الصف الثاني عشر

للفرعين الادبي والفندقي والسياحي

الوحدة الاولى

النهايات والاتصال

١- مفهوم النهاية

٢- نظريات النهايات

٣- نهاية خارج قسمة اقترانين

٤- الاتصال عند نقطة

٥- نظريات الاتصال

٦- حلول اسئلة الوحدة

٧- حلول جميع تدريبات واسئلة الكتاب

٨- اسئلة الوزارة (٢٠٠٨- ٢٠١٨) مع الحلول النموذجية

٩- ورقة عمل على الوحدة الاولى اكثر من ١٠٠ سؤال مع الحلول النموذجية

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

الاستاذ ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ | ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

الدرس الأول

مفهوم النهاية

أذا كان لدينا الجدول التالي الذي يمثل قيم س ، وقيم ق(س) = ص للاقتران ق (س) = س + ٣

س	١و٤	١و٠٤	١و٠٠٤	٤	٣و٩٩٩	٣و٩٩	٣و٩
ق(س)	١و٧	١و٠٧	١و٠٠٧		٦و٩٩٩	٦و٩٩	٦و٩

جهة اليمين (+) جهة اليسار (-)

ملاحظه

س = ١و٠٤ نجد

ق(١و٠٤) = ١و٠٤ + ٣ = ١و٠٧

نلاحظ من الجدول

١. كلما اقتربت س من العدد ٤ عن جهة اليمين (أكبر من ٤) فان ق(س) تقترب من العدد ٧

⇐ نهـا ق(س) = ٧
س ← ٤+

وتسمى النهاية من اليمين

وتقرأ كمايلي

نهاية ق(س) عندما س تقترب أو تؤول من العدد ٤ عن اليمين تساوي ٧

٢. كلما اقتربت س من العدد ٤ من جهة اليسار (أقل من ٤) فان ق(س) تقترب من العدد ٧

⇐ نهـا ق(س) = ٧
س ← ٤-

وتسمى النهاية من اليسار

وتقرأ كمايلي

نهاية ق(س) عندما س تقترب أو تؤول من العدد ٤ من اليسار تساوي ٧

٣. نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ٧
س ← ٤+ س ← ٤-

⇐ نهـا ق(س) = ٧
س ← ٤

مكتبة أبو سارة AbuSara
العلم : ناجح الجمزاوي

ملاحظة

١. تكون النهاية موجودة اذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

٢. تكون النهاية غير موجودة اذا كانت النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

٣. س ← ٢ هذا يعني ان س تقترب من العدد ٢ ولكنه س ≠ ٢

مثال ①

بالاعتماد على الجدول التالي الذي يبين قيم س ← ٢ فأوجد نها ق(س)
س ← ٢+

س	٢٫٣	٢٫٢	٢٫١	٢	١٫٩	١٫٨	١٫٧
ق(س)	٣٫١	٣٫٢	٤٫١		٩٫٢	٨٫٢	٧٫٢

الحل

نلاحظ انه كلما اقتربت س من العدد (٢) من اليمين كلما اقتربت ق(س) من العدد (١) وعليه فان

نها ق(س) = ١
س ← ٢+

مثال ②

بالاعتماد على الجدول التالي اوجد نها ق(س)
س ← ٣

س	٣٫٣	٣٫٢	٣٫١	٣	٢٫٩	٢٫٨	٢٫٧
ق(س)	٣٫٤	٣٫٤	٤٫١		٥٫٩	٥٫٨	٥٫٧

الحل

نها ق(س) = ٤
س ← ٣+

نها ق(س) = ٦
س ← ٣-

نها ق(س) ≠ نها ق(س)
س ← ٣+ س ← ٣-

⇐ نها ق(س) غير موجودة
س ← ٣

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

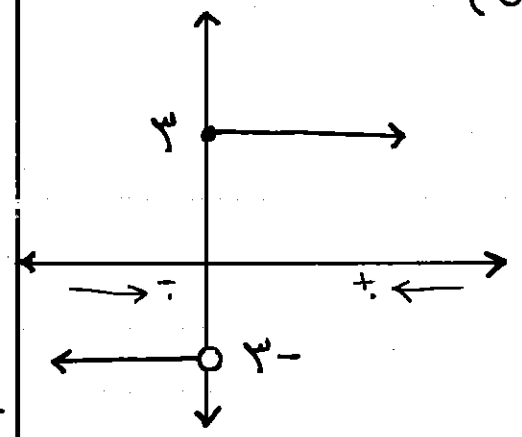
إيجاد النهاية من خلال الرسم

مثال ①

بالاعتماد على الشكل التالي أوجد

ها ه(س)

س ← ٠



الحل

ها ه(س) = ٣

س ← ٠+

ها ه(س) = -٣

س ← ٠-

∴ ها ه(س) غير موجودة

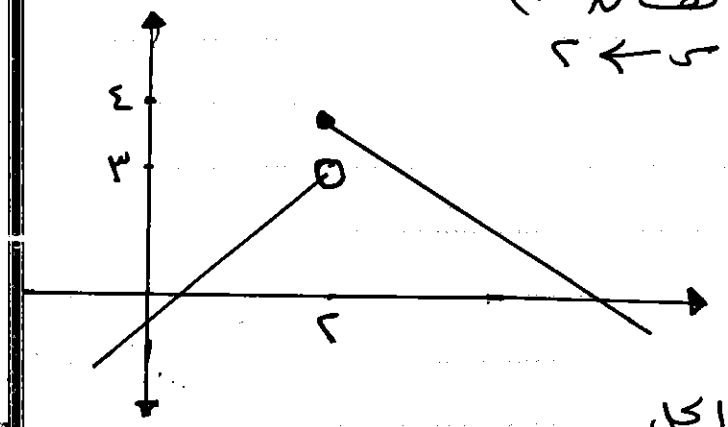
س ← ٠

مثال ②

بالاعتماد على الشكل المجاور أوجد

ها ه(س)

س ← ٢



الحل

ها ه(س) = ٤

س ← ٢+

ها ه(س) = ٣

س ← ٢-

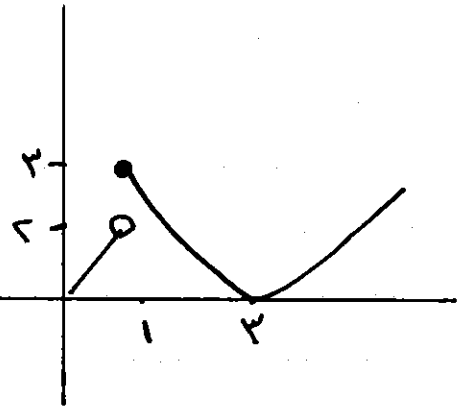
∴ ها ه(س) غير موجودة

س ← ٢

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

بالاعتماد على الشكل المجاور
أوجد $\lim_{س \to 1^+} هـ(س)$



الحل

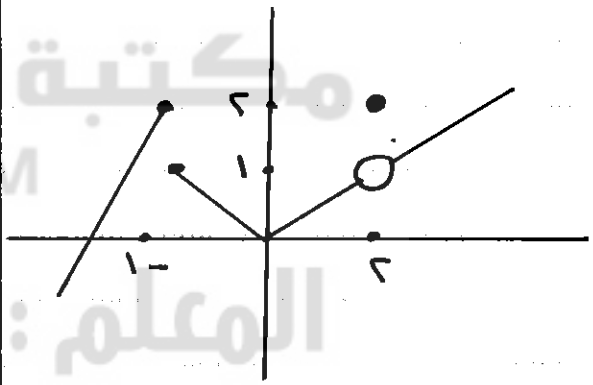
$\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = ٣$

الحل

$\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = ١$
$\lim_{س \to 1^-} هـ(س) = ٢$
$\lim_{س \to 1^-} هـ(س)$ غير موجودة
$\lim_{س \to 1} هـ(س)$ غير موجودة

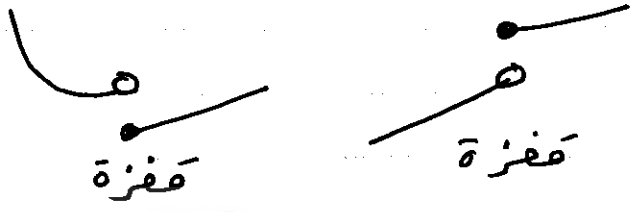
مثال ④

من الشكل المجاور ما هي قيم $أ$ التي عندها $\lim_{س \to أ} هـ(س)$ غير موجودة



ملاحظة هامة

دائمًا النهاية غير موجودة عند القفزات

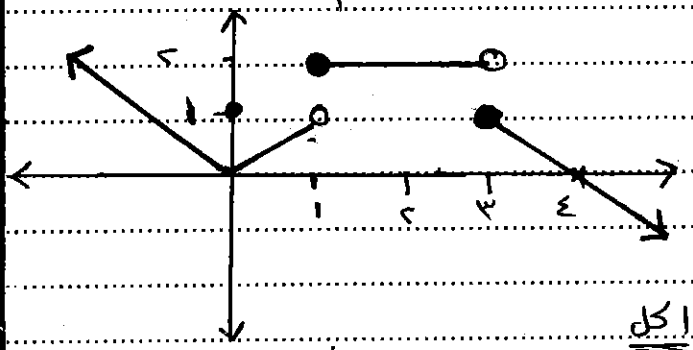


مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

(١) دراسة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق، المعرف على ح فاوجد مجموعة قيم ك حيث نهاية ق(س) غير موجودة



الحل

نهاية ق(س) = ٢ ، نهاية ق(س) = ١
س ← ١+ ، س ← ١-

نهاية ق(س) غير موجودة
س ← ١

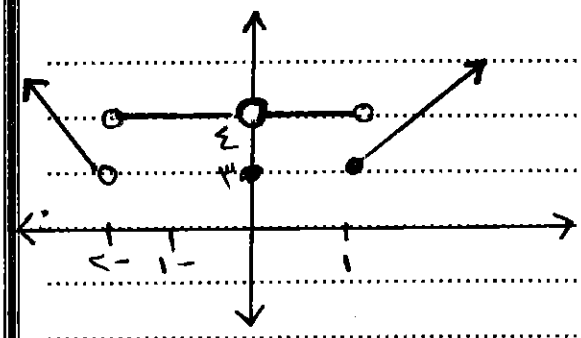
نهاية ق(س) = ١ ، نهاية ق(س) = ٢
س ← ٣+ ، س ← ٣-

نهاية ق(س) غير موجودة
س ← ٣

ك = {١ ، ٣}

مثال ⑥

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الأقتران ق المعرف على ح فاوجد مجموعة قيم ك حيث نهاية ق(س) = ٣
س ← ك+



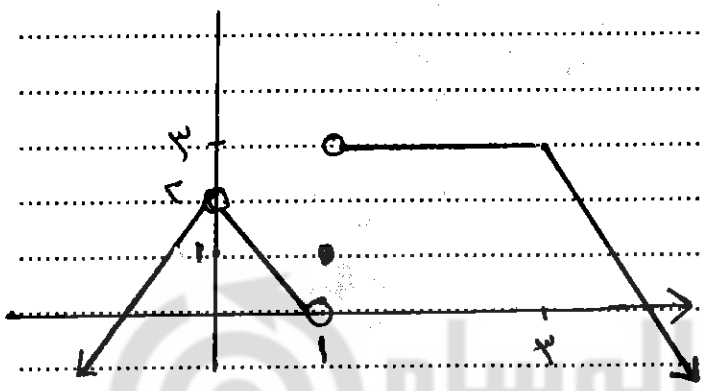
الحل

نهاية ق(س) = ٣
س ← ١+

ك = {١}

مثال ⑦

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المعرف على ح فاوجد مجموعة قيم ل حيث نهاية ق(س) غير موجودة
س ← ل



الحل

نهاية ق(س) = ٣
س ← ١+

نهاية ق(س) = صفر
س ← ١-

نهاية ق(س) غير موجودة ك = {١}
س ← ١

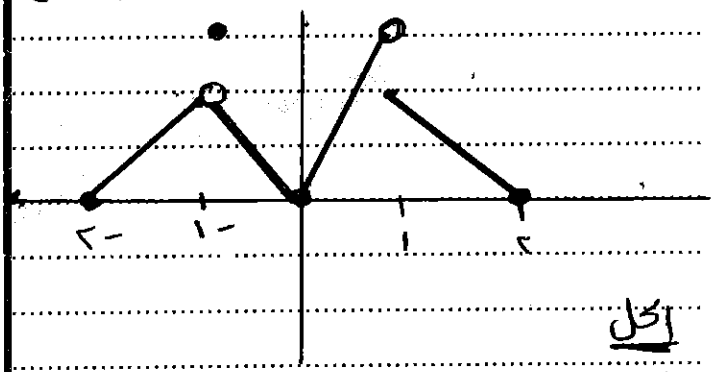
مكتبة الهدف AWSAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقترانات ه(س) المعرف على $[-٢، ٢]$ فاوجد مجموعة قيم م حيث نها ه(س) = صفر

س ← م

أ) $\{٠\}$ ب) $\{٠، ١\}$ ج) $\{-١، ١\}$ د) $\{-١، ١، ٢\}$



الحل

نها ه(س) = صفر

س ← ٢

نها ه(س) = صفر

س ← ٠

قيم م هي $\{٠، ٢\}$ ⓑ

مثال (٩)

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ه المعرف على ح اوجد

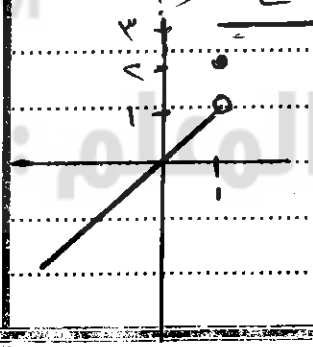
نها ه(س)

س ← ١+

الحل

نها ه(س) = ٣

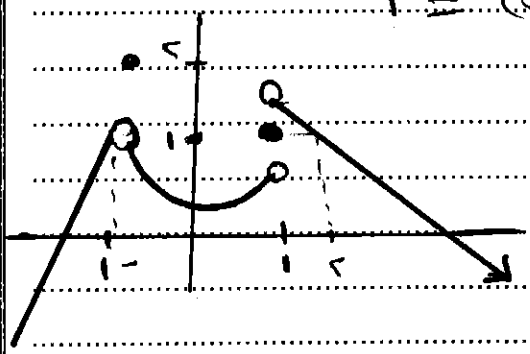
س ← ١+



مثال (١٠)

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقترانات ه(س) المعرف على ح اوجد مجموعة قيم م حيث يكون نها ه(س) = ١

س ← م



الحل

نها ه(س) = ١

س ← -١

نها ه(س) = ١

س ← ٢

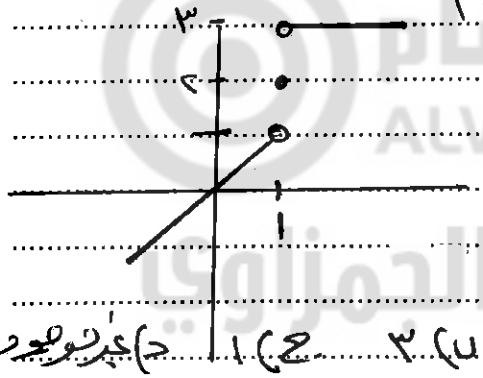
قيم م هي $\{-١، ٢\}$

مثال (١١)

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقترانات ه(س)

اوجد نها ه(س)

س ← ١+



أ) ٢ ب) ٣ ج) ١ د) غير موجود

الحل ⓑ

مركز الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

الاستاذ ناجح الجمزاوي

الثاني ثانوي الأدبي | الوحدة الأولى | المستوى الثالث

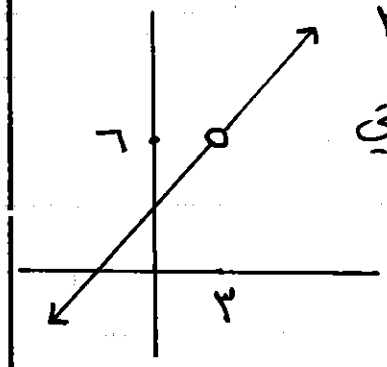
النهايات والإتصال

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ | ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

تدريبات ومسائل الكتاب

تدريب ① ص ١٦

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل $ه(س) = \frac{س^2 - 9}{س - 3}$



جد قيمة كل مما يأتي إن وجدت

١) $ه(٣)$

٢) $\lim_{س \to -٣} ه(س)$

٣) $\lim_{س \to +٣} ه(س)$

٤) $\lim_{س \to ٢} ه(س)$

الحل

١) $ه(٣)$ غير معرفة

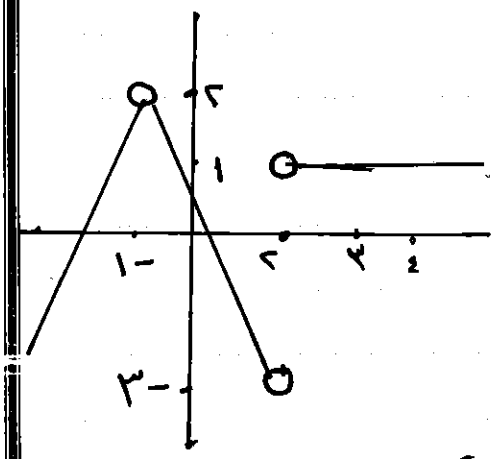
٢) $\lim_{س \to -٣} ه(س) = ٦$

٣) $\lim_{س \to +٣} ه(س) = ٦$

٤) $\lim_{س \to ٣} ه(س) = ٦$

تدريب ② ص ١٨

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ه$، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)



١) $\lim_{س \to -١} ه(س) = ٢$

٢) $\lim_{س \to ٢} ه(س)$

الحل $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ١$

$\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٣-$

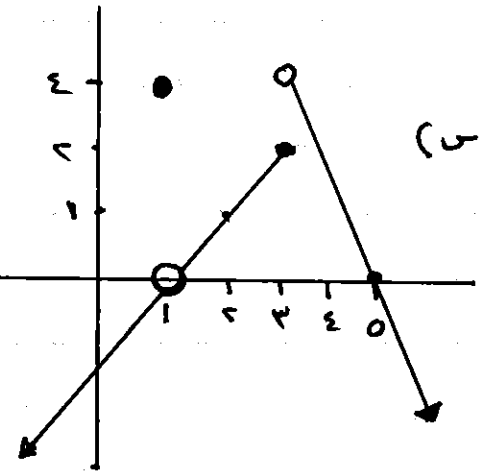
$\lim_{س \to ٢} ه(س)$ غير موجود

٣) $\lim_{س \to ٣} ه(س) = ١$

مكتبة الوبار AMESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ③ ص١٩

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)



١) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ١$

٢) $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٠$ أوجد قيمة م

الحل

م = ١ ، ٥

٣) الثابت ل ، حيث $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجود

الحل

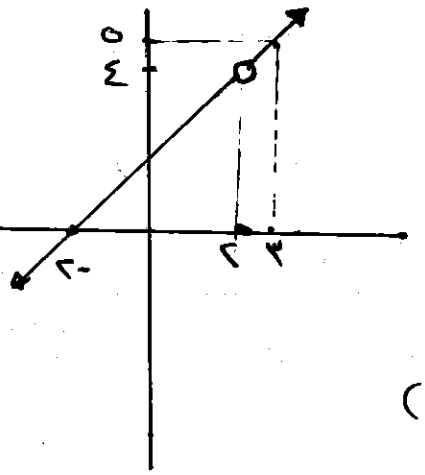
ل = ٣ لأن

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢$

السؤال الأول ص٢٠

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)



أ) ق(٢)

ب) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

ج) ق(٣)

د) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

الحل

أ) ق(٢) غير معرفة

ب) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

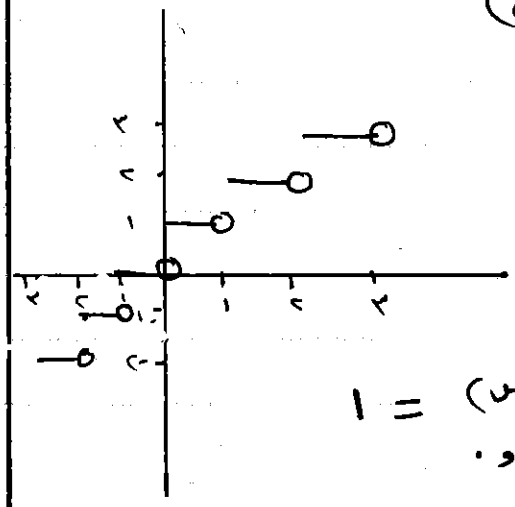
ج) ق(٣) = ٥

د) $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٥$

مكتبة الهدف AlHadaf.com
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص٢

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)



أ) $\lim_{س \to ٠٫٥} ق(س) = ١$

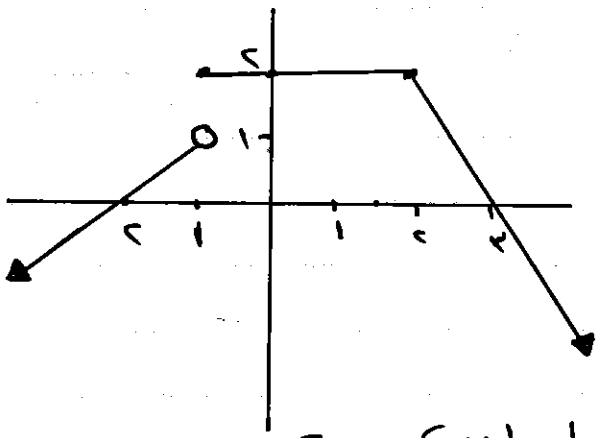
ب) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٣$

ج) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة

السؤال الثالث ص٢

اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)



أ) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٢$

ج) قيمة أ ، حيث ان $\lim_{س \to أ} ق(س)$ غير موجودة

أ = ١ لأن

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ١$

د) قيمة ب ، حيث $\lim_{س \to ب} ق(س) =$ صفراً

ب = -٢ ، ٣

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

الاستاذ ناجح الجمزاوي

الثاني ثانوى الأدبي — الوحدة الأولى — المستوى الثالث

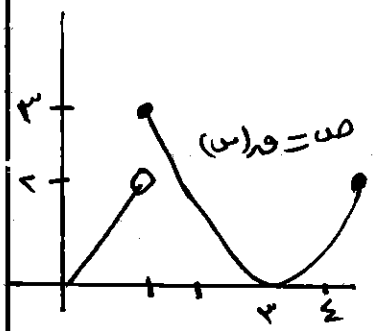
النهايات والإتصال

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ — ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠١٨) صيفية

بالاعتماد على الشكل المجاور
فان نها ق(س) تساوي
س ← ١+



أ) صفر ب) ١
ج) ٢ د) ٢

الحل : نها ق(س) = ٣ ⑤
س ← ١+

وزارة (٢٠١٩) شتوية

بالاعتماد على الجدول التالي الذي يبين قيم ق(س) عندما س ← ٣
فان نها ق(س) تساوي
س ← ٣+

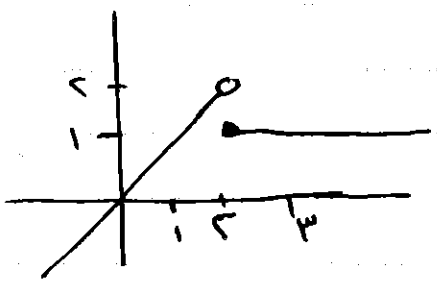
س	١٫٣	١٫٣٠١	١٫٣٠٠٤		١٫٣٠٠٠٢	١٫٣٠٠٠٠٩	١٫٣٠٠٠٠٩٨	١٫٣٠٠٠٠٩٩
ص	١٫٤	١٫٤٠١	١٫٤٠٠٤		١٫٤٠٠٠٢	١٫٤٠٠٠٠٩	١٫٤٠٠٠٠٩٨	١٫٤٠٠٠٠٩٩

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) غير موجودة

الحل
نها ق(س) = ٤
س ← ٣+

وزارة (٢٠١٩) صيفية

معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) فان نها ق(س)
س ← ٢−



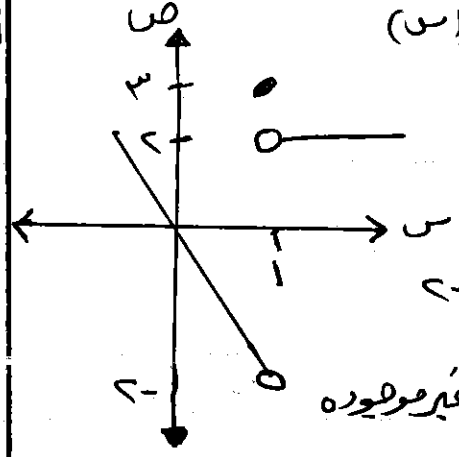
أ) ٢− ب) ٢
ج) ١ د) غير موجودة

الحل
نها ق(س) = ٢ ⑤
س ← ٢−

مكتبة الوسام ALWSAM ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١١) شتوية

وعتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)، جا نهاق(س)



أ) ٢ ب) -٢

ج) ٣ د) غير موجودة

الحل

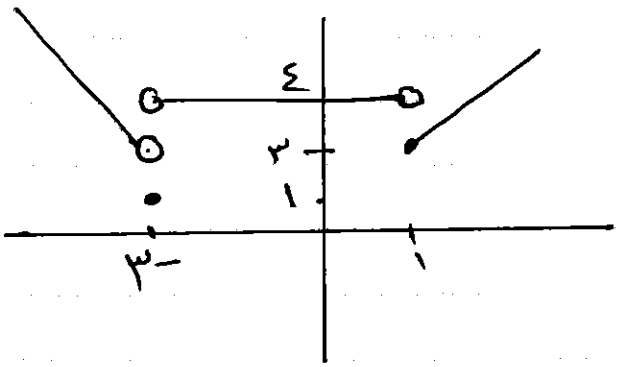
نهاق(س) = ٢ ، نهاق(س) = -٢
س←١⁺ س←١⁻

∴ نهاق(س) غير موجودة
س←١

الأجابة (د)

وزارة (٢٠١٢) شتوية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح، جا نهاق(س)
س←-٣⁺



أ) ٣ ب) ٤

ج) ١ د) غير ذلك

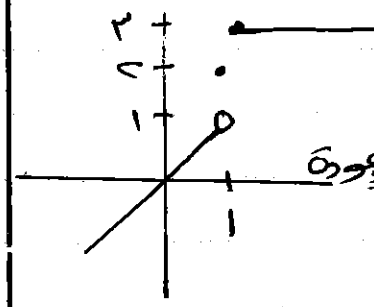
الأجابة (ب)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) الدورة الصيفية

وزارة (٢٠١٣) الدورة الصيفية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، ما هـا ق(س)
س ← ١+



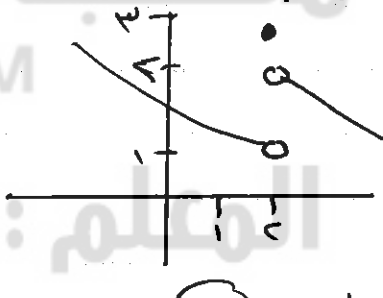
أ) ٢ ب) ٣

ج) ١ د) غير موجودة

الحل
هـا ق(س) = ٣
س ← ١+
الأجابة (ب)

وزارة (٢٠١٣) الدورة الشتوية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح ما هـا ق(س)
س ← ٢-



أ) ٢ ب) ١

ج) ٣ د) غير موجودة

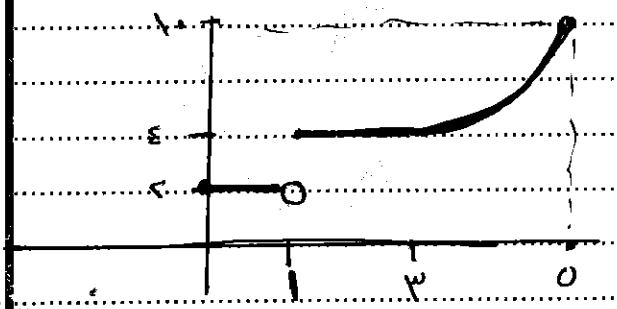
الاجابة
هـا ق(س) = ١
س ← ٢-
(ب)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٨) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران $f(x)$

اوجد $\lim_{x \to 1^-} f(x)$



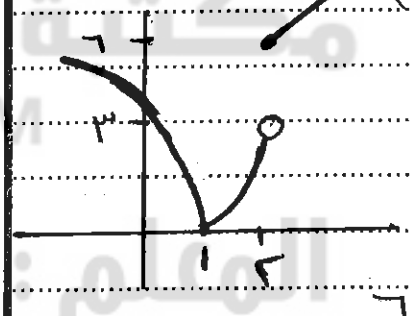
الحل

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

(٩) وزارة (٢٠١٤) صيفية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران $f(x)$ ، الحرف على مجموعة الاعداد الحقيقية اوجد

$\lim_{x \to 2^+} f(x)$



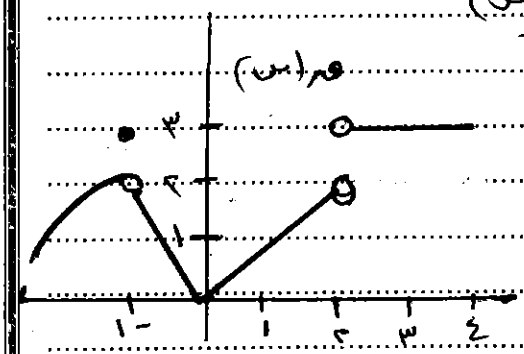
الحل

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 6$

(١٠) وزارة (٢٠١٥) شتوية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران $f(x)$ ، جد

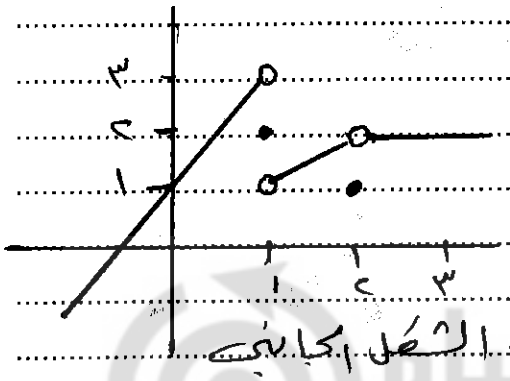
$\lim_{x \to 2^+} f(x)$



الحل

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

(١١) وزارة (٢٠١٥) صيفية



اعتماداً على الشكل المجاور

اوجد $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

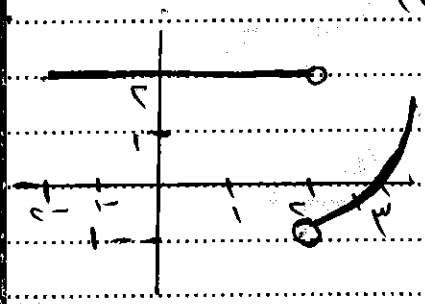
الحل

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

(١٢) وزارة (٢٠١٦ ، ٢) شتوية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران $ق(س)$ المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية أوجد



$\lim_{س \to ٢^+} ق(س)$

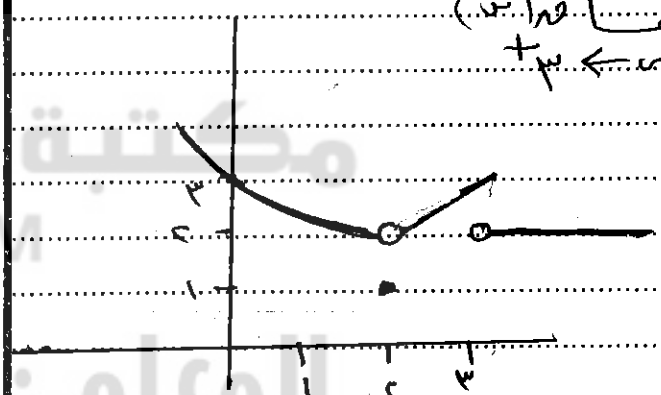
الحل

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = -١$

(١٣) وزارة (٢٠١٦ ، ٢) صيفية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران $ق(س)$ المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية أوجد

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س)$

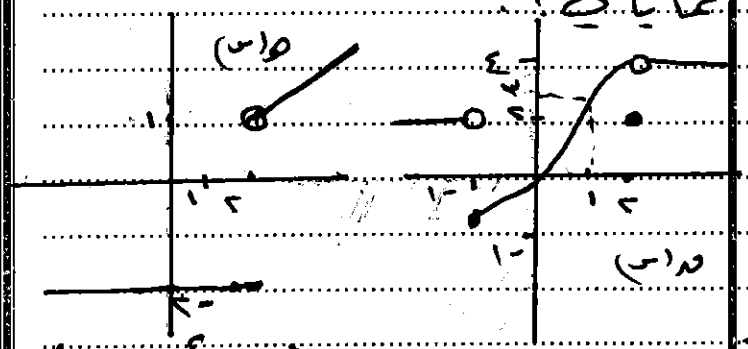


الحل

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٢$

(١٤) وزارة (٢٠١٧ ، ٢) شتوية

اعتماداً على الشكل الآتي الذي يمثل منحنى الأقتران $ق(س)$ أجب عما يأتي:



١) جد $\lim_{س \to ١} (٥ق(س) - (و(س) + ٦س))$

الحل

$= ٥ \lim_{س \to ١} ق(س) - \lim_{س \to ١} و(س) + \lim_{س \to ١} ٦س$

$= ٥ \times ٣ - (-٢) + (٦ \times ١)$

$= ١٥ - (٤ + ٦) = ٥$

٢) جد $\lim_{س \to ١^+} \frac{٣ق(س)}{و(س)}$

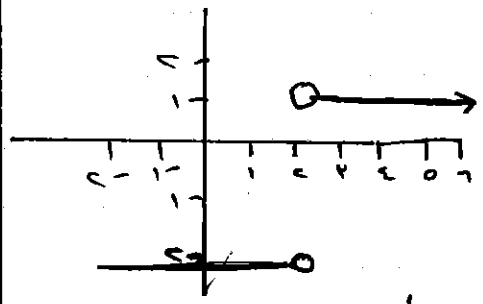
$= \frac{٣ \lim_{س \to ١^+} ق(س)}{\lim_{س \to ١^+} و(س)} = \frac{٣ \times ٤}{١} = ١٢$

مكتبة الوسام ALWESAM

العلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية

معتمدًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة د حيث
$\lim_{س \to ٢} د(س)$



أ) ١ ب) ١ ≠ ٢

ج) ٣ د) غير موجودة

الحل

$\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ١$

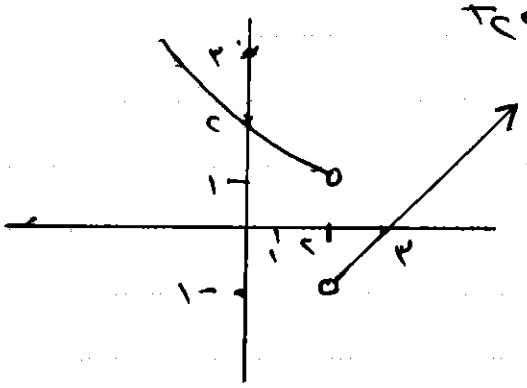
$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة

الأجابة (د)

وزارة (٢٠١٨) صيفية

معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة د حيث
$\lim_{س \to ٣} د(س)$



أ) ١ ب) ١-

ج) ٣ د) غير موجودة

الحل

$\lim_{س \to ٣^+} د(س) = ١-$

الأجابة (ب)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثاني

نظريات على النهايات

نظرية (١)

نهاية جـ = جـ حيث جـ : عدد ثابت
س ← أ

نهاية الثابت = الثابت نفسه

مثال:- جد قيمة كل من النهايات التالية

١) نهـا ٨ = ٨
س ← ٥

٢) نهـا أ = أ
س ← ٥

٣) نهـا ٥/٩ = ٥/٩
س ← ٢

٤) نهـا ٣√٢ = ٣√٢
س ← -١

نظرية (٢)

اذا كان نهـا د(س) = ل ، نهـا هـ(س) = م فإن

نهـا [د(س) + هـ(س)] = ل + م
س ← أ

نهـا [د(س) - هـ(س)] = ل - م
س ← أ

نهـا [د(س) × هـ(س)] = ل × م
س ← أ

نهـا [د(س) / هـ(س)] = ل / م ، م ≠ ٠
س ← أ

نهـا [د(س)]^ن = ل^ن
س ← أ

نهـا √د(س) = √ل
س ← أ

نهـا ن√د(س) = ن√ل
س ← أ

نهـا [جـ د(س)] = جـ ل
س ← أ

نهـا [د(س) - هـ(س)] = ل - م
س ← أ

نهـا [د(س) + جـ] = ل + جـ
س ← أ

نهـا [د(س) - جـ] = ل - جـ
س ← أ

تحسب نهاية اقترانات كثيرات الحدود بالتعويض المباشر بدل س

مثال ①

نهـا ٤س^٢ + ٥ = ٤(١)^٢ + ٥
س ← ١

= ٤ × ١ + ٥

= ٤ + ٥

= ٩

مثال (٢)

اوجد نهـا س^٣ - ٤س + ١
س ← ٢

الحل

بالتعويض مباشر

نهـا س^٣ - ٤س + ١ = (٢)^٣ - ٤ × ٢ + ١
س ← ٢

= ٨ - ٨ + ١ = ١

مثال (٣)

اوجد نهـا ٣س^٢ + ٥س - ٤
س ← -١

الحل

= ٣(-١)^٢ + ٥ × -١ - ٤

= ٣ - ٥ - ٤ = -٦

مثال (٤)

اذا علمت ان نهـا (٣س + ب) = ١٥
س ← ٢

فان قيمة ب ؟

أ) -٩ ب) ١٠ ج) ٩ د) -١٠

الحل

٣ × ٢ + ب = ١٥

٦ + ب = ١٥

ب = ١٥ - ٦ = ٩

الاجابة ج

مثال (٥)
اذا كانت نها (ب س + ٥) = ٢١
س ← ٨
فاوجد قيمة ب
الحل
بالتعويض مباشر
ب × ٨ + ٥ = ٢١
٨ ب + ٥ = ٢١
٨ ب = ٢١ − ٥ = ١٦ بالقسمة على ٨
ب = ٢

مثال (٦)
اذا كانت نها (ب س^٢ + ٢) = −٢
س ← −١
اوجد قيمة ب ؟
الحل
بالتعويض مباشر
ب (−١)^٢ + ٢ = −٢ ⇐
ب × ١ + ٢ = −٢
ب + ٢ = −٢
ب = −٤

مثال (٧)
اذا علمت ان نها (٣ س + ٥) = ٢
س ← ب
فاوجد ب
الحل
٣ ب + ٥ × ب = ٢
٣ ب + ٥ = ٢
٥ ب = −١
ب = −١/٥ ⇐

مثال (٨)
اذا كانت نها (س^٢ + ٣ س) = −١
س ← −ب
فاوجد قيمة ب
الحل
بالتعويض مباشر
(−ب)^٢ + ٣ × −ب = −١
ب^٢ − ٣ ب + ١ = ٠
بالتحليل
(ب − ١)(ب − ١) = ٠
ب = ١ ⇐

مثال (٩)
اذا كانت نها (س^٢ + ٦ س) = −٩
س ← ب
اوجد قيمة ب
الحل
ب^٢ + ٦ ب = −٩
ب^٢ + ٦ ب + ٩ = ٠
(ب + ٣)(ب + ٣) = ٠
ب = −٣ ⇐

مكتبة الهدام ALWESAM
الهدام ناجح الجمزاوي

نظرية (٣)

اذا كانت p ، l ، k ثوابت حيث k عدد صحيح وكانت

$\lim_{س \to p} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \to p} هـ(س) = ع$

فإن

١. $\lim_{س \to p} ك ق(س) = ك ل$

٢. $\lim_{س \to p} (ق(س) \pm هـ(س)) = \lim_{س \to p} ق(س) \pm \lim_{س \to p} هـ(س)$

$= ل \pm ع$

٣. $\lim_{س \to p} (ق(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to p} ق(س) \times \lim_{س \to p} هـ(س)$

$= ل \times ع$

٤. $\lim_{س \to p} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to p} ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$

٥. $\lim_{س \to p} (ق(س))^{ن} = (\lim_{س \to p} ق(س))^{ن}$

$= (ل)^{ن}$

ملاحظة هامة

في اسئلة المعطيات و المطلوب يجب تجهيز المعطيات قبل البدء في ايجاد المطلوب و ذلك يجعل $\lim_{س \to ١} ق(س)$ لوحدها دون اضافة أو طرح أو ضرب أو قسمة ثم التعويض في المطلوب مع ملاحظة التعويض المباشر في اغلب الحدود (ليست كلها)

مثال (١)

اذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٨$ أوجد ما يلي

١) $\lim_{س \to ١} ٣ق(س)$ ٢) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + س^{٢} - ١٢)$

٣) $\lim_{س \to ١} (٢ق(س) - س - ٣)$

٤) $\lim_{س \to ١} (٢ - \frac{ق(س)}{٤})$

٥) $\lim_{س \to ١} (\sqrt[٣]{ق(س)} - ق(س))$

الحل

١) $\lim_{س \to ١} ٣ق(س) = ٣ \lim_{س \to ١} ق(س) = ٣ \times ٨ = ٢٤$

٢) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + س^{٢} - ١٢) = \lim_{س \to ١} ق(س) + \lim_{س \to ١} س^{٢} - \lim_{س \to ١} ١٢$

$= ٨ + (١)^{٢} - ١٢ = ٨ + ١ - ١٢ = ٩ - ١٢ = -٣$

٣) $\lim_{س \to ١} ٢ق(س) + \lim_{س \to ١} (-س - ٣)$

$= ٢ \times ٨ - ١ - ٣ = ١٦ - ٤ = ١٢$

يتبع الحل ⇐

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٢}{س - ١} = ٤$ فإن $\lim_{س \to ١} ق(س) =$

٥) $= (\lim_{س \to ١} هـ(س))^{٣} - \sqrt[٣]{\lim_{س \to ١} هـ(س)}$

$= ٨^{٢} - \sqrt[٣]{٨}$

$= ٦٤ - ٢ = ٦٢$

مثال (٢)

اذا كانت $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٥$

فاوجد ما يلي

١) $\lim_{س \to ١} ٣ هـ(س)$

الحل $= ٣ \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣ \times ٤ = ١٢$

٢) $\lim_{س \to ١} (هـ(س) + ق(س))$

الحل

$= \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} ق(س) = ٤ + ٥$

$= ٩$

٣) $\lim_{س \to ١} ٢ هـ(س) - ٣ ق(س)$

الحل

$= ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) - ٣ \lim_{س \to ١} ق(س)$

$= ٢ \times ٤ - ٣ \times ٥$

$= ٨ - ١٥ = -٧$

٤) $\lim_{س \to ١} هـ^{٣}(س)$

الحل

$= (\lim_{س \to ١} هـ(س))^{٣} = ٤^{٣} = ٦٤$

٥) $\lim_{س \to ١} (٢ هـ(س) + س^{٢} - ٤)$

الحل

$= ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} (س^{٢} - ٤)$

$= ٢ \times ٤ + (١ - ٤)$

$= ٨ - ٣ = ٥$

مثال (٣)

اذا كانت $\lim_{س \to ١} (٢ هـ(س) - ١) = ١٧$

فاوجد $\lim_{س \to ١} (\sqrt{هـ(س)} - ٥)$

اولاً

تجهيز المعطيات

$\lim_{س \to ١} (٢ هـ(س) - ١) = ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) - ١$

$= ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) - ١ = ١٧$

$+١ \quad +١$

$\Leftarrow ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) = ١٨$ بالقسمة على ٢

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = \frac{١٨}{٢} = ٩$

نعوضها في المطلوب

$= \sqrt{\lim_{س \to ١} هـ(س)} - ٥ = \sqrt{٩} - ٥$

$= ٣ - ٥ = -٢$

مثال (٤)

اذا كانت $\text{هـا}_{٢}(\text{هـ}(س)) = ٥$ وكانت $\text{هـا}_{٢}(\text{هـ}(س)) = -٤$ فاوجد مايلي

١) $\text{هـا}_{٢}(\text{هـ}(س) + س^{٢})$

٢) $\text{هـا}_{٢}(\text{هـ}(س) \times \text{هـ}^{٢}(س))$

٣) $\text{هـا}_{٢}\sqrt[٣]{٤\text{هـ}(س)}$

الحل

من المعطيات $\text{هـا}_{٢}(\text{هـ}(س)) = -٤$

بالقسمة على (٢) $\Leftarrow \text{هـا}_{٢}(\text{هـ}(س)) = -٢$

① $\text{هـا}_{٢}(\text{هـ}(س)) + \text{هـا}_{٢} س^{٢}$

$= ٢ \times ٥ + ٤ = ١٠ + ٤ = ١٤$

② $\text{هـا}_{٢}(\text{هـ}(س)) \times (\text{هـا}_{٢}\text{هـ}(س))$

$= ٥ \times (-٢) = ٤ \times ٥ = ٢٠$

③ $\sqrt[٣]{٤\ \text{هـا}_{٢}\text{هـ}(س)} = \sqrt[٣]{٤ \times -٢}$

$= \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

مثال (٥)

اذا كانت $\text{هـا}_{٣}(\text{هـ}(س) - ٣س + ٧) = ٨$

فاوجد $\text{هـا}_{٣}\text{هـ}^{٢}(س)$

الحل

من المعطيات نجد $\text{هـا}_{٣}\text{هـ}(س)$

$\text{هـا}_{٣}(\text{هـ}(س) - ٣س + ٧) = ٨$

$\text{هـا}_{٣}\text{هـ}(س) + \text{هـا}_{٣} - ٣س + ٧ = ٨$

$\text{هـا}_{٣}\text{هـ}(س) + ٩ - ٩ + ٧ = ٨$

$\text{هـا}_{٣}\text{هـ}(س) - ٢ = ٨$

$+٢ \quad +٢$

$\text{هـا}_{٣}\text{هـ}(س) = ١٠$ بالتربيع

$\text{هـا}_{٣}\text{هـ}(س) = ٥$

نجد $\text{هـا}_{٣}\text{هـ}^{٢}(س) = (\text{هـا}_{٣}\text{هـ}(س))^{٢}$

$= ٥^{٢} = ٢٥$

مكتبة الرسام ARREEAM
الرسام ناجح الجمزاوي

مثال (٦)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} (٢ هـ(س) - و(س)) = ٨$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ٣ و(س) = ٦$ فاوجد $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$

الحل

من المعطيات

$\lim_{س \to ٢} ٣ و(س) = ٦$ بالقسمة على ٣

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} و(س) = ٢$

ايضاً $\lim_{س \to ٢} (٢ هـ(س) - و(س)) = ٨$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ٢ هـ(س) - \lim_{س \to ٢} و(س) = ٨$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ٢ هـ(س) - ٢ = ٨$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ٢ هـ(س) = ١٠$ بالقسمة على ٢

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٥$

ومنها $\lim_{س \to ٢} هـ^{٢}(س) = (\lim_{س \to ٢} هـ(س))^{٢}$

$= ٥^{٢} = ٢٥$

مثال (٧)

اوجد $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٣} + ١٧}$

ا) ٥ ب) ٥ ج) ٣ د) ٤

الحل

تعويض مباشر

$= \sqrt{٢^{٣} + ١٧} = \sqrt{٨ + ١٧}$

$= \sqrt{٢٥} = ٥$ (ب)

مثال (٨)

اذا علمت أن $\lim_{س \to -١} (٢ هـ(س) + ٣ س^{٢}) = ٧$

فاوجد قيمة $\lim_{س \to -١} (٤ - ٣ هـ(س))$

الحل

نجد $\lim_{س \to -١} هـ(س)$ من المعطيات

$\lim_{س \to -١} (٢ هـ(س) + ٣ س^{٢}) = ٧$

$\lim_{س \to -١} ٢ هـ(س) + \lim_{س \to -١} ٣ س^{٢} = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} هـ(س) + ٣ (-١)^{٢} = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} هـ(س) + ٣ = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} هـ(س) = ٤$ بالقسمة على ٢

$\lim_{س \to -١} هـ(س) = ٢$

يتبع الحل

$\leftarrow$ نها $د(س) = ٢$ نعوض بها في المطلوب

$س \leftarrow -١$

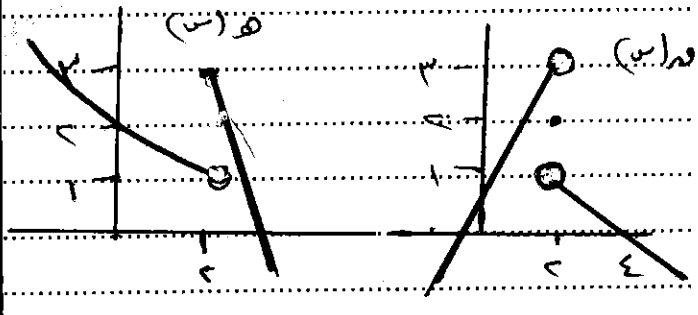
$\leftarrow$ نها $٤ - ٣$ نها $د(س) =$

$س \leftarrow -١ \quad س \leftarrow -١$

$= ٤ - ٣ \times ٢ = ٤ - ٦ = -٢$

مثال (٩)

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $د$ و $هـ$ اوجد ما يلي



١) نها $د(س)$

$س \leftarrow ٤$

الحل نها $د(س) =$ صفر

$س \leftarrow ٤$

٢) نها $هـ(س) = ٣$

$س \leftarrow ٢^+$

٣) نها $س ٤ \times هـ(س) = (٢) ٢ \times$

$س \leftarrow ٢^+$

$= ١٢$

٤) نها $د(س) \times هـ(س) =$ نها $د(س) \times$ نها $هـ(س)$

$س \leftarrow ٢ \quad س \leftarrow ٢$

$= ٣ \times ١ = ٣$

مثال (١٠)

اذا كانت نها $\sqrt{٢ب س^٢ - ٥} = ٧$

$س \leftarrow ٣$

فاوجد قيمة $ب$

$ب = ٦$ (د) $\quad ٢ب - ٨ = ٤٠٨$ (و)

الحل

نها $\sqrt{٢ب س^٢ - ٥} = \sqrt{$ نها $٢ب س^٢ - ٥} = ٧$

$س \leftarrow ٣ \quad س \leftarrow ٣$

بتربيع الطرفين

$\leftarrow$ نها $٢ب س^٢ - ٥ = ٤٩$

$س \leftarrow ٣$

$٢ب \times (٣)^٢ - ٥ = ٤٩$

$+٥ \quad +٥$

$٢ب \times ٩ = ٥٤$

$\frac{٢ب}{٩} = \frac{٥٤}{٩}$

$ب = ٦$ (د)

مثال (١١)

اذا كانت نها $٢ب س - ٤ =$ صفر

$س \leftarrow ٢$

اوجد قيمة $ب$

$ب = ٤$ (د) $\quad ٢ب - ٤ = ٤$ (و)

الحل

نعوض مباشر

$٢ب \times ٢ - ٤ =$ صفر

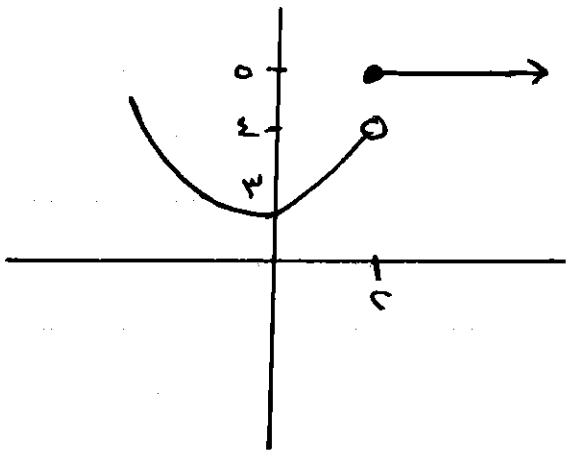
$٢ب - ٤ = ٠$

$٢ب = ٤ \leftarrow ب = \frac{٤}{٢}$

$ب = \pm ٢ \quad ب = ٢$ (د)

مثال (١٢)

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق اجب عما يأتي



① $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} س^٢ + ٤س + ٢$

$= ٢^٢ + ٤(٢) + ٢$

$= ٤ + ٨ + ٢$

$= ١٤$

② $\lim_{س \to ٢^-} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$

$= ٢ق'(٢) + ٤$

$= ٢(٤) + ٤$

$= ٨ + ٤$

$= ١٢$

③ $\lim_{س \to ٢} \sqrt{ق(س) + ٣}$

$= \sqrt{ق(٢) + ٣}$

$= \sqrt{٤ + ٣}$

$= \sqrt{٧}$

الحل

① $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) + \lim_{س \to ٢^+} (٤س + ٢)$

من الرسم $= ٥$ ، بالتعويض

$= ٥ + ٨ + ٢$

$= ١٥$

② $\lim_{س \to ٢^-} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢}$

من الرسم $= \lim_{س \to ٢^-} \frac{٣ - ٣}{س - ٢}$

$= ٢ق'(٢) - ٤$

$= ٢(٣) - ٤$

$= ٦ - ٤$

$= ٢$

③ $\lim_{س \to ٢} \sqrt{ق(س) + ٣}$

من الرسم

$= \sqrt{٥ + ٣}$

$= \sqrt{٨}$

$= ٢$

مكتبة العلم AlweSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

اذا كان الجدول التالي يبين ضم $و(س)$ عندما $س \to ٢$

اوجد $\lim_{س \to ٢^+} و(س) + ٤$

س	٢٫٣	٢٫٢	٢٫١	٢	١٫٩	١٫٨	١٫٧
ص	٢٫٤	٢٫٤	٢٫٤		٢٫٩	٢٫٨	٢٫٧

الحل

$\lim_{س \to ٢^+} و(س) + \lim_{س \to ٢^+} ٤$

من الجدول

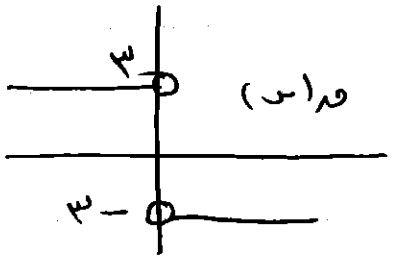
$\lim_{س \to ٢^+} و(س) = ٤$ بالتعويض

$(٤)^٢ + ٤ = ١٦ + ٤$

$= ٢٠$

مثال (١٤)

اذا كان $و(س)$ معرفاً بالشكل التالي



وكانت

$\lim_{س \to ٠} و(س) = ٤$

فاوجد $\lim_{س \to ٠^+} ١ + (و(س))^٣ + ٣ و(س)$

الحل

$\lim_{س \to ٠} و(س) = ٤ \Rightarrow \lim_{س \to ٠^+} و(س) = ٤$

من الرسمة $\lim_{س \to ٠^+} و(س) = -٣$

$\lim_{س \to ٠^+} (و(س))^٣ + ٣ و(س) + ١$

$(-٣)^٣ + ٣ \times ٢ + ١$

$١ + ٦ + ٩$

$= ١٦$

مكتبة العلم ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ① ص ٢٧

جد قيمة كل مما يأتي

١) $\lim_{س \to -١} (س^٦ - ٥س^٢ + ٤س + ٩)$

الحل

$= (-١)^٦ - ٥(-١)^٢ + ٤(-١) + ٩$

$= ١ - ٥ \times ١ - ٤ + ٩$

$= ١ - ٥ - ٤ + ٩ = ١$

٢) $\lim_{س \to -١} (٧س^٢ + ٥س)(س^٢ + س - ١٠)$

الحل:-

$= (٧(-١)^٢ + ٥ \times -١)(-١)^٢ + -١ - ١٠)$

$= (٧ - ٥)(١ - ١ - ١٠)$

$= ٢ \times -١٠ = -٢٠$

٣) $\lim_{س \to -١} (س^٢ + ٥س)^٣ = ((-١)^٢ + ٥ \times -١)^٣$

$= (١ - ٥)^٣ = (-٤)^٣ = -٦٤$

تدريب ② ص ٢٧

اذا كانت $\lim_{س \to -١} (هـ(س) + س^٣ - ٣) = ٥$

فجد قيمة $\lim_{س \to -١} ٣(هـ(س))^٢$

الحل

تجزيء العمليات

$\lim_{س \to -١} هـ(س) + \lim_{س \to -١} س^٣ - ٣ = ٥$

$\lim_{س \to -١} هـ(س) + (-١)^٣ - ٣ = ٥$

$\lim_{س \to -١} هـ(س) - ١ - ٣ = ٥$

$\lim_{س \to -١} هـ(س) - ٤ = ٥$

$+٤ \quad +٤$

$\Rightarrow \lim_{س \to -١} هـ(س) = ٩$

$\Rightarrow \lim_{س \to -١} ٣(هـ(س))^٢ = ٣(\lim_{س \to -١} هـ(س))^٢$

$= ٣(٩)^٢ = ٣ \times ٨١$

$= ٢٤٣$

مكتبة الوسام ALWESAM العلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الأول ص ٣١

اذا علمت ان $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٨$

$\lim_{س \to ٣} و(س) = -٢$ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إذا وجدت)

م) $\lim_{س \to ٣} [٤هـ(س) + ٢و(س)]$

$= ٤ \lim_{س \to ٣} هـ(س) + ٢ \lim_{س \to ٣} و(س)$

$= ٤ \times ٨ + ٢ \times -٢$

$= ٣٢ - ٤ = ٢٨$

ن) $\lim_{س \to ٣} [هـ(س) - ٢و(س)]$

$= \lim_{س \to ٣} هـ(س) - ٢ \lim_{س \to ٣} و(س)$

$= ٨ - ٢ \times -٢$

$= ٤ + ٨$

$= ١٢$

ج) $\lim_{س \to ٣} [هـ(س) \times و(س)]$

$= \lim_{س \to ٣} هـ(س) \times \lim_{س \to ٣} و(س) = ٨ \times -٢$

$= -١٦$

د) $\lim_{س \to ٣} ٥هـ(س) = ٥ \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٥ \times ٨ = ٤٠$

هـ) $\lim_{س \to ٣} [٢و(س) + ١]$

$= ٢ \lim_{س \to ٣} و(س) + \lim_{س \to ٣} ١$

$= ٢ \times ٨ + ١ = ١٦ + ١ = ١٧$

و) $\lim_{س \to ٣} [(هـ(س))^٣ + ٣س - ٧]$

$= [\lim_{س \to ٣} هـ(س)]^٣ + \lim_{س \to ٣} ٣س - ٧$

$= (-٢)^٣ + (٩ - ٧) = -٨ + ٢$

$= -٦$

ز) $\lim_{س \to ٢} [٢هـ(س) + ٣و(س) + ٤س^٢]$

$= ٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س) + ٣ \lim_{س \to ٣} و(س) + ٤ \lim_{س \to ٣} س^٢$

$= ٢ \times ٨ + ٣ \times -٢ + ٤(٣^٢)$

$= ١٦ - ٦ + ٣٦ = ٤٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص٣١

أوجد قيمة كل مما يأتي

أ) $\lim_{س \to -٢} (٣س^٤ - ٥س^٣ + ٦س - ٧)$

$= ٣(-٢)^٤ - ٥(-٢)^٣ + ٦(-٢) - ٧$

$= ٣ \times ١٦ - ٥ \times -٨ - ١٢ - ٧$

$= ٤٨ + ٤٠ - ١٢ - ٧ = ٦٩$

ب) $\lim_{س \to ١} (س^٢ + ١)(س^٣ + ٥س - ٢)$

$= (١^٢ + ١)(١^٣ + ٥ \times ١ - ٢)$

$= ٢ \times (٦-) = ٤ \times ٢ = ٨$

جـ) $\lim_{س \to -١} (س^٣ + ٢)^٥$

$= ((-١)^٣ + ٢)^٥$

$= (-١ + ٢)^٥ = ١^٥ = ١$

السؤال الثالث ص٣١

اذا كانت $\lim_{س \to -٢} (٣هـ(س) + جـ(س) + ١) = ٢٧$

فجد $\lim_{س \to -٢} (هـ(س))^٣$

الحل

$٣ \lim_{س \to -٢} هـ(س) + \lim_{س \to -٢} جـ(س) + ١ = ٢٧$

$٣ \lim_{س \to -٢} هـ(س) + -٤ + ١ = ٢٧$

$٣ \lim_{س \to -٢} هـ(س) - ٣ = ٢٧$

$٣ \lim_{س \to -٢} هـ(س) = ٣٠$

$\lim_{س \to -٢} هـ(س) = ١٠$

المطلوب $\lim_{س \to -٢} (هـ(س))^٣ = (١٠)^٣ = ١٠٠٠$

السؤال الرابع ص٣١

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} (م س^٢ + ٥س + ١) = ٢٥$

فما قيمة الثابت م

الحل

نعوض مباشر

$م(٣)^٢ + ٥ \times ٣ + ١ = ٢٥$

$٩م + ١٦ = ٢٥$

$٩م = ٩$

$م = ١$

مكتبة الوسام NEW ISLAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠٠٨) الدورة الصيفية

① اذا كان ل عددًا ثابتًا وكانت
$\lim_{س \to ٢} (س + ل) = ٦$ فما قيمة
الثابت ل ؟

أ) ٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٣

الحل

$٢ + ل = ٦ \Leftarrow ل = ٤$

ج

② $\lim_{س \to -١} (س^٣ - ٢)^٢$ تساوي

أ) -٦ ب) -٣ ج) ١ د) ٩

الحل تعويض مباشر

$(-١)^٣ - ٢)^٢ = (-١ - ٢)^٢$

$= (-٣)^٢ = ٩$

د

وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كانت $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٥} ل(س) = -١$ فان

$\lim_{س \to ٥} (هـ(س) + ل(س))$ تساوي

أ) ٢ ب) ٤ ج) -٢ د) -٤

الحل

$\lim_{س \to ٥} هـ(س) + ل(س)$

$= \lim_{س \to ٥} هـ(س) + \lim_{س \to ٥} ل(س)$

$= ٣ + -١ = ٢$

أ

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٩)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٥$ فاوجد

$\lim_{س \to ٢} (٦س هـ(س) + ٣)$

الحل

$= \lim_{س \to ٢} ٦س \times \lim_{س \to ٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٢} ٣$

$= ٦ \times ٢ \times ٥ + ٣$

$= ٦٠ + ٣ = ٦٣$

② وزارة (٢٠١٠)

اذا علمت ان $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤$

فإن $\lim_{س \to ٢} (س هـ(س) - ٣)$ تساوي

أ) ١ ب) ٢ ج) ٥ د) ١٣

الحل

$\lim_{س \to ٢} س هـ(س) - ٣ = \lim_{س \to ٢} س \times \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$- \lim_{س \to ٢} ٣$

$= ٢ \times ٤ - ٣ = ٨ - ٣ = ٥$

(ج)

③ وزارة (٢٠١٠)

اذا كانت $\lim_{س \to ٦} هـ(س) = ٤$ وكانت

$\lim_{س \to ٦} هـ(س) = ٣$ فإن قيمة

$\lim_{س \to ٦} (٣ هـ(س) + هـ(س))$

أ) ٤ ب) ١٢ ج) ٧ د) ١٥

الحل

$\lim_{س \to ٦} (٣ هـ(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to ٦} ٣ هـ(س) + \lim_{س \to ٦} هـ(س)$

$= ٣ \times ٤ + ٣ = ١٢ + ٣ = ١٥$

(د)

④ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$ فاوجد

$\lim_{س \to ٣} س هـ(س)$

أ) ٧ ب) ٩ ج) ١٢ د) ١٦

الحل

$\lim_{س \to ٣} س هـ(س) = \lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٣ \times ٤ = ١٢$

(ج)

⑤ وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان $هـ(س)$ كثير حدود، وكانت $\lim_{س \to ٣} \frac{هـ(س) - ٥}{س - ٣} = ٢$ فاوجد $\lim_{س \to ٣} \sqrt{٢ هـ(س)}$

الحل

من المعطيات ⇐

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) - \lim_{س \to ٣} ٥ = ٢$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) - ٥ = ٢$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٢ + ٥ + ٠ = ٧$

$= \sqrt{٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س)} = \sqrt{٢ \times ٨}$

$= \sqrt{١٦} = ٤$

⑥ وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٢$ وكانت

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ١$ فاوجد

$\lim_{س \to ٣} س هـ(س) + هـ^{٢}(س)$

$= ٣ \times ٢ + ١ = ٧$ (أ)

الحل

$\lim_{س \to ٣} س هـ(س) + هـ^{٢}(س)$

$س \to ٣$

$= \lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} هـ(س) + \lim_{س \to ٣} هـ^{٢}(س)$

$= ٣ \times ٢ + ١^{٢}$

$= ٦ + ١ = ٧$ (أ)

⑦ وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كانت $\lim_{س \to -١} (ل س^{٢} + ٣) = ٧$

فاوجد قيمة الثابت ل

أ) ٤ ب) -٤ ج) ١٠ د) -١٠

الحل

المحصلة صفر

$ل \times (-١)^{٢} + ٣ = ٧$

$ل \times ١ + ٣ = ٧$

$ل + ٣ = ٧$

$ل = ٧ - ٣$

$ل = ٤$ (أ)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كانت $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٤$ و $\lim_{س \to ٥} و(س) = -٣$

فان $\lim_{س \to ٥} (هـ(س) - و(س))$

أ) ٧ ب) ١ ج) ٥ د) -٥

(أ)

وزارة (٢٠١٣) شتوية

④ اذا كانت $\text{هـا}\,\text{هـ}(س) = ٧$ $\quad س \to -٢$

$\text{هـا}\,\text{هـ}(س) = -٣$ فاوجد $\quad س \to -٢$

$\text{هـا}\,(٢\,\text{هـ}(س) + (\text{هـ}(س))^{٢} - س)$ $\quad س \to -٢$

الحل

$= ٢\,\text{هـا}\,\text{هـ}(س) + (\text{هـا}\,\text{هـ}(س))^{٢} - \text{هـا}\,س$ $\quad س \to -٢$

$= ٢ \times ٧ + (-٣)^{٢} - -٢$

$= ١٤ + ٩ + ٢ = ٢٥$

⑧

وزارة (٢٠١٣) صيفية

① اذا كان $ك$ عددًا ثابتًا وكانت

$\text{هـا}\,(٨س + ٢ك) = ٦$ $\quad س \to ١$

فاوجد قيمة $ك$

ب) -١ ج) ١ د) ٦

الحل

$٨ \times ١ + ٢ك = ٦$

$٨ + ٢ك = ٦$

$-٨ \quad -٨$

$٢ك = -٢$ على ٢

$ك = -١$ ب

وزارة (٢٠١٣) شتوية

④ اذا كانت $\text{هـا}\,\text{هـ}(س) = -٦$ $\quad س \to ٥$

$\text{هـا}\,\text{هـ}(س) = ٤$ فاوجد $\quad س \to ٥$

$\text{هـا}\,(\text{وَ}(س) - ٢\,\text{هـ}(س) - س)$ $\quad س \to ٥$

الحل

توزيع النهاية

$(\text{هـا}\,\text{وَ}(س))^{٢} - ٢\,\text{هـا}\,\text{هـ}(س) - \text{هـا}\,س$

$س \to ٥ \quad س \to ٥ \quad س \to ٥$

$= (-٦)^{٢} - ٢ \times ٤ - ٥$

$= ٣٦ - ٨ - ٥ = ١٣$

وزارة ٥ (٢٠١٤) شتوية

اذا كانت $\text{هـا}\,\text{وَ}(س) = -٦$ $\quad س \to ٢$

$\text{هـا}\,\text{هـ}(س) = ٤$ فاوجد $\quad س \to ٢$

$\text{هـا}\,(\text{وَ}(س) + (\text{هـ}(س) + ١) - ٣س)$ $\quad س \to ٢$

الحل

$\text{هـا}\,\text{وَ}(س) + (\text{هـا}\,\text{هـ}(س) + \text{هـا}\,١) - \text{هـا}\,٣س$

$س \to ٢ \quad س \to ٢ \quad س \to ٢ \quad س \to ٢$

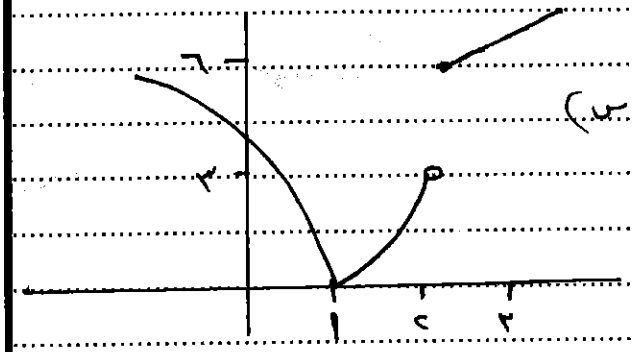
$= (-٦ + (٤ + ١) - ٣ \times ٢)$

$= -٦ + ٥ - ٦ = ١٣$

(١٠) وزارة (٢٠١٤) صيفية

(١١) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة f حيث $f(x)$ المعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية

اوجد $\lim_{x \to 1} \left((f(x) - 4)^2 + \frac{5x - 3}{3} \right)$



الحل

من الرسمة $\lim_{x \to 1} f(x) =$ صفر

نجد المطلوب

$= (\lim_{x \to 1} f(x) - 4)^2 + \frac{\lim_{x \to 1} 5x - 3}{2}$

$= (0 - 4)^2 + \frac{1 \times 5 - 3}{2}$

$= (-4)^2 + \frac{5-3}{2} = 16 + \frac{2}{2}$

$= 16 + 1 = 17$

(١٢) اذا كانت $\lim_{x \to 3} h(x) = -8$

فما $h(3) = 4$ فاوجد

فما $\lim_{x \to 3} \left(\frac{f(x)}{h(x)} - (h(x))^2 + 5x \right)$

الحل

$= \frac{\lim_{x \to 3} f(x)}{\lim_{x \to 3} h(x)} - (\lim_{x \to 3} h(x))^2 + \lim_{x \to 3} 5x$

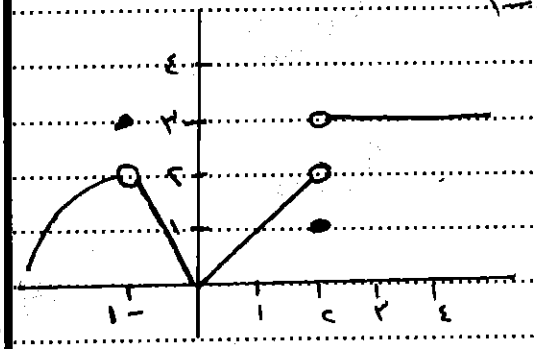
$= \frac{-8}{4} - (4)^2 + 3 \times 5$

$= -2 - 16 + 15 = -3$

(١١) وزارة (٢٠١٥) شتوية

(أ) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س)$ أوجد

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow -١} \left(ق(س) - \frac{١}{٤}(س - ٧)^{٢} \right)$$



الحل

من الرسمة $\text{نهـا}_{س \leftarrow -١} ق(س) = ٢$

نجد المطلوب

$$\left(\text{نهـا}_{س \leftarrow -١} ق(س) \right) - \text{نهـا}_{س \leftarrow -١} \frac{١}{٤}(س - ٧)^{٢}$$

$$= ٢^{٢} - \frac{١}{٤}(-١ - ٧)^{٢}$$

$$= ٤ - \frac{١}{٤} \times ٨^{٢}$$

$$= ٤ + ٢ = ٦$$

(ب) اذا كانت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} ق(س) = ٤$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س) = -٨$ فأوجد

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \left(\sqrt{٢ ق(س) - هـ(س) + س هـ(س)} \right)$$

الحل

نوزع النهاية

$$\sqrt{\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} ٢ ق(س) - \text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س) + \text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} س \times \text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س)}$$

$$= \sqrt{٢ \times ٤ - ٨ + ٣ \times -٨}$$

$$= \sqrt{٨ + ٨ - ٢٤} = \sqrt{١٦ - ٢٤}$$

$$= \sqrt{-٢٠}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(١٢) وزارة (١٥، ٢٠٠٥) صيفية

اذا كانت هـا (ق(س) − ٣) / (س − ٢) = ٢
س ← ٢

هـا هـ(س) = ٦ اجب عن ما يأتي

أ) جد هـا (س^٢ ق(س) − ٣ هـ(س) + ٥)
س ← ٢

ب) جد قيمة الثابت م التي تجعل

هـا (ق(س) − م) / هـ(س) = ١
س ← ٢

الحل

نجرب المعطيات

هـا (ق(س) − ٣) / (س − ٢) = ٢
س ← ٢

٣ + ٣ = ٦

هـا ق(س) = ٥
س ← ٢

نعوضها في المطلوب

هـا س^٢ ق(س) − ٣ هـ(س) + ٥
س ← ٢

= هـا س^٢ × هـا ق(س) − ٣ هـا هـ(س) + هـا ٥
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

= ٤ × ٥ − ٣ × ٦^٢ + ٥ = ٢٠ − ١٠٨ + ٥ = −٨٣

(٤) هـا (ق(س) − م^٢) / هـ(س) = ١
س ← ٢

٥ − م^٢ / ٦ = ١ ← ضرب بادي

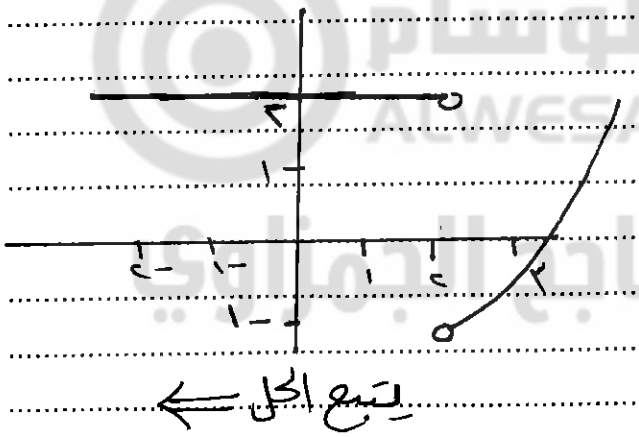
٥ − م^٢ = ٦ ← م^٢ = −١

م = ١

(١٣) وزارة (١٦، ٢٠٠٦) شتوية

(١) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقترانين ق(س) , هـ(س) اطرح على مجموعة الاعداد الحقيقية

اوجد هـا (٣√(٤ ق(س)) + ١/٤ س^٣)
س ← ٢



يتبع الحل ←

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

الحل

من الرسمة نها ق(س) = ٢
س ← -٢

نجد المطلوب

= نها ($\sqrt[٣]{٤ ق(س)}$ + $\frac{١}{٤}$ $س^{٣}$)
س ← -٢

= $\sqrt[٣]{٤ \text{ نها } ق(س) + \text{ نها } \frac{١}{٤} س^{٣}}$
س ← -٢ ، س ← -٢

= $\sqrt[٣]{٤ \times ٢ + \frac{١}{٤} \times (-٢)^{٣}}$

= $\sqrt[٣]{٨ + \frac{١}{٤} \times -٨}$ = $\sqrt[٣]{٨ - ٢}$ = $\sqrt[٣]{٦}$ = صفر

(٢) اذا كان ق(س) ، ه(س) كثيري حدود وكانت
نها ق(س) = ١٢ ، نها س ه(س) = ١٠
س ← ٢ ، س ← ٢

اوجد ما يلي

(١) جد نها ($\frac{ق(س)}{س - ٢}$ + ٨ ه(س))
س ← ٢

(٢) جد قيمة الثابت م التي تجعل
نها (م (ه(س))^{٢} - ٦ ق(س)) = ٢٨
س ← ٢

الحل

نجهز المطلوب

نها س ه(س) = ١٠
س ← ٢

⇐ نها س × نها ه(س) = ١٠
س ← ٢ ، س ← ٢

٢ × نها ه(س) = ١٠
س ← ٢ ، ٤

نها ه(س) = ٥ نعوضها في المطلوب
س ← ٢

(١) $\frac{\text{نها ق(س)}}{\text{نها س}^{٢}}$ + ٨ نها ه(س)
س ← ٢ ، س ← ٢

= $\frac{١٢}{٤}$ + ٨ × ٥

= ٣ + ٤٠ = ٤٣

(٢) م (نها ه(س))^{٢} - ٦ نها ق(س) = ٢٨
س ← ٢ ، س ← ٢

م × ٥^{٢} - ٦ × ١٢ = ٢٨

٢٥ م - ٧٢ = ٢٨

٢٥ م = ٢٨ + ٧٢

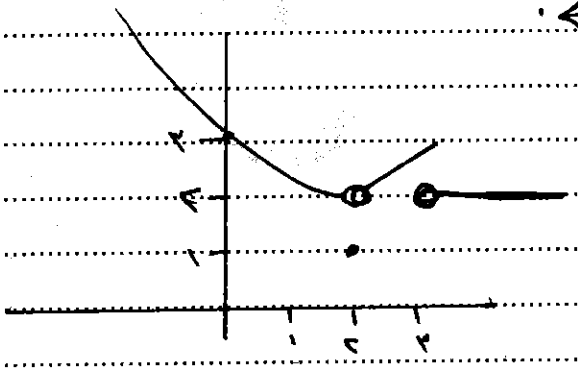
٢٥ م = ١٠٠

م = ٤

(١٤) وزارة (٢٠١٦) صيفية

(١) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س)$ المعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية أوجد

$$\text{نهـا}_{س \to ٠}\left(٢ ق(س) - \frac{٤س - ٨}{٢}\right)$$



الحل

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} ق(س) = ٣$$

نجد المطلوب

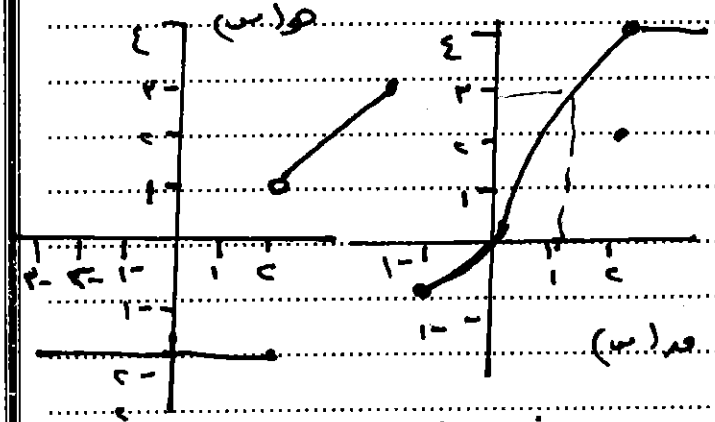
$$٢ \text{نهـا}_{س \to ٠} ق(س) - \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٤س - ٨}{٢}$$

$$= ٢ \times ٣ - \frac{٤ \times ٠ - ٨}{٢} = ٦ - \frac{-٨}{٢}$$

$$= ٦ + ٤ = ١٠$$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

اعتماداً على الشكل الآتي الذي يمثل منحنيي الدقترانين $ق$، $هـ$ اجب عما يأتي:



١) جد $\text{نهـا}_{س \to ١} (٥ ق(س) - هـ(س) + ٦ س)$

الحل:

$$٥ \text{نهـا}_{س \to ١} ق(س) - \text{نهـا}_{س \to ١} هـ(س) + \text{نهـا}_{س \to ١} ٦ س$$

$$= ٥ \times ٣ - (-٢) + ٦ \times ١$$

$$= ١٥ + ٤ + ٦ = ١٧$$

٢) $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{٣ ق(س)}{هـ(س) + ٤}$

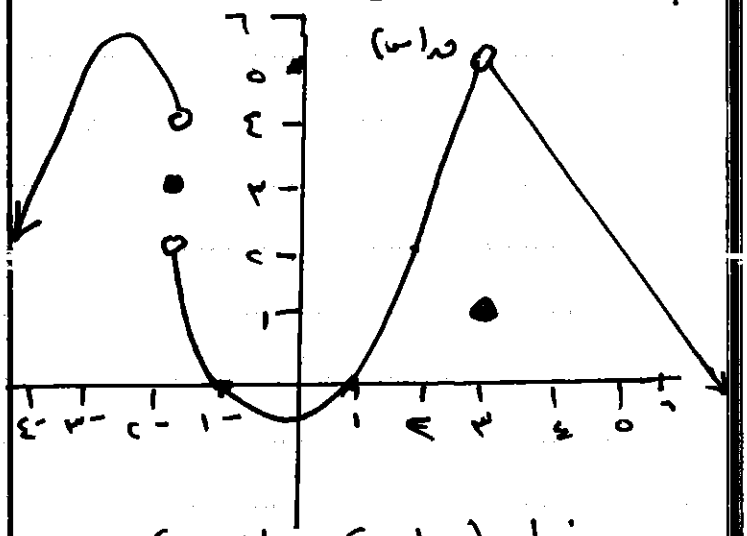
$$= \frac{٣ \text{نهـا}_{س \to ١} ق(س)}{\text{نهـا}_{س \to ١} هـ(س) + ٤} = \frac{٣ \times ٤}{١ + ٤}$$

$$= \frac{١٢}{٥} = ٢\frac{٢}{٥}$$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س)$ المعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية ح جد كلاً مما يأتي



١) $\lim_{س \to -٢} (ق(س) + ٣س)$

$= ق(-٢) + ٣(-٢)$

$= ٤ - ٦ = -٢$

٢) $\lim_{س \to ٣} |ق(س)|$

$= |٥| = ٥$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

اذا كان $هـ(س)$ كثيرة حدود

فما $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س) + ٩س}{٢هـ(س) - ٦} = ٦$ ، $هـ(١) = ٣$

جد خيمة $هـ(١)$

الحل

$$\frac{\lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} ٩س}{\lim_{س \to ١} ٢هـ(س) - \lim_{س \to ١} ٦} = ٦$$

لأن $هـ(س)$ كثيرة حدود فإن $\lim_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١) = ٣$

$$\frac{٣ + ١ \times ٩}{٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) - ٦} = \frac{٦}{١}$$ ضرب بتبادلي

$$١٢ = ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) - ٦$$

$$٣٦ + ٦ = ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س)$$

$$\lim_{س \to ١} هـ(س) = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$$

$هـ(١) = ٤$ ✓

لأن $هـ(س)$ كثيرة حدود

النهاية = الصورة = ٥

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٦$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٧$ فجد

$\lim_{س \to ٢} (٣هـ(س) - هـ(س) + س^{٢} هـ(س))$

الحل

$٣ \lim_{س \to ٢} هـ(س) - \lim_{س \to ٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٢} س^{٢} هـ(س)$

$٣ \times ٦ - ٧ + ٤ \times ٧$

$١٨ - ٧ + ٢٨ = ٣٩$

وزارة (٢٠١٨) شتوية (قديم)

اذا كانت $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٥$

$\lim_{س \to ٥} هـ(س) = -١٠$

فجد $\lim_{س \to ٥} (\sqrt{هـ(س)^{٢} - ٢هـ(س) + س هـ(س)})$

الحل

$\sqrt{\lim_{س \to ٥} هـ(س)^{٢} - ٢ \lim_{س \to ٥} هـ(س) + \lim_{س \to ٥} س \times \lim_{س \to ٥} هـ(س)}$

$= \sqrt{(-١٠)^{٢} - ٢(-١٠) + ٥ \times -١٠}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٢٠ - ٥٠}$

$= \sqrt{٧٠ - ٥٠}$

$= \sqrt{٢٥}$

$= ٥ = -(-١٠)$

مكتبة الوسام ALWESAM
الهلام ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفية

① اذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ١٢$ فان $\lim_{س \to ٣} (هـ(س))^{٢}$ تساوي

أ) ٤ ب) ١٤٤ ج) ٣٦ د) ١٠

الحل

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = \frac{١٢}{٢}$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٦$

$\Leftarrow (\lim_{س \to ٣} هـ(س))^{٢} = (٦)^{٢}$

$= ٣٦$

الاجابة (ج)

② اذا كان هـ دالة كثيرة حدود وكان هـ(٢) = ٣ ، ل(٢) = ٨ فجد $\lim_{س \to ٢} (٥ هـ(س) + \sqrt[٣]{ل(س)} - س^{٢})$

الحل

لأن ل ، هـ كثيرة حدود

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ل(س) = ل(٢) = ٨$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢) = ٣$

$٥ \lim_{س \to ٢} هـ(س) + \sqrt[٣]{\lim_{س \to ٢} ل(س)} - \lim_{س \to ٢} س^{٢}$

$٣ \times ٥ + \sqrt[٣]{٨} - ٤$

$١٥ + ٢ - ٤$

$١٧ - ٤ = ١٣$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

نهاية الأقترانات المتشعبة

صيغة

الصورة العامة للأقتران المتشعب

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \text{ه}(س) & س \leq ب \\ \text{ل}(س) & س > ب \end{cases}$$

أو

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \text{ه}(س) & س \neq ب \\ \text{ل}(س) & س = ب \end{cases}$$

مثال ①

إذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٢} & س \leq ١ \\ ٣س + ١ & س > ١ \end{cases}$

أوجد

$\text{ق}(٠) = ٠ \times ٣ + ١ = ١$

نعوض في القاعدة الثانية لأن الصفر عدد أقل من ١

$\text{ق}(٣) = (٣)^{٢} = ٩$

نعوض في القاعدة الأولى لأن العدد ٣ أكبر من العدد ١

مثال ②

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٣س + ١ & س \neq ٥ \\ ٩ & س = ٥ \end{cases}$$

أوجد $\text{ق}(٢) = ٢ \times ٣ + ١ = ٧$

$\text{ق}(٣) = ٣ \times ٣ + ١ = ١٠$

$\text{ق}(٥) = ٩$

ملاحظة

لرسم الأقتران المتشعب نرسم كل قاعدة على حدة

مثال

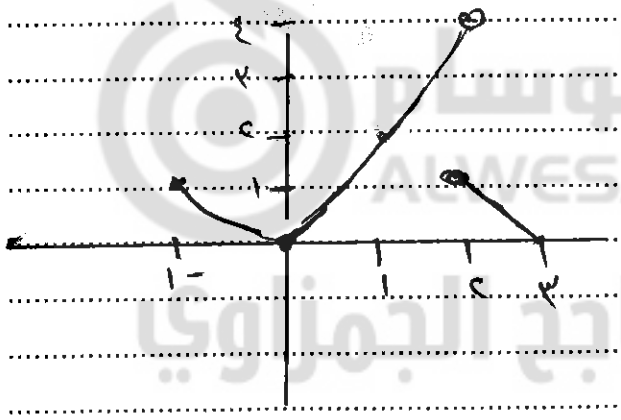
$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & س < ٢ \\ ٣ - س & ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

القاعدة الأولى

س	-١	٠	١	٢
ق(س)	٠	-١	٠	٣

القاعدة الثانية

س	٢	٣
ق(س)	١	٠



مكتبة الهدف AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

ملاحظة :

① اذا كان $\text{مد}(س) = \begin{cases} \text{قاعدة ①} & س \leq p \\ \text{قاعدة ②} & س > p \end{cases}$

لإيجاد النهاية للاقترانين مد(س) فاننا نعوض قيم س في القاعدة التي تنتمي اليها س :

واذا كانت س نقطة تشعب مثل (p) فاننا نجد النهاية من اليمين ومن اليسار حول العدد p كما يلي

① $\text{نها}_{س \to p^-} \text{مد}(س)$: نعوض في القاعدة ① $س \leq p$

② $\text{نها}_{س \to p^+} \text{مد}(س)$: نعوض في القاعدة ② $س > p$

واذا كانت

$\text{نها}_{س \to p^-} \text{مد}(س) = \text{نها}_{س \to p^+} \text{مد}(س)$

فان النهاية موجودة

② اذا كان $\text{مد}(س) = \begin{cases} \text{قاعدة ①} & س \neq p \\ \text{قاعدة ②} & س = p \end{cases}$

فاننا نجد نهاية اي عدد فاننا نعوض في القاعدة الأولى $س \neq p$ ولا نجد النهاية من اليمين واليسار فقط $\text{نها}_{س \to p} \text{مد}(س)$

مثال ①

$\text{مد}(س) = \begin{cases} س - ١ & س \leq ٤ \\ ٣س - ٩ & س > ٤ \end{cases}$

اوجد

١) $\text{نها}_{س \to ٢} \text{مد}(س)$ = نعوض في القاعدة ①

$= ٢ - ١ = ١$

٢) $\text{نها}_{س \to ٥} \text{مد}(س)$ = نعوض في القاعدة ②

$= ٣ \times ٥ - ٩ = ١٥ - ٩ = ٦$

③ $\text{نها}_{س \to ٤} \text{مد}(س)$ (العدد ٤ نقطة تشعب) نجد النهاية من اليمين واليسار

$\text{نها}_{س \to ٤^+} \text{مد}(س)$ = في القاعدة الثانية

$= ٣ \times ٤ - ٩ = ١٢ - ٩ = ٣$

$\text{نها}_{س \to ٤^-} \text{مد}(س)$ = في القاعدة الأولى

$= ٤ - ١ = ٣$

$\text{نها}_{س \to ٤^+} \text{مد}(س) = \text{نها}_{س \to ٤^-} \text{مد}(س) \Leftarrow \text{نها}_{س \to ٤} \text{مد}(س) = ٣$

مثال ②

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & س \neq 3 \\ 6 & س = 3 \end{cases}$$

اوجد

١) $\text{نها}_{س \to 3} \text{ق}(س) = 3^2 + 1 = 10$

٢) $\text{نها}_{س \to 4} \text{ق}(س) = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

٣) $\text{نها}_{س \to -2} \text{ق}(س) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

٤) $\text{ق}(3) = 6$

مثال ③

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 & س \geq 2 \\ 4س & س < 2 \end{cases}$$

اوجد

١) $\text{نها}_{س \to -2} \text{ق}(س) = (-2)^2 = 4$

٢) $\text{نها}_{س \to 3} \text{ق}(س) = \text{نها}_{س \to 3} 4س = 4 \times 3 = 12$

٣) $\text{نها}_{س \to 2} \text{ق}(س)$ عند النهاية من اليمين واليسار

$\text{نها}_{س \to 2} \text{ق}(س) = \text{نها}_{س \to 2^+} 4س = 4 \times 2 = 8$

$\text{نها}_{س \to 2} \text{ق}(س) = \text{نها}_{س \to 2^-} س^2 = 2^2 = 4$

$\text{نها}_{س \to 2} \text{ق}(س)$ غير موجودة لان $\text{نها}_{س \to 2^+} \text{ق}(س) \neq \text{نها}_{س \to 2^-} \text{ق}(س)$

مثال ④

$$\text{اذا كان ق}(س) = \begin{cases} 5س^2 - ل & س \leq 2 \\ ل س + 2 & س > 2 \end{cases}$$

وكانت $\text{نها}_{س \to 2} \text{ق}(س)$ موجودة فما قيمة الثابت ل ؟

الحل

حتى تكون النهاية موجودة عند $س \to 2$ يجب ان تكون

$\text{نها}_{س \to 2^+} \text{ق}(س) = \text{نها}_{س \to 2^-} \text{ق}(س)$

$\text{نها}_{س \to 2^+} (5س^2 - ل) = \text{نها}_{س \to 2^-} (ل س + 2)$

$5 \times 2^2 - ل = ل \times 2 + 2$

$20 - ل = 2ل + 2$

$20 - 2 = 2ل + ل$

$18 = 3ل \Leftarrow ل = \frac{18}{3} = 6$

مثال ⑤

$$م(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ٥ & س \leq ٣ \\ ١٧ & ٣ \leq س \leq ٦ \\ ٣س - ١ & س > ٦ \end{cases}$$

ما قيمة

أ) $\lim_{س \to ٣} م(س)$

النقطة ٣ نقطة تُبحث عندها النهاية من اليمين ومن اليسار

$$\lim_{س \to ٣^+} م(س) = \lim_{س \to ٣^+} ١٧ = ١٧$$

$$\lim_{س \to ٣^-} م(س) = \lim_{س \to ٣^-} ٢س^{٢} + ٥$$

$$= ٢(٣)^{٢} + ٥ = ٢ \times ٩ + ٥$$

$$= ١٨ + ٥ = ٢٣$$

$$\lim_{س \to ٣^+} م(س) \neq \lim_{س \to ٣^-} م(س)$$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} م(س)$ غير موجودة

ب) $\lim_{س \to ٦} م(س)$ العدد ٦ نقطة تُبحث عند النهاية من اليمين واليسار

$$\lim_{س \to ٦^+} م(س) = \lim_{س \to ٦^+} ٣س - ١$$

$$= ٣ \times ٦ - ١ = ١٨ - ١ = ١٧$$

$$\lim_{س \to ٦^-} م(س) = \lim_{س \to ٦^-} ١٧ = ١٧$$

$$\lim_{س \to ٦^+} م(س) = \lim_{س \to ٦^-} م(س)$$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٦} م(س) = ١٧$

د) $م(٣) = ١٧$

مثال ⑥

$$م(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س & س \leq ١ \\ ٣س + ب & س > ١ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ١} م(س) = ٥$ أوجد ٢، ب

① $\lim_{س \to ١^+} م(س) = ٥$

$\lim_{س \to ١^-} س^{٢} - ٢س = ٥$

$(١)^{٢} - ٢ \times ١ = ٥$

$١ - ٢ = ٥$

$٢ = ١ - ٥$

$٢ = -٤$

تابع الحل $\Leftarrow$

② $\text{لها}_{س \to 1} ق(س) = 5$

$\text{لها}_{س \to 1} (3س + ب) = 5$

$3 \times 1 + ب = 5$

$3 + ب = 5 \Leftarrow ب = 5 - 3$

$ب = 2$

مثال ⑦

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 1 - أ^2 & س < 2 \\ أس - 3 & س \geq 2 \end{cases}$

وكانت $\text{لها}_{س \to أ} ق(س)$ موجودة فأوجد

قيمة الثابت أ ؟

الحل

$\text{لها}_{س \to أ} ق(س)$ موجودة

$س \to أ$

$\text{لها}_{س \to أ^+} ق(س) = \text{لها}_{س \to أ^-} ق(س)$

$\text{لها}_{س \to أ^+} (أس - 3) = \text{لها}_{س \to أ^-} (1 - أ^2)$

$أ^2 - 3 = 1 - أ^2$

$2أ^2 - 3 - 1 = 0$

$2أ^2 - 4 = 0$ تحلل

$(أ - 2)(أ + 1) = 0$

$أ = 2 \quad أ = -1$

$أ \in \{2, -1\}$

مثال ⑧

$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & س < 2 \\ 5 & س = 2 \\ \sqrt{س + 7} & س > 2 \end{cases}$

اوجد $\text{لها}_{س \to 2} ق(س)$

$س \to 2$

الحل

العدد 2 نقطة تشعب

① $\text{لها}_{س \to 2} ق(س) = \text{لها}_{س \to 2^+} \sqrt{س + 7}$

$= \sqrt{ن + 7} = \sqrt{9} = 3$

② $\text{لها}_{س \to 2} ق(س) = \text{لها}_{س \to 2^-} س^2 - 1 = 4 - 1$

$= 3$

$\Leftarrow \text{لها}_{س \to 2} ق(س) = \text{لها}_{س \to 2^+} ق(س)$

$س \to 2^+ \quad س \to 2^-$

$\Leftarrow \text{لها}_{س \to 2} ق(س) = 3$

$س \to 2$

تدريبات وأسئلة الكتاب

تدريب ③ ص ٢٩

١) اذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \neq 3 \\ 4س - 2 & ، س \geq 3 \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

أ) $\text{ق}(2) = 2^2 + 1 = 5$

ب) $\lim_{س \to 1} \text{ق}(س) = 1^2 + 1 = 2$

ج) $\lim_{س \to 4} \text{ق}(س) = 4 \times 4 - 2$
$= 16 - 2 = 14$

د) $\lim_{س \to 3} \text{ق}(س)$

الحل

$\lim_{س \to 3^+} \text{ق}(س) = 4 \times 3 - 2 = 10$

$\lim_{س \to 3^-} \text{ق}(س) = 3^2 + 1 = 10$

$\Leftarrow \lim_{س \to 3} \text{ق}(س) = 10$

٢) اذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} س + 6 & س \in ص \\ 4س + 1 & س \notin ص \end{cases}$

حيث ص = مجموعة الاعداد الصحيحة

فجد $\lim_{س \to 3} \text{ق}(س)$ (إن وجدت)

الحل

$\lim_{س \to 3} \text{ق}(س) = 4 \times 3 + 1$

$= 13$

تدريب ④ ص ٣٠

① اذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} 5س - 9 & ، س < 1 \\ ب س^2 + 7 & ، س > 1 \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to 1} \text{ق}(س) = 16$

$\lim_{س \to 1} \text{ق}(س)$ موجود فما

قيمة الثابتين ب ، ؟

← يتبع الحل

مكتبة السلام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل

بما ان $\text{نها}_{س \to ٣} ق(س) = ١٦$ فان $س \to ٣$ القاعدة الثابتة

$ن(٣)^{٢} + ٧ = ١٦$

$٩ن + ٧ = ١٦ \Leftarrow ٩ن = ٩ \Leftarrow ن = \frac{٩}{٩}$

$\boxed{ن = ١}$

$\text{نها}_{س \to ١} ق(س)$ موجودة تعني

$س \to ١$

أن

$\text{نها}_{س \to ١^{+}} ق(س) = \text{نها}_{س \to ١^{-}} ق(س)$

$١ \times ٥ - ١ = ٧ + (١) \times ١$

$٥ - ١ = ٨$

$٥ - ٥ = ٨ - ٨$

$٣ = ٣$

$\Leftarrow ٣ = ٣$

② اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س^{٣} & س < ٢ \\ ٤٠ & س \geq ٢ \end{cases}$

وكانت $\text{نها}_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

$س \to ٢$

فما قيمة الثابت ٢ ؟

الحل

$\text{نها}_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

$س \to ٢$

$\Leftarrow$

$\text{نها}_{س \to ٢^{+}} ق(س) = \text{نها}_{س \to ٢^{-}} ق(س)$

$٥(٢)^{٣} = ٤٠$

$\frac{٤٠}{٥} = \frac{٥ ٢^{٣}}{٥}$

$٢^{٣} = ٨$ باخذ الجذر التكعيبي

$\sqrt[٣]{٢^{٣}} = \sqrt[٣]{٨}$

$٢ = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس ص٣١

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & س \leq ٠ \\ ٥ - س^٢ & س > ٠ \end{cases}$

جد قيمة

أ) $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٥ - (١)^٢ = ٥ - ١ = ٤$

ب) $\lim_{س \to -٢} هـ(س) = ٤ \times -٢ + ١ = -٨ + ١ = -٧$

ج) $\lim_{س \to ٠} هـ(س)$

الكل

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = ٥ - (٠)^٢ = ٥$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = ٤ \times ٠ + ١ = ١$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س)$ غير موجودة

السؤال السادس ص٣٢

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س \neq ٣ \\ ٨ & س = ٣ \end{cases}$

جد قيمة كل مما يأتي

أ) $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٥^٢ + ١ = ٢٦$

ب) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٣^٢ + ١ = ٩ + ١ = ١٠$

ج) $هـ(٣) = ٨$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السابع ص٣٢

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ ، & س < ٢ \\ ٥س^٢ + ٩ ، & س \geq ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ موجودة فما قيمة الثابت ٩ ؟

الحل

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ موجودة $\Leftarrow$

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} هـ(س)$

$٥(٢)^٢ + ٩ = ٢ \times ٩ + ٤$

$٢٠ + ٩ = ١٨ + ٤$

$٩ - ٩ \quad \quad ٢٠ - ٤$

$٩ = ١٦$

السؤال الثامن ص٣٢

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ ، & س < ٢ \\ ٥س ، & ٢ \leq س \leq ٦ \\ س^٢ - ٦ ، & س > ٦ \end{cases}$

جد قيمة كل من النهايات الآتية

أ) $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = ٠^٢ + ١ = ١$

ب) $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ نقطة تشعب

الحل

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٥ \times ٢ = ١٠$

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٢^٢ + ١ = ٥$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة

ج) $\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٥ \times ٤ = ٢٠$

د) $\lim_{س \to ٦} هـ(س)$ نقطة تشعب

الحل

$\lim_{س \to ٦^+} هـ(س) = ٦^٢ - ٦ = ٣٦ - ٦ = ٣٠$

$\lim_{س \to ٦^-} هـ(س) = ٥ \times ٦ = ٣٠ \Leftarrow \lim_{س \to ٦} هـ(س) = ٣٠$

مكتبة الهدى ALHODA.COM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال التاسع ص٣٢

اذا كان

$$\text{د}(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ، س < ٢ \\ ١٠ & ، س = ٢ \\ ٢س^{٢} - ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ٢} \text{د}(س)$ موجودة

فجد قيمة الثابت ٢ ؟

الحل

بما أن $\lim_{س \to ٢} \text{د}(س)$ موجودة فان

$$\lim_{س \to ٢^{+}} \text{د}(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} \text{د}(س)$$

$$٢ - ٣ \times ٢ = ١٠$$

$$٢ - ٦ = ١٠$$

$$-٦ \quad -٦$$

$$-٢ = ٤$$

$$٢ = -٤$$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① (٢٠١٠) صيفية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ٧ & س < ٣ \\ ٥ & س = ٣ \end{cases}$

فأوجد $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

ب) $\lim_{س \to ٥} ٣$ ج) $\lim_{س \to ٣} ٢$ د) غير موجودة

الحل

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٣^٢ + ٧ = ٩ + ٧ = ١٦$ ⓑ

② (٢٠١١) صيفية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٧ & س = ٠ \\ ٥ & س = ٣ \\ ٣ & س > ٠ \end{cases}$

فإن $\lim_{س \to ٠} هـ(س)$

ب) $\lim_{س \to ٣} ٥$ ج) $\lim_{س \to ٠} ٧$ د) غير موجود

الحل

$س = ٠$ نقطة تهجم

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = ٧$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س)$ غير موجود

د

② (٢٠١٢) شتوية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} م س^٢ - ٥ & س < ٥ \\ ٢٠ & س = ٥ \\ ٨ س + ٥ & س > ٥ \end{cases}$

فما قيمة الثابت م التي تجعل $\lim_{س \to ٥} هـ(س)$ موجودة ؟

الحل

$\lim_{س \to ٥} هـ(س)$ موجود $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٥^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٥^-} هـ(س)$

$\lim_{س \to ٥^+} هـ(س) = ٨ س + ٥$

$= ٨ \times ٥ + ٥ = ٤٥$

$\lim_{س \to ٥^-} هـ(س) = م س^٢ - ٥$

$= م \times ٥^٢ - ٥ = ٢٥ م - ٥$

$٢٥ م - ٥ = ٤٥$

$٢٥ م = ٥٠$

$م = ٢$

④ (ج: ١٤) صيغة

اذا كان $f(س) = \begin{cases} س^{٣} & س \leq ٢ \\ م س & س > ٢ \end{cases}$

فما قيمة الثابت م التي تجعل

$\lim_{س \to ٢} f(س)$ موجودة

الحل

بما ان النهاية موجودة عندما $س = ٢$

$\lim_{س \to ٢^{+}} f(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} f(س)$

$م ٢ = (٢)^{٣}$

$٢م = ٨ \Leftarrow م = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

أ) هنا $\left(\frac{س+٩}{س} + \sqrt{٧-س}\right)$

$س \leftarrow -٣$

بالتعويض مباشر

$= \frac{-٣+٩}{-٣} + \sqrt{٧-(-٣)}$

$= \frac{٦}{-٣} + \sqrt{٩} = -٢+٣$

$= ١$

ب) هنا $\frac{س^{٣}-٤س^{٢}}{س^{٢}-١٦}$

$س \leftarrow ٤$

التعويض = $\frac{٠}{٠}$

$\frac{س^{٢}(س-٤)}{(س-٤)(س+٤)}$ = هنا $\frac{س^{٢}}{س+٤}$ $س \leftarrow ٤$

$= \frac{١٦}{٤+٤} = \frac{١٦}{٨} = ٢$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

هنا $\left(\frac{\sqrt{س+١}-٣}{س-٨} + \frac{س}{س-٦}\right)$

$س \leftarrow ٥$

$= \frac{\sqrt{٥+١}-٣}{٥-٨} + \frac{٥}{٥-٦}$

$= \frac{\sqrt{٦}-٣}{-٣} + \frac{١٠+\sqrt{٦}}{-٥}$

$= ١ + \frac{١٠+٤}{-٥} = ١ + \frac{١٤}{-٥}$

$= -٧+١ = -٦$

وزارة (٢٠١٨) شتوية (قديم)

هنا $\left(\frac{٦+س٢}{٢+س} + ٦-س-٢\right)$

$س \leftarrow -٣$

$= \frac{٦+(-٣)٢}{-٣+٢} + ٦-(-٣)-٢$

$= \frac{٦-٦}{-١} + ٦+٣-٢$

$= ٠ - ٧ = -٧$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (ج ١٨) صيفية

$$\text{هـا}\left(\frac{س^{٤}+٣}{س-٣}+\sqrt{٧+٥٦-١٨}\right)$$
$$س \leftarrow -٣$$

الحل

$$\frac{(-٣)^{٤}+٣}{-٣-٣}+\sqrt{٧+٣٨-٦-١٨}$$
$$\frac{٩+٣}{٦}+\sqrt{٧+١٨+١٨}$$
$$\frac{١٢}{٦}+\sqrt{٣٦+٧}$$
$$٢+٦+٧=١٥$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثالث

نهاية خارج قسمة اقترانين

مقدمة

لإيجاد نهاية قسمة اقترانين يتم التعويض المباشر وهناك ثلاث حالات.

(١) الحالة الأولى

اذا كان ناتج التعويض عدد تكون النهاية ذلك العدد.

مثال ①

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥}{س + ١} = \frac{٣^٢ - ٥}{٣ + ١} = \frac{٩ - ٥}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

مثال ②

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^٢ - ٤} = \frac{١ - ١}{١ - ٤} = \frac{٠}{-٣} = ٠$$

مثال ③

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤س + ٣}{٦س} = \frac{٢^٢ - ٤ \times ٢ + ٣}{٦ \times ٢}$$

$$= \frac{٤ - ٨ + ٣}{١٢} = \frac{-١}{١٢}$$

(٢) الحالة الثانية

اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ تكون النهاية غير موجودة

مثال ①

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٣}{س - ١} = \frac{١ - ٣}{١ - ١} = \frac{-٢}{٠}$$

غير موجودة

مثال ②

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٣}{س^٢ - ٤} = \frac{٢^٢ + ٣}{٤ - ٤} = \frac{٧}{٠}$$

غير موجودة

مثال ③

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} = \frac{١}{٠} = ١$$

غير موجودة

مكتبة الهدف
الأستاذ ناجح الجمزاوي

(٣) الحالة الثالثة (مرهقة)

اذا كان ناتج التعويض = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

فهنالك عشرة وحل هذه المشكلة باحد الطرق التالية :-

١- التحليل :-

وتضمن هذه الطريقة تحليل البسط أو تحليل المقام الى العوامل الأولية باستخدام

١. الفرق بين مربعين

$س^٢ - ص^٢ = (س - ص)(س + ص)$

٢. اخراج العامل المشترك وتقدم اذا لم يوجد في كثير الحدود حد ثابت

٣- تحليل الصورة التربيعية باستخدام الأقواس

٤- الفرق بين مكعبين

$س^٣ - ص^٣ = (س - ص)(س^٢ + ص س + ص^٢)$

٥- مجموع مكعبين

$س^٣ + ص^٣ = (س + ص)(س^٢ - ص س + ص^٢)$

ملاحظة هامة

اذا كان ناتج التعويض = $\frac{٠}{٠}$

حلل ← اختصر ← عوض

أمثلة على التحليل :-

مثال ①

$\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ٢س}{٣س}$ التعويض = $\frac{٠}{٠}$

← التحليل ← نخرج من البسط س عامل مشترك

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(س - ٢)}{٣س}$ نختصر

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س - ٢}{٣}$ نعوض

$= \frac{٠ - ٢}{٣} = \frac{-٢}{٣}$

مجتمع العلوم ALWESAM الوعلم ناجح الجمزاوي

مثال ②

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \frac{٣^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$ نختصر

$= \lim_{س \to ٣} س + ٣$ نعوض

$= ٣ + ٣ = ٦$

مثال ③

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ٢س}$

الحل

التعويض $= \frac{٢^٢ - ٢ - ٢}{٢^٢ - ٢(٢)} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س(س - ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س + ١}{س}$ نعوض

$= \frac{٢ + ١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

ملاحظه

عند اختصار $\frac{س - ٢}{٢ - س}$

يكون الناتج $= -١$

بشكل عام $\frac{س - م}{م - س} = -١$

مثال (٤)

اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٤ + ٣س^٢}{س^٣ - ٤س^٢}$

الحل

التعويض $= \frac{٠^٤ + ٣(٠)^٢}{٠^٣ - ٤(٠)^٢} = \frac{٠}{٠}$

التحليل اخراج $س^٢$ عامل مشترك

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢(س^٢ + ٣)}{س^٢(س - ٤)}$ نختصر

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٣}{س - ٤}$ نعوض

$= \frac{٠^٢ + ٣}{٠ - ٤} = -\frac{٣}{٤}$

مكتبة الهدف NEWGEM
العلم ناجح الجمزاوي

مثال (٥)

$$\text{نهـا}_{س \to -1} \frac{س + 1}{س^3 - س}$$

الحل

التعويض $= \frac{-1+1}{-1^3-(-1)} = \frac{0}{0}$

التحليل

$$\text{نهـا}_{س \to -1} \frac{س+1}{س(س^2-1)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -1} \frac{\cancel{س+1}}{س(س-1)(\cancel{س+1})} \quad \text{مختصر}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -1} \frac{1}{س(س-1)}$$

$$= \frac{1}{-1(-1-1)} = \frac{1}{-1 \times -2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال (٦)

$$\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س^3 - 8}{2 - س}$$

الحل

التعويض $= \frac{2^3-8}{2-2} = \frac{8-8}{2-2} = \frac{0}{0}$

التحليل

$$\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{(س-2)(س^2+2س+4)}{\cancel{(س-2)}} \quad \text{مختصر}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 2} -1(س^2+2س+4)$$

$$= -1(2^2+2 \times 2+4) = -(4+4+4)$$

$$= -12$$

مثال (٧)

$$\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^3-1}{س^2-1}$$

التعويض $= \frac{0}{0}$

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{\cancel{(س-1)}(س^2+س+1)}{(\cancel{س-1})(س+1)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^2+س+1}{س+1}$$

$$= \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

اوجد $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٨}{س^٢ - ٤}$

الحل

التعويض = $\frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س+٢)(س^٢ - ٢س + ٤)}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{س - ٢}$

$= \frac{(-٢)^٢ - ٢(-٢) + ٤}{-٢ - ٢} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{-٤} = \frac{١٢}{-٤}$

$= -٣$

مثال (٩)

اوجد $\lim_{س \to -٤} \frac{س^٣ + ٥س^٢ - ١٢س}{س^٢ + ٨س + ٨}$

الحل

التعويض = $\frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \lim_{س \to -٤} \frac{س(س^٢ + ٥س - ١٢)}{٢(س+٤)}$

$= \lim_{س \to -٤} \frac{س(س+٤)(س-٣)}{٢(س+٤)}$

$= \frac{-٤(-٤-٣)}{٢} = \frac{-٤ \times -٧}{٢} = \frac{٢٨}{٢} = ١٤$

مثال (١٠)

اوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{(س-١)^٢ - ١٦}{س - ٥}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-١-٤)(س-١+٤)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٣)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} س + ٣$

$= ٥ + ٣$

$= ٨$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

تدريبات وأسئلة الكتاب

تدريب ① ص٣٥

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٥}{٥ + س}$

$= \frac{١^٢ - ٥}{٥ + ١} = \frac{-٤}{٦} = -٤$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{٣ + س}$

$= \frac{٢ \times ٢ - ٤}{٣ + ٢} = \frac{٠}{٥} =$ صفر

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣ + س}{٤ - س^٢}$

$= \frac{٣ + ٢}{٤ - ٢^٢}$

$= \frac{٥}{٠}$ غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ١}{٣ + س}$

$= \frac{٩ - ١}{٣ + ٣}$

$= \frac{٨}{٦}$

تدريب ② ص٣٦

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣س}{٣ + س}$

$= \frac{(-٣)^٢ + ٣ \times -٣}{٣ + -٣} = \frac{٠}{٠}$ مرفوض

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س(٣ + س)}{٣ + س}$

$= \lim_{س \to -٣}$ هـا $س = -٣$

٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢س}{١٠ - ٥س - س^٢}$

الحل

$= \frac{٥^٢ - ٢ \times ٥}{١٠ - ٢ \times ٥} = \frac{٠}{٠}$ مرفوض

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س(س - ٢)}{(س - ٥)(س - ٢)}$ تحليل اختصار

$= \lim_{س \to ٥}$ هـا $\frac{س}{س - ٥} = \frac{٥}{٥} =$ ١ ← تابع

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٤ + ٢٧س}{س + ٣}$

الحل

بالتعويض $= \frac{(-٣)^٤ + ٢٧(-٣)}{-٣ + ٣}$

$= \frac{٨١ - ٨١}{٠} = \frac{٠}{٠}$ مرفوض

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س(س^٣ + ٢٧)}{س + ٣}$

مجموع مكعبين

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س(س+٣)(س^٢ - ٣س + ٩)}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} س(س^٢ - ٣س + ٩)$

$= -٣((-٣)^٢ - ٣(-٣) + ٩)$

$= -٣ \times ٢٧ = -٨١$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٢ - ٩}$

الحل

بالتعويض $= \frac{٣^٢ - ٦(٣) + ٩}{٣^٢ - ٩}$

$= \frac{٩ - ١٨ + ٩}{٩ - ٩} = \frac{٠}{٠}$ مرفوض

تحليل

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س-٣)}{(س+٣)(س-٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س + ٣}$

$= \frac{صفر}{٢+٢} = \frac{صفر}{٦}$

$= صفر$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الأول ص ٣٩

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ه(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٩$

جد كل مما يأتي (إن وجدت)

أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{ه(س)}{هـ(س)}$

$= \frac{\lim_{س \to ٢} ه(س)}{\lim_{س \to ٢} هـ(س)} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س) + ١}{ه(س) + س - ٥}$

$= \frac{\lim_{س \to ٢} هـ(س) + ١}{\lim_{س \to ٢} ه(س) + \lim_{س \to ٢} س - ٥}$

$= \frac{٩ + ١}{٣ + ٢ - ٥} = \frac{١٠}{٠}$ غير موجودة

السؤال الثاني ص ٣٩

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي عند النقطة المبينة إزاء كل منها (إن وجدت)

أ) $ه(س) = \frac{س^٢ + ١}{٨ + س}$ $\quad س \to ٠$

$\lim_{س \to ٠} ه(س) = \frac{١ + ٠^٢}{٨ + ٠} = \frac{١}{٨}$

ب) $هـ(س) = \frac{س^٢ + ٥س}{١ - س}$ $\quad س \to ١$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = \frac{١^٢ + ٥ \times ١}{١ - ١}$

$= \frac{١ + ٥}{٠} = \frac{٦}{٠}$ غير موجودة

جـ) $ل(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{١٢ - ٣س}$ $\quad س \to ٤$

$\lim_{س \to ٤} ل(س) = \frac{٤^٢ - ٣ \times ٤ - ٤}{٤ \times ٣ - ١٢}$

$= \frac{١٦ - ١٢ - ٤}{١٢ - ١٢} = \frac{٠}{٠}$ ← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

$$= \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \frac{(س-٤)(س+١)}{٣(٤-س)}$$

$$= \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \frac{-١(س+١)}{٣}$$

$$= \frac{-١(٤+١)}{٣} = \frac{-٥}{٣}$$

بذلك

اختصار $\frac{س-٤}{٤-س} = -١$

د) $م(س) = \frac{س^{٣}-٢٧}{٣س^{٢}-٩س}$ $\quad س \leftarrow ٣$

الحل

التعويض $= \frac{٣^{٣}-٢٧}{٣(٣)^{٢}-٩(٣)}$

$= \frac{٢٧-٢٧}{٢٧-٢٧} = \frac{٠}{٠}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٣}-٢٧}{٣س^{٢}-٩س}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{٣س(س-٣)}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٢}+٣س+٩}{٣س}$

$= \frac{٩+٩+٩}{٩} = \frac{٢٧}{٩} = ٣$

السؤال الثالث ص ٤٠

اذا كان $ه(س) = س$ فجد

$\text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{ه^{٢}(س) - ه(٩)}{س+٣}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٢}-٩}{س+٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{س+٣}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٣} س - ٣ = ٣-٣ = ٠$

مكتبة الوفاء ACWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع ص ٤٠

اذا علمت ان $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = -٧$

$\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٢$ فبين أن

$$\lim_{س \to ٥} \frac{٢هـ(س) - ٣هـ(س)}{هـ(س) + س + ٧} = -٤$$

الحل

$$\frac{٢\lim_{س \to ٥} هـ(س) - ٣\lim_{س \to ٥} هـ(س)}{\lim_{س \to ٥} هـ(س) + \lim_{س \to ٥} س + ٧}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٧ - ٢ \times ٢}{-٧ + ١٢}$$

$$= \frac{-١٤ - ٦}{٥} = \frac{-٢٠}{٥}$$

$$= -٤$$

السؤال السادس ص ٤٠

جد $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + س - ٢}{س^٢ - ١}$

الحل

$$= \frac{١^٢ + ١ - ٢}{١^٢ - ١} = \frac{٢-٢}{١-١} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ٢)}{(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س + ٢}{س + ١}$$

$$= \frac{١ + ٢}{١ + ١} = \frac{٣}{٢}$$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① (٢٠٠٨) شتوية

$ها = 3س^2 - 6س$

$س \to 2$ ، $س - 2$

الحل

$التعويض = 3(2)^2 - 6(2) = 0$

$التحليل$

$ها = \frac{3س(س-2)}{س-2}$

$س \to 2$

$= 3 \times 2 = 6$

② (٢٠٠٩) شتوية

$جد ها \frac{س^2 - 5س + 6}{س - 2}$

$س \to 2$

الحل

$التعويض = \frac{2^2 - 5(2) + 6}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

$التحليل$

$ها = \frac{(س-3)(س-2)}{س-2}$

$س \to 2$

$= ها\ س - 3 = 2 - 3 = -1$

$س \to 2$

③ (٢٠١٠) شتوية

$جد ها \frac{س^2 - 3س + 2}{س^2 - 2س}$

$س \to 2$

الحل

$التعويض = \frac{2^2 - 3(2) + 2}{2^2 - 2(2)} = \frac{0}{0}$ صفر صفر

$التحليل$

$= ها \frac{(س-2)(س-1)}{س(س-2)}$

$س \to 2$

$= ها \frac{س-1}{س} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

$س \to 2$

④ (٢٠١١) شتوية

$جد ها \frac{س^3 + 5س^2 + 6س}{س^2 - 4}$

$س \to -2$

الحل

$التعويض = \frac{(-2)^3 + 5(-2)^2 + 6(-2)}{(-2)^2 - 4} = \frac{0}{0}$

صفر صفر

$التحليل$

$ها = \frac{س(س^2 + 5س + 6)}{(س-2)(س+2)}$

$س \to -2$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

$= \text{هـا}_{س \to -٢} \frac{س(س+٣)(س+٢)}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \frac{-٢(-٢+٣)}{-٢-٢} = \frac{-٢ \times ١}{-٤}$

$= \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

⑤ (٢،١٢) صيغة

اوجد $\text{هـا}_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{٣س^٢ - ١٥س}$

الحل

التعويض $\frac{٥^٢ - ٢٥}{٣ \times ٥^٢ - ١٥ \times ٥} = \frac{٢٥-٢٥}{٧٥-٧٥} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

$\text{هـا}_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{٣س(س-٥)}$

$= \text{هـا}_{س \to ٥} \frac{س+٥}{٣س}$

$= \frac{٥+٥}{٣ \times ٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

⑥ (٢،١٣) سؤال

اوجد $\text{هـا}_{س \to ١} \frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١}$

الحل

التعويض $\frac{١+١-٢}{١-١} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

$\text{هـا}_{س \to ١} \frac{(س+٢)(س-١)}{(س-١)}$

$= ١ + ٢ = ٣$

⑦ (٢،١٣) صيغة

$\text{هـا}_{س \to ٢} \frac{٣س^٢ - ٦س}{س - ٢}$

التعويض $= \frac{٠}{٠}$

التحليل

$\text{هـا}_{س \to ٢} \frac{٣س(س-٢)}{(س-٢)}$

$= ٣ \times ٢ = ٦$

مكتبة الإسكندرية Alexandria Library
المعلم ناجح الجمزاوي

⑧ (٢٠١٤) صيفية

$$\text{ق}(س) = \frac{٦ - ٣س}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$$

اوجد هـا ق(س)
س ← ٢

الحل

التعويض $= \frac{٦ - ٣×٢}{٢^{٢} + ٣×٢ - ١٠} = \frac{٠}{٠}$

هـا $\frac{-٣}{(س+٥)(س-٢)}$ (-١)
س ← ٢

$= \frac{-٣}{٥+٢} = \frac{-٣}{٧}$

⑨ (٢٠١٥) شتوية

هـا $\frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{١٢ - ٣س}$
س ← ٤

التعويض $= \frac{٤^{٢} - ٣×٤ - ٤}{١٢ - ٣×٤} = \frac{صفر}{صفر}$

التحليل

هـا $\frac{(س-٤)(س+١)}{-٣(س-٤)}$ (-١)
س ← ٤

$= \frac{-(٤+١)}{٣} = \frac{-٥}{٣}$

⑩ (٢٠١٦) شتوية

هـا $\left(\frac{س^{٢} + ١٠س + ٢٥}{س^{٢} + ٢٥} + س\right)$
س ← -٥

الحل

التعويض $= \left(\frac{(-٥)^{٢} + ١٠×-٥ + ٢٥}{٢٥ + ٢٥} + -٥\right)$

$= \left(\frac{١٠ + ١٠ -}{٢٥ + ٢٥} - ٥\right) = ٠ - ٥ = -٥$

⑪ (٢٠١٦) صيفية

هـا $\frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{١٢ - ٤س}$
س ← ٣

الحل

التعويض $= \frac{٣^{٢} - ٢×٣ - ٣}{١٢ - ٤×٣} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

هـا $\frac{(س-٣)(س+١)}{-٤(س-٣)}$
س ← ٣

$= \frac{١+٣}{-٤} = \frac{٤}{-٤} = -١$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

جد قيمة

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{١٦ - (٣س - ٥)^{٢}}{س^{٢} - ٩}$$

الحل

$$\text{التعويض} = \frac{١٦ - (٩ - ٥)^{٢}}{٩ - ٩} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{(٤ - (٣س - ٥))(٤ + (٣س - ٥))}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{(٤ - ٣س + ٥)(٤ + ٣س - ٥)}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{(٩ - ٣س)(٣س - ١)}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{٣(٣ - س)(٣س - ١)}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{-٣(٣س - ١)}{س + ٣} = \frac{-٢٤}{٦} = -٤$$

$$= -٤$$

حل آخر

مربع الأول - ٢ الأول × الثاني + مربع الثاني

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{١٦ - (٩س^{٢} - ٣٠س + ٢٥)}{س^{٢} - ٩}$$

$$= \frac{١٦ - ٩س^{٢} + ٣٠س - ٢٥}{س^{٢} - ٩}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{-٩س^{٢} + ٣٠س - ٩}{س^{٢} - ٩}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{-٣(٣س^{٢} - ١٠س + ٣)}{س^{٢} - ٩}$$

$$= -٣ \text{نها}_{س \to ٣} \frac{(٣ - س)(٣س - ١)}{(ص - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \frac{-٢٤}{٦} = -٤$$

مكتبة الوسام ALWESAM

إعداد: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

$$\text{نها}_{س \to ٤} \frac{س^{٣} - ٤س^{٢}}{س^{٢} - ١٦}$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to ٤} \frac{س^{٢}(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ٤)}$$

$$= \frac{٤^{٢}}{٤ + ٤} = \frac{١٦}{٨} = ٢$$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

الضرب بالمرافق

مقدمة

المقدار	المرافق	حاصل الضرب
$س - ص$	$س + ص$	$س^2 - ص^2$
$\sqrt{س} - ص$	$\sqrt{س} + ص$	$ص - س$
$\sqrt{٢س} - \sqrt{٢ص}$	$\sqrt{٢س} + \sqrt{٢ص}$	$٢س - ٢ص$
$\sqrt{٢س} + \sqrt{٢ص}$	$\sqrt{٢س} - \sqrt{٢ص}$	$س - ص$

امثلة

$س - ٤$ مرافقه $س + ٤$

حاصل الضرب $= س^2 - ١٦$

$\sqrt{٢س} - ٣$ مرافقه $\sqrt{٢س} + ٣$

حاصل الضرب $= س - ٩$

$\sqrt{٢س} - ٣\sqrt{٢}$ مرافقه $\sqrt{٢س} + ٣\sqrt{٢}$

حاصل الضرب $= س - ٣$

ملاحظه

يتم ضرب كل من البسط والمقام بالمرافق دائماً

يصبح المقدار المضروب في مرافقه لبادي (مربع الأول - مربع الثاني) والمقدار الآخر سواء في البسط أو المقام يبقى كما هو

مثال

$$\frac{\sqrt{٧س} - ٤}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{٧س} + ٤}{\sqrt{٧س} + ٤} \quad \text{المرافق}$$

$$= \frac{٧س - ١٦}{(س - ٤)(\sqrt{٧س} + ٤)}$$

مثال ①

اوجد $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{٢س} - ٣}{س - ٩}$

الحل

$$\text{النهاية} = \frac{\sqrt{٢(٩)} - ٣}{٩ - ٩} = \frac{٣ - ٣}{٩ - ٩} = \frac{٠}{٠}$$

الضرب بالمرافق

$$\frac{\sqrt{٢س} - ٣}{س - ٩} \times \frac{\sqrt{٢س} + ٣}{\sqrt{٢س} + ٣}$$

يتبع

$\Leftarrow$ هنا $\frac{س-٩}{س \to ٩} \frac{}{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٣)}$

$= \frac{١}{\sqrt{٩}+٣} = \frac{١}{٣+٣} = \frac{١}{٦}$

مثال ②

اوجد $هـا \frac{\sqrt{س+٩}-٤}{س \to ٧} \frac{}{س-٧}$

المعوض $= \frac{\sqrt{٧+٩}-٤}{٧-٧} = \frac{٤-٤}{٧-٧} = \frac{٠}{٠}$

الضرب بالمرافق

$هـا \frac{\sqrt{س+٩}-٤}{س \to ٧} \frac{}{س-٧} \times \frac{\sqrt{س+٩}+٤}{\sqrt{س+٩}+٤}$

$= \frac{س+٩-١٦}{(س-٧)(\sqrt{س+٩}+٤)}$

$= هـا \frac{س-٧}{س \to ٧} \frac{}{(س-٧)(\sqrt{س+٩}+٤)}$

$= \frac{١}{\sqrt{٧+٩}+٤} = \frac{١}{٤+٤} = \frac{١}{٨}$

مثال ③

اوجد $هـا \frac{\sqrt[٣]{س}-٢}{س \to ٨} \frac{}{س-٨}$

الحل

المعوض $= \frac{\sqrt[٣]{٨}-٢}{٨-٨} = \frac{٢-٢}{٨-٨} = \frac{٠}{٠}$

الضرب بالمرافق

$هـا \frac{\sqrt[٣]{س}-٢}{س \to ٨} \frac{}{س-٨} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}}+٢\sqrt[٣]{س}+٤}{\sqrt[٣]{س^{٢}}+٢\sqrt[٣]{س}+٤}$

$هـا \frac{س-٨}{(س-٨)(\sqrt[٣]{س^{٢}}+٢\sqrt[٣]{س}+٤)}$

$= هـا \frac{١}{س \to ٨} \frac{}{\sqrt[٣]{س^{٢}}+٢\sqrt[٣]{س}+٤}$

$= \frac{١}{\sqrt[٣]{٨^{٢}}+٢\sqrt[٣]{٨}+٤} = \frac{١}{٤+٢\times٢+٤} = \frac{١}{١٢}$

مكتبة الوسام
ALWSAM
الوسام ناجح الجمزاوي

مثال ④

اوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ - ٤}{س^٢ - ٦س + ٥}$

الحل

بالتعويض $= \frac{٠}{٠}$

الضرب بالمرافق

$$\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ - ٤}{س^٢ - ٦س + ٥} \times \frac{\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ + ٤}{\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ + ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{(٧ - س^٢ - ٩) - ١٦}{(س^٢ - ٦س + ٥)(\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{١٦ - (٩ - س^٢)}{(س^٢ - ٦س + ٥)(\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{١٦ - ٩ + س^٢}{(س^٢ - ٦س + ٥)(\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{(س^٢ - ٦س + ٥)(\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{(س - ٥)(س - ١)(\sqrt{٧ - س^٢} - ٩ + ٤)}$$

$$= \frac{(٥ + ٥)}{(٥ - ١)(\sqrt{٧ - ٢٥} - ٩ + ٤)} = \frac{١٠}{٨ \times ٤} = \frac{٥}{١٦}$$

مثال ⑤

اوجد $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧س - ١} - ٢}{\sqrt{٧س + ٣} - ٢}$

الحل

بالتعويض $= \frac{٦ - ٢}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

هنا الضرب بمرافق البسط ومرافق المقام

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧س - ١} - ٢}{\sqrt{٧س + ٣} - ٢} \times \frac{\sqrt{٧س - ١} + ٢}{\sqrt{٧س + ٣} + ٢} \times \frac{\sqrt{٧س + ٣} + ٢}{\sqrt{٧س + ٣} + ٢}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(٧س - ١ - ٤)(\sqrt{٧س + ٣} + ٢)}{(٧س + ٣ - ٤)(\sqrt{٧س - ١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(\sqrt{٧س + ٣} + ٢)}{(س - ١)(٧)(\sqrt{٧س - ١} + ٢)}$$

$$= \frac{(\sqrt{٧ + ٣} + ٢)}{٧(\sqrt{٧ - ١} + ٢)} = \frac{٤}{٧ \times ٤} = \frac{١}{٧}$$

مثال ⑥

اوجد $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س}}{س - ١}$

الحل

$= \frac{\sqrt[٣]{١^{٢}} - \sqrt[٣]{١}}{١ - ١} = \frac{١ - ١}{١ - ١} = \div$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س}}{س - ١} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س - س}{(س - ١)(\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - س}{(س - ١)(\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س(س - ١)}{(س - ١)(\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١)}$

$= \frac{١}{\sqrt[٣]{١^{٢}} + \sqrt[٣]{١} + ١} = \frac{١}{١ + ١ + ١} = \frac{١}{٣}$

مثال ⑦

اوجد $\lim_{س \to ٨} \frac{س^{٢} - ١٦}{\sqrt[٣]{س + ١} - ٣}$

الحل

$= \frac{٦٤ - ١٦}{\sqrt[٣]{٨ + ١} - ٣} = \frac{٤٨}{٣ - ٣} = \frac{٤٨}{٠} = \div$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س^{٢} - ١٦}{\sqrt[٣]{س + ١} - ٣} \times \frac{(\sqrt[٣]{س + ١})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ١} + ٩}{(\sqrt[٣]{س + ١})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ١} + ٩}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س - ٨)(س + ٤)((\sqrt[٣]{س + ١})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ١} + ٩)}{س + ١ - ٩}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س - ٨)(س + ٤)((\sqrt[٣]{س + ١})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س + ١} + ٩)}{س - ٨}$

$= (٨ + ٤)((\sqrt[٣]{٨ + ١})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{٨ + ١} + ٩)$

$= ١٢ \times (٣ + ٣ + ٣) = ١٢ \times ٩ = ١٠٨$

مكتبة الوسام AWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

اوجد $\lim_{س \to 0} \frac{س^2}{\sqrt{س^2+4} - 2}$

الحل

التعويض $= \frac{0}{0}$

الضرب بالمرافق

$$\lim_{س \to 0} \frac{س^2}{\sqrt{س^2+4} - 2} \times \frac{\sqrt{س^2+4} + 2}{\sqrt{س^2+4} + 2}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{س^2(\sqrt{س^2+4} + 2)}{س^2 + 4 - 4}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{س^2(\sqrt{س^2+4} + 2)}{س^2}$$

$$= \sqrt{0+4} + 2 = 2 + 2 = 4$$

مثال ⑨

$$\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{1+2س} - 2}{س - 3}$$

الحل

التعويض $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{1+2س} - 2}{س - 3} \times \frac{\sqrt{1+2س} + 2}{\sqrt{1+2س} + 2}$$

$$\lim_{س \to 3} \frac{4 - (1+2س)}{(س-3)(\sqrt{1+2س} + 2)}$$

$$\lim_{س \to 3} \frac{4 - 2س - 1}{(س-3)(\sqrt{1+2س} + 2)}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{-2(س-3)}{(س-3)(\sqrt{1+2س} + 2)}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{1+6} + 2}$$

$$= \frac{-2}{4}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات واسئلة الكتاب

تدريب ③ صـ٢٧

١) $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥}$

الحل

المقابل = ÷

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} \times \frac{\sqrt{س + ٢٠} + ٥}{\sqrt{س + ٢٠} + ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٣(س - ٥)(\sqrt{س + ٢٠} + ٥)}{س + ٢٠ - ٢٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٣(س - ٥)(\sqrt{س + ٢٠} + ٥)}{س - ٥}$

$= ٣(\sqrt{٥ + ٢٠} + ٥)$

$= ٣(٥ + ٥)$

$= ٣ \times ١٠ = ٣٠$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$

الحل

المقابل = ÷

$= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٢} + ٢}{\sqrt{س + ٢} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س + ٢ - ٤}{(س - ٢)(\sqrt{س + ٢} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س - ٢)(\sqrt{س + ٢} + ٢)}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢ + ٢} + ٢}$

$= \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢ + ٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الأول ص٣٩

و) د(س) = $\frac{\sqrt{س+١} - ٣}{س - ٨}$ ، س ← ٨

الحل

التعويض = ÷

هنا $\frac{\sqrt{س+١} - ٣}{س - ٨} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٣}{\sqrt{س+١} + ٣}$ ، س ← ٨

هنا $\frac{س + ١ - ٩}{(س - ٨)(\sqrt{س+١} + ٣)}$ ، س ← ٨

= هنا $\frac{س - ٨}{(س - ٨)(\sqrt{س+١} + ٣)}$ ، س ← ٨

= $\frac{١}{\sqrt{٨+١} + ٣}$

= $\frac{١}{٣+٣}$ = $\frac{١}{٦}$

ز) و(س) = $\frac{س - ٧}{٣ - \sqrt{س+٢}}$ ، س ← ٧

الحل

التعويض = ÷

هنا $\frac{س - ٧}{٣ - \sqrt{س+٢}} \times \frac{٣ + \sqrt{س+٢}}{٣ + \sqrt{س+٢}}$ ، س ← ٧

= هنا $\frac{(س - ٧)(٣ + \sqrt{س+٢})}{٩ - (س+٢)}$ ، س ← ٧

= هنا $\frac{(س - ٧)(٣ + \sqrt{س+٢})}{٩ - س - ٢}$ ، س ← ٧

= هنا $\frac{(س - ٧)(٣ + \sqrt{س+٢})}{٧ - س}$ ، س ← ٧

= -١ (٣ + $\sqrt{س+٢}$)

= -١ (٦)

= -٦

مكتبة الوسام AlWesam المعلم: ناجح الجمزاوي

② (٢٠٠٨) صيفية

جد $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+١} - ١}{س}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+١} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{س+١} + ١}{\sqrt{س+١} + ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س+١-١}{س(\sqrt{س+١} + ١)}$

$= \frac{١}{\sqrt{٠+١}+١} = \frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢}$

③ (٢٠٠٩) صيفية

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س-٣} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س+١-٤}{(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س-٣}{(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \frac{١}{\sqrt{٣+١}+٢} = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

④ (٢٠١٠) صيفية

جد $\lim_{س \to ٤} \frac{س-٤}{\sqrt{س} - ٢}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س-٤}{\sqrt{س} - ٢} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(\sqrt{س} + ٢)}{س-٤}$

$= \sqrt{٤} + ٢$

$= ٢ + ٢ = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

⑤ (٢٠١٤) سنوية

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{١+٣س} - ٤}{س^{٢} - ٢٥}$$

الحل

$$\text{نها} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{١+٣س} - ٤}{س^{٢} - ٢٥} \times \frac{\sqrt{١+٣س} + ٤}{\sqrt{١+٣س} + ٤}$$

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{١+٣س - ١٦}{(س^{٢} - ٢٥)(\sqrt{١+٣س} + ٤)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{٣(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ٥)(\sqrt{١+٣س} + ٤)}$$

$$= \frac{٣}{(٥+٥) \times ٨} = \frac{٣}{٨٠}$$

⑥ (٢٠١٣) صيفية

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{١+٣س} - ٢}{س - ١}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{١+٣س} - ٢}{س - ١} \times \frac{\sqrt{١+٣س} + ٢}{\sqrt{١+٣س} + ٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{١+٣س - ٤}{(س - ١)(\sqrt{١+٣س} + ٢)}$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{٣(س - ١)}{(س - ١)(\sqrt{١+٣س} + ٢)}$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{٣}{\sqrt{١+٣س} + ٢} = \frac{٣}{٢+٢} = \frac{٣}{٤}$$

⑦ (٢٠١٤) صيفية

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س+١} - ٢}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س+١} - ٢} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}{س + ١ - ٤}$$

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}{س - ٣}$$

$$= \sqrt{٣+١} + ٢ = ٢ + ٢ = ٤$$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

$$\text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٣س + ٤} - ٥}{س^٢ - ٤٩}$$

الحل

التعويض = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٣س + ٤} - ٥}{س^٢ - ٤٩} \times \frac{\sqrt{٣س + ٤} + ٥}{\sqrt{٣س + ٤} + ٥}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{٣س + ٤ - ٢٥}{(س^٢ - ٤٩)(\sqrt{٣س + ٤} + ٥)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{٣س - ٢١}{(س^٢ - ٤٩) \times (\sqrt{٣س + ٤} + ٥)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{٣(س - ٧)}{(س - ٧)(س + ٧) \times (\sqrt{٣س + ٤} + ٥)}$$

$$= \frac{٣}{١٤ \times ١٠} = \frac{٣}{١٤٠}$$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

$$\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{١٦ - (٣س - ٥)^٢}{س^٢ - ٩}$$

الحل

التعويض

$$\frac{١٦ - (٣ \times ٤ - ٥)^٢}{٤ - ٩}$$

$$= \frac{١٦ - (٦ - ٥)^٢}{-٥}$$

$$= \frac{١٦ - ١}{-٥} = \frac{١٥}{-٥} = -٣$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية

جد قيمة هـ إذا $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س + ٥} - ٣}$

الحل

$\frac{٤ - ٤}{\sqrt{٩} - ٣} = \frac{٠}{٠}$ ÷ الضرب بالمرافق

هـ $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س + ٥} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٥} + ٣}{\sqrt{س + ٥} + ٣}$

هـ $\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(\sqrt{س + ٥} + ٣)}{س + ٥ - ٩}$

هـ $\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(\sqrt{س + ٥} + ٣)}{س - ٤}$

$= \sqrt{٤ + ٥} + ٣$

$= \sqrt{٩} + ٣$

$٣ + ٣$

٦

وزارة (٢٠١٨) قديم شتوية

جد هـ $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤س + ١} - ٣}{س - ٢}$

الحل $\frac{\sqrt{٩} - ٣}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

الضرب بالمرافق

هـ $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤س + ١} - ٣}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{٤س + ١} + ٣}{\sqrt{٤س + ١} + ٣}$

هـ $\lim_{س \to ٢} \frac{٤س + ١ - ٩}{(س - ٢)(\sqrt{٤س + ١} + ٣)}$

هـ $\lim_{س \to ٢} \frac{٤س - ٨}{(س - ٢)(\sqrt{٤س + ١} + ٣)}$

هـ $\lim_{س \to ٢} \frac{٤(س - ٢)}{(س - ٢)(٣ + ٣)}$

$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

توحيد المقام

ملاحظة

$$\frac{أ}{ب} \pm \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times د \pm جـ \times ب}{ب \times د}$$

توحيد المقام

مثال

① $\frac{٣}{س} + \frac{٤}{٢} = \frac{٣ \times ٢ + ٤ \times س}{٢ س}$

$= \frac{٦ + ٤ س}{٢ س}$

② $\frac{٣}{س} - \frac{٤}{١ + س}$

$= \frac{٣(١ + س) - ٤ س}{س(١ + س)}$

عكك المقس

$= \frac{٣ \times ١ + ٣ س - ٤ س}{س(١ + س)}$ يبقى مقاص

$= \frac{٣ + س}{س(١ + س)}$

مثال

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{٣ - س}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

توحيد المقام

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{٣ - س}{٣ س}}{٣ - س}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣ - س}{٣ س (٣ - س)}$ ← مقلوب

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{٣ س}$

$= \frac{-١}{٩}$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة

$\frac{\frac{أ}{ب}}{\frac{ج}{د}} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{ج}$ ← مقلوب المقسوم عليه

مثال: $\frac{\frac{٣}{س}}{\frac{٤}{س+١}} = \frac{٣}{س} \times \frac{س+١}{٤}$

مثال: $\frac{\frac{١}{٤}}{٥} = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥}$

مثال ①

أوجد نهاية $\frac{\frac{١}{س}-\frac{١}{٣}}{س-٣}$ عندما $س \to ٣$ ← نوحد المقام

$= \frac{\frac{٣-س}{٣س}}{س-٣}$

$= \frac{٣-س}{٣س} \times \frac{١}{س-٣}$ ← نحول القسمة الى ضرب

$= \frac{-(س-٣)}{٣س} \times \frac{١}{س-٣}$ ← (-١)

$= \frac{-١}{٣س}$ عندما $س \to ٣$

$= \frac{-١}{٣ \times ٣} = -\frac{١}{٩}$

مثال ②

أوجد نهاية $\frac{٥ - \frac{١٠}{س}}{س-٢}$ عندما $س \to ٢$

الحل

التعويض المباشر $= \frac{٠}{٠}$ ← كوحدة إحداثيات

$= \frac{٥ - \frac{١٠}{س}}{س-٢}$

$= \frac{\frac{٥س-١٠}{س}}{س-٢}$

$= \frac{٥س-١٠}{س} \times \frac{١}{س-٢}$

$= \frac{٥(س-٢)}{س} \times \frac{١}{س-٢}$ ← (٥)

$= \frac{٥}{س}$ عندما $س \to ٢$

$= \frac{٥}{٢}$

مثال ③

أوجد نهاية $\frac{\frac{٣}{س}-\frac{١٢}{٤}}{س-٤}$ عندما $س \to ٤$

الحل

التعويض المباشر $= \frac{٠}{٠}$

$= \frac{\frac{٣}{س}-\frac{١٢}{٤}}{س-٤}$

$= \frac{\frac{٤س-١٢س}{٤س}}{س-٤}$

$= \frac{٤س-١٢س}{٤س} \times \frac{١}{س-٤}$

$= \frac{-٣(٤-س)}{٤س} \times \frac{١}{(س-٤)}$ ← (-٣)

$= \frac{-٣}{٤س}$ عندما $س \to ٤$

$= \frac{-٣}{٤ \times ٤} = -\frac{٣}{١٦}$

مثال ④

$$\frac{\frac{2}{س-3}+\frac{4}{6+س}}{س}$$ اوجد $\lim_{س\to 0}$

الحل

بالتعويض $=\frac{0}{0}$

$$\lim_{س\to 0}\frac{2(6+س)+4(س-3)}{(س-3)(6+س)}$$ بتوحيد مقامات

$$\lim_{س\to 0}\frac{2س+12+4س-12}{(س-3)(6+س)}\times\frac{1}{س}$$

$$\lim_{س\to 0}\frac{6س}{(س-3)(6+س)}\times\frac{1}{س}$$

$$=\frac{6}{(0-3)(6+0)}=\frac{6}{-3\times 6}=-\frac{1}{3}$$

مثال ⑤

$$\frac{\frac{س}{3}-2}{س-6}$$ اوجد $\lim_{س\to 6}$

الحل

بالتعويض $=\frac{0}{0}$

$$\lim_{س\to 6}\frac{\frac{س-6}{3}}{س-6}$$

$$\lim_{س\to 6}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

مثال ⑥ $م\cdot م\cdot ب=1$

اذا علمت ان $\lim_{س\to 2}\frac{ب س^2-5س}{س-2}$ موجود فاوجد قيمة $ب$

ملاحظه

في لغة المعلم ان السؤال اذا كانت النهايه موجوده فان المقام $=$ صفر فان البسط $=$ صفر

الحل

$ب(2)^2-5(2)=0$ عندما $س\to 2$

$4ب-10=0 \Leftarrow 4ب=10$

$$ب=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\text{فيكون}\quad \frac{1\times س-2\times 2}{1\times 3}$$

$$\lim_{س\to 6}\frac{س-6}{6-س}$$

$$=\lim_{س\to 6}\frac{1}{3}\times\frac{6-س}{6-س}=\frac{1}{3}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

اوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{س-٢} - \frac{س+٢}{س-١}}{س-٤}$

الحل

التعويض = ÷

توحيد المقام

$= \frac{\frac{س(س-١) - (س+٢)(س-٢)}{(س-٢)(س-١)}}{س-٤}$

$= \frac{\frac{س^٢-س-(س^٢-٤)}{(س-٢)(س-١)}}{س-٤}$

$= \frac{س^٢-س-س^٢+٤}{(س-٢)(س-١)} \times \frac{١}{س-٤}$

$= \frac{-س+٤}{(س-٢)(س-١)} \times \frac{١}{-(س-٤)}$

$= \frac{-١}{(٤-٢)(٤-١)} = \frac{-١}{٣\times٢} = \frac{-١}{٦}$

تدريب (٤) ص ٣٨

جد $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٣}}{س-٢}$

الحل

التعويض = ÷ توحيد المقامات

$= \frac{\frac{٣-(س+١)}{٣(س+١)}}{س-٢}$

$= \frac{\frac{-س+٢}{٣(س+١)}}{س-٢}$

$= \frac{-١}{٣(١+٢)} = \frac{-١}{٣\times٣} = \frac{-١}{٩}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص ٣٩

ه) $ق(س) = \frac{\frac{1}{س-٢} - \frac{1}{٥}}{س^٤ - ١٤}$

$س \leftarrow ٧$

التعويض = ÷ توحيد مقامات

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٧} \frac{\frac{1}{س-٢} - \frac{1}{٥}}{س^٤ - ١٤}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٧} \frac{٥ - س + ٢}{٥ \times (س-٢) \times (س^٢ - ١٤)}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٧} \frac{-(س-٧)}{٥ \times (س-٢) \times (س-٧)(س+٧)(س^٢+١٤)}$

$= \frac{-١}{٥ \times (٧-٢)} \times \frac{١}{٧+٧} \times \frac{١}{٧^٢+١٤}$

$= \frac{-١}{٥ \times ٥} \times \frac{١}{١٤} \times \frac{١}{٦٣}$

$= \frac{-١}{٤ \times ٥ \times ٧ \times ٩} = \frac{-١}{٥٠}$

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠١١) شتوية

$\text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٢س}}{س - ١}$

الحل

التعويض = ÷ توحيد مقامات

$= \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{٢س - س - ١}{٢س(س+١)(س-١)}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{(س-١)}{٢س(س+١)(س-١)} \times \frac{١}{س-١}$

$= \frac{١}{٢ \times ٢ \times (١+١)} = \frac{١}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١١) الدورة الصيفية

جد $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٢س}}{س - ١}$

الحل

بتوحيد المقام

$= \lim_{س \to ١} \frac{٢س - (س+١)}{٢س(س+١)} \times \frac{١}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س-١}{٢س(س+١)} \times \frac{١}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{١}{٢س(س+١)}$

$= \frac{١}{٢ \times ١ \times (١+١)} = \frac{١}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

② (ص ١٤، ٤) تمرين

نهـا $\frac{1}{س+3} - \frac{1}{س}$ / $\frac{س-3}{3س(س+3)}$

س ← ٣

البسط = ÷ توحيد مقامات

نهـا $\frac{1 \times س - 1 \times (س+3)}{(س+3)(س)(3)}$

س ← ٣

نهـا $\frac{س - س - 3}{(س+3)(س)(3)} \times \frac{1}{س-3}$

س ← ٣

نهـا $\frac{-3}{(س+3)(س)(3)} \times \frac{1}{س-3}$

س ← ٣

$= \frac{1}{(3+3)(3)(2)} = \frac{1}{36}$

③ (ص ١٥، ٤) صيغة

نهـا $\frac{1}{س^3} - \frac{1}{س+2}$

س ← ١

البسط = ÷ توحيد مقامات

نهـا $\frac{1 \times (س+2) - 1 \times س^3}{3س^3(س+2)}$

س ← ١

نهـا $\frac{س+2-3س^3}{3س^3(س+2)} \times \frac{1}{1-س}$

س ← ١

نهـا $\frac{2-2س}{3س^3(س+2)} \times \frac{1}{1-س}$

س ← ١

نهـا $\frac{2(1-س)}{3س^3(س+2)} \times \frac{1}{1-س}$

س ← ١

$= \frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{(2+1)1 \times 3} = \frac{2}{9}$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

جد قيمة

$$\text{ها}_{س \to 0} \frac{\frac{1}{س-5} + \frac{2}{4س+10}}{3س}$$

الحل

$$= \text{ها}_{س \to 0} \frac{\frac{4س+10+2س-10}{(س-5)(4س+10)}}{3س}$$

$$= \text{ها}_{س \to 0} \frac{\cancel{6س}}{(س-5)(4س+10)} \times \frac{1}{\cancel{3س}}$$

$$= \frac{2}{(0-5)(10+0\times4)}$$

$$= \frac{2}{-50} = -\frac{1}{25}$$

وزارة (٢٠١٨) صيفية

اوجد $\text{ها}_{س \to 4} \frac{\frac{1}{س} - \frac{1}{4}}{4-س}$

الحل توحيد مقام

$$\text{ها}_{س \to 4} \frac{\frac{4-س}{4س}}{4-س}$$

$$= \text{ها}_{س \to 4} \frac{-(س-4)}{4س} \times \frac{1}{4-س}$$

$$= \frac{-1}{4\times4} = \frac{-1}{16}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الاتصال

الاتصال عند نقطة

يكون الاقتران ق متصلاً عند س = م اذا تحققت الشروط الاتيه

١- ق (م) معرف عند م اي ان ق(م) عدد حقيقي (الصوره)

٢- يصا ق(س) موجوده (النهايه)
س ← م

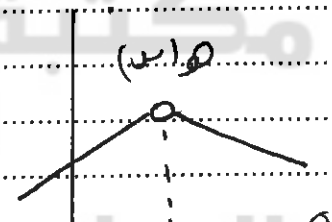
٣- يصا ق(س) = ق(م)
س ← م

النهايه = الصوره

مثال ①

بين سبب عدم اتصال الاقترانات التاليه عند س = ٤

أ)

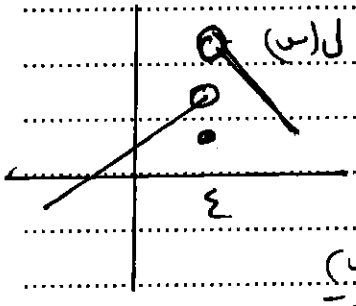


ق(س) غير معرف عند س = ٤

ق(٤) غير موجوده

← غير متصل

ب)

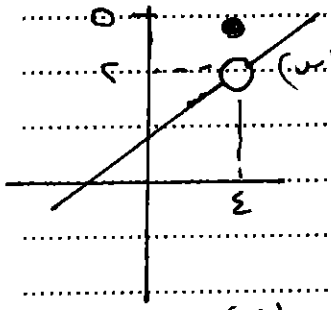


يصا ل(س)
س ← ٤+

لا تساوي يصا ل(س)
س ← ٤-

النهايه غير موجوده ← ل(س) غير متصل

ج)



ق(٤) = ٥

يصا ق(س) = ٢
س ← ٤

يصا ق(س) ≠ ق(٤)
س ← ٤

غير متصل

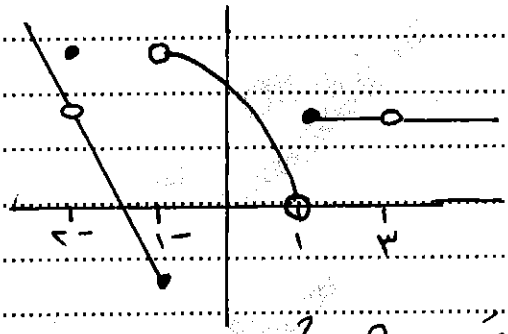
ملاحظه هامه

اذا أعطانا السؤال رسم وطلب ايجاد نقاط عدم الاتصال ننظر الى الحلقات والقفزات

مكتبة الوسام AlWesam
العلم ناجح الجمزاوي

مثال (٢)

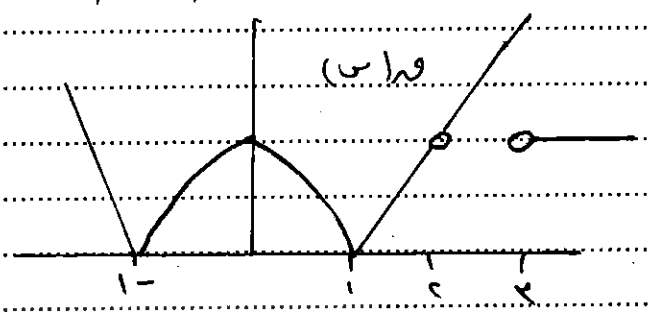
جد قيمة س التي يكون عندها الأقتران غير متصلاً معتمداً على الرسم المجاور



الحل : مج س هي $\{-٢، -١، ١، ٣\}$

مثال (٣)

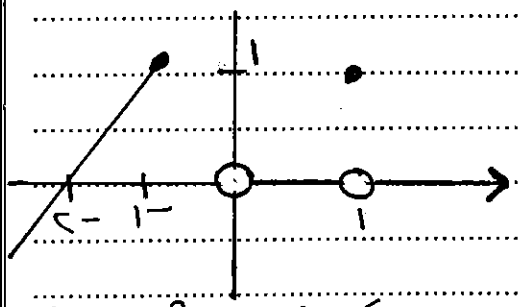
جد مج س التي يكون عندها ق(س) غير متصلاً معتمداً على الرسم المجاور



مج س هي $\{-١، ١، ٢، ٣\}$

مثال (٤)

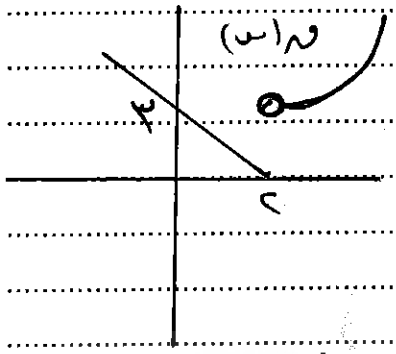
معتمداً على الشكل الذي يمثل ق(س) اوجد نقاط عدم الاتصال



الحل نقاط عدم الاتصال هي $\{-١، ١\}$

مثال (٥)

معتمداً على الشكل المجاور ابحث في اتصال الأقتران ق عند س = ٢



الحل

ق(٢) = صفر

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٣

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = صفر

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجود

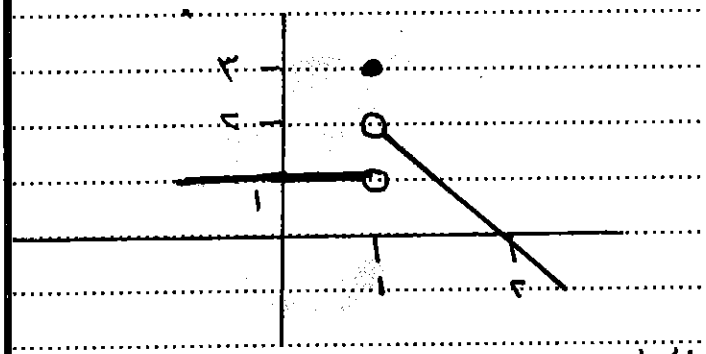
$\therefore$ ق(س) غير متصل عند س = ٢

مكتبة الأوائل ALWEDAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

ارسم بيانيا الدالة د حيث د(س) = { ٣ - س ، س < ١ ، ٢ ، س = ١ ، س - ٢ ، س > ١ }

ثم ادرس اتصال د عند س = ١



الحل

١) عند س = ١

د(١) = ٢

$\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ (س - ٢) = ١ - ٢ = -١

$\lim_{س \to ١^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٣ - س) = ٣ - ١ = ٢

∵ $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) ≠ $\lim_{س \to ١^-}$ د(س)

∴ $\lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة

∴ د(س) غير متصلة عند س = ١

٢) عند س = ٢

د(٢) = صفر

$\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (س - ٢) = صفر

$\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (س - ٢) = صفر

∵ $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = د(٢) = صفر

∴ د متصلة عند س = ٢

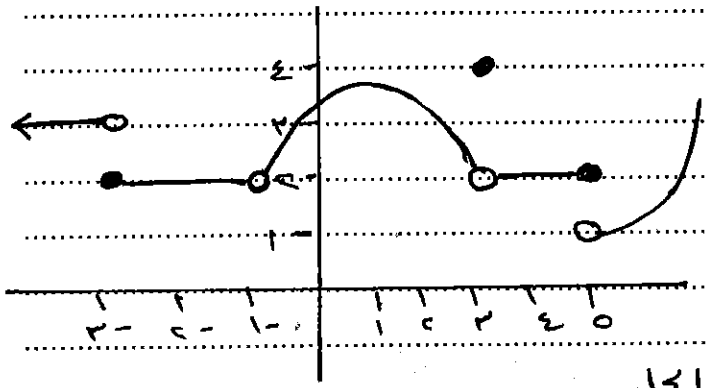
مثال ⑦

اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران د

اجب عما يلي :

١) ما مجموعة تعريف د حيث $\lim_{س \to ٣}$ د(س) غير موجود

٢) ما مجموعة تعريف د حيث د غير متصلة عند س = ٠



الحل

١) P = { -٣ ، ٣ }

٢) ن = { -٣ ، -١ ، ٣ ، ٦ ، ٥ }

مركز الوسام ALWESAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

نظرية

اذا كان $هـ(س)$ اقتران كثير حدود فهو متصل لكل الاعداد الحقيقية ح

مثال ⑧

ليكن $هـ(س) = س^٥ - ٨س + ٣$

ابحث في اتصال $هـ(س)$

الحل

$هـ(س)$ متصل لأنه كثير حدود

مثال ⑨

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & س \leq ٢ \\ ٧ - س & س > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال $هـ(س)$ عند $س = ٢$

الحل

① $هـ(٢) = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

② $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٧ - ٢ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

$\therefore \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٥$

③ $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

مثال ⑩

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٤ & س = ٢ \end{cases}$$

الحل

① $هـ(س)$ معرف عند $س = ٢$

$هـ(٢) = ٤$

② $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٢ + ٢ = ٤$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢) = ٤$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

مثال ⑪

$$هـ(س) = \begin{cases} \sqrt{١ - س} & س < -١ \\ \frac{٥}{س - ١} & س \geq -١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال $هـ(س)$ عند $س = -١$

① $هـ(-١)$ غير معرف نلاحظ انه لا يوجد هناك عدد (=) في قاعدة $هـ(س)$

$\therefore هـ(س)$ غير متصل عند $س = -١$

مثال (١٢)

اذا كان $\lim_{س \to ٣} (ه(س) + ٤) = ٩$

وكانت $ه(٣) = ٥$ ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٣$

الحل

① $ه(٣) = ٥$

② $\lim_{س \to ٣} ه(س)$ نجدها من المعطيات

$\lim_{س \to ٣} (ه(س) + ٤) = ٩$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) + \lim_{س \to ٣} ٤ = ٩$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) + ٤ = ٩$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ٥$

③ $\lim_{س \to ٣} ه(س) = ه(٣) = ٥$

$\Leftarrow$ ه متصل عند $س = ٣$

مثال (١٣)

اذا كانت $\lim_{س \to -١} (٢ه(س) + س^٢) = ٧$

وكان $ه(-١) = ٣$ ، ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = -١$

الحل

① $ه(-١) = ٣$

② نجدها $\lim_{س \to -١} ه(س)$ من المعطيات

$\lim_{س \to -١} (٢ه(س) + س^٢) = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} ه(س) + \lim_{س \to -١} س^٢ = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} ه(س) + (-١)^٢ = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} ه(س) = ٦$

$\lim_{س \to -١} ه(س) = ٣$

③ $\lim_{س \to -١} ه(س) = ٣ = ه(-١)$

$\Leftarrow$ ه متصل عند $س = -١$

مكتبة المعلم
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٤)

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٢ & س > ٢ \\ ٤ - ب س & س \leq ٢ \end{cases}$

اوجد قيمة ب حيث هـ(س) متصل عند س = ٢

الحل

بما ان هـ(س) متصل عند س = ٢

$\therefore$ نها هـ(س) = نها هـ(س)
$س \to ٢^{+}$ $س \to ٢^{-}$

$٣ب^{٢} - ٢ = ٤ - ٢ب$

$٣ب^{٢} - ٢ = ٤ - ٢ب$

$٣ب^{٢} + ٢ب - ٦ = ٠$

$ب = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ + ٧٢}}{٦}$

$ب = \frac{-٢ \pm ٨٩}{٦}$

$ب = -٢$

مثال (١٥)

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٨س & س < ب \\ ٢ب & س \geq ب \end{cases}$

وكان هـ(س) متصل عند س = ب اوجد قيمة ب

الحل

هـ(س) متصل عند س = ب

$\leftarrow$ نها هـ(س) = نها هـ(س)
$س \to ب^{+}$ $س \to ب^{-}$

$ب^{٢} + ٨ب = ٢ب$

$ب^{٢} + ٨ب - ٢ب = ٠$

$ب^{٢} + ٦ب = ٠$

$ب(ب + ٦) = ٠$

$ب = ٠$ $ب = -٦$

مثال (١٦)

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ٢ & س < -١ \\ ٥ & س = -١ \\ س + ب & س > -١ \end{cases}$

جد قيم ب ، ب التي تجعل هـ متصلاً

الحل

① نها هـ(س) = هـ(-١)
$س \to -١^{+}$

$-١ + ب = ٥ \leftarrow ب = ٥ + ١ = ٦$

② نها هـ(س) = هـ(-١)
$س \to -١^{-}$

$٢ب - ١ - ٢ = ٥$

$٢ب - ٣ = ٥$

$٢ب = ٥ + ٣ = ٨$

$\leftarrow ب = ٤$

مكتبة الساحل ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٧)

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^{٢} - ب س + ٩ & س < ٠ \\ ج(٩ + ب) & س = ٠ \\ -٢ & س > ٠ \end{cases}$$

جد قيمة ٩ ، $ب$ حيث هـ متصل عند $س = ٠$

الحل

ملاحظة: دائماً نبدأ بالقاعدة الأصل مما أمكن ذلك

هـ متصل عند $س = ٠$

① $\text{نها}_{س \to ٠^-} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٠)$

$ج(٠)^{٢} - ب(٠) + ٩ = -٢$

$٩ = -٢$

② $\text{نها}_{س \to ٠^+} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٠)$

$ج(٩ + ب) = -٢$

$ج(-٢ + ب) = -٢$ بالقسمة على $ج$

$-٢ + ب = -\frac{١}{ج}$

$ب = -\frac{١}{ج} + ٢$

مثال (١٨)

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ج س^{٣} + س + ٨ & س \geq -١ \\ ٩(س + ١) + ب - ١ & س < ٢ \\ ٣ س^{٢} + ب & س > ٢ \end{cases}$$

وكان هـ$(س)$ متصل لجميع قيم $س$ فأوجد ٩ ، $ب$

الحل

① هـ$(س)$ متصل عند $س = -١$

نها هـ$(س)$ = هـ(-١)

$س \to -١^+$

$٩(-١ + ١) + ب = ج(-١)^{٣} + (-١) + ٨$

$٠ + ب = -ج + ٧$

$ب = -ج + ٧$ ..... (١)

② هـ$(س)$ متصل عند $س = ٢$

نها هـ$(س)$ = هـ(٢)

$س \to ٢^-$

$٩(٢ + ١) + ب = ٣ \times ٤ + ٤$

$٩ + ب = ١٦$ ..... (٢)

(١) في (٢)

$٩ - ج = ١٢$

$٩ = ١٢ + ج$ ..... (٣)

(٣) في (١)

$ب = -ج + ٧ - ج$

$ب = -٢ج + ٧$ ..... (٤)

(٣) في (٤)

$ب = -٢(١٢ + ج) + ٧$

$ب = -٢٤ - ٢ج + ٧$

$ب = -٢ج - ١٧$

مثال (١٩)

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س+٥ & ، س < -١ \\ ٩-٢س & ، -١ \leq س \leq ٣ \\ س^{٢}-٦ & ، س > ٣ \end{cases}$

اجب في اتصال $هـ(س)$ عند $س = ٣$

الحل

① $هـ(٣) = ٩-٢ \times ٣ = ٩-٦ = ٣$

② $\lim_{س \to ٣^{+}} هـ(س) = ٣^{٢}-٦ = ٩-٦ = ٣$

$\lim_{س \to ٣^{-}} هـ(س) = ٩-٢ \times ٣ = ٩-٦ = ٣$

③ $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣) = ٣$

$\Leftarrow$ $هـ$ متصل عند $س = ٣$

مثال (٢٠)

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢}+٧ & ، س \geq -٢ \\ ٩س+١ & ، س < -٢ \end{cases}$

وكان $هـ$ متصلاً عند $س = -٢$

فما قيمة الثابت ٩ ؟

الحل

بما أن $هـ$ متصل عند $س = -٢$

$\Leftarrow \lim_{س \to -٢^{+}} هـ(س) = هـ(-٢)$

$\Leftarrow$

$٩ \times -٢ + ١ = (-٢)^{٢} + ٧$

$-١٧ = ٤ + ٧ = ١١$

$٩ = -١٨$

$٩ = -٥$

مكتبة الوسام AWSSAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢١)

اذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س - ١٢}{س^٢ - ٣س - ٤} & س \neq ٤ ، س \neq -١ \\ م & س = ٤ \end{cases}$$

ما قيمة الثابت م التي تجعل هـ متصلاً عند س = ٤ ؟

الحل

هـ(س) متصل عند س = ٤

$$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ٤} هـ(س) = هـ(٤)$$

$$\text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{٣س - ١٢}{س^٢ - ٣س - ٤} = م$$

$$\text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{٣(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ١)} = م$$

$$\dfrac{٣}{٤ + ١} = م \Leftarrow م = \dfrac{٣}{٥}$$

مثال (٢٢)

حالة عدم الاتصال للاقتران

$$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س > ٤ \\ ٦ & س = ٤ \\ س + ٢ & س < ٤ \end{cases}$$

الحل

$$\text{نها}_{س \to ٤^+} هـ(س) = ٤ + ٢ = ٦$$

$$\text{نها}_{س \to ٤^-} هـ(س) = ٤^٢ + ١ = ١٧$$

نها هـ(س) غير موجودة
س ← ٤

هـ(س) غير متصل عند س = ٤

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣)

اذا كان هـ ، هـ اقترانين متصلين وكان هـ(٢) = ٥

هـا (هـ(س) + ٤ هـ(س)) = ٤١
س ← ٢

فأوجد هـ (٢)

الحل

هـا هـ(س) + ٤ هـا هـ(س) = ٤١
س ← ٢ س ← ٢

٥ + ٤ هـا هـ(س) = ٤١
س ← ٢
٥-

٤ هـا هـ(س) = ٣٦
س ← ٢

بالقسمة على ٤

هـا هـ(س) = ٣٦/٤
س ← ٢

هـا هـ(س) = ٩
س ← ٢

ولأن هـ(س) متصل عند س = ٢

⇐ هـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢ = ٩

مثال (٤)

اذا كان هـ(س) = { م س^٢ + ن ، س < ٢ ؛ ١٦ ، س = ٢ ؛ ٣ م س + ١ ، س > ٢ }

وكان هـ متصلاً عند س = ٢

فما قيمة كل من م ، ن ؟

الحل

هـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢+

١٦ = ٣ م × ٢ + ١

١٦ = ٦ م + ١

٦ م = ١٥ ⇐ م = ١٥/٦ = ٥/٢

هـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢-

م (٢)^٢ + ن = ١٦

٤ م + ن = ١٦

٤ × ٥/٢ + ن = ١٦

١٠ + ن = ١٦

ن = ٦

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات وأسئلة الكتاب

تدريب ① ص ٤٩

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^2 + ٢ & ، س < ١ \\ ٣س & ، ١ \leq س < ٣ \\ س^3 - ١٨ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران هـ عند كل مما يأتي

١) $س = ٠$ ٢) $س = ١$ ٣) $س = ٣$

الحل

① $هـ(٠) = ٠^2 + ٢ = ٢$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) = ٠^2 + ٢ = ٢$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) = هـ(٠)$

$س \to ٠$ متصل عند $س = ٠$

② $هـ(١) = ٣ \times ١ = ٣$

$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ٣ \times ١ = ٣$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = (١)^2 + ٢ = ٣$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١) = ٣$

$س \to ١$

متصل عند $س = ١$

③ $هـ(٣) =$ غير معرفة

$\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = ٣^3 - ١٨ = ٢٧ - ١٨ = ٩$

$\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = ٣ \times ٣ = ٩$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣) = ٩$

$س \to ٣$

غير متصل عند $س = ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ②

اذا كان $\text{د}(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٤ & س = ٢ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران د عندما $س = ٢$

الحل

$\text{د}(٢) = ٤$

$\text{نها}_{س \to ٢} \text{د}(س) = \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س(س-٢)}{س-٢} = ٢$

$\text{نها}_{س \to ٢} \text{د}(س) \neq \text{د}(٢)$

غير متصل عند $س = ٢$

تدريب ③

① اذا كان $\text{د}(س) = \begin{cases} ٤ + س^{٣} & س < -٢ \\ ٦ + ٢س & س \geq -٢ \end{cases}$

وكان الاقتران د متصلاً عندما $س = -٢$ ، فجد قيمة الثابت ٢ .

الحل

بما ان $\text{د}(س)$ متصل عند $س = -٢$

فان

$\text{نها}_{س \to -٢} \text{د}(س)$ موجود

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to -٢^{+}} \text{د}(س) = \text{نها}_{س \to -٢^{-}} \text{د}(س)$

$٦ + ٢(-٢) - ٢٨ = ٤ + (-٢)^{٣} ٢$

$٦ + ٢٤ - = ٤ + ١٦ -$

$٦ + ٢٤ - = ١٢ -$

$-٦ \quad -٦$

$-٢٤ = -١٨$

$-٢ \quad -٢$

$٢ = ٩$

مكتبة الوسام AWSAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

②

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} أ س + ٣ & س > ١ \\ ٧ & س = ١ \\ س - ب & س < ١ \end{cases}$

وكان هـ متصلاً عندما س = -١
فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

الحل

بما ان هـ متصلاً عند س = -١
فان

① $\lim_{س \to -١^+} هـ(س) = هـ(١)$

$أ + ٣ = ٧$

$أ = ٤$

② $\lim_{س \to -١^-} هـ(س) = هـ(١)$

$١ - ب = ٧$

$-ب = ٦ \Leftarrow ب = -٦$

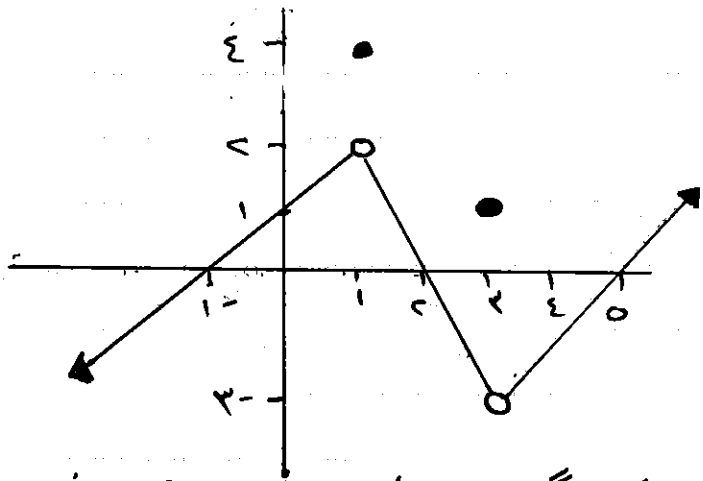
③ $\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = هـ(١)$

$٣أ + ٣ = ٧$

$٣أ = ٤$

$أ = \frac{٤}{٣}$

السؤال الأول ص٥٣



اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى هـ المعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية جد جميع س التي يكون الاقتران هـ عندها غير متصل

الحل

عند س = ١

هـ(١) = ٤ ، $\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٢$

هـ غير متصل عند س = ١

عند س = ٣

هـ(٣) = ١ ، $\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = -٣$

هـ غير متصل عند س = ٣

مجموعة الحل = {١ ، ٣}

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص٥٣

اذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^2 - ١ & س \leq ١ \\ ٢س & س > ١ \end{cases}$

فاحث في اتصال ه عندما س = ١

اكل

$ه(١) = ٢ \times ١ = ٢$

$\lim_{س \to ١^+} ه(س) = ٢ \times ١ = ٢$

$\lim_{س \to ١^-} ه(س) = ١^2 - ١ = صفر$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} ه(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ ه غير متصل عند س = ١

السؤال الثالث ص٥٣

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} \frac{٥}{س+١} & س \neq ١ \\ ٣ & س = ١ \end{cases}$

اجث اتصال الاقتران هـ عند س = ١

اكل

$هـ(١) = ٣$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = \lim_{س \to ١} \frac{٥}{س+١}$

$= \frac{٥}{٢}$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) \neq هـ(١)$

هـ(س) غير متصل عند س = ١

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع ص٥٣

اذا علمت ان

$$هـ(س) = \begin{cases} س^2 + 3 & س < -1 \\ 5 - س & -1 \le س < 1 \\ س^3 + 3 & س > 1 \end{cases}$$

احث اتصال هـ عندما

م) $س = 1$ ب) $س = -1$

الحل

م) $هـ(1) = 1^2 + 3 = 4$

$\text{نهـا}_{س \to 1^+} هـ(س) = 1^2 + 3 = 4$

$\text{نهـا}_{س \to 1^-} هـ(س) = 5 - 1 = 4$

$\text{نهـا}_{س \to 1} هـ(س) = هـ(1) = 4$

متصل عند $س = 1$

ب) $هـ(-1) = 5 - -1 = 6$

$\text{نهـا}_{س \to -1^+} هـ(س) = 5 - -1 = 6$

$\text{نهـا}_{س \to -1^-} هـ(س) = (-1)^2 + 3$

$= 4$

$\text{نهـا}_{س \to -1}$ غير موجود

$\Leftarrow$ هـ غير متصل عند $س = -1$

السؤال الخامس ص٥٣

اذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{3 - س}{3 - س} & س \neq 3 \\ م س + 2 & س = 3 \end{cases}$$

وكان هـ متصل عند $س = 3$

جد قيمة م

الحل

$\text{نهـا}_{س \to 3} هـ(س) = هـ(3)$

$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{3 - س}{3 - س} = م(3) + 2$

$\Leftarrow 1 = 3م + 2$

$\Leftarrow 3م = -1$

$\Leftarrow م = -\frac{1}{3}$

مكتبة العلم ALILM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السادس ص٥٤

اذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} س+٩ & س<٢ \\ ٨ & س=٢ \\ ب س+٦ & س>٢ \end{cases}$$

وكان الاقتران هـ متصلاً عندما س = ٢ ، جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

الحل

هـ متصل عند س = ٢

① $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = هـ(٢)$

$٢ب + ٦ = ٨$

$٢ب = ٨ - ٦$

$ب = ١ \Leftarrow ٢ب = ٢$

② $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = هـ(٢)$

$أ + ٩ = ٨$

$أ = -١$

السؤال السابع ص٥٤

اذا كان

$$ل(س) = \begin{cases} أس - ب & س<١ \\ ٤ & س=١ \\ أس^٣ + ب + ٢ & س>١ \end{cases}$$

وكان الاقتران ل متصل عند س = ١ فاوجد أ ، ب ؟

الحل

① $\lim_{س \to ١^+} ل(س) = ل(١)$

$أ(١)^٣ + ب + ٢ = ٤$

$أ + ب + ٢ = ٤$ ... ①

② $\lim_{س \to ١^-} ل(س) = ل(١)$

$أ(١) - ب = ٤$

$أ - ب = ٤$ ... ②

نحل معادلتين بطريقة الحذف بالجمع

$أ + ب = ٤$

$أ - ب = ٤$

$٢أ = ٨ \Leftarrow ٢أ = ٨$ بالجمع

مكتبة المعلم ALMOALEM المعلم: ناجح الجمزاوي

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{٤} = ٦$ بالقسمة على $\frac{١}{٤}$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢٤$

$ق(٢) = ٣$

بتعويض $ق(٢) = ٣$ في المعادلة ①

$٣ - ل = ٤$

$-٢ \quad -٣$

$-ل = ١$

$ل = -١$

السؤال الثامن ص٤٥

اذا كان الاقتران $ق$ متصلاً عند $س = ٢$ وكانت

$\lim_{س \to ٢} [ق(س) + س] = ٦$

مجموعة $ق(١)$

الحل

$\lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} س = ٦$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) + ٢ = ٦$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

وبما ان $ق(س)$ متصل

عند $س = ٢$ فان

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢) = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان $\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١ & س > -٢ \\ س+م & س \leq -٢ \end{cases}$

وكان هـ متصلاً عند س = -٢ فجد قيمة م

الحل

هـ متصل عند س = -٢

$\therefore$ هـ(-٢) = هـ(-٢)

$٣(-٢)^{٢}+١ = -٢+م$

$٤ \times ٣ + ١ = -٢+م$

$١٣ = ٢+م$

$م = ١٠$

② وزارة (٢٠١٩) شتوية

اذا كان $\text{هـ}(س) = \begin{cases} م س+١ & س \leq ٢ \\ ٧ & س = ٢ \end{cases}$

فجد قيمة الثابت م التي تجعل هـ متصلاً عند س = ٢

الحل

هـ متصل عند س = ٢

$\therefore$ هـ(٢) = هـ(٢)

$م \times ٢ + ١ = ٧$

$٢م = ٦ \leftarrow م = \frac{٦}{٢} = ٣$

③ وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان $\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^{٢}-٤ & س \leq ٢ \\ م س+٣ & س > ٢ \end{cases}$

وكان هـ متصلاً عند س = ٢

فما قيمة الثابت م ؟

الحل

هـ(٢) = هـ(٢)

$م \times ٢ + ٣ = ٢^{٢}-٤$

$٢م = ٤-٤ = ٠$

$م = \frac{٠}{٢} = ٠$

مكتبة السراج AGYESAN
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان f، h اقترانين متصلين عند $س = ٣$ وكان $f(٣) = ١٢$

$\lim_{س \to ٣} (f(س) - ٤ h(س)) = ٢٠$

جد $h(٣)$

الحل

f متصل عند $س = ٣$

$\lim_{س \to ٣} f(س) = f(٣) = ١٢$

$\lim_{س \to ٣} f(س) - ٤ \lim_{س \to ٣} h(س) = ٢٠$

$١٢ - ٤ \lim_{س \to ٣} h(س) = ٢٠$

$-٤ \lim_{س \to ٣} h(س) = ٨$

$\lim_{س \to ٣} h(س) = -٢$

h متصل عند $س = ٣$

$\lim_{س \to ٣} h(س) = h(٣) = -٢$

⑤ وزارة (٢٠١٥) شتوية

اذا كان $f(س) = \begin{cases} ٢س^{٣} + ٤ & س > -٢ \\ ٣س + ٦ & س \leq -٢ \end{cases}$

وكان f متصلاً عند $س = -٢$

فما قيمة الثابت $أ$ ؟

الحل

f متصل عند $س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^{+}} f(س) = f(-٢)$

$\lim_{س \to -٢^{+}} ٢س^{٣} + ٤ = ٣(-٢) + ٦$

$-١٦ + ٤ = -٦ + ٦$

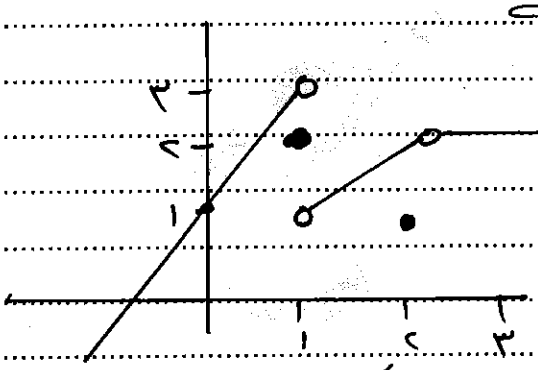
$-١٢ = -أ٢$

$أ = ٩$

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام ناجح الجمزاوي

⑥ وزارة ١٥، ٢٠١٥ صيفية

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(x)$ المعرف على المجال الحقيقي



أكتب قيم x التي يكون عندها الأقتران f غير متصل

الحل قيم x هي $\{1, 2\}$

---

⑦ وزارة (٢٠١٦، ٢) شتوية

اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b & x \geq 1 \\ 7 & x = 1 \\ x^2 - 4b - 6 & x < 1 \end{cases}$$

جد قيمة كل من الثابتين a, b التي تجعل الأقتران f متصلاً عند $x = 1$

الحل

f متصل عند $x = 1$

$\Leftarrow \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$x \to 1^+$

$\lim_{x \to 1^+} (x^2 - 4b - 6) = 7$

$1 - 4b - 6 = 7$

$-4b - 5 = 7 \Leftarrow -4b = 12 \Leftarrow b = -3$

$\Leftarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

$x \to 1^-$

$\lim_{x \to 1^-} (2ax^2 + b) = 7$

$2a + b = 7$

$2a - 3 = 7$

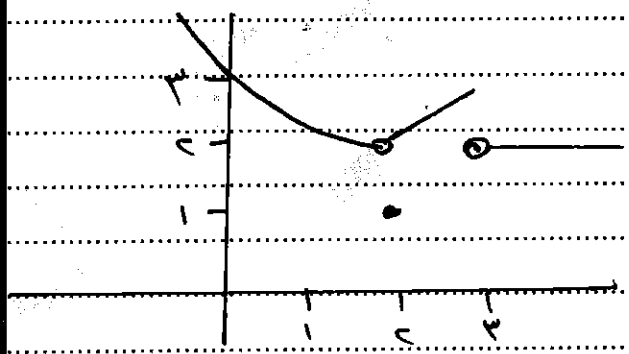
$2a = 10 \Leftarrow a = 5$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١٦) صيفية

① اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقترانين ه(س) ، و(س)

أ- اعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية



ب- اكتب جميع س التي يكون عندها الاقترانين ه ، و غير متصل

س = {٢ ، ٣}

② اذا كان ه ، و اقترانين متصلين عند س = ٣ وكان ه(٣) = ١١

جد

① $\lim_{س \to ٣} س^{٣}\, ه(س) - ٨$

الحل

ه متصل عند س = ٣

$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ه(٣) = ١١$

$\lim_{س \to ٣} س^{٣}\, ه(س) - \lim_{س \to ٣} ٨$

$= ٣^{٣} \times ١١ - ٨ = ١١ \times ٩ - ٨$

$= ٩٩ - ٨ = ٩١$

② جد $\lim_{س \to ٣} ه(س)$ التي تجعل

$$\frac{\lim_{س \to ٣} ه(س) - س = ١}{\lim_{س \to ٣} (ه(س))^{٣}}$$

الحل

$$\frac{\lim_{س \to ٣} ه(س) - \lim_{س \to ٣} س = ١}{\lim_{س \to ٣} (ه(س))^{٣}}$$

$$\frac{١١ - ٣ = ١}{(\lim_{س \to ٣} ه(س))^{٣}}$$

$$\frac{٨ = ١}{(\lim_{س \to ٣} ه(س))^{٣}}$$

$(\lim_{س \to ٣} ه(س))^{٣} = ٨$ باخذ الجذر التكعيبي

$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ٢ = و(٣)$ لأن و(س) متصل عند س = ٣

وزارة (٢٠١٧) شتوية

اذا كان هـ ، هـ اقترانين متصلين عند س = ٢ وكان هـ(٢) = ٦

نهـا (هـ(س) - ٤ هـ(س)) = -١٤
س ← ٢

فاجب عن كل مما يأتي

١) جد قيمة هـ(٢)

٢) جد قيمة الثابت ل التي تجعل

نهـا (هـ(س))^٢ - ل / هـ(س) = ٤
س ← ٢

الحل

① بما ان هـ متصل عند س = ٢

فان نهـا هـ(س) = هـ(٢) = ٦
س ← ٢

نهـا هـ(س) - ٤ نهـا هـ(س) = -١٤
س ← ٢ س ← ٢

٦ - ٤ نهـا هـ(س) = -١٤
س ← ٢

٢ نهـا هـ(س) = -٢٠
س ← ٢

نهـا هـ(س) = -١٠ = هـ(٢)
س ← ٢

لأن هـ متصل

② (نهـا هـ(س))^٢ - ل / نهـا هـ(س) = ٤
س ← ٢ س ← ٢

٦^٢ - ل / ٥ = ٤ ضرب بالتبادلي

٣٦ - ل = ٢٠

-ل = -١٦

ل = ١٦

مكتبة الإسلام AWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

إذا كان
$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} + (٢-م)س}{س} & س \neq ٠ \\ ٦ & س = ٠ \\ ٥ - س + ن & س > ٠ \end{cases}$$

وكان د متصلاً عند س = صفراً
فما قيمة كل من الثابتين م، ن ؟

الحل

د(س) متصل عند س = ٠

$$\text{نها}_{س \to ٠^{+}} د(س) = د(٠)$$

$$\text{نها}_{س \to ٠^{+}} \frac{س^{٢} + (٩-م)س}{س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{(س+٢-م)س}{س}$$

$$٠ + ٢ - م = ٦$$

$$-م = ٦ - ٢ \Leftarrow ٦ = م - ٢$$

$$\boxed{م = -٤}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠^{-}} د(س) = د(٠) = ٦$$

$$٥ - ٠ + ن = ٦$$

$$ن = ٦ - ٥ = ١$$

وزارة (٢٠١٨) صيفية

إذا كان
$$د(س) = \begin{cases} س + م & س > ٣ \\ ١ & س = ٣ \\ س^{٢} + ٣م + ن & س < ٣ \end{cases}$$

وكان الفرع د متصلاً عند
س = ٣ فما قيمة م، ن ؟

الحل

د(س) متصل عند س = ٣

① $\text{نها}_{س \to ٣^{+}} د(س) = د(٣)$

$$٣ + م = ١ \Leftarrow \boxed{م = -٢}$$

② $\text{نها}_{س \to ٣^{-}} د(س) = د(٣)$

$$٩ + ٣م + ن = ١ \quad \text{بوضع } م = -٢$$

$$٩ + ٣(-٢) + ن = ١$$

$$٩ - ٦ + ن = ١$$

$$ن = ١ - ٣$$

$$ن = ٤$$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

الاستاذ ناجح الجمزاوي

الثاني ثانوي الأدبي | الوحدة الأولى | المستوى الثالث

النهايات والإتصال

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ | ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

نظريات الاتصال

اذا كان كلاً من الاقترانين ه(س) ، هـ(س) متصلاً عند س = p فإن

① ه(س) + هـ(س) متصل عند س = p

② ه(س) − هـ(س) متصل عند س = p

③ ه(س) × هـ(س) متصل عند س = p

④ $\frac{ه(س)}{هـ(س)}$ متصل عند س = p

شرط هـ(p) ≠ صفر

ملاحظه هامة

① متصل (+ ، − ، × ، ÷) متصل ⇐ متصل

② متصل (+ ، − ، × ، ÷) غير متصل يجب ايجاد جمع أو طرح أو ضرب

أو قسمة الاقترانين ثم نبحث في الاتصال (الدمج)

③ غير متصل (+ ، − ، × ، ÷) غير متصل يجب ايجاد جمع أو طرح أو ضرب) الاقترانين ثم نبحث في الاتصال .

بشكل عام

اذا كان احد الاقترانين أو كلاهما غير متصل فيجب ايجاد جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة الاقترانين (دمج الاقترانين) ثم نبحث في الاتصال

مكتبة الرياضيات
الأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كان $ه(س) = ٢س - س^{٣}$

وكان $هـ(س) = \frac{٣س}{س^{٢} - ١}$

ابحث في اتصال $ه(س) - هـ(س)$ عند $س = ٢$

الحل

$ه$ متصل لأنه كثير حدود

$هـ$ متصل لسبب اصفار المقام

$س^{٢} - ١ = ٠$ ، $س^{٢} = ١$

$س = \pm ١$

العدد ٢ ليس صفراً للمقام

$\leftarrow$ $هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

$\Leftarrow$ حسب نظريات الإتصال

$ه(س) - هـ(س)$ = متصل - متصل

= متصل

مثال ②

لتكن $ه(س) = س - ٣$

$$هـ(س) = \begin{cases} س + ٢ & س \leq ٣ \\ س + ٤ & س > ٣ \end{cases}$$

وكان $ل(س) = ه(س) \times هـ(س)$

ابحث في اتصال $ل(س)$ عند $س = ٣$

الحل

① $ه(س)$ متصل لأنه كثير حدود

② نبحث في اتصال $هـ(س)$ عند $س = ٣$

$هـ(س) = ٣ + ٢ = ٥$

$س \leftarrow ٣^{+}$

$هـ(س) = ٣ + ٤ = ٧$

$س \leftarrow ٣^{-}$

$هـ(س)$ غير متصل

$\leftarrow$ يتبع

مكتبة السلام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

بما أن احد الأقترانين غير متصل هنا لابد من (دمج) ايجاد قاعدة الأقتران ل(س)

ل(س) = ق(س) × ه(س)

$$= (س-٣) \times \begin{cases} س+٢ & س \leq ٣ \\ س+٤ & س > ٣ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (س-٣)(س+٢) & س \leq ٣ \\ (س-٣)(س+٤) & س > ٣ \end{cases}$$

نهـا ل(س) = (٣-٣)(٣+٢)
س ← ٣ = ٠ × ٥ = صفر

نهـا ل(س) = (٣-٣)(٣+٤)
س ← ٣ = ٠ × ٧ = صفر

ل(٣) = (٣-٣)(٣+٢)
= صفر

⇐ ل(٣) = نهـا ل(س)
س ← ٣

← ل(س) متصل عند س = ٣

مثال ②

$$\text{لتكن } ق(س) = \begin{cases} س+١ & س \geq ٠ \\ ٣-س & س < ٠ \end{cases}$$

$$ه(س) = \begin{cases} ١-س^{٢} & س \geq ٠ \\ ١+ر^{٢} & س < ٠ \end{cases}$$

ل(س) = ق(س) - ه(س)
ابحث في اتصال ل(س) عند س = ٠

الحل

① نبحث في اتصال ق(س) عند س = ٠
ق(٠) = ٠ + ١ = ١
نهـا ق(س) = ٠ + ١ = ١
س ← ٠+
نهـا ق(س) = ٣ - ٠ = ٣
س ← ٠-
ق غير متصل عند س = ٠

في هذه الحالة نجد قاعدة
ل(س) = ق(س) - ه(س)
⇐ يتبع الحل

مكتبة العلم ALWESAM الأستاذ: ناجح الجمزاوي

$$ل(س) = \begin{cases} س+1 & س \geq 0 \\ 3-س & س < 0 \end{cases} - \begin{cases} جـ - 1 & س \geq 0 \\ جـ + 1 & س < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س+1-جـ+1 & س \geq 0 \\ 3-س-جـ-1 & س < 0 \end{cases}$$

$$ل(س) = \begin{cases} -س+2 & س \geq 0 \\ -3س+2 & س < 0 \end{cases}$$

$ل(0) = -(0)+2 = 2$

$\text{نهـا}_{س \to 0^+} ل(س) = -(0)+2 = 2$

$\text{نهـا}_{س \to 0^-} ل(س) = -3(0)+2 = 2$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to 0} ل(س) = ل(0)$

$\Leftarrow$ ل(س) متصل عندس = 0

مثال ④

اذا كان $ح(س) = 2س + 5$

$$د(س) = \begin{cases} 5 - س^2 & س \leq 3 \\ 1 + س & س > 3 \end{cases}$$

وكان $ل(س) = ح(س) + د(س)$

ابحث في اتصال ل(س) عندس = 3

الحل

① ح(س) متصل لأنه كثيرحدود

② $د(3) = 5 - 3^2 = 5 - 9 = -4$

$\text{نهـا}_{س \to 3^+} د(س) = 1 + 3 = 4$

$\text{نهـا}_{س \to 3^-} د(س) = 5 - 3^2 = 5 - 9 = -4$

متصل

حسب نظريات الإتصال

متصل + متصل = متصل

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

$$\text{اذا كان } \text{هـ}(س) = \begin{cases} 1 & س > 0 \\ \text{صفر} & س = 0 \\ -1 & س < 0 \end{cases}$$

$$\text{هـ}(س) = س - 0$$

وكان $\text{ل}(س) = \text{هـ}(س) \times \text{هـ}(س)$

ابحث في اتصال $\text{ل}(س)$ عند $س = 0$

الحل

① $\text{هـ}(س)$ متصل لأنه كثير حدود

② $\text{هـ}(0) = \text{صفر}$

$\text{نها}_{س \to 0^+} \text{هـ}(س) = -1$

$\text{نها}_{س \to 0^-} \text{هـ}(س) = 1$

$\text{هـ}(س)$ غير متصل

نجد قاعدة $\text{ل}(س) = \text{هـ} \times \text{هـ}$

$$\text{هـ} \times \text{هـ} = \begin{cases} 1 & س > 0 \\ \text{صفر} & س = 0 \\ -1 & س < 0 \end{cases} \times (س - 0)$$

$$\text{ل}(س) = \begin{cases} س - 0 & س > 0 \\ \text{صفر} & س = 0 \\ -س + 0 & س < 0 \end{cases}$$

$\text{ل}(0) = \text{صفر}$

$\text{نها}_{س \to 0^+} \text{ل}(س) = -0 + 0 = \text{صفر}$

$\text{نها}_{س \to 0^-} \text{ل}(س) = 0 - 0 = \text{صفر}$

$\therefore \text{نها}_{س \to 0} \text{ل}(س) = \text{ل}(0)$

$\therefore \text{ل}(س)$ متصل عند $س = 0$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات وأسئلة الكتاب

تدريب ① ص٥٦

اذا كان $ه(س) = س^2 + ٢$

$$هـ(س) = \begin{cases} س - ١ & س \geq ٣ \\ ٥ - س & س < ٣ \end{cases}$$

ابحث اتصال $(ه + هـ)$ عندما $س = ٣$

الحل

① $ه(س)$ متصل لأنه كثير حدود

② $هـ(٣) = ٣ - ١ = ٢$

$\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = ٥ - ٣ = ٢$

$\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = ٣ - ١ = ٢$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = ٣$

متصل + متصل = متصل

تدريب ② ص٥٩

$ه(س) = س^2 + ٥$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^2 + ٦ & س \geq -١ \\ ٣٥ - س & س < -١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال

$م(س) = ه(س) \times هـ(س)$

عند $س = -١$

① $ه(س)$ متصل لأنه كثير حدود

② $هـ(-١) = (-١)^2 + ٦ = ٧$

$\lim_{س \to -١^+} هـ(س) = ٣٥ - (-١) = ٣٦$

$\lim_{س \to -١^-} هـ(س) = (-١)^2 + ٦ = ٧$

$\therefore هـ(س)$ غير متصل

نجد قاعدة $ه(س) \times هـ(س)$

يتبع الحل ←

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

$$\text{مدX هـ} = \begin{cases} (س^2+5)(س^2+6) & س \geq -1 \\ (س^2+5)(35-س) & س < -1 \end{cases}$$

$$\text{م}(-1) = (1+5)(6+1) = 6 \times 7 = 42$$

$$\text{نهـا م}(س) = (35+1)(5+1) = 36 \times 6 = 216$$
$$س \to -1^+$$

$$\text{نهـا م}(س) = 42$$
$$س \to -1^-$$

م(س) غير متصل عند س = -1

الأسئلة ص ٦١

السؤال الأول

$$\text{مدX هـ}(س) = 5س^2 + 5س - 1$$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س + 9 & س \geq 2 \\ 5س + 1 & س < 2 \end{cases}$$

ل(س) = مدX هـ(س) + هـ(س)

ابحث في اتصال ل عند س = 2

الحل

① مدX هـ(س) متصل لأنه كثير حدود

② هـ(2) = 2 + 9 = 11

$$\text{نهـا هـ}(س) = 5 \times 2 + 1 = 11$$
$$س \to 2^+$$

$$\text{نهـا هـ}(س) = 2 + 9 = 11$$
$$س \to 2^-$$

هـ(س) متصل عند س = 2

⇐ ل(2) = 2 X متصل + متصل

= متصل

مكتبة المعلم ALMOALEM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص٦١

اذا كان $ق(س) = ٥س^{٢} + ٤$

$$هـ(س) = \begin{cases} س + ٤ & س > ٠ \\ ٤ - س^{٣} & س \leq ٠ \end{cases}$$

وكان $ل(س) = (ق \times هـ)(س)$

فابحث اتصال الاقتران ل عند $س = ٠$

الحل

① $ق(س)$ متصل لأنه كثير حدود

② $هـ(٠) = ٤ - ٠^{٣} = ٤$

$\lim_{س \to ٠^{+}} هـ(س) = ٤ - (٠)^{٣} = ٤$

$\lim_{س \to ٠^{-}} هـ(س) = ٠ + ٤ = ٤$

$هـ(س)$ متصل

$ل(س) = ق \times هـ$ متصل × متصل

= متصل

السؤال الثالث ص٦١

اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٥ - س & س < ٥ \\ س - ٥ & س \geq ٥ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٢٥}$$

فابحث في اتصال $(ق \times هـ)(س)$ عندما $س = ٥$

الحل

① $ق(٥) =$ صفر

$\lim_{س \to ٥^{+}} ق(س) =$ صفر

$\lim_{س \to ٥^{-}} ق(س) =$ صفر

متصل

② $هـ(س)$ غير متصل عند $س = ٥$ لأنه

$هـ(٥)$ غير معرفة

⇐ يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

صفا لابد من ايجاد قاعدة

$(ق \times هـ)(س) = ل(س)$

$$= \begin{cases} \frac{س-٣}{س^{٢}-٢٥} \times (٥-س) & س < ٥ \\ \frac{س-٣}{س^{٢}-٢٥} \times (س-٥) & س > ٥ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{س-٣}{(٥+س)(٥-س)} \times (٥-س) & س < ٥ \\ \frac{س-٣}{(٥+س)(س-٥)} \times (س-٥) & س > ٥ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-س+٣}{٥+س} & س < ٥ \\ \frac{س-٣}{٥+س} & س > ٥ \end{cases}$$

$ل(٥) = \frac{٣-٥}{٥+٥} = \frac{-٢}{١٠}$

$نها\ ل(س) = \frac{٣-٥}{٥+٥} = \frac{-٢}{١٠}$
$س \to ٥^{+}$

$نها\ ل(س) = \frac{٥-٣}{٥+٥} = \frac{٢}{١٠}$
$س \to ٥^{-}$

غير متصل

السؤال الرابع

اذا كان $(ق + هـ)(س)$ متصلاً عندما $س = ٢$، فهل نستنتج ان كلاً من $ق$ ، $هـ$ عندما $س = ٢$ ؟

الجواب

لا

مثال

$ق(س) = \frac{س}{س-٥}$ غير متصل عند $س = ٥$

$هـ(س) = \frac{٥}{٥-س}$ غير متصل عند $س = ٥$

لكن $(ق + هـ)(س) = \frac{س}{س-٥} + \frac{٥}{٥-س}$

$= \frac{٥-س}{٥-س} = ١$ متصل

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السادس ص ٦٤

اذا كان ق(س) = س + ٣

هـ(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٤} - ٩}$ وكان

ل(س) = ق(س) × هـ(س)

أبحث في اتصال الاقتران

ل عند س = ٣

الحل

هـ(س) غير متصل عند س = ٣

لأن هـ(٣) غير معرفة

نجد قاعدة (ق × هـ)(س)

ل(س) = (س + ٣) × $\frac{س - ٣}{(س + ٣)(س - ٣)}$

= ١

متصل عند س = ٣

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨ ج) صيفية

اذا كان $هـ(س) = ل(س) + د(س)$

حيث

$ل(س) = ٤ س + ٥$

$د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٥ & س \geq ٣ \\ س + ١ & س < ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال $هـ(س)$ عند $س = ٣$

الحل

① $ل(س)$ متصل عند $س = ٣$

لأنه كثير حدود

② $د(٣) = ٣^٢ - ٥ = ٩ - ٥ = ٤$

$\lim_{س \to ٣^+} د(س) = ٣ + ١ = ٤$

$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = ٣^٢ - ٥ = ٤$

$\lim_{س \to ٣} د(س) = د(٣)$

$د(س)$ متصل عند $س = ٣$

$هـ(س) = ل(س) + د(س)$

متصل عند $س = ٣$

② وزارة (٢٠٠٩ ج) صيفية

اذا كان $هـ(س) = س^٢$

$هـ(س) = \begin{cases} س + ٥ & س \geq ٢ \\ ٣ س^٢ - ٥ & س < ٢ \end{cases}$

وكان $ل(س) = هـ(س) \times هـ(س)$

ابحث في اتصال $ل(س)$ عند $س = ٢$

الحل

① $هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$ لأنه

كثير حدود

② $هـ(٢) = ٢ + ٥ = ٧$

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٢ + ٥ = ٧$

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٣(٢)^٢ - ٥ = ١٢ - ٥ = ٧$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$

$هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

$ل(س) = هـ(س) \times هـ(س)$

متصل عند $س = ٢$

③ وزارة (٢٠١١ ، ٢) شتوية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & س < 2 \\ 0 & س > 2 \end{cases}$

$ل(س) = س$

وكان $و(س) = هـ(س) + ل(س)$

فبين ان $و(س)$ متصل عند $س = 2$

الحل

① $ل(س) = س$ متصل عند $س = 2$

لأنه كثير حدود

② $هـ(2) = 2^2 + 1 = 5$

$\lim_{س \to 2^+} هـ(س) = 2^2 + 1 = 5$

$\lim_{س \to 2^-} هـ(س) = 5$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = 2$

$\therefore و(س) = هـ(س) + ل(س)$

= متصل عند $س = 2$

متصل + متصل = متصل

④ وزارة (٢٠١٢ ، ٢) شتوية

اذا كان $هـ(س) = س^2$

$و(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & س < 2 \\ س^3 - 3 & س > 2 \end{cases}$

اكتب مجال اتصال $هـ(س) \times و(س)$

عند $س = 2$

الحل

① $هـ(س)$ متصل عند $س = 2$ كثير حدود

② $و(2) = 2^2 + 1 = 5$

$\lim_{س \to 2^+} و(س) = 2^2 + 1 = 5$

$\lim_{س \to 2^-} و(س) = 2^3 - 3 = 8 - 3 = 5$

$\therefore و(س)$ متصل عند $س = 2$

في هذه الحالة نجد ان

$هـ(س) \times و(س)$

$ل(س) = هـ(س) \times و(س)$

$= س^2 \times \begin{cases} س^2 + 1 & س < 2 \\ س^3 - 3 & س > 2 \end{cases}$

نتبع الحل

$$ل(س) = \begin{cases} ٤س^{٣} + س^{٣} & س \geq ٢ \\ س^{٥} - ٣س^{٢} & س < ٢ \end{cases}$$

$$ل(٢) = ٤(٢)^{٣} + ٢^{٣} = ١٦ + ٤ = ٢٠$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢^{+}} ل(س) = ٤(٢)^{٣} + ٢^{٣} = ٢٠$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢^{-}} ل(س) = ٢^{٥} - ٣(٢)^{٢} = ٣٢ - ١٢ = ٢٠$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} ل(س) = ل(٢)$$

$ل(س)$ متصل عند $س = ٢$

الحل

① $ل(س)$ متصل عند $س = ٢$ لأنه ليس حدود

② $هـ(٢) = ٢ + ١ = ٣$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢^{+}} هـ(س) = ٢ + ١ = ٣$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢^{-}} هـ(س) = ٢^{٢} - ١ = ٤ - ١ = ٣$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$$

$هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

$و(س) = هـ(س) + ل(س)$

متصل عند $س = ٢$

⑤ وزارة (٢٠١٢) صيغة

$$\text{اذا كان } هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & س > ٢ \\ س + ١ & س \leq ٢ \end{cases}$$

وكان $ل(س) = ٣س + ٥$

$و(س) = هـ(س) + ل(س)$

ابحث في اتصال $و(س)$ عند

$س = ٢$

⑥ وزارة (٢٠١٤) شتوية

$$\text{اذا كان } هـ(س) = ٤س^{٢}$$

$$و(س) = \begin{cases} س + ٧ & س \leq ١ \\ ٣س^{٢} + ٥ & س > ١ \end{cases}$$

وكان $ل(س) = هـ(س) \times و(س)$

ابحث في اتصال $ل(س)$

عند $س = ١$ ← يتبع الحل

مكتبة الوسام
AlWesam
الاستاذ ناجح الجمزاوي

الحل

① $\lim_{س \to 1} هـ(س)$ منفصل عند $س = 1$
لأنه كثير حدود

② $هـ(1) = 1 + 7 = 8$

$\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = 1 + 7 = 8$

$\lim_{س \to 1^-} هـ(س) = 3(1) + 5 = 8$

$\lim_{س \to 1} هـ(س) = 8$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = 1$

$\therefore ل(س) = هـ(س) \times و(س)$
متصل عند $س = 1$
متصل × متصل = متصل

الحل

① $و(س)$ متصل عند $س = 3$
لأنه كثير حدود

② $ل(3) = 3^2 + 1 = 10$

$\lim_{س \to 3^+} ل(س) = 3^2 + 1 = 10$
$س \to 3^+$

$\lim_{س \to 3^-} ل(س) = 3 \times 4 - 2 = 12 - 2 = 10$
$س \to 3^-$

$\therefore \lim_{س \to 3} ل(س) = ل(3)$
$س \to 3$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = 3$

$\therefore هـ(س) = و(س) \times ل(س)$
متصل عند $س = 3$

⑦ ونارة (١٥، ٤) صيغة

اذا كان $و(س) = 4 - س^2$

$ل(س) = \begin{cases} 4س - 2 & س \geq 3 \\ س^2 + 1 & س < 3 \end{cases}$

وكان $هـ(س) = و(س) \times ل(س)$

ابحث في اتصال $هـ(س)$ عند
$س = 3$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١٦ د) صيفية

اذا كان هـ(س) = س^{٢} + ٦

$$ل(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - س & س \leq ٢ \\ س + ٨ & س > ٢ \end{cases}$$

وكان م(س) = هـ(س) - ل(س)

اجب في اتصال الاقتران

م(س) عند س = ٢

الحل

① هـ(س) متصل عند س = ٢

لأنه كثير حدود

② ل(٢) = ٣(٢)^{٢} - ٢

= ١٢ - ٢ = ١٠

نها ل(س) = ٢ + ٨ = ١٠

س ← ٢$^{+}$

نها ل(س) = ٣(٢)^{٢} - ٢

س ← ٢$^{-}$ = ١٢ - ٢

= ١٠

← نها ل(س) = ل(٢) = ١٠

س ← ٢

ل(س) متصل عند س = ٢

⇐ م(س) = هـ(س) - ل(س)

متصل عند س = ٢

متصل - متصل = متصل

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

اذا كان $ق(س) = س^2 - 9$

$هـ(س) = \begin{cases} س & س < 3 \\ صفر & س = 3 \\ -س & س > 3 \end{cases}$

اجب في اتصال ق × هـ عند س = ٣

الحل

ق(س) متصل لأنه كثير حدود

هـ(٣) = صفر

$\lim_{س \to 3^-} هـ(س) = -3$

$\lim_{س \to 3^+} هـ(س) = 3$

∴ غير متصل

نجد قاعدة ق × هـ

$ل(س) = \begin{cases} (س^2 - 9) \times س & س < 3 \\ (س^2 - 9) \times صفر & س = 3 \\ (س^2 - 9) \times -س & س > 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} س^3 - 9س & س < 3 \\ صفر & س = 3 \\ -س^3 + 9س & س > 3 \end{cases}$

ل(٣) = صفر

$\lim_{س \to 3^+} ل(س) = -3^3 + 9 \times 3$

$= -27 + 27 = صفر$

$\lim_{س \to 3^-} ل(س) = 3^3 - 9 \times 3$

$= 27 - 27 = صفر$

$\lim_{س \to 3} ل(س) = ل(3)$

∴ متصل عند س = ٣

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان ه(س) = ٢س

و(س) = { س٢ + ١ ، س < ٢
{ ٥س - ٣ ، س ≥ ٢

وكان ل(س) = (ه + هـ)(س)
اثبت ان اتصال الاقتران
ل عند س = ٢

الحل

ندرس الاقتران .

ل = ه + هـ

= { س٢ + ٢س + ١ ، س < ٢
{ ٧س - ٣ ، س ≥ ٢

ل(٢) = ٧ × ٢ - ٣ = ١٤ - ٣
= ١١

نها ل(س) = ٧ × ٢ - ٣ = ١١
س ← ٢+

نها ل(س) = ٤ + ٤ + ١ = ٩
س ← ٢-

ل غير متصل عند س = ٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

اتصال الاقترانات النسبية

مقدمة

الأقتران النسبي $\frac{\text{ه}(س)}{\text{و}(س)}$ هو اقتران متصل على جميع الاعداد ماعدا اصفار المقام

مثال ①

اذا كان $\text{ه}(س) = \frac{٣س}{س^٢ - ٤}$

ابحث في اتصال ه(س) على مجموعة الاعداد الحقيقية

الحل

نجد اصفار المقام $س^٢ - ٤ = ٠$

$(س - ٢)(س + ٢) = ٠$

$س = ٢ \quad س = -٢$

ه(س) متصل على ح ماعدا

$ح - \{-٢، ٢\}$

ونسمي $ح - \{-٢، ٢\}$ نقط عدم الاتصال أو نقط الانفصال

ملاحظة

في الأقتران النسبي نقط عدم الاتصال (الانفصال) هي قيم س التي تجعل المقام يساوي صفر

مثال ②

اوجد نقط عدم الاتصال للأقتران

$\text{ه}(س) = \frac{٣}{س^٢ - ٤س}$

الحل

نجعل المقام = صفر

$س^٢ - ٤س = ٠$ اخراج س عامل مشترك

$س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٤$

نقط عدم الاتصال هي $\{٠، ٤\}$

مثال ③

اوجد نقط عدم الاتصال للأقتران

$\text{ه}(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ + ٤}$

الحل

$س^٢ + ٤ = ٠$ لا يوجد حل لا توجد نقط عدم اتصال

مثال ④

اذا علمت ان س = ١ هي نقطة اتصال للاقترانين

$$\text{اقتران} = \frac{س^{٢} - ١}{س - ب} \quad \text{مجموعة } ب$$

الحل

بما ان س = ١ هي نقطة اتصال

= صفر المقام

$$١ - ب = ٠ \Leftarrow ٢ - ب = ٠ \therefore$$

$$ب = ٢$$

مثال ⑤

اذا علمت ان س = ٢ هي نقطة عدم اتصال للاقترانين

$$\text{اقتران} = \frac{٣س - ١}{ب س + ٢} \quad \text{مجموعة } ب$$

الحل

س = ٢ نقطة عدم اتصال

هي صفر المقام

$$٢ب + ٢ = ٠$$

$$٢ب = -٢$$

$$ب = -١$$

ملاحظه

في الاقترانين النسبي اذا كان المقام هو $(س^{٢} + عدد)$ فانه لا توجد نقط عدم اتصال.

مثال ⑥

اوجد نقط عدم الاتصال للاقتران

$$\text{اقتران} = \frac{٣س + ١}{س^{٢} - ٣س - ٢٨}$$

الحل

المقام = صفر

$$س^{٢} - ٣س - ٢٨ = ٠$$

$$(س - ٧)(س + ٤) = ٠$$

$$س = ٧ \quad س = -٤$$

نقط عدم الاتصال هي

$$\{-٤، ٧\}$$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

فانقط عدم الاتصال للأقترانات التالية

① $ق(س) = ٥$ لايوجد نقط انفصال

② $ق(س) = (س+٣)(س^٢-١٦)$

لايوجد نقط عدم الاتصال

③ $ق(س) = \frac{س^٢-٩}{س+٥}$

المقام = صفر $س+٥=٠$

$س = -٥$

نقط عدم الاتصال $\{-٥\}$

④ $ق(س) = \frac{س}{س^٢-٣س-٢٨}$

المقام = صفر

$س^٢-٣س-٢٨=٠$

$(س-٧)(س+٤)=٠$

$س=٧$ ، $س=-٤$

نقط عدم الاتصال

$\{-٤، ٧\}$

مثال ⑧

فانقط عدم الاتصال للأقترانات التالية :

أ) $ق(س) = \frac{١-٤س}{س^٢+٩}$

المقام $\neq ٠$ $س^٢+٩$ لاتحلل

لايوجد نقط عدم الاتصال

ب) $ق(س) = \begin{cases} س^٢+١ & س<٤ \\ ٦ & س=٤ \\ س+٢ & س>٤ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٤+٢ = ٦$

$\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = ٤^٢+١ = ١٧$

$ق(س)$ غير متصل عند $س=٤$

ج) $م(س) = \frac{١}{س} + \frac{س+١}{س+٣}$

$س = ٠$ ، $س+٣=٠ \Leftarrow س=-٣$

نقط عدم الاتصال $\{-٣، ٠\}$

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات وأسئلة الكتاب

تدريب ③ ص٦٠

جد مما س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل

١) $ق(س) = س^2 - ٣س + ٨$
لا يوجد نقط عدم الاتصال

٢) $هـ(س) = \frac{س - ١}{س^2 + ٥س + ٦}$

المقام = ٠ $س^2 + ٥س + ٦ = ٠$
$(س + ٢)(س + ٣) = ٠$
$س = -٢$ $س = -٣$
$\{-٢، -٣\}$

٣) $ل(س) = \frac{٥ - س}{س^3 - ١}$
$س^3 - ١ = ٠$
$(س - ١)(س^2 + س + ١) = ٠$
$س = ١$ $\{١\}$

الاسئلة ص٦١

السؤال الخامس

جد مما س (إن وجدت) التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي متصلاً.

م) $ق(س) = س^2 + ١$
لا يوجد نقط عدم الاتصال

ن) $هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^2 - ٥س + ٦}$

$س^2 - ٥س + ٦ = ٠$
$(س - ٣)(س - ٢) = ٠$
$س = ٣$ ، $س = ٢$ $\{٢، ٣\}$

ه) $ل(س) = \frac{س + ٢}{س^2 - ١} + \frac{٥}{س}$

$س = ٠$
$س^2 - ١ = ٠$ $(س - ١)(س + ١) = ٠$
$س = ١$ ، $س = -١$
نقط عدم الاتصال
$\{-١، ٠، ١\}$

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس ص٦٢

د) $م(س) = \begin{cases} س^٣ + ٢ & س \leq ٢ \\ ٦ - س & س > ٢ \end{cases}$

$م(٢) = ٦ - ٢ = ٤$

هنا $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = ٦ - ٢ = ٤$

هنا $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٢^٣ + ٣ = ١١$

$\lim_{س \to ٢} م(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان $هـ(س) = \frac{س^{٢}-٩}{س+٥}$ اوجد

نقط عدم الاتصال

الحل

المقام = صفر $س+٥=٠$

$س=-٥$

② وزارة (٢٠١٠) صيفية

اوجد قيم س التي عندها نقط عدم اتصال الاقتران

$هـ(س) = \frac{س}{(س+١)(س-٣)}$

المقام = ٠

$(س+١)(س-٣)=٠$

$س=-١$ ، $س=٣$

③ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان $هـ(س) = \frac{س-١}{س-٣}$ اوجد

نقط عدم الاتصال

المقام = ٠

$س-٣=٠$ $\quad س=٣$

④ وزارة (٢٠١٢) شتوية

$هـ(س) = \frac{س-٧}{س^{٢}-٢س+١}$

اوجد قيم س التي تجعل هـ غير متصل

الحل

المقام = صفر

$س^{٢}-٢س+١=٠$

$(س-١)(س-١)=٠$

$س=١$

⑤ وزارة (٢٠١٢) شتوية

$هـ(س) = \frac{س-٣}{س^{٢}-٤س+٤}$ اوجد

قيم س التي تجعل هـ غير متصل

الحل

المقام = صفر

$س^{٢}-٤س+٤=٠$

$(س-٢)(س-٢)=٠$

$س=٢$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

⑥ وزارة (٢٠١٣) صيفية

$$\text{ق}(س) = \frac{س^2}{(س-1)(س+5)}$$ اوجد جميع قيم س التي تجعل ق(س) غير متصل

الحل

المقام = صفر

$(س-1)(س+5) = 0$

$س = 1$ او $س = -5$

⑦ وزارة (٢٠١٤) صيفية

$$\text{ق}(س) = \frac{6-3س}{س^2+3س-10}$$ جد جميع س التي تجعل ق(س) غير متصل

الحل

$س^2+3س-10 = 0$

$(س+5)(س-2) = 0$

$س = -5$ $س = 2$

⑧ وزارة (٢٠١٦) شتوية

مانقطة عدم الاتصال للاقتران

$$\text{ق}(س) = \frac{1}{س+2} + \frac{س-3}{س^2-3س}$$

الحل

$س+2 = 0 \Leftarrow س = -2$

$س^2-3س = 0 \Leftarrow س(س-3) = 0$

$س = 0$ $س = 3$

النقاط هي $\{-2, 0, 3\}$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان $\text{ق}(س) = \frac{س(س-4)}{(س+2)(س-1)}$

فان مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

ا) $\{-2, -1\}$ ب) $\{0, 4\}$

ج) $\{-1, 2\}$ د) $\{-2, 1\}$

الحل

اصفار المقام

$(س+2)(س-1) = 0$

$س = -2$

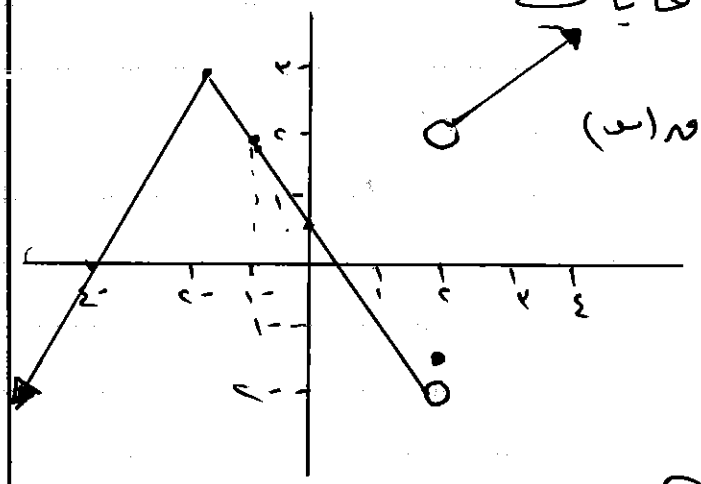
$س = 1$ ✗

ج

أسئلة الوحدة ص٦٣

السؤال الأول

اعتمد على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران د في كل مما يأتي



أ) د(٢) = -٥,١

ب) نهـا د(س) = ٢
س ← -١

ج) نهـا د(س)
س ← ٢
نهـا د(س) = ٢ ، نهـا د(س) = -٢
س ← ٢+ ، س ← ٢-
نهـا د(س) غير موجودة
س ← ٢

د) س = ٢ غير متصل

هـ) نهـا ((د(س))^٢ - س + ٢)
س ← ٠

= (نهـا د(س))^٢ + نهـا (-س + ٢)
س ← ٠ ، س ← ٠

= (١/٢)^٢ + (-٠) + ٢

= ١/٤ + ٢ = ٢ ١/٤

= ٩/٤

السؤال الثاني

إذا كانت نهـا (د(س))^٣ + ٢ = ٢٩
س ← ١

نهـا د(س) = -٣ مجزية
س ← ١

كل مما يأتي

أ) نهـا ((د(س))^٢ + ٢ د(س) + س)
س ← ١

ب) نهـا (د(س) × د(س))
س ← ١

← يتبع الحل

مكتبة المعلم ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل

نجهز

$(\text{نها}_{س \leftarrow 1} \text{ه}(س))^3 + 2 = 9$

$-2 \quad -2$

$(\text{نها}_{س \leftarrow 1} \text{ه}(س))^3 = 27$ بأخذ الجذر التكعيبي

$\sqrt[3]{(\text{نها}_{س \leftarrow 1} \text{ه}(س))^3} = \sqrt[3]{27}$

$\text{نها}_{س \leftarrow 1} \text{ه}(س) = 3$

ب)

$\text{نها}_{س \leftarrow 1} \text{ه}(س) + 2\,\text{نها}_{س \leftarrow 1} \text{و}(س) + \text{نها}_{س \leftarrow 1} س$

$= 3 + 2 \times -3 + 1$

$= 3 - 6 + 1 = -2$

ج) $\text{نها}_{س \leftarrow 1} \text{ه}(س) \times \text{نها}_{س \leftarrow 1} \text{و}(س)$

$= 3 \times -3$

$= -9$

السؤال الثالث

اذا كان

$\text{ه}(س) = \begin{cases} 3س^2 + ل & س \geq 1 \\ 7 & س = 1 \\ س^2 - 4ل - 6 & س < 1 \end{cases}$

وكان الاقتران ه متصلاً عندما $س = 1$ ما جد قيمة كل من $ل$ ، $م$

الحل

ه(س) متصل عند $س = 1$

① $\text{نها}_{س \leftarrow 1^+} \text{ه}(س) = \text{ه}(1)$

$1 - 4ل - 6 = 7$

$-4ل = 12 \Leftarrow -4ل = 5 + 7$

$ل = -3$

② $\text{نها}_{س \leftarrow 1^-} \text{ه}(س) = \text{ه}(1)$

$م(1)^2 + ل = 7$

$م + 3 = 7$

$م = 5$

مكتبة الإسلام AUWSAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي عندما س تقترب من العدد المبين إزاء كل منها

م) $\lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{س^٢ + ١}$ ، $ق(س) = \sqrt{٣ - س}$

$= \sqrt{٣ - (-١)} + \frac{-١ + ١}{(-١)^٢ + ١}$

$= \sqrt{٤} + \frac{٠}{٢} = ٢ + ٠ = ٢$

ن) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{١٠ - ٢س}$

$= \frac{٢٥ - ٢٥}{١٠ - ١٠} = \frac{٠}{٠}$ تحليل

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)}{٢(٥ - س)}$

$= \frac{٥}{-٢}$

هـ) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{س - ٢} - \frac{١}{٢}}{س^٢ - ٨س + ١٢}$

$= \frac{\frac{٢ - (س - ٢)}{٢(س - ٢)}}{(س - ٤)(س - ٤)}$

$= \frac{-١}{٢(س - ٢)(س - ٤)^٢}$

$= \frac{-١}{٢ \times ٢ \times ٠^٢}$ ← التعويض = $\frac{-١}{٠}$ توحيد المقام

$= \frac{-١}{٨}$

و) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٢س + ١}{س^٣ - ١٢س}$

$= \frac{١ - ٢ + ١}{١ - ١٢} = \frac{٠}{-١١}$

$= ٠$ صفر

ك) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{٣ - س}$ ، $م(س) =$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{-(س - ٣)}$

$= -(٩ + ٩ + ٩) = -٢٧$

التعويض = $\frac{٠}{٠}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

و) $د(س) = \frac{\sqrt{٣س+٤} - ٥}{س^٢ - ٤٩}$ $س \to ٧$

$= \frac{\sqrt{٣س+٤} - ٥}{س^٢ - ٤٩}$ $س \to ٧$ بالتعويض $= \div$

$= \frac{\sqrt{٣س+٤} - ٥}{س^٢ - ٤٩} \times \frac{\sqrt{٣س+٤} + ٥}{\sqrt{٣س+٤} + ٥}$ $س \to ٧$

$= \frac{٣س + ٤ - ٢٥}{(س^٢ - ٤٩)(\sqrt{٣س+٤} + ٥)}$ $س \to ٧$

$= \frac{٣س - ٢١}{(س^٢ - ٤٩)(\sqrt{٣س+٤} + ٥)}$ $س \to ٧$

$= \frac{٣(س - ٧)}{(س - ٧)(س + ٧)(\sqrt{٣س+٤} + ٥)}$ $س \to ٧$

$= \frac{٣}{(٧+٧)(\sqrt{٢١+٤} + ٥)}$

$= \frac{٣}{١٤ \times (٥+٥)} = \frac{٣}{١٤٠}$

السؤال الكامل ص٦٤

اذا كان $ه(س) = س^٣ + ٥س$

$ه(س) = \begin{cases} ٥س + ٤ & س \geq ١ \\ ٨ + س^٢ & س < ١ \end{cases}$

$ل(س) = (ه + هـ)(س)$ ابحث اتصال الاقتران ل عندما $س = ١$

① $ه(س)$ متصل لأنه كثير حدود

② $هـ(١) = ٥ \times ١ + ٤ = ٩$

$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ٨ + ١^٢ = ٩$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٥ \times ١ + ٤ = ٩$

$هـ(س)$ متصل

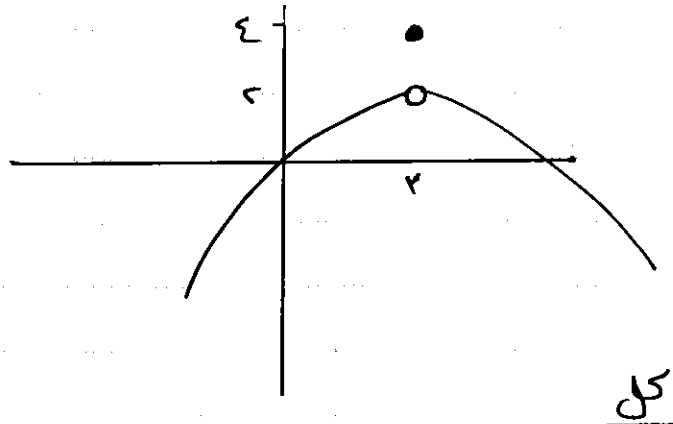
$ل(س) = ه + هـ$ متصل + متصل

= متصل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران هـ ، احسب نهاية الاقتران هـ عندما س = ٣



الحل

هـ(٣) = ٤

نهـا هـ(س) = ٢
س ← ٣

هـ(س) غير متصل عند س = ٣

لأن

نهـا هـ(س) ≠ هـ(٣)
س ← ٣

السؤال السابع

اذا كان كل من الاقترانين هـ ، هـ متصلاً عندما س = ٥ ، وكان هـ(٥) = ٤

نهـا هـ(س) + س / ٣ هـ(س) = ١ / هـ(٥)
س ← ٥

بما ان هـ متصل عند س = ٥

← نهـا هـ(س) = هـ(٥) = ٤
س ← ٥

نهـا هـ(س) + نهـا س / ٣ نهـا هـ(س) = ١
س ← ٥ ، س ← ٥ / س ← ٥

نهـا هـ(س) + ٥ / ٣ × ٤ = ١
س ← ٥

نهـا هـ(س) + ٥ = ١٢
س ← ٥

نهـا هـ(س) = ٧ ولأن
س ← ٥

هـ(س) متصل عند س = ٥

نهـا هـ(س) = هـ(٥) = ٧
س ← ٥

ضرب تبادلي

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن ص٦٥

اذا كان $و(س) = \frac{1}{س} + \frac{س-٣}{س^٢-٣س}$

فما قيم س التي لا يكون عندها المقدار و متصلاً

المقام = ٠

$س = ٠$ ، $س^٢ - ٣س = ٠$

$س(س-٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٣$

$\{٣ ، ٠\}$

السؤال التاسع ص٦٥

يتكون هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد لكل فقرة اربعة بدائل ، واحد فقط صحيح ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح

① اذا كان م عدداً ثابتاً ، وكان $هـ(س) = م س^٢ - ٤س + ٥$ فإن قيمة م هي

أ) ١ ب) -١ ج) ٤ د) -٤

الحل

نعوض $م(١)^٢ - ٤ \times ١ + ٥ = ٥$

$م - ٤ + ٥ = ٥$

$م = ٤$

$+٤ \quad +٤$

الاجابة (ج)

---

② $\lim_{س \to -١} (س^٢ - ٤)^٣$ يساوي

أ) -١٢٥ ب) -٢٧ ج) ١٢٥ د) ٢٧

الحل

نعوض $= (-١)^٢ - ٤)^٣$

$= (١ - ٤)^٣ = -٣^٣ = -٢٧$

الاجابة (ب)

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع حل السؤال التاسع

٣) اذا كان $ه(س) = \frac{س^{٢} - ٥س}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

فان قيم س التي لا يكون عندها الأقتران ه متصلاً هي

أ) {٥، ٠} ب) {-٥، ٠} ج) {١، ٢} د) ح - {١، ٢}

الحل

$س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س - ١) = ٠$

$س = ٢ ، س = ١$

{١، ٢}

الاجابة ج

الحل

نهاية $ه(س) = ٢^{٢} = ٤$ عندما $س \to ٢^{+}$

نهاية $ه(س) = ٢ - ١ = ١$ عندما $س \to ٢^{-}$

نهاية $ه(س)$ غير موجودة عندما $س \to ٢$

الاجابة ج

٤) اذا كان $ه(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س \leq ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \\ س^{٢} & ، س > ٢ \end{cases}$

فان نهاية $ه(س)$ عندما $س \to ٢$

أ) ٣ ب) ٤ ج) ١ د) غير موجودة

٥) اذا كانت نهاية $(٣ه(س)) = ٩$ عندما $س \to ٢$

فان نهاية $ه(س)$ عندما $س \to ٢$

أ) ٩ ب) ٨١ ج) ٢٧ د) ٣

الحل

نهاية $ه(س) = \frac{٩}{٣} = ٣$ عندما $س \to ٢$

$(نهاية ه(س))^{٢} = ٣^{٢} = ٩$ عندما $س \to ٢$

الاجابة أ

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

الاستاذ ناجح الجمزاوي

الثاني ثانوي الأدبي | الوحدة الأولى | المستوى الثالث

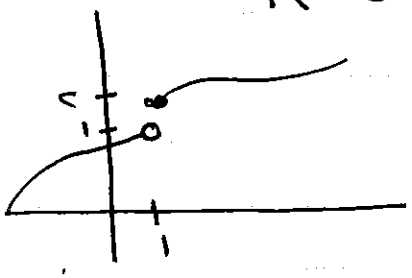
النهايات والإتصال

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ | ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

ورقه عمل

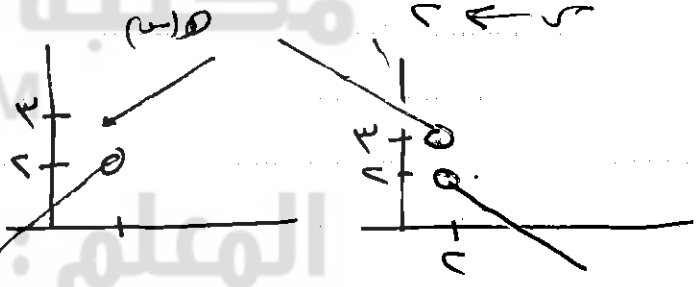
ضع دائره حول رمز الاجابه الصحيحه

① الشكل المجاور يمثل منحنى $ه(س)$ ، فإن $\lim_{س \to 1^+} ه(س)$



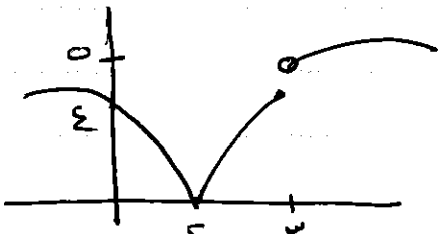
أ) ١ ب) ٢ ج) غير موجود د) صفر

② اذا كان $ه$ ، $هـ$ متماثلتين بالشكل المجاور فإن $\lim_{س \to 2} [ه(س) + هـ(س)]$



أ) غير موجوده ب) ٣ ج) ٢ د) ٥

③ اذا كان $ه(س)$ فمثلاً بالشكل المجاور



فأن $\lim_{س \to 2} ه(س) + ٣$

$س \to ٠$

أ) ٤ ب) ١٩ ج) ١٦ د) ٤

④ اذا كانت $\lim_{س \to 1} ه(س) + ٤س = ٨$

فان $\lim_{س \to 1} ٣ه(س)$ تساوي

أ) ٦ ب) ٤ ج) ٢ د) ٨

⑤ $\lim_{س \to -1} س^٢ + ٧س - ٤$ تساوي

أ) ٩- ب) ٩ ج) ٨- د) ٨

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

⑥ اذا كانت $\lim_{س \to -١} (أ س^{٢} + ٥) = ٤$

فان قيمة أ تساوي

أ) ٥ ب) -١ ج) ٤ د) ٩

⑦ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} (س^{٢} - ٤ب) = ٥$

فان قيمة أ هي

أ) -٥ ب) -١ ج) $\frac{٥}{٤}$ د) ٥

⑧ اذا كان

$$د(س) = \begin{cases} ٧س & س \neq ٢ \\ أ & س = ٢ \end{cases}$$

وكان د(س) متصل عند س = ٢

فان قيمة أ هي

أ) ١٤ ب) ٧ ج) -٧ د) ١٤

⑨ اذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} ل + س^{٢} & س < ١ \\ ٦س & س \geq ١ \end{cases}$$

وكان د(س) متصل عند س = ١

فان قيمة ل

أ) -٦ ب) ٥ ج) ٦ د) -٥

⑩ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٣}$ تساوي

أ) -٤ ب) ٤ ج) ٢ د) -٢

⑪ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٣} - س^{٢}}{٢س^{٢}}$ تساوي

أ) ١ ب) ٠ ج) غير موجود د) -١

⑫ $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س + ٣}{س + ١} - ٣س \right) =$

أ) ٢ ب) -١ ج) -٢ د) ١

⑬ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$ تساوي

أ) ٠ ب) -١ ج) $\frac{١}{٢}$ د) غير موجود

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٤) نهـا $\frac{\frac{1}{س}-\frac{1}{٤}}{٤-س}$ تساوي
س ← ٤

أ) $\frac{1}{٤}$ ب) $-\frac{1}{٤}$ ج) $\frac{1}{٤}$ د) غير موجودة

(١٥) اذا كان $هـ(س)$ كثيرحدود وكانت نهـا $\frac{هـ(س)}{س-١}$ = ٦ فان
س ← ١

$هـ(١)$ =

أ) -٦ ب) ٦ ج) ٣ د) -٣

(١٦) نهـا $\frac{س^{٣}-٤س+٣}{س-١}$ =
س ← ١

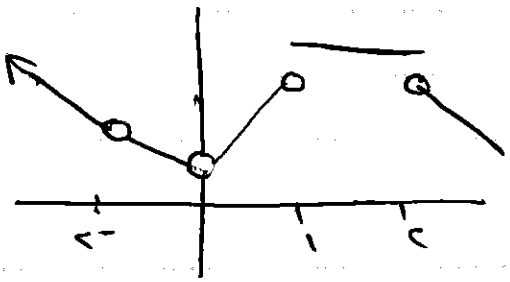
أ) -٣ ب) ٣ ج) ٣ د) -٣

(١٧) اذا كان $هـ(س)=\frac{س-١}{س^{٢}-٩}$
فان نقط عدم اتصال $هـ(س)$ هي

أ) $\{١\}$ ب) $\{-٣، ٣\}$

ج) $\{-٣\}$ د) $\{-٣، ٣، ١\}$

(١٨) بالاعتماد على الشكل المجاور
فان نقط عدم اتصال $هـ(س)$ هي



أ) $\{٠، ١، ٢\}$ ب) $\{٠، -٢\}$

ج) $\{-٢، ١، ٠، ١، ٢\}$ د) $\{٠\}$

(١٩) نقط عدم اتصال
$هـ(س)=\frac{١}{س}+\frac{١}{س^{٢}-٢س}$ هي

أ) $\{٢\}$ ب) $\{١\}$

ج) $\{١، ٢\}$ د) $\{٠، ١\}$

(٢٠) اذا كانت نهـا $٣هـ(س)$ = -٣
س ← ١
فان نهـا $هـ(س)$ = -٢
س ← ١
نهـا $(هـ^{٢}(س)+٥هـ(س))$ تساوي

أ) -٥ ب) -٣ ج) ٠ د) ٥

مكتبة السلام ALMSLAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١) اذا كان

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س-١}{س^{٢}-١} & س \neq ١ \\ ل س + ١ & س = ١ \end{cases}$$

وكان د(س) متصل عند س = ١
فان قيمة ل هي

أ) -٢ ب) ٢ ج) -١ د) ١

(٢) اذا كان د، هـ اقترانين
متصلين د(٢) = ٤
وكانت نهـا (س) - ٢ هـ(س) = ٤
س ← ٢
فإن نهـا (٢) تساوي
س ← ٢

أ) -٨ ب) ٤ ج) -٤ د) ٨

(٣) اذا كان

$$د(س) = \frac{س-٣}{(س-٤)(س+٢)}$$ فان

مجموعة نقط عدم الاتصال هي

أ) {٣} ب) {٤، -٢}
ج) {٣، ٤، -٢} د) {٣، -٢}

(٤) اذا كان د(س) = ٢^س
فان نهـا ٣ د(س) + ١ تساوي
س ← ١

أ) ٧ ب) ١ ج) ٢ د) ٥

الاجابات

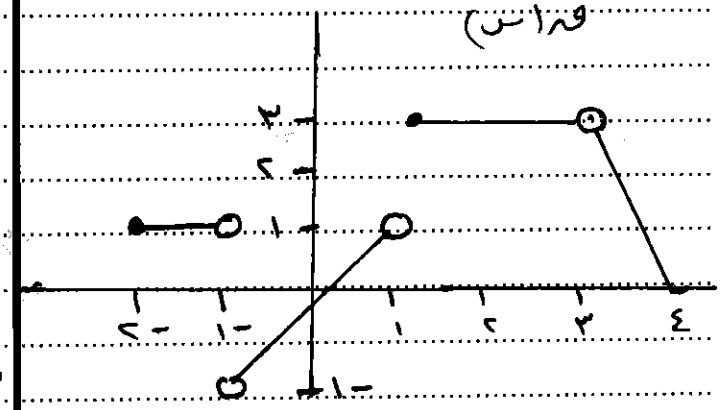
١. ب	٢. ج	٣. ب	
٤. أ	٥. ج	٦. ج	
٧. ج	٨. أ	٩. ب	
١٠. أ	١١. د	١٢. ب	
١٣. أ	١٤. أ	١٥. ج	
١٦. د	١٧. د	١٨. ج	
١٩. د	٢٠. د	٢١. أ	
٢٢. ب	٢٣. ب	٢٤. أ	

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل " النهايات والاتصال"

السؤال الأول :-

أ- بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(x)$ اوجد قيمة مايلي



١- مجموعة قيم أ التي يكون عندها $f(x)$ غير موجودة

أ ← ؟

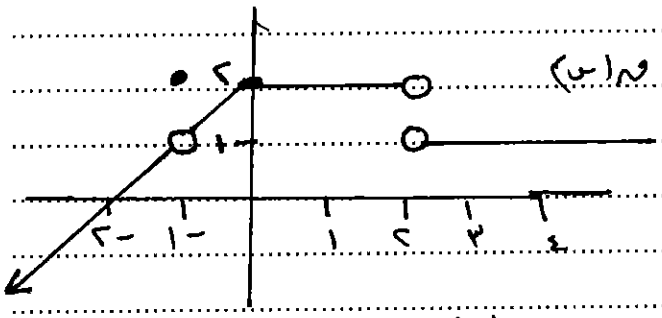
٢- $\lim_{x \to 3} f(x)$

٣- $\lim_{x \to -1} f(x)$

٤- قيم أ التي يكون عندها $\lim_{x \to ؟} f(x) = 3$

٥- قيم س التي يكون عندها $f(x)$ غير متصل

ب- اعتماداً على الشكل المجاور



١) اوجد $\lim_{x \to 2} f(x)$

٢) اوجد $\lim_{x \to 0} 3f(x) + \frac{1}{2}(x-4)$

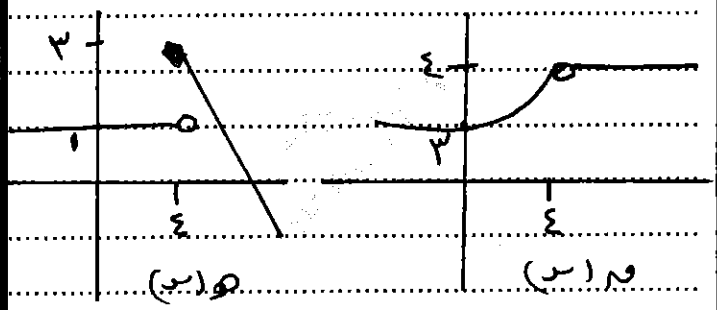
٣) $\lim_{x \to 3} \left((f(x)-3) + \frac{3x-5}{2} \right)$

٤) اوجد قيم س التي يكون عندها $f(x)$ غير متصل

٥) اوجد قيم أ التي يكون عندها $\lim_{x \to ؟} f(x) = 2$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

جـ) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $هـ(س)$ ، $و(س)$ جد كلاً مما يلي :



١) $\lim_{س \to ٤} ٣س \, هـ(س)$

٢) $\lim_{س \to ١} (٢هـ(س) \times ٣و(س) + س^{٤} - ٥)$

٣) $\lim_{س \to ٤^{+}} (هـ(س) + و(س))$

٤) $\lim_{س \to ٤^{-}} (هـ(س) + و(س))$

السؤال الثاني

أ) اذا كانت $\lim_{س \to ١} (٣هـ(س) + ٤) = ٥$

فأوجد قيمة $\lim_{س \to ١} (هـ^{٢}(س) + ٤س + ٣)$

ب) اذا كان $\lim_{س \to ٥} (٢هـ(س) + ٤و(س)) = ٢٦$

فأوجد $\lim_{س \to ٥} (هـ^{٣}(س) + ٤)$

جـ) اذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$ ، $هـ(٣) = ٢$

$\lim_{س \to ٣} (و(س) - ٢) = ١$

أوجد قيمة $و(٣)$

د) $\lim_{س \to ٣} (٣هـ(س) + ٢و(س) - س)$

هـ) $\lim_{س \to ٣} \frac{هـ(س) + ٢س}{١١ - ٣و(س)}$

و) اذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - هـ(س)}{٣ + ٢هـ(س)} = ١$

أوجد $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

ز) اذا كانت $\lim_{س \to ١} هـ(س) = س^{٣} + ٤س + ٥$

أوجد قيمة $\lim_{س \to ٣} (هـ^{٢}(س) + ٤س)$

مكتبة الوسام Alwesam
المعلم : ناجح الجمزاوي

و) اذا كان

$\lim_{س \to -٢} (٣ه(س) - ٤س) = -٤$

وكانت $\lim_{س \to -٢} (٢ه(س) + ٣س^٣ + ٥) = ١$

اوجد مايلي

١) $\lim_{س \to -٢} (٢ه(س) + س^٢)$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{ه(س) + ٣س^٢}{٥ + ٢ه(س)}$

ز) اذا كان $ه(س) = ٣س^٢ - ب$

وكان $\lim_{س \to ٣} ه(س) = ١٢$ ، $\lim_{س \to -١} ه(س) = ٨$

اوجد قيمة $ب$

السؤال الثالث

ح. اذا كانت $\lim_{س \to ١} ه(س) = ٣$

$\lim_{س \to -١} ه(س) = ٩$ فاوجد مايلي

١. $\lim_{س \to -١} (ه(س) \times ه(س) - ٧)$

٢. $\lim_{س \to ١} (س^٢ ه(س) - ه(س) - ٨س)$

٣. $\lim_{س \to -١} \sqrt{٥ ه(س) + س^٢}$

٤. $\lim_{س \to -١} \sqrt[٣]{٢ ه(س) + ٣ه(س)}$

٥. $\lim_{س \to -١} \frac{(ه(س) - ٦س)}{ه(س)}$

ط. اذا كانت

$\lim_{س \to ١} (٢ه(س) + ٤س^٢) = ٦$

اوجد قيمة

① $\lim_{س \to ١} \frac{ه^٢(س) + ٥س}{٤س - ١}$

② $\lim_{س \to ١} (ه(س) + ٥) + \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

③ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ ه(س) - س^٣}{س + ١}$

ك. اذا كانت $\lim_{س \to ١} (ه(س) + ٢ه(س)) = ١١$

وكانت $\lim_{س \to ١} ه(س) = ٣$ اوجد قيمة

$\lim_{س \to ١} (ه(س) - س)$

AlWeSAM
الهندسم : ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

أ- اذا كانت $\lim_{س \to ٤} \sqrt{أ س + ٥} = ٥$

اوجد قيمة أ ؟

ب- اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٤ س + أ - ٣}{س + ٣} = ٣$

اوجد قيمة أ ؟

جـ- هل $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{أ س + ١٢} - ٣}{أ + ١} = \frac{١}{٢}$

اوجد قيمة أ ؟

د) اذا كانت $و(س) = \begin{cases} ٤ س^٢ + ١ & س \leq ١ \\ أ س + ٢ & س > ١ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ١} و(س)$ موجودة أوجد أ ؟

هـ) اذا علمت ان $و(س) = \begin{cases} ٣ - أ س^٢ & س \leq ٢ \\ ٨ + أ س & س > ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} و(س)$ موجودة

اوجد قيمة أ

السؤال الخامس

أ- اذا كان $و(س) = \begin{cases} س^٢ + ب س + ١ & س \leq ١ \\ ٢ & س > ١ \end{cases}$

جد أ حيث $\lim_{س \to ١} و(س)$ متصل عند س = ١

ب- اذا كان $و(س) = \begin{cases} أ س + ٢ & س \leq ٢ \\ س^٢ - ٢ ب & ١ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ١} و(س) = ٣$ اوجد قيمة أ، ب ؟

جـ- $و(س) = \begin{cases} س^٢ + ب & س < ٣ \\ ١٥ & س = ٣ \\ أ س - ب & س > ٣ \end{cases}$

وكان و متصلا عند س = ٣ فما قيمة كل من أ، ب ؟

د) $و(س) = \begin{cases} س^٢ + ب & س \leq ٢ \\ أ س - ٣ & س > ٢ \end{cases}$

فاذا كانت $\lim_{س \to ٢} و(س) = ٥$

اوجد قيمة أ، ب

مكتبة الوسام ALWESAM

الوسام : ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

٩- اذا كان $ه(س) = \begin{cases} \sqrt{س+٣} & س \leq ١ \\ \frac{س^٢-١}{س-١} & س > ١ \end{cases}$

اوجد $\lim_{س \to ١} ه(س)$

١٠- اذا كان $ه(س) = \frac{س^٤-١٦}{س^٢-٣س-١٠}$

١) جد قيم س التي تجعل $ه(س)$ غير متصل

٢) جد $\lim_{س \to ٢} ه(س)$

٣) جد $\lim_{س \to -٢} ه(س)$

ج) اذا كان $ه(س) = \frac{س^٢-٨}{س^٢-٤س}$

١) جد قيمة ميم (س) التي تجعل $ه(س)$ غير متصل

٢) جد $\lim_{س \to ٢} ه(س)$

السؤال السابع

اوجد قيمة النهايات التالية ان وجدت

١) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س-٣}$

٢) $\lim_{س \to ١} \sqrt{٢-(س-١)}$

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣+٦س^٢-٧س}{س^٢+٢س-٣}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س-١)^٢-١}{س}$

٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س-١}-٢}{س^٢-٢٥}$

٦) $\lim_{س \to ٦} \frac{س-٦}{\sqrt{٣+س}-٣}$

٧) $\lim_{س \to -٣} \sqrt{س^٢-٤س+١٢}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س-١}{\sqrt{٥س-٤}-\sqrt{س}}$

مؤسسة الهدف للدروس الخصوصية
الهدف ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

اوجد قيمة النهايات ان وجدت

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٣ - ٩س}$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^٢ + ٤س}{س^٣ + ٣س^٢ + ٤س}$

٣) $\lim_{س \to ١^+} \frac{\sqrt{س} - ١}{\sqrt{س^٢ - ١}}$ مساعده

$س = ١٠٠ \Rightarrow \sqrt{١٠٠} \times \sqrt{١٠٠ - ١}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{٥}}{١٥ - ٨س + س^٢}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٤س + ٣} - ٣}{س^٢ - ٤س + ٣}$

٦) $\lim_{س \to ١٠} \frac{\sqrt{س - ١٠} - ٣}{\sqrt{س - ٦} - ٢}$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س} - \sqrt{٣}}$

٨) $\lim_{س \to \frac{٥}{٢}} \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ - ٢٠س}{٢س - ٥}$

٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}$

١٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{\sqrt{س^٢ + ٧} - ٤}$

١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٧} - ٣}{\sqrt{س + ٣} - ٢}$

١٢) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س + ٨} - ٤}{\sqrt{٣س + ١} - ٥}$

١٣) $\lim_{س \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٢س^٢ + ١١س + ١٣}{٢س^٢ + س + ٣}$

١٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٤س - ٩} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$

١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{\sqrt{س + ٣} - ٢}$

١٦) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{(س - ٦)^٢}$

مكتبة العلم ALILM العلم: ناجح الجمزاوي

١٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س^٢}}{س - ٢}$

١٨) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٣ - ١٢٥}{س^٢ - ٢٥}$

١٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ - س} - \sqrt{س}}{٢ - س}$

٢٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣ + س^٤} - ٣}{س^٢ - ٩}$

٢١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣س^٢}{س^٢ - ٦س}$

٢٢) $\lim_{س \to ٢} (\frac{١}{٢} - \frac{١}{س})(\frac{١}{٣س - ٦})$

٢٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{٣}{س + ١} - \frac{٤}{٣س - ٣}}{س^٢ - ٤}$

٢٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^٢ - ٨}{س^٢ - ٥س + ٦}$

٢٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

٢٦) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٣س - ١٠}{س + ٢}$

٢٧) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{٦}{س + ٣} - \frac{٢}{س}}{س^٢ + ٢س - ٣}$

٢٨) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{١ + ٣س} - ٤}{س - ٥}$

٢٩) $\lim_{س \to ٩} \frac{س^٢ - ٨١}{\sqrt{٤س} - ٦}$

٣٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٢س^٢ - ٥} - ٧}{س^٢ - ٥س + ٦}$

٣١) $\lim_{س \to ٢} (\frac{١}{س - ٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤})$ بتوحيد المقام

٣٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٢}{س - ٣} + \frac{٢}{س + ٣}}{س}$

٣٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{\sqrt{١ + ٣س}} - \frac{١}{٥}}{س^٣ - ٣س - ٦}$

مكتبة الوسام العلمية
ALWSAM

٣٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٤}}{س^٢ - ٩}$

٣٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٢س-١}}{س^٣ - ٨}$

٣٦) $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^٣ - ٨}{س^٢ - ١}$

٣٧) $\lim_{س \to \frac{٩}{٢}} \frac{(٢س-٥)^٢ - ١٦}{٢س - ٩}$

٣٨) $\lim_{س \to ١٠} \frac{س^٢ - ١٠٠}{س^٢ - ١٠س}$

٣٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ٢س}$

٤٠) $\lim_{س \to ٠^+} \frac{\sqrt{١ - س^٢}}{س}$

٤١) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٥س+١} - ٤}{س^٢ - ٩}$

٤٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س^٢ + ٧س + ١٢} + \sqrt{س+٤})}{س+٣}$

السؤال التاسع

اوجد نقط عدم الاتصال (الانفصال) لدالة القيم التالية

١) $ق(س) = \frac{س}{س^٢ - ٣٦}$

٢) $ق(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٤}$

٣) $ق(س) = \frac{س^٢ + ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$

٤) $ق(س) = \frac{٥}{س} + \frac{س}{س - ١}$

٥) $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٣ & س \leq -٣ \\ ١٢ - ٣س & -٣ < س < ٣ \\ س^٢ - ٣ & س \geq ٣ \end{cases}$

٦) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{س^٢ - ٢٥} & س < ٥ \\ س^٢ - ١ & س > ٥ \end{cases}$

٧. $هـ(س) = \begin{cases} \frac{1}{س+1} & س \neq -1 \\ 0 & س = -1 \end{cases}$

٨. $هـ(س) = \frac{-2س}{4-س^2}$ ، $س \in [-1,1]$

٩. $هـ(س) = \sqrt{س+1}$

١٠. $هـ(س) = \sqrt[4]{12-3س}$

١١. $هـ(س) = \frac{3س}{س^2-1}$ ، $س \in [0,1]$

١٢. $هـ(س) = \frac{س^2-4}{(2س+6)(س-1)}$

١٣. $هـ(س) = \frac{س^2-16}{س^2-4س}$

١٤. $هـ(س) = \frac{س}{س^2-3س-28}$

١٥. $هـ(س) = \frac{1}{س} + \frac{س+1}{س+3}$

السؤال الخامس

٩- اذا كان $هـ$ ، $ه$ اقترانين متصلين وكان $هـ(3) = 4$

فها $\frac{(2هـ(س)+5ه(س))}{س^2+1} = 3$ ، $س < 3$

فجد قيمة $ه(3)$

١٠- $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2-6}{س^2-3س-3} & س \neq 3 \\ م & س = 3 \end{cases}$

فما قيمة الثابت م التي تجعل $هـ$ متصلاً عند $س = 3$

١١- اذا كان $ه(س) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{س}-\frac{1}{5}}{س-5} & س \neq 5 \\ \frac{-1}{25} & س = 5 \end{cases}$

أجب في اتصال $ه(س)$ عند $س = 5$

مكتبة الوسام
Alwesam
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الحادي عشر

م - اذا كان

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 16}{س - 4} & س \neq 4 \\ 7 & س = 4 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ه(س) عند
س = ٤

ن -

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} \frac{25 - س^2}{5 - س} & س \neq 25 \\ 10 & س = 25 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ه(س)

عند س = ٢٥

د -

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س + 2 & س > 5 \\ 3 & س = 5 \\ س^2 & س < 5 \end{cases}$$

$\text{هـ}(س) = (س - 5)^2$

ل(س) = ه(س) × هـ(س) ابحث

في اتصال ل(س) عندما

س = ٥

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني عشر

أ- $هـ(س) = \begin{cases} ٤س + ٧ & س < -١ \\ س^٢ + ٢ & س \geq -١ \end{cases}$

$ه(س) = ٤س^٢ + ٥س$

اثبت ان اتصال $هـ(س) - ه(س)$ عند $س = -١$

ب- اذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣ & س < ٤ \\ ٥س - ١ & س \geq ٤ \end{cases}$

$ه(س) = ٣س^٢ - س$

اثبت ان اتصال $هـ(س) + ه(س)$ عند $س = ٤$

جـ- $هـ(س) = \begin{cases} ١ & س < ٥ \\ صفر & س = ٥ \\ -١ & س > ٥ \end{cases}$

$ه(س) = س - ٥$

$ل(س) = هـ(س) \times ه(س)$

اثبت ان اتصال $ل(س)$ عند $س = ٥$

د- $هـ(س) = \begin{cases} س + ١ & س < ١ \\ ٤ - س & س \geq ١ \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} ٤س^٢ + ١ & س < ١ \\ ٣س - ١ & س \geq ١ \end{cases}$

اثبت ان اتصال $ل(س) = هـ(س) \times ه(س)$ عند $س = ١$

هـ- $هـ(س) = \begin{cases} ٤س + ٢ & س < ٢ \\ ٤س - ١ & س \geq ٢ \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} ٤س & س < ٢ \\ ٣س + ٥ & س \geq ٢ \end{cases}$

اثبت ان اتصال $ل(س)$ حيث

$ل(س) = هـ(س) + ه(س)$

عند $س = ٢$

مكتبة الوسام ALWSAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية
ورقة عمل النهايات والاتصال

السؤال الأول

(أ) ① م = {-٢، -١، ١، ٣، ٤، ٦}

② $\text{هـا}_{\text{س} \to ٢}(\text{د}(\text{س})) = ٣$

③ $\text{هـا}_{\text{س} \to -١}(\text{د}(\text{س})) = ١$

④ م = (١، ٣)

⑤ س = {-٢، -١، ١، ٣، ٤، ٦}

(ب)

① $\text{هـا}_{\text{س} \to ٢^+}(\text{د}(\text{س})) = ١$ ، $\text{هـا}_{\text{س} \to ٢^-}(\text{د}(\text{س})) = -٢$

← $\text{هـا}_{\text{س} \to ٢}(\text{د}(\text{س}))$ غير موجودة

٢) $٣(\text{هـا}_{\text{س} \to ٠}(\text{د}(\text{س}))^٢ + \frac{١}{٢}\,\text{هـا}_{\text{س} \to ٠}(\text{س}-٤)$

$= ٣(٢)^٢ + \frac{١}{٢}(٠-٤) = ١٢-٢$

$= ١٠$

٣) $(\text{هـا}_{\text{س} \to ٣}(\text{د}(\text{س})) - ٣)^٢ + \text{هـا}_{\text{س} \to ٢}\frac{٣\text{س}^٢ - ٥}{٢}$

$= (١-٣)^٢ + \frac{٩-٥}{٢} = ٤+٢ = ٦$

٤) س = {-٢، -١، ١، ٢}

٥) م = [٠، ٢]

(ج)

١) $\text{هـا}_{\text{س} \to ٤}(٣\text{س}) \times \text{هـا}_{\text{س} \to ٤}(\text{د}(\text{س})) = ١٢ \times ٤ = ٤٨$

٢) $\text{هـا}_{\text{س} \to ٠}(\text{د}(\text{س}))^٢ \times ٣ + \text{هـا}_{\text{س} \to ٠}(\text{د}(\text{س})) + \text{هـا}_{\text{س} \to ٠}(٥-\text{س})$

$= ٢ \times ٣ + ١ + ٥ -$

$= ٦ - ٣ + ٥ = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

٣) $\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) + \lim_{س \to ٤^+} هـ(س)$

$= ٤ + ٣ = ٧$

٤) $\lim_{س \to ٤^-} هـ(س) + \lim_{س \to ٤^-} هـ(س)$

$= ٤ + ١ = ٥$

السؤال الثاني

٢) $٣ \lim_{س \to ١} هـ(س) + ٤ = -٥$

$٣ \lim_{س \to ١} هـ(س) = -٩$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = -٣$

$(\lim_{س \to ١} هـ(س))^٢ + \lim_{س \to ١} هـ(٤س + ٣)$

$= (-٣)^٢ + ٤ \times ١ + ٣$

$= ٩ + ٧ = ١٦$

١) $\lim_{س \to ٥} هـ(س) + \lim_{س \to ٥} هـ(٤س) = ٦$

$\lim_{س \to ٥} هـ(س) + ٤٠ = ٢٦$

$\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٦$

$\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٣$

$(\lim_{س \to ٥} هـ(س))^٣ + ٤$

$= ٣^٣ + ٤ = ٢٧ + ٤ = ٣١$

٥) $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤ \Leftarrow \lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٣} هو(س) = ١$

$\lim_{س \to ٣} هو(س) = ٣$

١) $٣ \lim_{س \to ٣} هـ(س) + ٢ \lim_{س \to ٣} هو(س) - \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٣ \times ٢ + ٢ \times ٣ - ٣ = ٩$

٢) $\frac{٢ + ٣ \times ٢}{١١ - ٣ \times ٣} = \frac{٨}{١١ - ٩} = \frac{٨}{٢} = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

(5)

$$\frac{\text{نها}_{س\to 3}(س^3 - \text{نها}_{س\to 3}(س))}{\text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س))} = 1$$

ضرب تبادلي

$$\text{نها}_{س\to 3}(س^3 - \text{نها}_{س\to 3}(س)) = \text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س))$$

$$\text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س)) = \text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س))$$

$$\text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س)) + \text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س)) = \text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س))$$

$$\frac{\text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س))}{3} = \frac{\text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س))}{3}$$

$$\text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س)) = 9$$

(6)

$$\text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س)) = 1^2 + 4\times 1 + 5 = 10$$

$$\text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س))^2 + \text{نها}_{س\to 3}(\text{نها}_{س\to 3}(س)) = 10^2 + 4\times 3 = 112$$

(9)

$$\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)) = -2\times 4 = -4$$

$$\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)) = \frac{-8}{-8} = -4$$

$$\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)) = -12 \Leftarrow \text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)) = -4$$

$$2(\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)))^2 + \text{نها}_{س\to -2}(3س^2 + 5) = 1$$

$$2(\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)))^2 + 12 + 5 = 1$$

$$(\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)))^2 = \frac{-16}{2} = -8$$

$$\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)) = -2$$

إخذ الجذر التكعيبي

$$\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س))^2 + \text{نها}_{س\to -2}(س^2) \quad (1$$

$$= 2(-4) + 4 = 2\times 3 + 4$$

$$= 36$$

$$\frac{\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س)) + \text{نها}_{س\to -2}(3س^2)}{\text{نها}_{س\to -2}(\text{نها}_{س\to -2}(س))} = \frac{-2 + 12}{15 + 2\times -8}$$

$$= \frac{10}{7}$$

مكتبة العلم ALWSAM العلم: ناجح الجمزاوي

(ز)

① $\lim_{س \to 3} ق(س) = ١٢$

② $س \to ٣$

$١٢ = ل - ٣ \times ٤٣$

$١٢ = ل - ٩٤$ ... ①

③ $\lim_{س \to -١} ك(س) = ٨$

④ $-٤٣ - ل = ٨$ ... ④

طريقة الحذف

$٩٤ - ل = ١٢$ بالطرح

$\pm ٤٣ \pm ل = \mp ٨$

$\frac{}{}$

$٤ = ٤ق$ $\Leftarrow$ $ق = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

بالتعويض في ①

$\frac{١}{٣} \times ٩ - ل = ١٢ \Leftarrow$

$١٢ = ل - ٣$

-٣ -٣

$-ل = ٩$

$ل = -٩$

السؤال الثالث

(ب)

١) $\lim_{س \to -١} (ق(س) \times ك(س)) - ٧$

$= ٣ \times ٩ - ٧ = ٢٧ - ٧$

$= ٢٠$

٢) $\lim_{س \to -١} ٢س \times (ق(س) - ك(س)) - \lim_{س \to -١} ٨س$

$= ١ \times ٣ - ٩ - ٨ \times -١$

$= ٣ - ٩ + ٨ = ٢$

٣) $\sqrt{٥ \lim_{س \to ١} ق(س) + \lim_{س \to -١} ٢س}$

$= \sqrt{٥ \times ٣ + ١} = \sqrt{١٦} = ٤$

٤) $\sqrt[٣]{\lim_{س \to -١} ك(س) + ٣ \lim_{س \to -١} ق(س)}$

$= \sqrt[٣]{٢ \times ٣ + ٩ \times ٣} = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

٥) $\frac{٩ - ٦ \times -١}{٣} = \frac{٩ + ٦}{٣}$

$= \frac{١٥}{٣} = ٥$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث فرع (٧)

$$\text{ق}(\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س)) + \text{نها}_{س \to 1} 4س^2 = 6$$

$$\text{ق}(\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س)) + 4(1)^2 = 6$$

$$\text{ق}(\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س)) + 4 = 6$$

$$-4 \quad -4$$

$$\frac{\text{ق}}{\text{ق}} \text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) = \frac{2}{2}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) = 1$$

١) $$\frac{(\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س))^2 + \text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س)}{1 - 1 \times 2}$$

$$= \frac{1 + 5}{1} = 6$$

٢) $$\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) + 5 + \frac{\text{نها}_{س \to 1} س^2 - 1}{\text{نها}_{س \to 1} س - 1}$$

$$= 1 + 5 + \text{نها}_{س \to 1} \frac{(س-1)(س+1)}{س-1}$$

$$= 1 + 5 + 2$$

$$= 8$$

٣) $$\frac{\text{نها}_{س \to 1} س^2 \times \text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) - \text{نها}_{س \to 1} س^2}{\text{نها}_{س \to 1} س + 1}$$

$$= \frac{1 \times 1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = \text{صفر}$$

السؤال الثالث فرع (٨)

$$\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) + 2 \text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) = 11$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) + 2 \times 3 = 11$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) + 6 = 11$$

$$-6 \quad -6$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) = 5$$

الكل

$$\text{نها}_{س \to 1} \text{هـ}(س) - \text{نها}_{س \to 1} س$$

$$= 5 - 1 = 4$$

مكتبة الوسام AL-WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

(أ) $\sqrt{٤أ+٥} = ٥$ تربيع الطرفين

$٤أ+٥ = ٢٥$

$٤أ = ٢٠$

$أ = ٥$

(ب) تعويض مباشر

$\frac{\sqrt{٤+١×٤+أ^{٢}}}{٢+١} = ٣$

ضرب تبادلي $\frac{أ+٤+١}{٤} = ٣$

$أ+٥ = ١٢ \Leftarrow أ = ٧$

(ج) تعويض

$\frac{\sqrt{١٢+٢×٤}-٣}{١+أ} = \frac{١}{٤}$

$\frac{\sqrt{١٦}-٣}{١+أ} = \frac{١}{٤}$

$\frac{٤-٣}{١+أ} = \frac{١}{٤} \Leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{١}{١+أ}$

ضرب تبادلي

$٤ = ١+أ \Leftarrow أ = ٣$

(د) النهاية موجودة تعني أن

$هـا(س) = هـا(س)$

$س \to ١^{+}$ $\quad$ $س \to ١^{-}$

$٤(١)^{٢}+١ = ٢+١×أ$

$٥ = ١+٤ = ٢+أ$

$أ = ٣$

(هـ) النهاية موجودة تعني أن

$هـا(س) = هـا(س)$

$س \to ٢^{+}$ $\quad$ $س \to ٢^{-}$

$٢(٢)^{٣}-أ٣ = ٨×٢+أ$

$١٦+أ = أ٣-٨$

$-٨ = -أ٣+أ$

$-أ = -٨$

$\frac{-٤أ}{-٤} = \frac{-٨}{-٤}$

$أ = ٢$

مكتبة الإنسام ALINSAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(أ) $هـ(س)$ متصل $\Leftarrow$ النهاية موجودة

$\lim_{س \to +أ} هـ(س) = \lim_{س \to -أ} هـ(س)$

$أ^2 + 2أ + 1 = 2 + 2أ$

$أ^2 + 4أ + 1 = 0$

$(أ + 1)(أ + 1) = 0$

$أ + 1 = 0 \Leftarrow \boxed{أ = -1}$

(ب)

$\lim_{س \to -} هـ(س) = 3$ تعني أن

① $\lim_{س \to +1} هـ(س) = 3$

$ب + 1 = 3 \Leftarrow ب = 2$

$ب + 1 = 3 \Leftarrow ب = 2$

② $\lim_{س \to -1} هـ(س) = 3$

$-أ + ب = 3$

$-أ + 2 = 3 \Leftarrow -أ = 1 \Leftarrow أ = -1$

(ج) $هـ$ متصل عند $س = 2$

① $\lim_{س \to +3} هـ(س) = هـ(3)$

$15 = ب - 3أ$

$15 = ب - 3(-1) \quad \cdots \cdots (1)$

② $\lim_{س \to -3} هـ(س) = هـ(3)$

$15 = ب + 9$

$ب = 6 \Leftarrow 15 = ب + 9$

نعوضها في (1)

$15 = 6 + 3أ \Leftarrow 15 = 6 + 3أ$

$3أ = 9 \Leftarrow أ = 3$

(د)

① $\lim_{س \to +2} هـ(س) = 5$

$4أ - 2ب = 5$

$4(3) - 2ب = 5 \Leftarrow 12 - 2ب = 5 \Leftarrow -2ب = -7 \Leftarrow ب = 3.5$

② $\lim_{س \to -2} هـ(س) = 5$

$4 + ب = 5 \Leftarrow ب = 1$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

(أ)

١) $س^2 - ٣س - ١٠ = ٠$

$(س - ٥)(س + ٢) = ٠$

$س = ٥$ ، $س = -٢$

٢) $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^4 - ١٦}{س^2 - ٣س - ١٠}$

$= \frac{٢^4 - ١٦}{٢^2 - ٣ \times ٢ - ١٠} = \frac{١٦ - ١٦}{٤ - ٦ - ١٠}$

$= \frac{٠}{-١٢} =$ صفر

(ب)

$\text{نها}_{س \to ١} \frac{س^2 - ١}{س - ١} = \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١}$

$= \text{نها}_{س \to ١} س + ١ = ٢$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ١} ق(س) = ٢$

(ج)

١) $س^2 - ٤س = ٠ \Leftarrow س(س - ٤) = ٠$

$\Leftarrow س = ٠$ ، $س = ٤$

٢) $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^3 - ٨}{س^2 - ٤س}$ بالتعويض $\div$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^2 + ٢س + ٤)}{س(س - ٤)}$

$= \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$

٣) $\text{نها}_{س \to -٢} \frac{س^4 - ١٦}{س^2 - ٣س - ١٠}$

$= \frac{١٦ - ١٦}{٤ + ٦ - ١٠} = \frac{٠}{}$

$= \text{نها}_{س \to -٢} \frac{(س^2 - ٤)(س^2 + ٤)}{(س + ٢)(س - ٥)}$

$= \text{نها}_{س \to -٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^2 + ٤)}{(س + ٢)(س - ٥)}$

$= \frac{(-٢ - ٢)(٤ + ٤)}{-٢ - ٥} = \frac{-٤ \times ٨}{-٧}$

$= \frac{-٣٢}{-٧} = \frac{٣٢}{٧}$

مكتبة الرياضيات NEWGEM
العلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

١) نهـا $\sqrt{س - ٣}$ = صفر
$س \to ٣^+$

المجال: $[٣, \infty)$

٢) نهـا $\sqrt{-س^٢ - (١-)}$ = $\sqrt{٠}$ = ٠
$س \to -١$

تحديد المجال

$-س^٢ + ٢ = ٠$

$س = ١$

المجال: $(-\infty, ١]$

نهـا $\sqrt{-(س-١)(س-١)}$ = صفر
$س \to ١$

٣) نهـا $\frac{س^٣ + ٦س^٢ - ٧س}{س^٢ + ٢س - ٣}$
$س \to ١$

بالتعويض = $\frac{٠}{٠}$

نهـا $\frac{س(س^٢ + ٦س - ٧)}{س^٢ + ٢س - ٣}$
$س \to ١$

= نهـا $\frac{س(س+٧)(س-١)}{(س+٣)(س-١)}$
$س \to ١$

$= \frac{١ \times ١ \times (٧+١)}{٣+١} = \frac{٨}{٤} = ٢$

٤) نهـا $\frac{(س-١)^٢ - ١}{س}$
$س \to ٠$

بالتعويض = $\frac{٠}{٠}$

فرق بين مربعين

نهـا $\frac{(س-١-١)(س-١+١)}{س}$
$س \to ٠$

= نهـا $\frac{(س-٢) \times س}{س}$ = ٠ - ٢ = -٢
$س \to ٠$

حل آخر

نهـا $\frac{س^٢ - ٢س + ١ - ١}{س}$ = نهـا $\frac{س^٢ - ٢س}{س}$
$س \to ٠$ $س \to ٠$

= نهـا $\frac{س(س-٢)}{س}$ = -٢
$س \to ٠$

٥) نهـا $\frac{٢ - \sqrt{٧س + ١}}{س^٢ - ٥س}$ $\times$ $\frac{٢ + \sqrt{٧س + ١}}{٢ + \sqrt{٧س + ١}}$
$س \to ٥$

= نهـا $\frac{٤ - (٧س + ١)}{(س^٢ - ٥س)(٢ + \sqrt{٧س + ١})}$
$س \to ٥$

= نهـا $\frac{٣ - ٧س}{(س^٢ - ٥س)(٢ + \sqrt{٧س + ١})}$
$س \to ٥$

= نهـا $\frac{-(٧س - ٣)}{س(س-٥)(٢ + \sqrt{٧س + ١})}$
$س \to ٥$

$= \frac{-١}{٥ \times (٥+٥)(٢ + \sqrt{٣٥ + ١})} = \frac{-١}{٤٠}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع حل السؤال السابع

⑥ $\lim_{س \to ٦} \frac{س - ٦}{\sqrt{س + ٣} - ٣}$

التعويض $\frac{صفر}{صفر}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{س - ٦}{\sqrt{س + ٣} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٣} + ٣}{\sqrt{س + ٣} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{(س - ٦)(\sqrt{س + ٣} + ٣)}{س + ٣ - ٩}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{(س - ٦)(\sqrt{س + ٣} + ٣)}{س - ٦}$

$= \sqrt{٦ + ٣} + ٣ = \sqrt{٩} + ٣$

$= ٣ + ٣ = ٦$

⑦ $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س^٤ - ٤س + ١}$

$= \sqrt{(-٢)^٤ - ٤(-٢) + ١}$

$= \sqrt{١٦ + ٨ + ١} = \sqrt{٢٥}$

$= ٥$

⑧ $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س^٥ - ٤} - \sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{س^٥ - ٤} + \sqrt{س}}{\sqrt{س^٥ - ٤} + \sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(\sqrt{س^٥ - ٤} + \sqrt{س})}{س^٥ - س - ٤}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(\sqrt{س^٥ - ٤} + \sqrt{س})}{٤س - ٤}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(\sqrt{س^٥ - ٤} + \sqrt{س})}{٤(س - ١)}$

$= \frac{\sqrt{١ - ٤} + \sqrt{١}}{٤} = \frac{١ + ١}{٤} = \frac{١}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن

① $\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س-٢)}{س(س^٢-٩)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س-٣)}{س(س-٣)(س+٣)}$

$= \frac{٣-٣}{٣(٣+٣)} = \frac{٠}{١٨} =$ صفر

② $\lim_{س \to ٠} \frac{٤س^٢+٤س}{٣س^٣+٤س^٢}$ $= \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(س+٢)}{س^٢(س+٤)} = \frac{٢}{(٠)^٢} \times ٢$

$= \frac{-٤}{٤} = -١$

③ $\lim_{س \to ١^+} \frac{١-س}{\sqrt{س}-١}$ $\frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{١-س}{\sqrt{س}-١} \times \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}+١}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{(١-س)(\sqrt{س}+١)}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{(١-س)(\sqrt{س}+١)}{(١-س)(س+١)}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{\sqrt{س}+١}{س+١}$

$= \frac{٢}{٢} =$ صفر

④ $\lim_{س \to ٥} \frac{س-١}{\sqrt{٢س-١}-\sqrt{س+٤}}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س-١}{\sqrt{٢س-١}-\sqrt{س+٤}} \times \frac{\sqrt{٢س-١}+\sqrt{س+٤}}{\sqrt{٢س-١}+\sqrt{س+٤}}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-١)(\sqrt{٢س-١}+\sqrt{س+٤})}{٢س-١-س-٤}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-١)(\sqrt{٢س-١}+\sqrt{س+٤})}{س-٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-١)(\sqrt{٢س-١}+\sqrt{س+٤})}{(س-٥)}$

$= ٤ \times ٣ = ١٢$

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

⑤ نهـا $\frac{\sqrt{٣+ع س}-٣}{س^{٢}-ع س-٣}$ × $\frac{\sqrt{٣+ع س}+٣}{\sqrt{٣+ع س}+٣}$

$س \to ٣$

نهـا $\frac{٩-٣-ع س}{(س^{٢}-ع س-٣)(\sqrt{٣+ع س}+٣)}$

نهـا $\frac{-ع(س-٦)}{(س-٣)(س+١)(\sqrt{٣+ع س}+٣)}$

$س \to ٣$

$= \frac{-ع}{٦ \times ٤} = \frac{-ع}{٢٤} = \frac{-١}{١٢}$

⑥ نهـا $\frac{\sqrt{س-١}-٣}{\sqrt{س-٦}-ع} \times \frac{\sqrt{س-١}+٣}{\sqrt{س-١}+٣} \times \frac{\sqrt{س-٦}+ع}{\sqrt{س-٦}+ع}$

$س \to ١٠$

نهـا $\frac{(س-١-٩)(\sqrt{س-٦}+ع)}{(س-٦-ع)(\sqrt{س-١}+٣)}$

$= نهـا \frac{(س-١٠)(\sqrt{س-٦}+ع)}{(س-١٠)(\sqrt{س-١}+٣)}$

$س \to ١٠$

$= \frac{ع+ع}{٣+٩} = \frac{ع}{٦} = \frac{ع}{٣}$

⑦ نهـا $\frac{س-٣}{\sqrt{٢س-ع}-\sqrt{س-٣}} \times \frac{\sqrt{٢س+ع}+\sqrt{س+٣}}{\sqrt{٢س+ع}+\sqrt{س+٣}}$

$س \to ٣$

نهـا $\frac{(س-٣)(\sqrt{٢س+ع}+\sqrt{س+٣})}{٢س+ع-س-٣}$

$س \neq ٣$

$= \sqrt{ع+ع} = \sqrt{٣ع}$

⑧ نهـا $\frac{ع س^{٣}+٣س^{ع}-٢٠س}{٥-ع س}$

$س \to \frac{٥}{ع}$

$= نهـا \frac{س(ع س^{ع}+٣ع س-٢٠)}{٥-ع س}$

$س \to \frac{٥}{ع}$

$= نهـا \frac{س(ع س-٥)(س+٤)}{٥-ع س}$

$س \to \frac{٥}{ع}$

$= \frac{٥}{ع}(\frac{٥}{ع}+٤) = \frac{٥}{ع}(\frac{٥}{ع}+\frac{٨}{ع})$

$= \frac{٥}{ع} \times \frac{١٣}{ع} = \frac{٦٥}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٩) $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}} \times \frac{\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}}{\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢})}{٣س - ٢ - س - ٢}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢})}{٢س - ٤}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢})}{٢(س - ٢)}$

$= \frac{\sqrt{٦ - ٢} + \sqrt{٤ + ٢}}{٢} = \frac{٢ + ٢}{٢} = ٢$

(١٠) $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{\sqrt{س^{٢} + ٧} - ٤} \times \frac{\sqrt{س^{٢} + ٧} + ٤}{\sqrt{س^{٢} + ٧} + ٤}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)(\sqrt{س^{٢} + ٧} + ٤)}{س^{٢} + ٧ - ١٦}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)(\sqrt{س^{٢} + ٧} + ٤)}{(س - ٣)(س + ٣)}$

$= \frac{(٩ + ٩ + ٩)(\sqrt{١٦} + ٤)}{٣ + ٣} = \frac{٢٧ \times ٨}{٦} = ٣٦$

(١١) $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٧} - ٣}{\sqrt{س + ٢} - ٢}$ ضرب مرافق البسط والمقام

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٧} - ٣}{\sqrt{س + ٢} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٧} + ٣}{\sqrt{س + ٧} + ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٢} + ٢}{\sqrt{س + ٢} + ٢}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س + ٧ - ٩)(\sqrt{س + ٢} + ٢)}{(س + ٢ - ٤)(\sqrt{س + ٧} + ٣)}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(\sqrt{س + ٧} + ٣)(\sqrt{س + ٢} + ٢)}{(س - ٢)(\sqrt{س + ٢} + ٣)}$

$= \frac{(\sqrt{٩} + ٣)(\sqrt{٤} + ٢)}{(\sqrt{٤} + ٣)} = \frac{٦ \times ٤}{٥} = \frac{٢٤}{٥}$

مكتبة الهدف ALHADAF
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٢)

$$\text{نها}_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س+٨}-٤}{\sqrt{١+٣س}-٥} \times \frac{\sqrt{س+٨}+٤}{\sqrt{س+٨}+٤} \times \frac{\sqrt{١+٣س}+٥}{\sqrt{١+٣س}+٥}$$

$$\text{نها}_{س \to ٨} \frac{(١٦-س-٨)(\sqrt{١+٣س}+٥)}{(٥٤-٣س-١)(\sqrt{س+٨}+٤)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٨} \frac{(٨-س)(\sqrt{١+٣س}+٥)}{(٨-س)(٣س-٤)(\sqrt{س+٨}+٤)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٨} \frac{(\sqrt{١+٣س}+٥)}{٣(٣س-٤)(\sqrt{س+٨}+٤)}$$

$$= \frac{\sqrt{١+٣\times٨}+٥}{٣(٨-٤)(\sqrt{٨+٨}+٤)} = \frac{١٠}{٤٢} = \frac{٥}{١٢}$$

(١٣)

$$\text{نها}_{س \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٢س^{٣}+١١س+١٢}{٣+٥س^{٢}}$$

$$= \text{نها}_{س \to -\frac{٣}{٢}} \frac{(٣+٢س)(٤+س)}{٣+٥س^{٢}}$$

$$= -\frac{٢}{٢}+٤ = \frac{٣}{٢}+\frac{٥}{٢}$$

$$= \frac{٨}{٢}$$

(١٤)

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٩-س^{٢}}-٤}{س^{٢}-٢٥} \times \frac{\sqrt{٩-س^{٢}}+٤}{\sqrt{٩-س^{٢}}+٤}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{-س^{٢}-٩+١٦}{(س^{٢}-٢٥)(\sqrt{٩-س^{٢}}+٤)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{-س^{٢}+٢٥}{(-س^{٢}+٢٥)(\sqrt{٩-س^{٢}}+٤)}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{١٦}+٤} = \frac{١}{٨}$$

(١٥)

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}-١}{س-٢\sqrt{س}+١} \times \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}+١} \times \frac{\sqrt{س}+٢+٢}{\sqrt{س}+٢+٢}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س-١)(\sqrt{س}+٢+٢)}{(س-٢\sqrt{س}+١)(س+٣+٤)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س-١)(\sqrt{س}+٢+٢)}{(\sqrt{س}-١)(\sqrt{س}-١)(س+٣+٤)}$$

$$= \frac{\sqrt{١}+٢+٢}{١+٣+٤} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٦) نهـا $\frac{\text{ا}(س-٦)^{٢}}{س-٢}$ = ٠/٠ صورة

تحديد مجال

$س-٦ = ٠$

$س = ٦ \Leftarrow$ ح = ٦

$س = ٣$

	٣	
+	٠	+

داعماً موجب

$\Leftarrow$ نهـا $\frac{\text{ا}(س-٦)^{٢}}{س-٣}$ = ٠/٠ = صفر

$س \leftarrow ٣$

(١٧) نهـا $\frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س^{٢}}}{س-٢}$ توحيد مقام

$س \leftarrow ٢$

$= نهـا \frac{\frac{س^{٢}-٤}{٤س^{٢}}}{س-٢}$

$س \leftarrow ٢$

$= نهـا \frac{(س-٢)(س+٢)}{٤س^{٢}(س-٢)} \times \frac{١}{س-٢}$

$س \leftarrow ٢$

$= \frac{٤}{٤(٢)^{٢}} = \frac{١}{٤}$

(١٨) نهـا $\frac{س^{٣}-١٢٥}{س^{٢}-٢٥}$ = ٠/٠

$س \leftarrow ٥$

نهـا $\frac{(س-٥)(س^{٢}+٥س+٢٥)}{(س+٥)(س-٥)}$

$س \leftarrow ٥$

$= \frac{٢٥+٢٥+٢٥}{١٠} = \frac{٧٥}{١٠}$

(١٩) نهـا $\frac{\sqrt{٧س-٤}-\sqrt{س+٤}}{س-٢}$ = ٠/٠

$س \leftarrow ٢$

نهـا $\frac{\sqrt{٧س-٤}-\sqrt{س+٤}}{س-٢} \times \frac{\sqrt{٧س-٤}+\sqrt{س+٤}}{\sqrt{٧س-٤}+\sqrt{س+٤}}$

$س \leftarrow ٢$

$= نهـا \frac{٦س-٦}{(س-٢)(\sqrt{٧س-٤}+\sqrt{س+٤})}$

$س \leftarrow ٢$

$= نهـا \frac{٦(س-١)}{(س-٢)(\sqrt{٧س-٤}+\sqrt{س+٤})}$

$س \leftarrow ٢$

$= \frac{٦}{\sqrt{١٠}+\sqrt{٦}} = \frac{٦}{٤\sqrt{٦}} = \frac{\sqrt{٦}}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم : ناجح الجمزاوي

(٢٠)

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣+س٤} - ٣}{س^٢ - ٩} \times \frac{\sqrt{٣+\sqrt{٢+س٤}} + ٣}{\sqrt{٣+\sqrt{٣+س٤}} + ٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{٤س + ٣ - ٩}{(س^٢ - ٩)(\sqrt{٣+\sqrt{٣+س٤}} + ٣)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{٤س - ٦}{(س^٢ - ٩)(\sqrt{٣+\sqrt{٣+س٤}} + ٣)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{٤(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)(\sqrt{٣+\sqrt{٢+س٤}} + ٣)}$$

$$= \frac{٤}{٦ \times (\sqrt{٣+\sqrt{٦}} + ٣)} = \frac{٤}{٦ \times ٦} = \frac{١}{١٨}$$

(٢١)

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣س^٢}{س^٢ - ٤س - ٦}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^٢(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٢)}$$

$$= \frac{٩}{٥}$$

(٢٢)

$$\text{نهـا}_{س \to ٤} \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{س}\right)\left(\frac{١}{٣س - ٦}\right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{(٤ - س)}{٤س} \times \frac{١}{٣(س - ٤)}$$

$$= \frac{١}{٤ \times ٣} = \frac{١}{١٢}$$

(٢٣)

$$\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{\frac{٣}{س + ١} - \frac{٤}{٣س - ٨}}{س^٢ - ٤}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{٩س - ٦ - ٤س - ٤}{(س + ١)(٣س - ٨)(س^٢ - ٤)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{٥س - ١٠}{(س + ١)(٣س - ٨)(س^٢ - ٤)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{٥(س - ٤)}{(س + ١)(٣س - ٨)(س - ٤)(س + ٤)}$$

$$= \frac{٥}{(٤ + ١)(٣ \times ٤ - ٨)} \times \frac{١}{٤ + ٤}$$

$$= \frac{٥}{٤ \times ٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{٥}{٤٨}$$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

(٢٤)

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٢س^{٢}-٨}{س^{٢}-٥س+٦}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٢(س^{٢}-٤)}{س^{٢}-٥س+٦}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٢(س-٢)(س+٢)}{(س-٣)(س-٢)}$$

$$= \frac{٢\times(٢+٢)}{(٣-٢)} = \frac{٨}{-١}$$

$$= -٨$$

(٢٥)

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س^{٣}-٨}{س^{٢}-٤}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{(س-٢)(س+٢)}$$

$$= \frac{٤+٤+٤}{٤} = \frac{١٢}{٤} = ٣$$

(٢٦)

$$\text{نهـا}_{س\to -٢} \frac{س^{٢}-٣س-١٠}{س+٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to -٢} \frac{(س-٥)(س+٢)}{س+٢}$$

$$= -٢-٥ = -٧$$

(٢٧)

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\frac{٦}{س+٢}-\frac{٢}{س}}{س^{٣}+٢س^{٢}-٣}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٦س-٢س-٤}{س\times(س+٢)} \times \frac{١}{س^{٢}+٢س-٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٤س-٤}{س\times(س+٢)} \times \frac{١}{(س+٣)(س-١)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٤(س-١)}{س\times(س+٢)} \times \frac{١}{(س+٣)(س-١)}$$

$$= \frac{٤}{١\times ٣} \times \frac{١}{٣+١}$$

$$= \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٣}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٢٨)

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\sqrt{٤-٣س+١}}{س-0} \times \frac{\sqrt{٤+٣س+١}+\sqrt{١+٣س+١}}{\sqrt{٤+٣س+١}+\sqrt{١+٣س+١}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١٦-٣س-١}{(س-0)(\sqrt{٤+٣س+١}+\sqrt{١+٣س+١})}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-٣س-١٥}{(س-0)(\sqrt{٤+٣س+١}+\sqrt{١+٣س+١})}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-٣(٥+س)}{(س-0)(\sqrt{٤+٣س+١}+\sqrt{١+٣س+١})}$$

$$= \frac{-٣}{\sqrt{٤+١٥+١}+\sqrt{٤+١}} = \frac{-٣}{٤+٤} = \frac{-٣}{٨}$$

(٢٩)

$$\text{نهـا}_{س\to ٩} \frac{س^{\frac{٣}{٢}}-٨١}{٦-\sqrt{٤س}} \times \frac{٦+\sqrt{٤س}}{٦+\sqrt{٤س}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٩} \frac{(س^{\frac{٣}{٢}}-٨١)(٦+\sqrt{٤س})}{٣٦-٤س}$$

$$س \to ٩$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٩} \frac{(س-٩)(س+٩)(٦+\sqrt{٤س})}{٤(٩-س)}$$

$$= \frac{(٩+٩)(٦+٢٦)}{٤} = \frac{١٨ \times ٤}{٤} = ٥٤$$

(٣٠)

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{س^{٤}-٥س+٦}{٥-\sqrt{٤س+٥}} \times \frac{٥+\sqrt{٤س+٥}}{٥+\sqrt{٤س+٥}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{س^{٤}-٥س+٦}{(٥-٤س-٥)(٥+\sqrt{٤س+٥})}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{(س-٣)(س-٢)(س-١)}{(-٤س)(٥+\sqrt{٤س+٥})}$$

$$= \frac{-٦}{(-٤)\times ١(٥+٥)} = \frac{-٦}{٤} = \frac{-٣}{٢}$$

مكتبة الوسام Alwsam
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٣١)

$$\text{نهـا}_{س\to ٢}\left(\frac{١}{س-٢}-\frac{٤}{س^٢-٤}\right)$$

توحيد مقام

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\left(\frac{١\times(س+٢)}{(س-٢)(س+٢)}-\frac{٤}{س^٢-٤}\right)$$

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\left(\frac{س+٢}{س^٢-٤}-\frac{٤}{س^٢-٤}\right)$$

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{س+٢-٤}{س^٢-٤}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{س-٢}{(س-٢)(س+٢)}$$

$$=\frac{١}{٤}$$

(٣٢)

$$\text{نهـا}_{س\to ٠}\frac{\frac{٢}{س-٢}+\frac{٢}{س+٣}}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٠}\frac{٢س+٦+٢س-٤}{(س-٢)(س+٣)}\times\frac{١}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٠}\frac{٤س}{(س-٢)(س+٣)}\times\frac{١}{س}$$

$$=\frac{٤}{(٠-٢)(٠+٣)}=\frac{٤}{٩}$$

(٣٣)

$$\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{\frac{١}{١+س٢}-\frac{١}{٥}}{س^٢-٦}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{٥-(١+س٢)}{٥(١+س٢)}\times\frac{١}{س^٢-٦}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{٤-س٢}{٥(١+س٢)}\times\frac{١}{س^٢-٦}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{-٢(٢-س)}{٥(١+س٢)}\times\frac{١}{(س-٢)(س+٢)}$$

$$=\frac{-٢}{٥(١+٤)}\times\frac{١}{٤}=\frac{-٢}{٢٥}\times\frac{١}{٤}$$

$$=\frac{-١}{٥٠}$$

(٣٤)

$$\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{\frac{١}{١+س}-\frac{١}{٣}}{س^٢-٤}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{٣-(١+س)}{٣(١+س)}\times\frac{١}{س^٢-٤}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to ٢}\frac{-(س-٢)}{٣(١+س)}\times\frac{١}{(س-٢)(س+٢)}$$

$$=\frac{-١}{٣\times٣}\times\frac{١}{٤}=\frac{-١}{٣٦}$$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٣٥) نهـا $\frac{\frac{1}{س+1} - \frac{1}{1-س^{3}}}{س^{3}-٨}$ ، س ← ٢

$= نهـا \frac{\frac{1}{س+1} - \frac{1}{(1-س)(1+س+س^{2})}}{(س-٢)(س^{2}+٢س+٤)}$

$= نهـا \frac{\frac{1-س-1-س+س^{2}}{(س+1)(1-س)(1+س+س^{2})}}{(س-٢)(س^{2}+٢س+٤)}$

$= نهـا \frac{س(س-٢)}{(س+1)(1-س)(1+س+س^{2})(س-٢)(س^{2}+٢س+٤)}$ ، س ← ٢

$= \frac{1}{3 \times 4} \times \frac{1}{12}$

$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{108}$

(٣٦) نهـا $\frac{(س+1)^{3}-٨}{س^{2}-1}$ ، س ← ١

$= نهـا \frac{(س+1-2)((س+1)^{2}+2(س+1)+4)}{س^{2}-1}$

$= نهـا \frac{(س-1)((س+1)^{2}+2(س+1)+4)}{(س-1)(س+1)}$ ، س ← ١

$= \frac{(4+4+4)}{2} = \frac{12}{2} = 6$

(٣٧) نهـا $\frac{(4س-5)^{2}-16}{9-س^{2}}$ ، س ← $\frac{9}{2}$

$= نهـا \frac{(2س-5-4)(2س-5+4)}{9-2س^{2}}$ ، س ← $\frac{9}{2}$

$= نهـا \frac{(1-2س)(9-2س)}{(3-2س)(3+2س)}$ ، س ← $\frac{9}{2}$

$= 1 - \frac{9}{2} \times 2 = 1 - 9 = -8$

(٣٨) نهـا $\frac{س^{2}-100}{س^{2}-10س}$ ، س ← ١٠

$= نهـا \frac{(س-10)(س+10)}{س(س-10)}$ ، س ← ١٠

$= \frac{10+10}{10} = 2$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

(٣٩) $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ٢س}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س-١)}{س(س-٢)}$

$= \frac{٢-١}{٢} = \frac{١}{٢}$

(٤٠) $\text{نها}_{س \to ١^+} \sqrt{١ - س^٢}$

تحديد المجال

$س^٢ = ١$

$س = \pm ١$

١^+ لاتنتمي للمجال

$\text{نها}_{س \to ١^+} \sqrt{١ - س^٢}$ غير موجودة

(٤١) $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{\sqrt{١+٥س} - ٤}{س^٢ - ٩} \times \frac{\sqrt{١+٥س} + ٤}{\sqrt{١+٥س} + ٤}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{١ + ٥س - ١٦}{(س^٢ - ٩)(\sqrt{١+٥س} + ٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{٥س - ١٥}{(س^٢ - ٩)(\sqrt{١+٥س} + ٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{٥(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)(\sqrt{١+٥س} + ٤)}$

$= \frac{٥}{٦ \times (٤ + \sqrt{١+٢×٥})} = \frac{٥}{٦×٨} = \frac{٥}{٤٨}$

(٤٢) $\text{نها}_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٧س + ١٢}{س + ٣} + \sqrt{س + ٤}$

$= \text{نها}_{س \to -٣} \frac{(س+٣)(س+٤)}{س+٣} + \text{نها}_{س \to -٢} \sqrt{س+٤}$

$= -٣ + ٤ + \sqrt{-٢+٤}$

$= ١ + ١$

$= ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال التاسع

① المقام = صفر

$س^2 - 36 = 0$

$س^2 = 36$

$س = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

$\{6، -6\}$ نقط عدم الاتصال

② $و(س) = \frac{س^2 - 4}{س^2 + 4}$

$س^2 + 4 \neq$ صفر لأي حل

لا يوجد نقط عدم اتصال

③ $و(س) = \frac{س + 9}{س^2 - 5س + 6}$

$س^2 - 5س + 6 = 0$

$(س - 3)(س - 2) = 0$

$\{3، 2\}$

④ $و(س) = \frac{5}{س} + \frac{س}{س - 1}$

$س = 0$ ، $س - 1 = 0$

$س = 1$

$\{1، 0\}$

⑤ $و(س) = \begin{cases} 2س^3 - 2 & س < -3 \\ 12 & س = -3 \\ -6س & س > -3 \end{cases}$

$و(-3) = -6 \times -3 - 2 = 18 - 2 = 16$

$س \to -3^+$

$و(-3) = 2(-3)^3 - 2$

$س \to -3^-$

$-18 - 2 = -20$

غير متصل

نقطة الانفصال $\{-3\}$

⑥ $و(س) = \begin{cases} \frac{س - 1}{س^2 - 25} & س \neq 1 \\ س^2 - 1 & س = 1 \end{cases}$

المقام = صفر $س^2 - 25 = 0$

$س^2 = 25 \Leftarrow س = \pm 5$

⑦ نبحث الاتصال عند $س = 1$

$و(1) = \frac{1 - 1}{25 - 25} = \frac{0}{0}$

$س \to 1^+$

$و(س) = س^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$س \to 1^-$

غير متصل

نقط الانفصال $\{-5، 5، 1\}$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع حل السؤال التاسع

⑦ $د(س) = \begin{cases} \frac{1}{1+س} & س \neq -1 \\ 0 & س = -1 \end{cases}$

$س + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$

عدم الاتصال $\{-1\}$

⑧ $د(س) = \frac{-ع س}{ع - س^2}$ $س \in [-1, 1]$

$ع - س^2 = 0 \Leftarrow س^2 = ع$

$س = \pm 2$ لكن $-2 \notin [-1, 1]$

نقط عدم الاتصال $\{1, 2\}$

بداية الفترة — نهاية الفترة

⑨ $د(س) = \sqrt{س + 1}$

$س + 1 = 0 \quad س = -1$

	-1	
$س + 1$	$-$	$+$

الاعمال

نقط عدم الاتصال $(-\infty, -1]$ لأنه غير معرف عندها.

⑩ $د(س) = \sqrt[4]{12 - 3س}$

$12 - 3س = 0 \Leftarrow 3س = 12$

$س = \frac{12}{3} = 4$

	4	
$12 - 3س$	$+$	$-$

نقط عدم الاتصال $[4, \infty)$

⑪ $د(س) = \frac{3س}{س^2 - 1}$ $س \in [0, \infty)$

$س^2 - 1 = 0 \Leftarrow س^2 = 1$

$س = \pm 1$ لكن $1 \notin [0, \infty)$

نقط الاتصال

$\{0, 1\} \cap [0, \infty)$

مكتبة السام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٢) $ق(س) = \frac{س^2 - ٤}{(٢س + ٦)(س - ١)}$

$٢س + ٦ = ٠ \Leftarrow ٢س = -٦ \Leftarrow س = -٣$

$س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

نقط عدم الاتصال $\{١، -٣\}$

(١٣) $ق(س) = \frac{س^2 - ١٦}{س^2 - ٧س}$

$س^2 - ٧س = ٠$

$س(س - ٧) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٧$

نقط الانفصال $\{٠، ٧\}$

(١٤) $ق(س) = \frac{س}{س^2 - ٣س - ٢٨}$

$س^2 - ٣س - ٢٨ = ٠$

$(س - ٧)(س + ٤) = ٠$

$س - ٧ = ٠ \Leftarrow س = ٧$

$س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = -٤$

نقط الانفصال $\{٧، -٤\}$

(١٥) $ق(س) = \frac{١}{س} + \frac{س + ١}{س + ٣}$

$س = ٠$ ، $س + ٣ = ٠$

$س = -٣$

نقط الانفصال $\{٠، -٣\}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال العاشر

(أ) عبارة عن مقصل عند س = ٣

فان $\lim_{س \to ٣} هـا(س) = هـ(٣)$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٦}{س^٢ - ٤س - ٣} = هـ(٣)$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ١)} = م$

$م = \frac{٢}{١+٣}$

$م = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(ب) عبارة عن مقصل فان

$\lim_{س \to ٣} هـا(س) = هـ(٣) = ٤$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٢ هـا(س) + ٥ هـا(س)}{هـا س^٢ + ١} = ٣٨$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٢ هـا(س) + ٥ هـا(س)}{١٠} = ٣٨$

ضرب تبادلي

$\lim_{س \to ٣} ٢ هـا(س) + ٥ هـا(س) = ٣٨٠$

$\lim_{س \to ٣} ٧ هـا(س) = ٣٧٢$

$٧ هـا(٣) = ٣٧٢$

$هـا(٣) = \frac{٣٧٢}{٥}$

لكنه هـ مقصل ⇐

$هـا(س) = هـ(٣) = \frac{٣٧٢}{٥}$

(ج)

$هـ(٥) = \frac{-١}{٢٥}$

$هـا = \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٥}}{س - ٥}$

$= \frac{\frac{٥ - س}{٥س}}{س - ٥}$

$= \frac{-١}{٢٥}$

$\lim_{س \to ٥} هـا(س) = هـ(٥)$

مقصل عند س = ٥

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الحادي عشر

(أ) $\text{هـ}(٤) = ٧$

$\text{نها}_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤}$

$= ٨$

$\therefore$ هـ غير متصل عند $س = ٤$

(ب) $\text{هـ}(٢٥) = ١٠$

$\text{نها}_{س \to ٢٥} \frac{٢٥ - س}{\sqrt{٥} - \sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{س}}{\sqrt{٥} + \sqrt{س}}$

$= \text{نها}_{س \to ٢٥} \frac{(٢٥ - س)(\sqrt{٥} + \sqrt{س})}{٢٥ - س}$

$= \sqrt{٥} + \sqrt{٢٥} = ٥ + ٥ = ١٠$

نها هـ$(س)$ = هـ(٢٥)

$س \to ٢٥$ متصل عند $س = ٢٥$

(ج) هـ$(٥) = ٣$

نها هـ$(س) = ٥^٢ = ٢٥$

$س \to ٥^+$

نها هـ$(س) = ٥ + ٢ = ٧$

$س \to ٥^-$ غير متصل

نجد قاعدة هـ $\times$ س = ل$(س)$

$$\text{ل}(س) = \begin{cases} (س + ٢)(س - ٥)^٢ & س \geq ٥ \\ ٣(س - ٥)^٢ & س = ٥ \\ ٤(س - ٥)^٢ & س < ٥ \end{cases}$$

ل$(٥) = ٣(٥ - ٥)^٢ = $ صفر

نها ل$(س) = ٥^٢(٥ - ٥)^٢ = $ صفر

$س \to ٥^+$

نها ل$(س) = (٥ + ٢)(٥ - ٥)^٢ = $ صفر

$س \to ٥^-$

$\therefore$ نها ل$(س) = $ ل(٥)

$\therefore$ متصل $س \to ٥$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني عشر

(أ)

$هـ(-١) = (-١)^{٢} + ٢ = ١ + ٢ = ٣$

$هـا هـ(س) = (-١)^{٢} + ٢ = ٣$

$س \to -١^{+}$

$هـا هـ(س) = ٤ \times -١ + ٧ = ٣$

$س \to -١^{-}$

متصل

هـ(س) متصل لأنه كثير حدود

$\Rightarrow$ هـ(س) + هـ(س)

متصل + متصل = متصل

(ب)

$هـا هـ(س) = ١$ ، $هـا هـ(س) = -١$

$س \to ٥^{-}$ ، $س \to ٥^{+}$

غير متصل

عند النقطة $س = ٥$

$ل(س) = \begin{cases} ١ \times (س - ٥) & س \geq ٥ \\ صفر(س-٥) = صفر & س = ٥ \\ -١(س-٥) & س < ٥ \end{cases}$

$ل(٥) = صفر$

$هـا ل(س) = -(٥-٥) = صفر$

$س \to ٥^{+}$

$هـا ل(س) = ١ \times (٥-٥) = صفر$

$س \to ٥^{-}$

ل(س) متصل عند $س = ٥$

لأن

$هـا ل(س) = ل(٥)$

$س \to ٥$

(ج)

$هـ(٤) = ٥ \times ٤ - ٢٠ = ١٩$

$هـا هـ(س) = ٥ \times ٤ - ١ = ١٩$

$س \to ٤^{+}$

$هـا هـ(س) = ٤^{٢} + ٣ = ١٦ + ٣ = ١٩$

$س \to ٤^{-}$

متصل

هـ(س) متصل لأنه كثير حدود

$\Rightarrow$ هـ(س) - هـ(س)

متصل - متصل = متصل

مكتبة الوليام AlwaleAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(5)

$هـ(١) = ١+١ = ٢$

$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ١+١ = ٢$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٤-١ = ٣$

غير متصل

نجد قاعدة $ل(س) = هـ \times هـ$

$$ل(س) = \begin{cases} (س+١)(٤س^٢+١) & س \geq ١ \\ (٤-س)(٦س-١) & س < ١ \end{cases}$$

$ل(١) = (١+١)(٤(١)^٢+١)$
$= ٢ \times ٥ = ١٠$

$\lim_{س \to ١^+} ل(س) = (١+١)(٤(١)^٢+١)$
$= ١٠$

$\lim_{س \to ١^-} ل(س) = (٤-١)(٦-١)$
$= ٣ \times ٥ = ١٥$

النهاية غير موجودة

$ل(س)$ غير متصل عند $س = ١$

(6)

ندمج الدالتين

نجد قاعدة $ل(س) = هـ(س) + و(س)$

$$ل(س) = \begin{cases} ٤س^٢+٢+٣س & س \geq ٢ \\ ٣س-١+٣س+٥ & س < ٢ \end{cases}$$

$$ل(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س \geq ٢ \\ ٥س+٤ & س < ٢ \end{cases}$$

$ل(٢) = ٦ \times ٢ + ٢ = ١٤$

$\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = ٦ \times ٢ + ٢ = ١٤$

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = ٥ \times ٢ + ٤ = ١٤$

$\lim_{س \to ٢} ل(س) = ل(٢) = ١٤$

متصل عند $س = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمت بحمد الله

امنياتي بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي