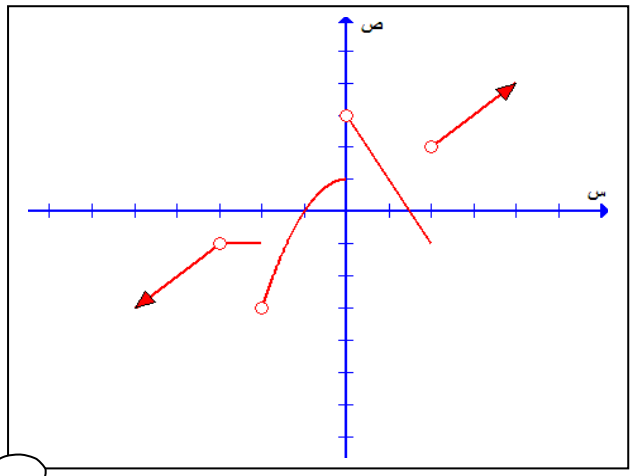
$\lim_{س \to ١} ق(س) =$ غير موجودة .

$\lim_{س \to ٢} ق(س) =$ غير موجودة.

ملخص:

تفسير الاتصال من رسم منحنى الاقتران :يكون الاقتران غير متصل عند س اذا كان في منحنى ق(س) دائرة مفتوحة (ثقب) او قفزة او فجوة (انقطاع) عند قيمة س.

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور جد مايلي:



١) قيم أ التي النهاية عندها غير موجودة.
٢) قيم ب التي عندها الاقتران غير متصل.
٣) قيم ج التي عندها الاقتران غير معرف.

الحل: ١) أ = { ٢- ، ٠، ٢ }
٣) ب= { ٣- ،٢-، ٠، ٢ }
٤) ج= { ٣- }

الاتصال جبريا

يكون الاقتران ق متصلا عند س= أ اذا تحققت الشروط التالية :

١) ق معرف عند س = أ .(ق(س) عدد حقيقي)

٢) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٣) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

واذا لم يتحقق اي منها فان الاقتران يكون غير متصل عندما س = أ

قاعدة

كثير الحدود دائما متصل عند اي عدد مثل أ . لأنه في كثير الحدود دائما كما مر معنا سابقا $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ) وإذا ما تحقق هذاالشرط فان الشرطان السابقان له متحققان بالضرورة

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ ، س < ٢ \\ ٣س ، س \geq ٢ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق عندما س = ٢ ؟

الحل : الشرط الاول: ق(٢) = ٣×٢ = ٦ ⟸ ق معرف عندما س = ٢.

الشرط الثاني: يجب ايجاد النهاية يمين ويسار العدد ٢ لان الاقتران متشعب .

$\lim_{س \to ٢+}$ ٣س = ٦ ، $\lim_{س \to ٢-}$ س^{٢}+٢= ٦

⟸ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) =٦ موجودة

الشرط الثالث : لاحظ ان $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) =٦ = ق(٢) متحقق.

⟸ ق متصل عندما س = ٢ .

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٤س ، س < ١ \\ س^{٣} - ١ ، س = ١ \\ ٢س+٣ ، س > ١ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق عندما س = ١ ؟

الحل: الشرط الاول: ق(١) = ١-١ = ٠ ⟸ ق معرف عندما س = ١.

الشرط الثاني: يجب ايجاد النهاية يمين ويسار العدد ١ لانه نقطة تشعب.

$\lim_{س \to ١+}$ ٢س+٣= ٥ ، $\lim_{س \to ١-}$ س^{٢}+٤س= ٥

⟸ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) =٥ موجودة

الشرط الثالث : لاحظ ان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٦ ≠ ق(١) = ٠ غير متحقق .

⟸ ق غير متصل عندما س = ١ .

تدريب(١) ص ٤٩

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ ، س < ١ \\ ٣س ، ١ \leq س < ٣ \\ س^{٣} - ١٨ ، س > ٣ \end{cases}$ فابحث في اتصال ق عند كل من :

١) س = ٠

الحل : ق متصل عند العدد س = ٠ ، لانه كثير حدود.

٢) س = ١

الحل : العدد ١ نقطة تشعب لذلك نتحقق من شروط الاتصال الثلاثة.

الشرط الاول: ق(١) = ٣×١ = ٣ ⟸ ق معرف عندما س = ١.

الشرط الثاني: يجب ايجاد النهاية يمين ويسار العدد ١ لانها نقطة تشعب.

$\lim_{س \to ١^{+}}$ ٣س= ٣ ، $\lim_{س \to ١^{-}}$ س^{٢}+٢= ٣

⟸ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) =٣ موجودة

الشرط الثالث : لاحظ ان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) =٣ = ق(١) متحقق .

⟸ ق متصل عندما س = ١ .

٣) س = ٣

الحل : العدد ٣ نقطة تشعب لذلك نتحقق من شروط الاتصال الثلاثة.

الشرط الاول: ق(٣) = لا يمكن ايجادها ⟸ ق غير معرف عندما س = ٣.

⟸ ق غير متصل عند س = ٣

مهم جدا: اذا لم يتحقق احد شروط الاتصال الثلاثة فلا داعي للتحقق من باقي الشروط لان عدم تحقق شرط يجعل الاقتران غير متصل حتى لو تحققت بقية الشروط

مثال: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٨ ، س = -٢ \\ ٣س + ٦ ، س \neq -٢ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق عندما س = -٢ .

الحل : ق(-٢) = (-٢)^{٣} + ٨ = ٠ ، ق معرف عندما س = -٢.

$\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = $\lim_{س \to -٢}$ ٣س+٦ = ٣×-٢ +٦ = ٠ تعويض مباشر

$\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = ق(-٢) = ٠ ⟸ ق متصل عند س = -٢

مثال : اذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} ، س = ٣ \\ ٣س + ٦ ، س \neq ٣ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق عندما س = ٣.

الحل: ق(٣) = ٣×٣ + ٦ = ١٥ ، ق معرف عندما س = ٣ .

نهـــا $\frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{(س-٣)}$ = (٣)^{٢} + ٣×٣ + ٩ = ٢٧
س ← ٣

لاحظ ان نهـــا $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ ≠ هـ(س)
س ← ٣

⟸ ق غير متصل عند س = ٣ .

تمرين

اذا كان ل(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢} ، س \geq -٢ \\ ٢س + ٤ ، س < -٢ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق عند س=-٢؟

الحل:

ملاحظة

** لا بد انك لاحظت ان الاقتران المتشعب الذي يحتوي = ، ≠ يتم ايجاد النهاية بالتعويض في الجزء الذي يحتوي اشارة ≠ لان النهاية تعني الاقتراب وعدم المساواة تماما .

** ايضا لا نجد النهاية من اليمين واليسار لان كلاهما سيتم التعويض به في عدم المساواة ولذلك فهما دائما متساويتان.

مهم : كيفية ايجاد قيم مجهولة داخل اقتران متصل.

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ^{٢}س^{٢} + ٤ ، س = -١ \\ -٦س + ٢ ، س \neq -١ \end{cases}$ ، وكان ق متصلا عند س = -١ ، فجد قيمة أ ؟

الحل : بما ان الاقتران متصل فان نهـــا ـ٦س+٢ = ق(-١) ◁ الشرط الثالث
س ← -١

ق(-١) = $أ^{٢}(-١)^{٢} + ٤ = أ^{٢} + ٤$

نهـــا ـ٦س = ـ٦×ـ١+٢ = ٨
س ← -١

$\Longleftarrow أ^{٢} + ٤ = ٨ \Longleftarrow أ^{٢} = ٨ - ٤ = ٤ \Longleftarrow$ أ = ٢ ، أ = -٢ .

مثال: اذا كان ل(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣ ، س \geqslant جـ \\ ٤س ، س < جـ \end{cases}$ ، وكان ل متصل عند س = جـ فجد قيم جـ ؟

الحل: ل متصل عند س = جـ $\Longleftarrow$ نهـــا ل(س) موجودة ◁ الشرط الثاني
س ← جـ

الان نجد النهاية من اليمين واليسار ة

نهـــا ٤س = ٤×جـ = ٤جـ
س ← جـ+

نهـــا $س^{٢} + ٣ = جـ^{٢} + ٣$
س ← جـ-

$\Longleftarrow جـ^{٢} + ٣ = ٤جـ \Longleftarrow جـ^{٢} - ٤جـ + ٣ = ٠$

(جـ - ٣)(جـ - ١) = ٠

$\Longleftarrow$ جـ = ٣ ، جـ = ١ .

مثال : كان ل(س) = $\begin{cases} أس+٢ب ، س < ٣ \\ ١٢ ، س = ٣ \\ أس^{٢}-٢ب ، س > ٣ \end{cases}$ ، وكان ل متصل عند س = ٣ فجد قيم أ،ب ؟

الحل : في مثل هذا النوع من الاسئلة الذي يحتوي ثابتين مجهولين يجب ايجاد معادلتين بدلالة أ ب وذلك بمساواة كل طرف نهاية بقيمة الاقتران وحل المعادلتين بالحذف والتعويض.

بما ان الاقتران متصل فان نهـــا أس+٢ب = ق(٣) = ١٢
س ← ٣-

$\Longleftarrow$ ٣أ + ٢ب = ١٢ ..... (١)

نهـــا $أس^{٢}$-٢ب = ق(٣) = ١٢
س ← ٣+

$\Longleftarrow$ ٩أ - ٢ب = ١٢ ..... (٢)

بجمع المعادلتين ⟸ ١٢أ = ٢٤ ⟸ أ = ٢
بالتعويض في اي منهما في الاولى مثلا : ٣×٢ +٢ب = ١٢
٢ب = ٦ ⟸ ب = ٣ .

تدريب(٣) ص ٥٢ ١) اذا كان ق(س) = { ٢س^{٣} + ٤ ، س > -٢ ; أس + ٦ ، س ⩽ -٢ } ، وكان الاقتران ق متصلا

عندما س = -٢ ، فجد قيمة أ؟

الحل : ق متصل عند س = أ ⟸ نهـــا ق(س) موجودة
س ← -٢

الان نجد النهاية من اليمين واليسار

نهـــا أس+٦ = -٢أ+٦
س ← -٢+

نهـــا ٢س^{٣} + ٤ = ٢×(-٢)^{٣} +٤ = -٤
س ← -٢-

⟸ -٢أ+٦ = -٤ ⟸ -٢أ = -١٠

⟸ أ = -٥.

٢) اذا كان ق(س) = { أس+٣ ، س < ١ ; ٧ ، س = ١ ; س – ب ، س > ١ } وكان ق متصلا عندما س = ١ ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

الحل : بما ان الاقتران متصل فان نهـــا أس+٣ = ق(١) = ٧
س ← ١-

⟸ أ + ٣ = ٧

⟸ أ = ٤

نهـــا س- ب = ق(١) = ٧
س ← ١+

⟸ ١ - ب = ٧

- ب = ٦

ب = - ٦

حلول الاسئلة ص(٥٣)

١) اعتمادا على الشكل المجاور جد قيم
س التي عندها الاقتران غير متصل ؟
الحل :
س = { ١ ، ٣ }

٢) ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ ، س < ١ \\ ٢س \quad ، \quad س \geq ١ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال ق عندما س = ١ ؟

الحل : ق(١) = ٢×١ = ٢

نهـــا س^{٢} - ١ = ٠ (س ← ١-)
نهـــا ٢س = ٢ (س ← ١+)

نهـــا ق(س) غير موجودة (س ← ١)

⟸ ق غير متصل عندما س = ١

٣) هـ(س) = $\begin{cases} \frac{٥}{س+١} ، س \neq ١ \\ ٣ \quad ، \quad س = ١ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال الاقتران هـ عندما س = ١ ؟

الحل : هـ(١) = ٣

نهـــا $\frac{٥}{س+١} = \frac{٥}{٢}$ (س ← ١)

⟸ هـ(س) غير متصل عندما س = ١

٤) ق(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٣ ، س < -١ \\ ٥ - س ، -١ \leq س < ١ \\ س^{٣}+٣ ، س \geq ١ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال ق عندما أ) س=١ ب) س=-١

الحل :أ) ق(-١) = ٥--١ = ٦

نهـــا س^{٢}+٣ = ١+٣ = ٤ (س ← -١-)
نهـــا ٥- س = ٥--١ = ٦ (س ← -١+)

نهـــا ق(س) غير موجودة . (س ← -١)

⟸ ق غير متصل عندما س = -١

ب) ق(١) = ١+٣ = ٤

نهـــا ٥ - س = ٥-١ = ٤ (س ← -١-) ، نهـــا س^{٣}+٣ = ١+٣ = ٤ (س ← -١+) ⟸ نهـــا ق(س) = ٤ (س ← ١)

نهـــا ق(س) = ق(١) = ٤ ⟸ ق متصل عندما س = ١ (س ← ١)

٥) ق(س) = { (٣- س)/(س -٣) ، س ≠ -٣ ؛ م س +٢ ، س = -٣ } ، ق متصل عندما س =-٣ ، فجد قيمة م ؟

الحل : ق متصل عند س = -٣ ⟸ نهـــا (٣- س)/(س-٣) = ق(-٣) (س ← -٣)

⟸ -١ = -٣م +٢ ⟸ -٣م = -٣

⟸ م = ١

٦) هـ(س) = { س+أ ، س < ٢ ؛ ٨ ، س = ٢ ؛ ب س+٦ ، س > ٢ } ، هـ متصل عند س = ٢ ، جد قيمة كل من أ ،ب ؟

الحل : هـ متصل عند س = ٢ ⟸ نهـــا (س ← ٢-) س + أ = ق(٢)

⟸ ٢+أ = ٨ ⟸ أ = ٨-٢ = ٦

ايضا ⟸ نهـــا (س ← ٢+) ب س + ٦ = هـ(٢)

⟸ ٢ب +٦ = ٨ ⟸ ٢ب = ٢

⟸ ب = ١

٧) ل(س) = { أس- ب ، س < ١ ؛ ٤ ، س = ١ ؛ أس^٣ +ب س+٦ ، س > ١ } ، ل متصل عند س=١ ، جد أ ، ب ؟

الحل : نهـــا (س ← ٢+) أس - ب = ل(١) ⟸ ٢أ – ب = ٤ ..... (١)

نهـــا (س ← ٢+) أس^٣ +ب س+٦ = ل(١)

⟸ ٨أ+٢ب+٦ = ٤

⟸ ٨أ+٢ب = -٢ ..... (٢)

الان نحل المعادلتين ١+٢ بالحذف والتعويض

اضرب المعادلة (١) بالعدد ٢ واجمع الناتج مع المعادلة (٢)

{ ⟸ ٤أ – ٢ب = ٨ ؛ ⟸ ٨أ + ٢ب = -٢ } ⟸ ١٢أ = ٦ ⟸ أ = ١/٢

بالتعويض في (١) ⟸ ٢×٠,٥ – ب = ٤

⟸ - ب = ٤ – ١

⟸ ب = -٣

٨) ق متصل عند س = ٢ ، $\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + س = ٦ ، جد قيمة ق(٢)

الحل : ق متصل عند س = ٢ ⟸ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢)

من المعطى $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + $\lim_{س \to ٢}$ س = ٦

⟸ ق(٢) + ٢ = ٦

⟸ ق(٢) = ٦ – ٢ = ٤

الدرس الثانى : نظريات الاتصال

نظرية

اذا كان ق ، هـ متصلان عندما س = أ فان :
١) ق+هـ متصل عند س = أ
٢) ق-هـ متصل عند س = أ
٣) ق×هـ متصل عند س = أ
٤) $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = أ ، هـ(أ) ≠ ٠

ملخص : عندما يعطينا اقترانين ويطلب تحديد هل جمعهما او طرحهما او ضربهما او قسمة احدهما عل الاخر يكون متصلا نفحص الاتصال لكل منهما على حدا فإذا كانا متصلين كان الجمع او الطرح او الضرب او القسمة متصلا اما اذا كان احدهما غير متصل عندها نجري العملية المطلوبة للاقترانين ثم نفحص الاتصال على الاقتران الناتج.

مثال : اذا كان ق(س) = س^{٢} - ١ ، هـ(س) = $\begin{cases} س^{٣} - ٨ ، س < -١ \\ ٤س - ٥ ، س \leq -١ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال (ق×هـ)(س) عندما س = -١

الحل: ق متصل عند س = -١ لانه كثير حدود.

تذكر: كثير الحدود متصل على جميع الاعداد الحقيقية

هـ(-١) = ٤×-١-٥ = -٩ ⟸ هـ معرف عند س = -١

نهـــا ٤س-٥ = -٩ (س ← -١+)
نهـــا س^{٣} -٨ = -٩ (س ← -١-)
نهـــا هـ(س) = -٩ موجودة (س ← -١)

نهـــا هـ(س) = هـ(-١) = -٩ ⟸ هـ متصل عند س = -١ (س ← -١)

⟸ بما ان ق ، هـ متصلين عند س = -١ فان (ق×هـ)(س) متصل عند س = -١ .

مثال : اذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = $\begin{cases} ٤س - ٥ ، س > ٢ \\ ٧ ، س = ٢ \\ س + ١ ، س < ٢ \end{cases}$ فابحث في اتصال (ق+هـ)(س) عندما س = ٢ .

الحل : ق متصل عند س = ٢ لانه كثير حدود.

هـ(٢) = ٧ ،هـ معرف عند س =٢

$$\left.\begin{array}{l} \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢^-} ٤س - ٥ = ٤\times٢-٥ = ٣ \\ \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢^+} س+١ = ٢+١ = ٣ \end{array}\right\} \longleftarrow \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} هـ(س) = ٣ \quad \text{موجودة}$$

$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢}$ هـ(س) = ٣ ≠ هـ(٢) = ٥ ⟸ هـ غير متصل عند س = ٢

هنا لا نستطيع الحكم على الاتصال الا بعد اجراء العملية المطلوبة بينهما

$$(ق+هـ)(س) = \begin{cases} س^٢+٤س - ٥ & ، س < ٢ \\ ٧+س^٢ & ، س = ٢ \\ س^٢ + س + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$$

ق+هـ(٢) = ٧+(٢)^٢ = ١١

$$\left.\begin{array}{l} \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢^-} س^٢+٤س - ٥ = ٤+٨-٥ = ٧ \\ \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢^+} س^٢+ س +١ = ٤+٢+١ = ٧ \end{array}\right\} \longleftarrow \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} هـ(س) = ٧ \quad \text{موجودة}$$

لكن $\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢}$ (ق+هـ)(س) = ٧ ≠ (ق+هـ)(٢) = ١١ ⟸ (ق+هـ) غير متصل عند س = ٢

ملاحظة : اولا نختبر اتصال كل اقتران على حدة
فإذا كان الاقترانان متصلان كان ناتج العملية بينهما متصلا.
اما اذا كان احدهما غير متصل فنجري العملية بينهما ثم نختبر اتصال الناتج من العملية.

ملاحظة : يمكنك عزيزي الطالب اجراء فحص شفهي لاتصال كل اقتران وذلك بالتعويض في كل اقتران فإذا تساوت القيم اكمل كل اقتران لوحده اما اذا اختلفت اجر العملية بين الاقترانين ثم افحص الاتصال لتوفير الوقت.

تدريب(١) ص ٥٦

اذا كان ق(س) = س^{٢}+٢، هـ(س) = $\begin{cases} س-١ \ ، \ س \geq ٣ \\ ٥-س \ ، \ س < ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال (ق+هـ) عندما س = ٣.

الحل : ق متصل عند س = ٣ لانه كثير حدود.

هـ(٣)= ٣-١=٢ $\Longleftarrow$ هـ معرف عند س= ٣

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣^{+}} (٥-س) = ٢$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣^{-}} (س-١) = ٢$$

نهـــا هـ(س)= ٢ موجودة $\Longleftarrow$ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س) = هـ(٣) = ٢ \Longleftarrow$$ هـ متصل عند س = ٣

$\Longleftarrow$ بما ان ق ، هـ متصلين عند س = ٣ فان (ق+هـ)(س) متصل عند س = ٣ .

تدريب(٢) ص ٥٩

اذا كان ق(س) = س^{٢}+٥، هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٦ \ ، \ س \geq -١ \\ ٣٥-س \ ، \ س < -١ \end{cases}$

فابحث في اتصال م(س) = (ق×هـ) عندما س = -١.

الحل : ق متصل عند س = -١ لانه كثير حدود.

هـ(-١) = (-١)^{٢}+٥ = ٦ ، هـ معرف عند س = -١

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١^{-}} (س^{٢}+٦) = (-١)^{٢}+٦ = ٧$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١^{+}} (٣٥-س) = ٣٥--١ = ٣٦$$

نهـــا هـ(س) $\longleftarrow$ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١}$ غير موجودة

$\Longleftarrow$ هـ غير متصل عند س = -١

هنا لا نستطيع الحكم على الاتصال الا بعد اجراء العملية المطلوبة بينهما

(ق×هـ)(س) = $\begin{cases} س^{٤}+١١س^{٢}+٣٠ \ ، \ س \geq -١ \\ -س^{٣}+٣٥س^{٢}-٥س+١٧٥ \ ، \ س < -١ \end{cases}$

(ق×هـ)(-١) =(-١)^{٤}+١١(-١)^{٢}+٣٠= ٤٢ معرف

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١^{-}} (س^{٤}+١١س^{٢}+٣٠) = ١+١١+٣٠ = ٤٢$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١^{+}} (-س^{٣}+٣٥س^{٢}-٥س+١٧٥) = -١+٣٥+٥+١٧٥ = ٢١٤$$

غير موجودة $\longleftarrow$ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١}$ هـ(س)

$\Longleftarrow$ (ق×هـ) غير متصل عند س = -١

قاعدة

الاقتران النسبي دائما متصل عند اي عدد مثل أ ماعدا اصفار مقامه.

تذكر: الاقتران النسبي هو الاقتران الذي بسطه ومقامه كثيرا حدود.

مهم جدا : لمعرفة نقاط عدم الاتصال
للاقتران النسبي نساوي المقام بالصفر ثم
نحلل ونجد قيم س المطلوبة

مثال: جد قيم س التي عندها الاقترانات التالية غير متصلة (نقاط عدم الاتصال) ؟

١) ق(س) = $\frac{(س^{٢}+٢س+٤)}{(س-٢)}$

الحل : س-٢ = ٠ ⟸ س = ٢

نقاط عدم الاتصال = { ٢ }

٢) ل(س) = $\frac{(س^{٢}-٥س+٤)}{(س^{٢}-٩)}$

الحل : $س^{٢}-٩$ = ٠ ⟸ (س-٣)(س+٣) = ٠

⟸ اما س-٣=٠ ⟸ س = ٣

او س+٣ = ٠ ⟸ س = -٣

نقاط عدم الاتصال = { -٣ ، ٣ }

٣) ك(س) = $\frac{(س^{٢}-س+٢٤)}{(س^{٣}-٢٧)}$

الحل : $س^{٣}-٦٤$ = ٠ ⟸ (س-٤)$(س^{٢}+٤س+١٦)$ = ٠

⟸ اما س-٤=٠ ⟸ س = ٤

انتبه : دائما العبارة التربيعية الناتجة من
تحليل الفرق بين مكعبين تكون غير قابلة
للتحليل

نقاط عدم الاتصال = { ٤ }

تدريب(٣) ص ٦٠

١) ق(س) = س^{٣}ـ٣س+٨

الحل : نقاط عدم الاتصال = { } انتبه : الاقتران متصل على ح لانه كثير حدود.

٢) هـ(س) = $\frac{\text{س - ١}}{\text{س}^{٢}+٥\text{س}+٦}$

الحل : س^{٢}+٥س+٦ = ٠ ⟸ (س+٢)(س+٣) = ٠

⟸ اما س+٢=٠ ⟸ س = ـ٢

او س+٣ = ٠ ⟸ س = ـ٣

نقاط عدم الاتصال = { ـ٢ ، ـ٣ }

٣) ل(س) = $\frac{\text{٥ - س}}{\text{س}^{٣} - ١}$

الحل : س^{٣}ـ١ = ٠ ⟸ (س-١)(س^{٢}+س+١) = ٠

⟸ س-١=٠ ⟸ س = ١

نقاط عدم الاتصال = { ١ }

مثال : اذا كان ق(س) = س – ١ ، ل(س) = $\frac{\text{س+٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}$ ، وكان م(س) = (ق×ل)(س)

فابحث في اتصال م(س) عندما س = ـ٢

الحل: ق متصل عند س = ـ٢ لانه كثير حدود .

ل غير متصل عند س = ـ٢ لانها من اصفار المقام حيث

س^{٢}+ س – ٢ = (س+٢)(س-١) =٠

⟸ س= ـ٢ ، س= ١

لكن ق(س) × ل(س) = س-١ × $\frac{\text{س+٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}$

= $\frac{\cancel{\text{س+٢}}}{\cancel{(\text{س+٢})(\text{س-١})}}$ × $\cancel{\text{س-١}}$

=١

(ق×ل)(ـ٢) = ١ نهـــا ١ = ١ = (ق×ل)(ـ٢)
نهـــا ١ = ١ س←ـ٢

⟸ (ق×ل)(س) متصل عند س = ـ٢

حلول الاسئلة ص(٦١)

١) ق(س) = ٥س^{٢}+٥س-١ ، هـ(س) = $\begin{cases} س+٩ \text{ ، } س \geq ٢ \\ ٥س+١ \text{ ، } س < ٢ \end{cases}$

ل(س) = ٢ق(س)+هـ(س) ابحث في اتصال ل عندما س = ٢

الحل : ٢ق(س) = ١٠س^{٢}+١٠س-٢ متصل عند س = ٢ لانه كثير حدود

الان نبحث اتصال هـ

هـ(٢) = ٢+٩=١١ معرف عند س = ٢

نهـــا ٥س+١ = ١١ (س ← ٢+)

نهـــا س+٩ = ١١ (س ← ٢-)

نهـــا هـ(س)= ١١ موجودة (س ← ٢)

نهـــا هـ(س) = هـ(٢) = ١١ ⟸ هـ متصل عند س = ٢ (س ← ٢)

⟸ بما ان ٢ق ، هـ متصلين عند س = ٢ فان ل=٢ق(س)+هـ(س) متصل عند س = ٢ .

٢) ق(س) = ٥س^{٢}+٤ ، هـ(س) = $\begin{cases} س+٤ \text{ ، } س > ٠ \\ ٤-س^{٣} \text{ ، } س \leq ٠ \end{cases}$

لا تنسى عزيزي الطالب اختبار الاتصال الشفوي للاقتران المتشعب للحد من اضاعة الوقت وذلك بتعويض العدد في القاعدتين وملاحظة تساوي الناتج من عدمه.

ل(س) = (ق×هـ)(س) ، ابحث في اتصال ل عندما س = ٠

الحل : ق(س) متصل عند س = ٠ لانه كثير حدود

الان نبحث اتصال هـ

هـ(٠) = ٤- (٠)^{٣}=٤ معرف عند س = ٠

نهـــا ٤-س^{٣} = ٤ (س ← ٠+)

نهـــا س+٤ = ٤ (س ← ٠-)

نهـــا هـ(س)= ٤ موجودة (س ← ٠)

نهـــا هـ(س) = هـ(٠) = ٤ ⟸ هـ متصل عند س = ٠ (س ← ٠)

⟸ بما ان ق ، هـ متصلين عند س = ٠ فان ل=(ق×هـ)(س) متصل عند س = ٠ .

٣) $ق(س) = \begin{cases} ٥- س ، س < ٥ \\ س- ٥ ، س \geqslant ٥ \end{cases}$ ، $هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٢٥}$

ابحث في اتصال (ق×هـ)(س) عندما س = ٥ .

الحل : من البداية العدد ٥ هو صفر لمقام الاقتران هـ(س) ⟸ هـ غير متصل عند س = ٥ .

⟸ نجري عملية الضرب

$$\frac{-١}{\cancel{٥-س}} \times \frac{س - ٣}{\cancel{(س-٥)}(س+٥)} = \frac{-(س - ٣)}{س+٥}$$

$$\cancel{س-٥} \times \frac{س - ٣}{\cancel{(س-٥)}(س+٥)} = \frac{(س - ٣)}{س+٥}$$

$$(ق\times هـ)(س) = \begin{cases} \frac{-(س - ٣)}{س+٥} ، س < ٥ \\ \frac{(س - ٣)}{س+٥} ، س \geqslant ٥ \end{cases}$$

$$(ق\times هـ)(٥) = \frac{(٥ - ٣)}{٥+٥} = ٠,٢$$

$$\begin{cases} \text{نهـــا}_{س \to ٥+} \frac{(٥ - ٣)}{٥+٥} = ٠,٢ \\ \text{نهـــا}_{س \to ٥-} \frac{-(س - ٣)}{س+٥} = -٠,٢ \end{cases}$$ النهاية غير موجودة عند س← ٥

⟸ ق×هـ)(س) غير متصل عند س = ٥

٤) (ق+هـ) متصل عند س = أ ، هل نستنتج ان كلا من ق ، هـ متصلان عند س = أ .

الحل : ليس بالضرورة فمثلا

ق(س) = س- أ متصل عند س = أ لانه كثير حدود ، هـ(س) = $\frac{١}{س- أ}$ غير متصل عند

س = أ لانه اقتران نسبي والعدد أ من أصفار مقامه

لكن (ق×هـ)(س) = ١ متصل عند س = أ

٥) أ) ق(س)= س^{٣} + ١

الحل : ق متصل على جميع الاعداد الحقيقية لانه كثير حدود ⟸ س = ∅

ب) هـ(س) = $\frac{\text{س - ٣}}{\text{س}^{٢}\text{ - ٥س + ٦}}$

الحل : س^{٢}- ٥س + ٦= ٠ ⟸ (س-٣)(س-٢) = ٠
⟸ س ={ ٣ ، ٢ }

جـ) ل(س) = $\frac{\text{س}+٢}{\text{س}^{٢}-١}$ + $\frac{٥}{\text{س}}$

الحل : يمكن حل السؤال كحاصل جمع اقترانين او اجراء الجمع بتوحيد المقامات وايجاد نقاط عدم الاتصال من الناتج

الاول س^{٢}- ١= ٠ ⟸ (س-١)(س+١) = ٠
⟸ س = ١ ، -١

الثاني س =٠

س = { -١ ،٠، ١}

د) م(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣}+٣ \text{ ، س} < ٢ \\ ٦ - \text{س ، س} \geqslant ٢ \end{cases}$

الحل : م متصل على س < ٢ لانه كثير حدود

م متصل على س > ٢ لانه كثير حدود

م غير متصل عند س = ٢ لان

نهـــا س^{٣}+٣ = ١١ (س ← ٢-)

نهـــا ٦- س = ٤ (س ← ٢+)

نهـــا هـ(س)= ٤ موجودة (س ← ٠)

⟸ م غير متصل عند س = ٢

س = { ٢ }

٦) ق(س) = س+٣ ، هـ(س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$

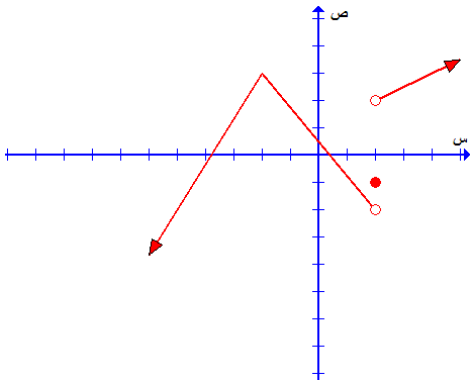
ل(س) = ق(س)×هـ(س) ، ابحث في اتصال ل عند س = ٣

الحل : ق متصل عند س = ٣ لانه كثير حدود

هـ غير متصل عند س = ٣ لانها من اصفار المقام

لكن (ق×هـ)(س)= ١ ⟸ متصل عند س = ٣ لانه كثير حدود

اسئلة الوحدة ص(٦٣)



١) اعتمادا على الشكل المقابل جد قيمة كل مما يأتي :

أ) ق(٢) = -١

ب) $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ١,٧٥

جـ) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

د) قيم س التي عنها الاقتران غير متصل

س = { ٢ }

هـ) $\lim_{س \to ب}$ (ق(س))^{٢} – س +٢ = ($\lim_{س \to ب}$ ق(س))$'$ + $\lim_{س \to ب}$ – س+٢

= (٠,٥)^{٢} + -٠+٢

= ٢+٠,٢٥ = ٢,٢٥

٢) $\lim_{س \to ١}$ (ق(س))^{٢} +٢ = ٢٩ ، $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = -٣ ، جد قيمة ما يلي؟

الحل : نبدأ بايجاد ناية ق لوحده :

$\lim_{س \to ١}$ (ق(س))^{٢} = ٢-٢٩ ⟸ $\lim_{س \to ١}$ (ق(س))^{٢} = ٢٧

$\lim_{س \to ١}$ ق(س)= ٣

أ) $\lim_{س \to ١}$ (ق(س)+ ٢هـ(س) + س = $\lim_{س \to ١}$ ق(س)+٢ $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) + $\lim_{س \to ١}$ س

= ٣ +(٢×-٣)+١

= ٣-٦+١=-٢

ب) $\lim_{س \to ١}$ ((ق(س)× هـ(س)) = $\lim_{س \to ١}$ ق(س)×$\lim_{س \to ١}$ هـ(س)

= ٣ × -٣

= -٩

٣) ق(س) = { ٢أس^{٢}+ب ، س > ١ ؛ ٧ ، س = ١ ؛ س^{٢}-٤ب-٦ ، س < ١ } ، وكان ق متصلا عند س = ١ ،فجد قيمة كل من أ ،ب؟

الحل : هنا نستخدم الشرط الثالث للاتصال على الطرفين.

$\lim_{س \to ١}$ ٢أس$'$+ب = ق(١) $\lim_{س \to ١}$ س$'$-٤ب -٦ = ق(١)

٢أ + ب = ٧ .... (١)

١-٤ب-٦=٧

-٤ب – ٥ = ٧

-٤ب = ١٢ ⟸ ب = -٣

بالتعويض في المعادلة (١)

٢أ + -٣ = ٧ ⟸ ٢أ = ١٠ ⟸ أ = ٥

٤) جد قيمة النهاية في كل مما يلي ؟

أ) ق(س) = $\sqrt{٣ - س}$ + $\frac{س+١}{س^{٢}+١}$ ، س ⟵ -١

= نهـــا $\sqrt{٣ - س}$ + نهـــا $\frac{س+١}{س^{٢}+١}$
س ⟵ -١ ، س ⟵ -١

= ٢ + $\frac{٠}{٢}$ = ٢

ب) هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ٥س}{٢س - ١٠}$ ، س ⟵ ٥

= نهـــا $\frac{س(س-٥)}{٢(س-٥)}$ = $\frac{-١}{٢}$
س ⟵ ٥

جـ) ل(س) = $\frac{س^{٢} - ٢س + ١}{س^{٣} - ١٢س}$ ، س ⟵ ١

= نهـــا $\frac{س^{٢} - ٢س + ١}{س^{٣} - ١٢س}$ = $\frac{٠}{٩}$ = ٠
س ⟵ ١

د) م(س) = $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ ، س ⟵ ٣

= نهـــا $\frac{(س-٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س-٣)}$
س ⟵ ٣

= نهـــا س^{٢} + ٣س + ٩ = (٣)^{٢} + (٣×٣) + ٩
س ⟵ ٣
= ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧

هـ) نهـــا $\frac{\frac{١}{س-٢} + \frac{١}{٢}}{٢س - ٨}$
س ⟵ ٤

الحل :

نهـــا $\frac{(١×٢) + (١×(س-٢))}{٢×(س-٢)×٢(س-٢)}$ = نهـــا $\frac{(١×٢) + (١×(س-٢))}{٢×(س-٢)×(٢س-٨)}$ بالاختصار والتعويض
س ⟵ ٤ س ⟵ ٤

= نهـــا $\frac{س}{٤×(س-٢)×(س-٤)}$
س ⟵ ٤

= $\frac{٤}{٠×٢×٤}$ = غير موجودة

و) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٣س+٤} - ٥}{س^{٢} - ٤٩}$

الحل :

$$= \lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٣س+٤} - ٥}{س^{٢} - ٤٩} \times \frac{\sqrt{٣س+٤} + ٥}{\sqrt{٣س+٤} + ٥} = \lim_{س \to ١} \frac{(٣س+٤) - ٢٥}{(س+٧)(س-٧)(\sqrt{٣س+٤} + ٥)}$$

$$= \lim_{س \to ٧} \frac{٣(س-٧)}{(س+٧)(س-٧)(\sqrt{٣س+٤} + ٥)} = \lim_{س \to ٧} \frac{٣}{(س+٧)(\sqrt{٣س+٤} + ٥)}$$

$$= \frac{٣}{١٤ \times ١٠} = \frac{٣}{١٤٠}$$

٥) ق(س) = س^{٣}+٥س ، هـ(س) = $\begin{cases} ٥س+٤ & ، س \geq ١ \\ ٨+س^{٢} & ، س < ١ \end{cases}$

ل(س) = (ق+هـ)(س) ، ابحث في اتصال ل عندما س = ١

الحل : ق متصل عند س = ١ لانه كثير حدود

هـ(١) = ٥×١+٤ = ٩ ⟸ هـ معرف عند س = ١

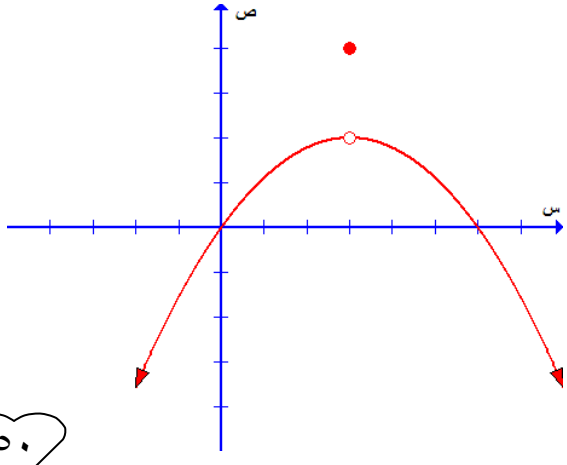
$$\begin{cases} \lim_{س \to ١^{-}} ٥س+٤ = ٥+٤ = ٩ \\ \lim_{س \to ١^{+}} ٨+س^{٢} = ١+٨ = ٩ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = ٩ موجودة

$\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = هـ(١) = ٩ ⟸ هـ متصل عند س = ١

⟸ ل(س) = (ق+هـ)(س) متصل لانه حاصل جمع متصلين

٦) اعتمادا على الشكل المجاور ابحث في اتصال ق



عندما س = ٣

الحل : ق(٣) = ٤

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢

⟸ ق غير متصل عند س = ٣

لاحظ ظهور الدائرة المفتوحة.

٧) ق،هـ متصلان عند س = ٥ ، هـ(٥) = ٤ ،

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \frac{\text{ق(س)} + \text{س}}{٣\text{هـ(س)}} = ١$$ ، فجد ق(٥) .

الحل : بما ان الاقترانان متصلان فان $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥}$ اق(س) = ق(٥) وايضا $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥}$ هـ(س) = هـ(٥)

$$\Longleftarrow \frac{\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \text{ ق(س) +س}}{\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \text{ هـ(س)}} = ١$$ بالضرب التبادلي

$$\Longleftarrow \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \text{ ق(س)} + \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \text{ س} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \text{ هـ(س)}$$

$$\Longleftarrow \text{ق(٥)} + ٥ = \text{هـ(٥)}$$

$$\Longleftarrow \text{ق(٥)} + ٥ = ٤$$

$$\Longleftarrow \text{ق(٥)} = ٤ - ٥ = -١$$

٨) $\text{ق(س)} = \frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$ ، جد قيم س التي يكون عندها الاقتران متصلا ؟

الحل: ق حاصل جمع اقترانين نسبيين ونقط عدم الاتصال هي اصفار المقام لكل منها

نقاط عدم الاتصال = { ٠ ، ٣ }

٩) هنا نضع الاجابات الصحيحة فقط

الفرع	١	٢	٣	٤	٥
الاجابة الصحيحة	جـ) ٤	ب) -٢٧	جـ) { ١ ، ٢}	د) غير موجودة	أ) ٩

خريطة ذهنية لايجاد النهاية :