التوجيهي العلمي والصناعي م٣

النهايات والاتصال

أ. مراد يونس

هاتف (١) : ٠٧٨٩٤٥٥٧٥٣

هاتف (٢) : ٠٧٨٧٩٧٢٩١٢

انضموا إلى مجموعة الفيسبوك ليصلكم كل جديد

أ . مراد يونس (رياضيات توجيهي ٢٠٠٠)

مراجعة عامة :-

أولاً :- التحليل الى العوامل الأولية :-

تذكر أنه :

١) $س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ)(س + أ)$ ،

٢) $س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ)(س^{٢} + أس + أ^{٢})$ ،

٣) $س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ)(س^{٢} - أس + أ^{٢})$ ،

٤) $أس^{٢} \mp ب س = س(أس \mp ب)$ ،

٥) $س^{٢} + ب س + جـ = (س + د)(س + هـ)$

بشرط :-

$د \times هـ = جـ$ و $د + هـ = ب$

مثال :- حلل ما يلي الى عوامله الأولية :-

١) $س^{٢} - ٦٤ =$

٢) $٢٥ - س^{٢} =$

٣) $٤س^{٢} - \frac{١}{١٦} =$

٤) $٢س^{٢} - ٤٠ =$

٥) $(س - ١)^{٢} - ١٦ =$

٦) $(٢س - ٣)^{٢} - (س + ١)^{٢} =$

٧) $س^{٤} - ١٦ =$

٨) $س^{٣} - ٨ =$

٩) $٢٧ - س^{٣} =$

١٠) $(س + ٢)^{٣} + ٦٤ =$

١١) $٤س^{٣} + ٤ =$

١٢) $س^{٢} - ٣س =$

١٣) $٥س - ٢س^{٢} =$

١٤) $س^{٣} - ٩س =$

١٥) $س^{٢} + ٤س + ٣ =$

١٦) $س^{٢} + ٧س + ١٢ =$

١٧) $س^{٢} - ٥س + ٦ =$

١٨) $س^{٢} - س \div ٢ =$

١٩) $س^{٢} + ٢س - ١٥ =$

٢٠) $س^{٢} + ١٣س + ٣٠ =$

٢١) $٢س^{٢} + ١٨س + ٤٠ =$

٢٢) $٢س^{٢} - ٥س + ٣ =$

٢٣) $٣س^{٢} - ٧س + ٢ =$

٢٤) $٤س^{٢} + ٤س + ١ =$

٢٥) $٩س^{٢} - ٦س + ١ =$

ثانياً:- بحث الإشارة:-

أي معرفة متى يكون الاقتران موجباً ومتى يكون سالباً.

* خطوات بحث إشارة الاقتران ق(س) بشكل عام:-

أولاً:- نجد أصفار ق(س) ← أي حل المعادلة ق(س) = ٠

ثانياً: نمثل الحلول على خط الأعداد:

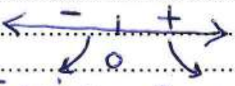
ثالثاً:- نعوض عدداً عشوائياً بين كل حلين على خط الأعداد في ق(س) فتكون إشارة الناتج هي إشارة تلك المنطقة كاملة".

مثال:- ابحث في إشارة الاقتران ق(س) فيما يلي:-

١) ق(س) = س − ٥

الحل:-

س − ٥ = ٠ ← س = ٥

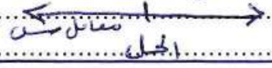


عوض س = ٦ عوض س = ٤

ق(٦) = ١ ق(٤) = −١

ويمكن استخدام الاختصار التالي للاقتران الخطي:-

أي ق(س) = م س + ب



---

٢) ق(س) = ٣ − س

الحل:-

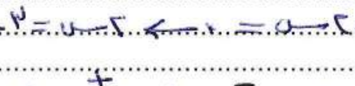
٣ − س = ٠ ← س = ٣

---

٣) ق(س) = ٣ − ٢س

الحل:-

٣ − ٢س = ٠ ← ٢س = ٣ ← س = $\frac{٣}{٢}$

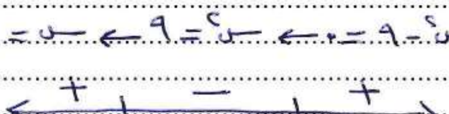


---

٤) ق(س) = $س^{٢}$ − ٩

الحل:-

$س^{٢}$ − ٩ = ٠ ← $س^{٢}$ = ٩ ← س = ± ٣



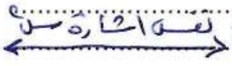
عوض س = ٤ عوض س = ٠ عوض س = −٤

---

* يمكن استخدام الطريقة التالية للاقترانات التربيعية:-

ق(س) = م $س^{٢}$ + ب س + جـ

ملاحظة: إذا كان هناك حل واحد فقط أو لا يوجد حلول فتكون الإشارة



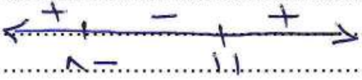
---

٥) ق(س) = $س^{٢}$ − ٣س − ٨٨

الحل:-

$س^{٢}$ − ٣س − ٨٨ = ٠ ← (س − ١١)(س + ٨) = ٠

س = ١١ ، س = −٨



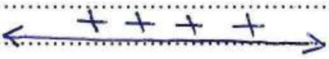
---

٦) ق(س) = $س^{٢}$ + ٩

الحل:-

$س^{٢}$ + ٩ = ٠ ← $س^{٢}$ = −٩ (لا يوجد جذر للسالب)

∴ لا يوجد حل ←



---

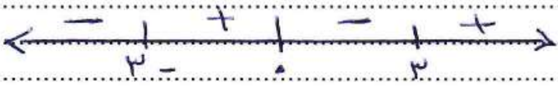
٧) ق(س) = $س^{٣}$ − ٩س

الحل:-

$س^{٣}$ − ٩س = ٠ ← س($س^{٢}$ − ٩) = ٠

← س(س − ٣)(س + ٣) = ٠

س = ٠ ، س = ٣ ، س = −٣



---

٨) ق(س) = $س^{٣}$ − $س^{٢}$ − ٩س + ٩

الحل:-

ثالثاً :- اقتران القيمة المطلقة :-

تذكر أن :- $|-٣| = ٣$ ، $|٣| = ٣$ ، $|٠| = ٠$:

$$|س| = \begin{cases} س ، & س \geq ٠ \\ -س ، & س < ٠ \end{cases}$$

وبشكل عام :-

$$|ق(س)| = \begin{cases} ق(س) ، & ق(س) \geq ٠ \\ -ق(س) ، & ق(س) < ٠ \end{cases}$$

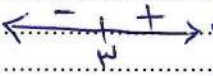
لمعرفة متى يكون $ق(س) \geq ٠$ أو < ٠

لا بد من بحث إشارته :

مثال :- اعد تعريف الاقترانات التالية :-

١) $ق(س) = |س - ٣|$

الحل :-

$س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣ \Leftarrow$ 

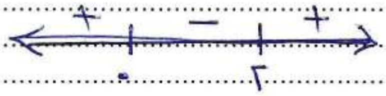
$$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} س - ٣ ، & س \geq ٣ \\ -(س - ٣) ، & س < ٣ \end{cases}$$

٢) $ق(س) = |س^٢ - ٢س| + ٥$

الحل :-

$س^٢ - ٢س = ٠ \Leftarrow س(س - ٢) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$

$\Leftarrow$ 

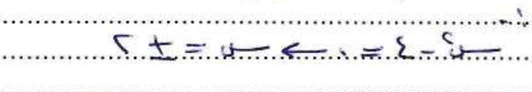
$\Leftarrow$

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س + ٥ ، & س < ٠ \\ ٢س - س^٢ + ٥ ، & ٠ \leq س < ٢ \\ س^٢ - ٢س + ٥ ، & س \geq ٢ \end{cases}$$

٣) $ق(س) = |س^٢ - ٤|$

الحل :-

$س^٢ - ٤ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$



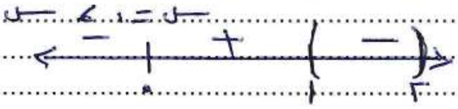
$$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤ ، & س \geq ٢ \\ ٤ - س^٢ ، & -٢ \leq س < ٢ \\ س^٢ - ٤ ، & س < -٢ \end{cases}$$

٤) $ق(س) = \begin{cases} |س - س^٢| ، & ١ \leq س < ٢ \\ |س - ٣| ، & ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

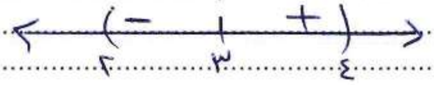
الحل :-

$س - س^٢ = ٠ \Leftarrow س(١ - س) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ١$



$س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$



$$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} س^٢ - س ، & ١ \leq س < ٢ \\ ٣ - س ، & ٢ \leq س < ٣ \\ س - ٣ ، & ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$$

*) خصائص القيمة المطلقة :-

أ) $(|ق(س)|)^٢ = (ق(س))^٢$

ب) $\sqrt{ق^٢(س)} = |ق(س)|$ وبشكل عام اذا كان ن عدداً زوجياً $\Leftarrow \sqrt[ن]{(ق(س))^ن} = |ق(س)|$

جـ) $|ق(س)| = أ \Leftarrow ق(س) = أ$ $\underline{\underline{أو}}$ $ق(س) = -أ$

د) $|ق(س)| \leq أ \Leftarrow -أ \leq ق(س) \leq أ$

$|ق(س)| \geq أ \Leftarrow ق(س) \geq أ$ ، $\underline{\underline{أو}}$ $ق(س) \leq -أ$.

هـ) $\frac{|ق(س)|}{|هـ(س)|} = \left|\frac{ق(س)}{هـ(س)}\right|$ وبالمثل في الضرب

٥) اعد تعريف $ق(س) = \begin{cases} س^٢ ، & |س| < ٢ \\ س ، & |س| \geq ٢ \end{cases}$

الحل :-

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ ، & -٢ < س < ٢ \\ س ، & س \geq ٢ ، س \leq -٢ \end{cases}$$

٦) جد حل المعادلة $|س - ٥| + ٢ = ٤$

الحل :-

$|س - ٥| = ٢ \Leftarrow س - ٥ = ٢ \Leftarrow س = ٧$

$\Leftarrow س - ٥ = -٢ \Leftarrow س = ٣$

رابعاً: اقتران أكبر عدد صحيح:

تذكر أن: ⟦٢⟧ = ٢ ، ⟦−٢⟧ = −٢

⟦٣٫٥⟧ = ٣ ، ⟦−٣٫٥⟧ = −٤

⟦٣٫٩⟧ = ٣ ، ⟦−٣٫٩⟧ = −٤

⟦١٠/٣⟧ = ٣ ، ⟦−١٠/٣⟧ = −٤

* خطوات إعادة تعريف ق(س) = ⟦أس + ب⟧

أ) نجد طول الدرجة (القفزة) حيث ل = ١ / |معامل س|

ب) نجد نقطة الارتكاز والتي هي حل المعادلة

أس + ب = ٠

جـ) نضع نقطة الارتكاز على خط الأعداد ثم نزيد أو نطرح منها طول الدرجة حسب مجال ق(س)

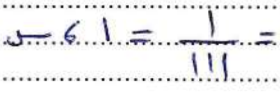
د) نكتب ق(س) على صورة اقتران متشعب ونكتب الدرجات وتكون المساواة على اليمين إذا كان معامل س (+) وتكون المساواة على اليسار إذا كان معامل س (−).

هـ) نجد القواعد من خلال تعويض أي عدد في الدرجة داخل ⟦ ⟧ ويفضل أن يكون العدد عند المساواة.

مثال: أعد تعريف الاقترانات التالية:

١) ق(س) = ⟦س − ٢⟧ ، س ∈ [٠، ٣]

الحل: ل = ١ / |١| = ١ ، س − ٢ = ٠ ← س = ٢

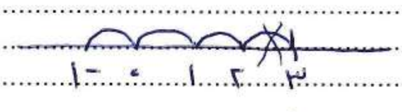


← ق(س) = { −٢ ، ٠ ≤ س < ١
−١ ، ١ ≤ س < ٢
٠ ، ٢ ≤ س < ٣
١ ، س = ٣

٢) ق(س) = ⟦٣ − س⟧ ، س ∈ [−١، ٢]:

الحل:

ل = ١ / |−١| = ١ ، ٣ − س = ٠ ← س = ٣



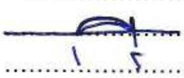
← ق(س) = { ٤ ، س = −١
٣ ، −١ < س ≤ ٠
٢ ، ٠ < س ≤ ١
١ ، ١ < س ≤ ٢

٣) ق(س) = { س⟦س⟧ ، ٠ ≤ س ≤ ١
⟦٢ − س⟧ ، ١ < س < ٢

الحل:

⟦س⟧ ← ل = ١ ، س = ٠

⟦٢ − س⟧ ← ل = ١ ، س = ٢



← ق(س) = { صفر ، ٠ ≤ س < ١
س ، س = ١
صفر ، ١ < س < ٢

* خصائص اقتران أكبر عدد صحيح:

أ) ⟦س + أ⟧ = ⟦س⟧ + أ شرط أ ∈ ص

ب) ⟦ق(س)⟧ = أ ← أ ≤ ق(س) < أ + ١ حيث أ ∈ ص.

انتبه: ⟦س⟧ − ⟦س⟧ = صفر ✓

⟦س⟧ + ⟦−س⟧ = صفر ✗

⟦−س⟧ = −⟦س⟧ ✗

⟦٢ + س⟧ = ٢ + ⟦س⟧ ✓

⟦٢ − س⟧ = ٢ − ⟦س⟧ ✗

⟦٢ − س⟧ = ٢ + ⟦−س⟧ ✓

⟦٢س⟧ = ٢⟦س⟧ ✗

١) أعد تعريف ق(س) = ⟦س − ٥⟧ − ⟦س + ٣⟧ ، س ∈ [١، ٥]

الحل:

ق(س) = (~~⟦س⟧~~ − ٥) − (~~⟦س⟧~~ + ٣)

← ق(س) = −٨ حيث س ∈ [١، ٥]

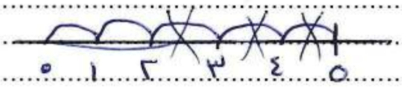
٢) أعد تعريف ق(س) = ⟦س − ٥⟧ + ⟦١ − س⟧

س ∈ [٠ ، ٢]

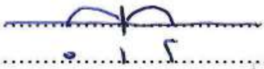
الحل:

هنا لدينا ثلاثة من الحالة الثالثة.

⟦س − ٥⟧ ← ل = ١ ، س − ٥ = ن ← س = ٥



⟦١ − س⟧ ← ل = ١ ، −س + ١ = ٠ ← س = ١



ق(س) = { −٥ + ١ = −٤ ، س = ٠
−٥ ، ٠ < س < ١
−٤ + ٠ = −٤ ، س = ١
−٥ ، ١ < س < ٢
−٣ + −١ = −٤ ، س = ٢

٣) جد حل المعادلة: ⟦٢س − ٥⟧ = ٤

الحل:

٤ ≤ ٢س − ٥ < ٥
+٥ +٥ +٥

٩ ≤ ٢س < ١٠
÷٢ ÷٢ ÷٢

$\frac{٩}{٢}$ ≤ س < ٥

أي س ∈ [٤,٥ ، ٥).

خامساً: الجذور الزوجية:

إذا كانت ق(س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ فإن مجال الاقتران

ق(س) هو ← مجال هـ(س) حيث هـ(س) ≥ ٠ ، ن زوجي.
← مجال هـ(س) ، ن فردي.

مثال: جد مجال كل من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = $\sqrt[٣]{س^٢ - ١}$

الحل:

س² − ١ = كثير حدود مجاله ح.

بالتالي مجاله ق(س) هو ح (س ∈ ح).

---

٢) ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ١}$

الحل:

نبحث في إشارة س² − ١

س² − ١ = ٠ ← س = ±١ ← + | − | + (−١ ، +١)

← مجال ق هو س ∈ (−∞ ، −١] ∪ [١ ، ∞)

---

٣) ع(س) = $\frac{١}{\sqrt[٤]{س - ٥}}$

الحل:

س − ٥ = ٠ ← س = ٥ ← − | + (٥)

مجال ع هو س ∈ (٥ ، ∞).

---

٤) ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$

الحل:

مفهوم النهاية:-

مثال توضيحي:- ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{٢ - س ، س < ١} \\ \text{٣ ، س = ١} \\ \text{٢س ، س > ١} \end{cases}$

أولاً:- جد قيمة ق(٢) ، ق(-٢) ، ق(١)

⟸ ق(٢) = ٢(٢) = ٤

ق(-٢) = ٢ - (-٢) = ٤

ق(١) = ٣

ثانياً:- اكمل الجدول الآتي:-

س > ١ ← → س < ١

س	١٫١	١٫٠١	١٫٠٠١	١	٠٫٩٩٩	٠٫٩٩	٠٫٩
ق(س)	٢٫٢	٢٫٠٢	٢٫٠٠٢	٣	١٫٠٠١	١٫٠١	١٫١

نلاحظ من خلال الجدول الذي يمثل سلوك ق(س)

عندما تقترب قيم س من العدد ١

- عندما تقترب قيم س من العدد (١) من جهة اليمين (س > ١) فإن قيم ق(س) تقترب من العدد ٢

ونعبر عن ذلك بـ:- $\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

- عندما تقترب قيم س من العدد (١) من جهة اليسار (س < ١) فإن قيم ق(س) تقترب من العدد ١

ونعبر عن ذلك بـ:- $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١

بشكل عام إذا كانت:-

١) $\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ل

فإن: $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة وتساوي ل

٢) $\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) ≠ $\underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

فإن: $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة (غ.م).

في مثالنا السابق تكون $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ق(س) غ.م

لأن $\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ ≠ $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١

مثال:- اذا كانت $\underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٦

وكانت $\underset{\text{س} \to ٤^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٣

جد $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}}$ ق(س)

الحل:- $\underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) ≠ $\underset{\text{س} \to ٤^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) ⟸ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}}$ ق(س) غ.م

مثال⑤:- اذا كانت $\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

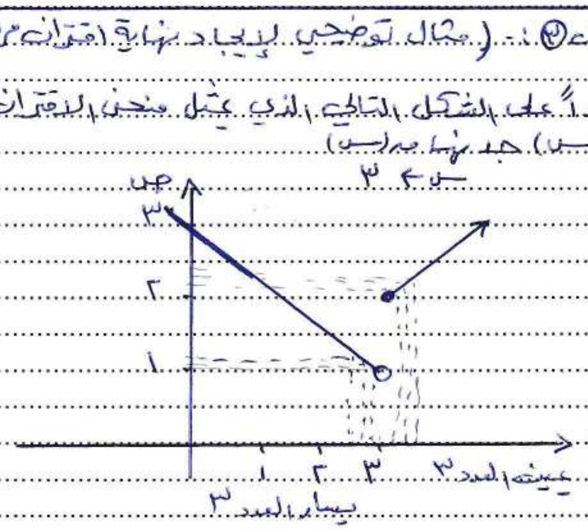
وكانت $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

جد $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}$ ق(س)

الحل:- $\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ .

مثال⑥:- (مثال توضيحي لإيجاد نهاية اقتران مرسوم):

معتمداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}}$ ق(س)



الحل:-

من خلال الرسم لا بد من إيجاد النهاية من يمين العدد ٣ ويساره.

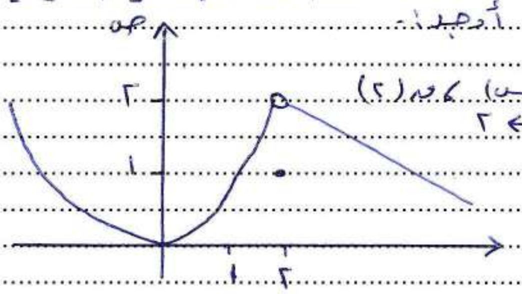
⟸ $\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ (كلما اقتربت س من العدد ٣ من اليمين يقترب ق(س) من العدد ٢).

⟸ $\underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١ (كلما اقتربت س من العدد ٣ من اليسار يقترب ق(س) من العدد ١).

∴ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}}$ ق(س) غ.م.

لأن $\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) ≠ $\underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نها}}$ ق(س).

مثال ④ :- معتمداً على الشكل التالي الذي يمثل ق(س) أوجد :-



نها ق(س) ، ق(٢)
س ← ٢

الحل :-

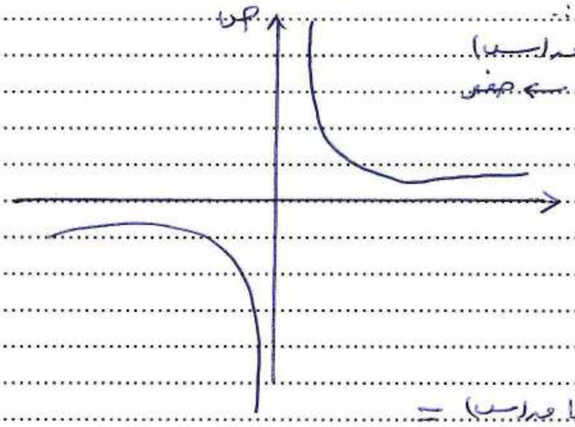
⟸ نها ق(س) = ٢
س ← ٢^{+}

و نها ق(س) = ٢
س ← ٢^{-}

∴ نها ق(س) = ٢
س ← ٢

⟸ ق(٢) = ١

مثال ⑤ :- معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل ق(س) أوجد :-



نها ق(س)
س ← صفر

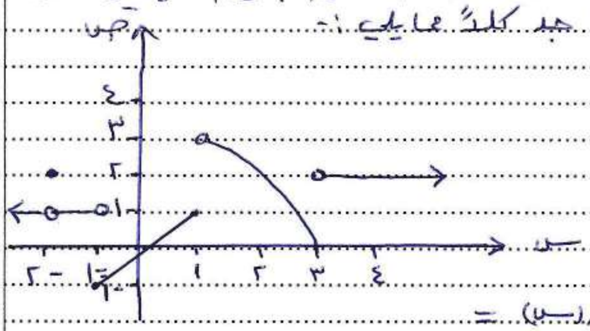
الحل :-

نها ق(س) =
س ← ٠^{+}

نها ق(س) =
س ← ٠^{-}

⟸ نها ق(س) =
س ← ٠

مثال ⑥ :- معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) جد كلاً مما يلي :-



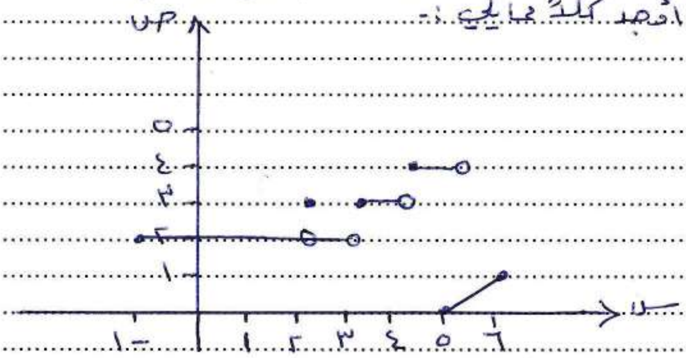
١) نها ق(س) =
س ← ١^{-}

٢) نها ق(س) =
س ← -٢

٣) نها ق(س) =
س ← ٤^{-}

٤) قيم م التي تكون عندها نها ق(س) غ.م.
س ← م

مثال ⑦ :- معتمداً على الشكل التالي الذي يمثل ق(س) أوجد كلاً مما يلي :-



١) نها ق(س) =
س ← ٤^{+}

٢) نها ق(س) =
س ← ٢٫٥

٣) نها ق(س) =
س ← ٦

٤) نها ق(س) =
س ← -١

٥) جد مجموعة قيم م بحيث أن نها ق(س) غ.م.
س ← م

الحل :-

٦) جد مجموعة قيم م بحيث أن نها ق(س) = ٣
س ← م

الحل :-

٧) جد مجموعة قيم م بحيث أن نها ق(س) = ٤
س ← $م^{+}$

الحل :-

* ملاحظة هامة جداً :-

عند اطراف الفترات تكون النهاية بشكل عام غير موجودة لأن الاقتران عند الاطراف يكون معرّف من جهة واحدة فقط.

مثال⑧ :- اذا كانت :

ق(س) = { ٢س + ١ ، س ∈ ص
       { س^{٢} + ٤ ، س ∉ ص

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة جد :-

نها ق(س)
س ← ٢

الحل :-

نها ق(س) = ٢(٢) + ١ = ٥ .
س ← ٢

مثال⑨ :- اذا كانت ق كثير حدود يمر بالنقطة (-٣ ، ٤) وكانت نها (س - ل(س)) = -١٠

جد: نها (ق^{٢}(س) - ٢ل(س)) :-
س ← -٣

الحل :-

بما أن كثير الحدود يمر بالنقطة ← يقع على المنحنى

ق(-٣) = ٤ و نها ق(س) = ٤
س ← -٣

← نها (س - ل(س)) = -١٠
س ← -٣

$\cancel{-٣}$ - نها ل(س) = -١٠
س ← -٣
+٣ $\cancel{+٣}$

← نها ل(س) = +٧
س ← -٣

← نها (ق^{٢}(س) - ٢ل(س)) = (٤)^{٢} - ٢(٧)
س ← -٣

= ١٦ - ١٤ = $\boxed{٢}$

مثال⑩ :- اذا كانت م كثير حدود باقي قسمته على (س-٢) يساوي (٥) فجد :-

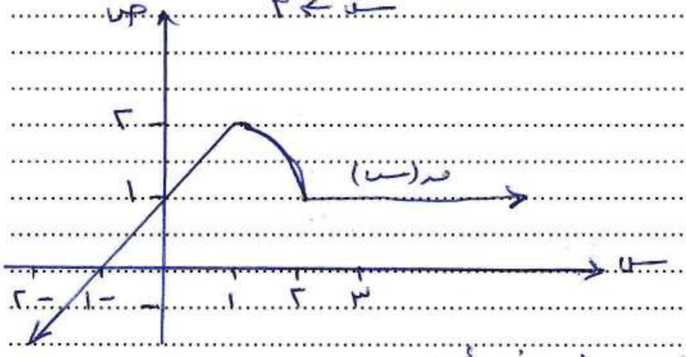
نها (٣م(س) + ٤س^{٢})
س ← ٢

الحل :- نها م(س) = ٥
س ← ٢

← نها (٣م(س) + ٤س^{٢}) = ٣(٥) + ٤(٢)^{٢}
س ← ٢

= ١٥ + ١٦ = $\boxed{٣١}$

مثال⑪ :- الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المعرف على ح جد نها ق(س - ٢)
س ← ٣



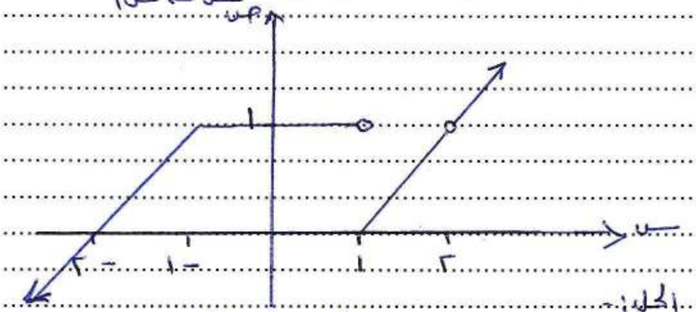
الحل :- نفرض أن :-

ص = س - ٢ ← عندما س ← ٣ فإن ص ← ١

← نها ق(س - ٢) = نها ق(ص) = ٢
س ← ٣   ص ← ١

سؤال وزارة (ص ٢٠١٣) :-
اذا كانت الشكل المجاور يمثل منحنى ق المعرف على ح ،

أوجد مجموعة قيم س١ التي تجعل نها ق(س) = ١
س ← س١

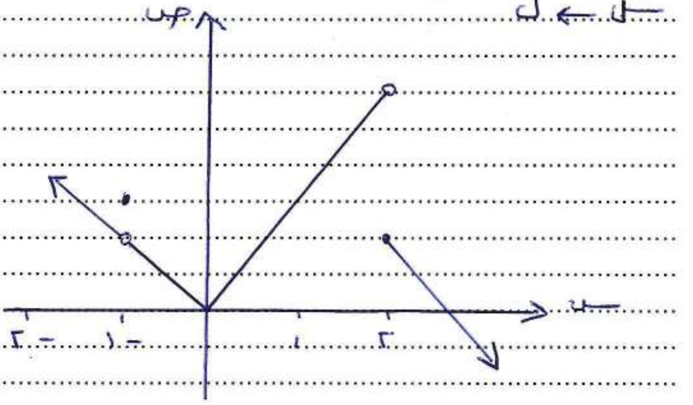


الحل :-
س١ = [-١ ، ١) ∪ {٢}

سؤال وزارة (ص ٢٠١٢) :-

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى هـ(س) المعرف على ح فأوجد مجموعة قيم ل حيث :-

نها هـ(س) غير موجودة ؛
س ← ل

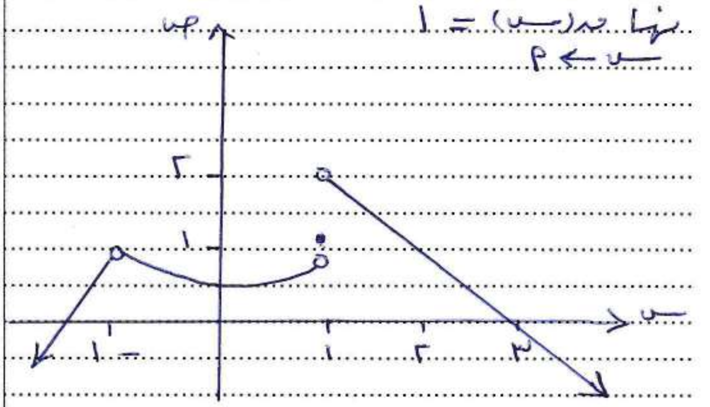


الحل :- ل = {٢}

سؤال وزارة (ش ٢٠١٢) :-

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى هـ(س) المعرف على ح فأوجد مجموعة قيم أ حيث :-

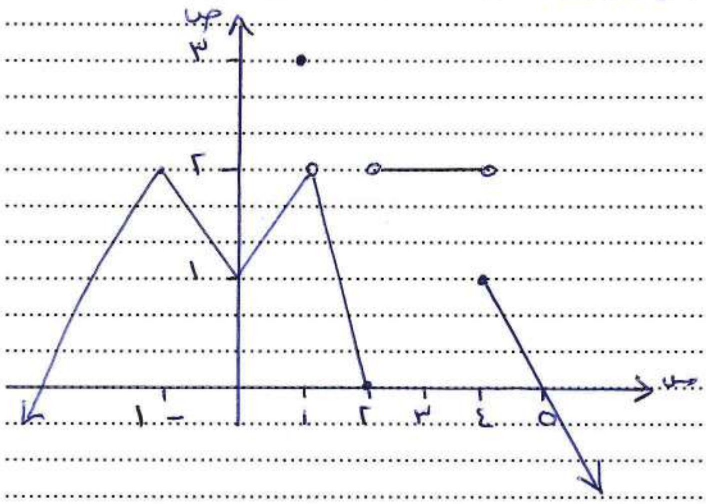
نها هـ(س) = ١
س ← أ



الحل :-
أ = {-١، ٢} .

سؤال وزارة (ش ٢٠١٦) :-

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران هـ(س) ، س ∈ ح .



أ) اذا كانت نها هـ(س) = ٢ أوجد قيم أ ؟
س ← أ

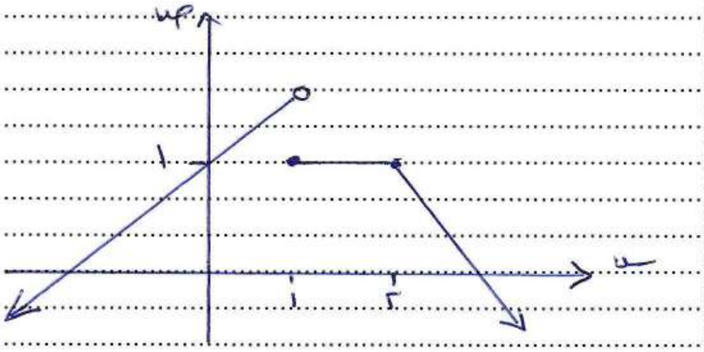
الحل :-
أ = (٢، ٤) ∪ {-١، ١} .

ب) اذا كانت نها هـ(س) غير موجودة
س ← ب
جد قيم ب ؟ .

الحل :-
ب = {٢، ٤} .

سؤال وزارة (ش ٢٠١٣) :-

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى هـ المعرف على ح فأوجد مجموعة قيم أ التي تجعل نها هـ(س) = ١
س ← أ



الحل :-
أ = (١، ٢] ∪ {٠} .

نظريات على النهايات :-

١) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{جـ} = \text{جـ}$ ، جـ عدد ثابت .

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}$.

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{جـ}\,\text{ق(س)} = \text{جـ} \lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)}$.

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} (\text{ق(س)} \mp \text{هـ(س)}) = \lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)} \mp \lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{هـ(س)}$

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} (\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}) = \lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)} \times \lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{هـ(س)}$

٦) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)}}{\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{هـ(س)}}$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{هـ(س)} \neq ٠$

٧) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} (\text{ق(س)})^{\text{ن}} = (\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)})^{\text{ن}}$

٨) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)}}$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)} > ٠$ اذا كان ن عدد زوجي .

٩) اذا كانت ق(س) كثير حدود فإن :-

$\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$.

مثال ① :- جد قيمة كل من النهايات الآتية :-

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} ٧ = ٣$.

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \pi = \pi$.

٣) $\lim\limits_{\text{ص}\to ٣} -\frac{٧}{٢} = -\frac{٧}{٣}$.

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{س} = ٢$.

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} (\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٥) = (٣)^٢ - ٥(٣) + ٥$

$= ٩ - ١٥ + ٥$

$= ١٤ - ١٥ = \boxed{-١}$

٦) $\lim\limits_{\text{س}\to ٦٤} \left(\frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{١٦}{\text{س}}\right) = \left(\frac{٤}{٨} + \frac{١٦}{٦٤}\right) = \boxed{\frac{٣}{٤}}$.

٧) $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \left((\text{س} - ٣)^٢ (٣ - \text{س})^٣ - \frac{٣}{٢}\text{س} + ١\right)$

الحل :-

$= (١)^٢ \times (-١)^٣ - \frac{١٢}{٢} + ١$

$= -١ - ٦ + ١ = \boxed{-٦}$.

مثال ② :- اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} (\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢) = -٢$

جد قيمة الثابت أ ؟

الحل :-

نعوض تعويضاً مباشراً .

$\leftarrow \text{أ}^٢ - ٥ \times \text{أ} + ٢ = -٢$

$\leftarrow \text{أ}^٢ - ٥\text{أ} + ٤ = ٠ \leftarrow (\text{أ} - ٤)(\text{أ} - ١) = ٠$

$\boxed{\text{أ} = ٤}$ ، $\boxed{\text{أ} = ١}$

مثال ③ :- أوجد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الأولى بحيث ق(٢) = ٧ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \text{ق(س)} = ٤$.

الحل :-

نفترض أن ق(س) = أس + ب

$\leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ١} (\text{أس} + \text{ب}) = ٤$

$\leftarrow \text{أ} \times ١ + \text{ب} = ٤ \leftarrow \text{أ} + \text{ب} = ٤$ ---- ①

$\leftarrow \text{ق(٢)} = ٧ \leftarrow \text{أ(٢)} + \text{ب} = ٧$ ---- ②

نطرح المعادلة ① من المعادلة ②

$\leftarrow -\text{أ} = -٣ \leftarrow \boxed{\text{أ} = ٣}$

نعوض قيمة أ في المعادلة ①

$\underset{-٣}{٣} + \text{ب} = \underset{-٣}{٤} \leftarrow \boxed{\text{ب} = ١}$.

مثال ④ :- اذا كانت $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س) = ٣$ ،

$\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س) = -٣$ جد كلاً مما يلي :-

1) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ٣\,ق(س) = ٣ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س)$

$= ٣ \times ٣ = \boxed{٩}$ ،

2) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, (٢\,ق(س) - ٣\,هـ(س))$

$= ٢ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س) - ٣ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س)$

$= ٢ \times ٣ - ٣ \times -٣ = ٦ + ٩ = \boxed{١٥}$ ،

3) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, (س^٢\, ق(س) - ٥س + ٢)$

$= \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, س^٢\, ق(س) + \underset{س\to٢}{\text{نها}} - ٥س + ٢$

$= ٤(٣) + -١٠ + ٢$

$= ١٢ - ١٠ + ٢ = ١٤ - ١٠ = \boxed{٤}$ ؛

4) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, (ق^٢(س) + ٣س)$

$= \left(\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س)\right)^٢ + \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ٣س$

$= ٩ + ٣(٢) = ٩ + ٦ = \boxed{١٥}$.

5) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, \frac{ق(س) + ٥}{هـ^٢(س)}$

$= \frac{\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س) + \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ٥}{\left(\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س)\right)^٢} = \frac{٣ + ٥}{(-٣)^٢}$

$= \boxed{\frac{٨}{٩}}$

6) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, \frac{س^٢ - ١}{ق(س)} + \sqrt{٢\,هـ(س) + ١٥}$

الحل :-

$= \frac{\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, س^٢ - ١}{\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س)} + \sqrt{٢ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س) + ١٥}$

$= \frac{٤ - ١}{٣} + \sqrt{٢(-٣) + ١٥}$

$= ١ + \sqrt{٩}$

$= ١ + ٣ = \boxed{٤}$ ؛

مثال ⑤ :- اذا كانت $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, (٢\,ق(س) - هـ(س)) = ٨$

وكانت $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, (٣\,هـ(س) - ٥س) = -٤$

فجد $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, (ق^٣(س) + ٢)$

الحل :- نجهز المعطيات وذلك بجعل $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س)$

و $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س)$ لوحدهما .

← $٣ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س) - \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ٥س = -٤$

$٣ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س) - ٥ \times ٢ = -٤$

← $\frac{\cancel{٣} \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س)}{\cancel{٣}} = -٤ + ١٠ = \frac{٦}{٣} = ٢$

← $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س) = ٢$

لكن، $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, (٢\,ق(س) - هـ(س)) = ٨$

← $٢ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س) - \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, هـ(س) = ٨$

$٢ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س) - ٢ = ٨$

← $\frac{\cancel{٢} \underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س)}{\cancel{٢}} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

← نجد المطلوب :-

$\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, (ق^٣(س) + ٢)$

← $\left(\underset{س\to٢}{\text{نها}}\, ق(س)\right)^٣ + ٢$

← $(٥)^٣ + ٢ = \boxed{١٢٧}$.

مثال ⑥ :- اذا كانت $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,(\text{ق}^{٣}(\text{س})) + ٢ = ٢٩$ ،

جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\frac{١}{٣}\,\text{ق}^{٢}(\text{س})$

الحل :-

$(\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س}))^{٣} + ٢ = ٢٩$

← $(\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س}))^{٣} = ٢٧$

← $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س}) = ٣$.

← $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\frac{١}{٣}\,\text{ق}^{٢}(\text{س}) = \frac{١}{٣} \times (٣)^{٢}$

$= \boxed{٣}$.

مثال ⑦ :- اذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}(٢\,\text{ق}(\text{س}) + ٤) = ٦$ ،

$\text{ق}(٣) = ٥$

جد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,(\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + \text{س}^{٢} - ١)$

الحل :-

$٢(\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س})) + ٤ = ٦$

← $٢\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س}) = ٢$

← $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س}) = ١$

← $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,(\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + \text{س}^{٢} - ١)$

$= ٣\,\text{ق}(٣) + (٣)^{٢} - ١$

$= ٣(٥) + ٩ - ١ = \boxed{٢٣}$.

مثال ⑧ :- اذا كانت $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س}) = ٥$ ، $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{هـ}(\text{س}) = ٣$

جد :- $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,(\text{ق}(\text{س}) + ٢\,\text{هـ}(\text{س}) - \text{س}^{٣})$.

الحل :-

← $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س}) + ٢\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{هـ}(\text{س}) - \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\,\text{س}^{٣}$

← $٥ + ٢(٣) - (٢)^{٣} = \boxed{٣}$.

مثال ⑨ :- اذا كانت :

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٦ & ، \text{س} \leq ٣ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$

أجد :-

١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{س} + ٢)$ ٢) $\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نها}}\,\text{ق}(٧ - \text{س})$

٣) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}}\,\text{ق}(٤)$

الحل :-

١) نفرض أن $\text{ص} = \text{س} + ٢$

عندما س ← ٣ فإن ص ← $٣ + ٢ = ٥$:

← $\underset{\text{ص}\to ٥}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{ص}) = ٢(٥) = \boxed{١٠}$ ،

٢) $\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نها}}\,\text{ق}(٧ - \text{س})$

نفرض أن $\text{ص} = ٧ - \text{س}$

عندما س ← ٤^{+} فإن ص ← $٧ - ٤^{+} = ٣^{-}$

← $\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نها}}\,\text{ق}(٧ - \text{س}) = \underset{\text{ص}\to ٣^{-}}{\text{نها}}\,\text{ق}(\text{ص})$

← $(٣)^{٢} + ٦ = ٩ + ٦ = \boxed{١٥}$.

٣) $\text{ق}(٤) = ٢ \times ٤ = ٨$

← $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}}\,\text{ق}(٤) = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}}\,٨ = \boxed{٨}$ ،

مثال ⑩ اذا كان باقي قسمة هـ(س) على (س − ٣) يساوي (٦) حيث هـ(س) كثير حدود جد

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,(٤\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢})$:

الحل :- $\text{س} - ٣ = ٠$ ← $\text{س} = ٣$

باقي القسمة $\text{هـ}(٣) = ٦$ ،

هـ كثير حدود ← $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,\text{هـ}(\text{س}) = \text{هـ}(٣) = ٦$

← $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\,(٤\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢}) = ٤(٦) + (٣)^{٢}$

$= \boxed{٣٣}$.

مثال ⑪ :- اذا كانت ق(س) = س² − ٧ ،

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(\text{ع(س)} + \text{س}\right) = ٥$

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{ق(س) ع(س)} + \text{س}^٢}{\sqrt[٣]{\text{ع}^٢\text{(س)} - ١}} \right)$

الحل: $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{ق(س)} = (٢)^٢ - ٧ = -٣$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{ع(س)} + ٢ = ٥ \rightarrow \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{ع(س)} = ٣$

← المطلوب = $\dfrac{-٣ \times ٣ + ٢^٢}{\sqrt[٣]{٩ - ١}} = \boxed{\dfrac{-٥}{٢}}$.

مثال ⑫ :- اذا علمت أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\frac{١}{٣} \text{ق(س)} - ٤\right) = ١$

جد:

$\underset{\text{س} \leftarrow ٩}{\text{نها}} \left(\text{ق}(\sqrt{\text{س}})) + ٢\text{س} - ١ \right)$

الحل:

← $\frac{١}{٣} \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)} - \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}} ٤ = ١$

← $\frac{١}{٣} \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)} \cancel{-٤} = ١$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \cancel{+٤} \qquad +٤$

← $\frac{١}{٣} \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)} = ٥$

⇐ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)} = ١٥$

← $\underset{\text{س} \leftarrow ٩}{\text{نها}} \left(\text{ق}(\sqrt{\text{س}}) + ٢\text{س} - ١ \right)$

نفرض أن ص = $\sqrt{\text{س}}$.

عندما س ← ٩ فإن ص ← ٣

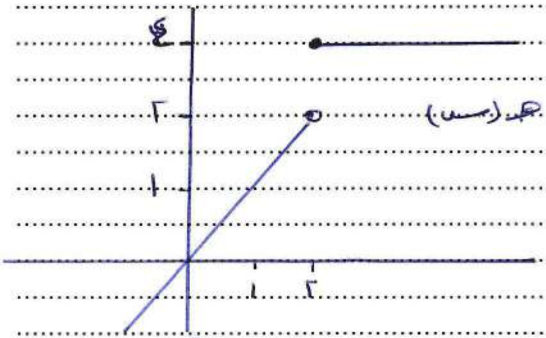
← $\underset{\text{ص} \leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(ص)} + ١٨ - ١$

← = ١٥ + ١٧ = $\boxed{٣٢}$.

مثال ⑬ :- اذا كان الجدول التالي يمثل ق(س)

س	٢٫١	٢٫٠١	٢٫٠٠١	٢	١٫٩٩٩	١٫٩٩	١٫٩	X
ق(س)	٤٫١	٤٫٠١	٤٫٠٠١		٥٫٩٩٩	٥٫٩٩	٥٫٩	X

وكانت هـ(س) ممثلة بالشكل التالي :-



جد :- $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right) + ٢\text{س}^٢$

الحل :-

← $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right) + \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} ٢\text{س}^٢$

← نجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right) = ٤ + ٤ = ٨$

← $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نها}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right) = ٦ + ٢ = ٨$

← $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right) = ٨$

⇐ المطلوب :-

$٨ + ٢(٢)^٢ = ٨ + ٨ = \boxed{١٦}$.

مثال ⑭ :- اذا كان ل(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ١ \text{ ، س} \in \text{ص} \\ \text{س}^٢ + ٤ \text{ ، س} \notin \text{ص} \end{cases}$

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة :-

جد :-

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{ل(س)}$ ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ١٫٥}{\text{نها}} \text{ل(س)}$ ٣) ل(٢) ، ل(١٫٥)

الحل :-

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{ل(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} ٢\text{س} + ١ = ٢(٢) + ١ = \boxed{٥}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ١٫٥}{\text{نها}} \text{ل(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ١٫٥}{\text{نها}} \text{س}^٢ + ٤ = (١٫٥)^٢ + ٤ = \boxed{٦٫٢٥}$

٣) $\text{ل(٢)} = ٢(٢) + ١ = \boxed{٥}$

$\text{ل(١٫٥)} = (١٫٥)^٢ + ٤ = \boxed{٦٫٢٥}$

مثال (١٥): إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢ \text{ ، } -١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٣\text{س} - ١ \text{ ، } ٢ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$

تجد:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^-}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ و) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} (\text{س ق}(\text{س}) - ٥)$

الحل:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} (٣\text{س} - ١) = ٩ - ١ = \boxed{٨}$ ،

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ + ٢) = ١ + ٢ = \boxed{٣}$ ،

جـ) عند س = ٢ لا بد من إيجاد النهاية من الجهتين ،

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} (٣\text{س} - ١) = ٥$

$\ne$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ + ٢) = ٦$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ غ.م ،

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^-}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٥^-}{\text{نهـا}} (٣\text{س} - ١) = \boxed{١٤}$ ،

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ ⟵ $\underset{\text{س} \leftarrow -١^+}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = (-١)^٢ + ٢ = ٣$

⟵ $\underset{\text{س} \leftarrow -١^-}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ غ.م ، لأنه غير معرف من اليسار ،

$\Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ غ.م

و) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ٣(٤) - ١ = ١٢ - ١ = \boxed{١١}$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} (\text{س ق}(\text{س}) - ٥) = ٤ \times ١١ - ٥ = \boxed{٣٩}$

مثال (١٦): إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ٥}{\text{س} - ٢} + \dfrac{١}{٢} \text{ ، } \text{س} < ٠ \\ ٤ \text{ ، } \text{س} = ٠ \\ \sqrt{\text{س}^٢ + ٤} + ١ \text{ ، } \text{س} > ٠ \end{cases}$

تجد:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢^+}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$

٣) ق(٠) .

الحل:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ ⟵ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٤} + ١ = \boxed{٣}$

⟵ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{-٥}{-٢} + \dfrac{١}{٢} = \boxed{٣}$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{٣}$ ،

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢^+}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٤ - ٥}{-٢ - ٢} + \dfrac{١}{٢} = \dfrac{-١}{-٤} + \dfrac{١}{٢}$

$= \boxed{\dfrac{٣}{٤}}$ ،

٣) $\text{ق}(٠) = \boxed{٤}$ ،

* النهاية لاقترانات القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح:-

$\boxed{١}$ لإيجاد نهاية اقتران يحتوي قيمة مطلقة:

نعوض النهاية داخل | | بهدف إعادة تعريفها.

إذا كان ناتج الداخل (+) ← خذ القاعدة الموجبة.
(−) ← خذ القاعدة السالبة.
(صفر) ← نقطة تحول خذ النهاية من الجهتين.

$\boxed{٢}$ لإيجاد نهاية تحتوي أكبر عدد صحيح عوض النهاية داخل ⟦ ⟧ بهدف إعادة تعريفها إذا كان

الناتج ← $\notin$ ص خذ أكبر عدد صحيح للناتج وأكمل الحل
← $\in$ ص تكون نقطة تحول (خذ النهاية من الجهتين)

مثال ①:- اذا كان هـ(س) = |س² − ٤| ، جد:

١) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ هـ(س)   ٢) $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ هـ(س)

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ هـ(س).

الحل:-

نعيد تعريف هـ(س) ← س² − ٤ = ٠ ← س = ±٢

+ | − | +
−٢ ، ٢

← هـ(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٤ & ، س < -٢ \\ ٤ - س^٢ & ، -٢ \le س < ٢ \\ س^٢ - ٤ & ، س \ge ٢ \end{cases}$

⇐ ١) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ هـ(س) = $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$(س² − ٤) = ٩ − ٤ = $\boxed{٥}$.

⇐ ٢) $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ هـ(س) = $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$(٤ − س²) = ٤ − ١ = $\boxed{٣}$.

⇐ ٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ هـ(س) ← $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نها}$(س² − ٤) = صفر.
← $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نها}$(٤ − س²) = صفر.

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ هـ(س) = صفر.

مثال ②:- جد $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}\left(\frac{|س - ٢|}{س} + ١\right)$

الحل:-

نعوض س = ٢ ← ٢ − ٢ = صفر (نقطة تحول).

← − | +
٢

← $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نها}\left(\frac{س - ٢}{س} + ١\right) = ١$

∥ ← النهاية = ١

← $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نها}\left(\frac{٢ - س}{س} + ١\right) = ١$

مثال ③:- جد $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}\frac{|س^٣ - ٤س| + ٥}{س^٢ + ٢}$

الحل:-

س³ − ٤س = ٠ ← س(س² − ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ٢ ، س = −٢

− − − | + + + | − − − | + + +
−٢ ، ٠ ، ٢

⇐ $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نها}\frac{س^٣ - ٤س + ٥}{س^٢ + ٢} = \frac{٨ - ٨ + ٥}{٤ + ٢} = \boxed{\frac{٥}{٦}}$

⇐ $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نها}\frac{٤س - س^٣ + ٥}{س^٢ + ٢} = \frac{٨ - ٨ + ٥}{٤ + ٢} = \boxed{\frac{٥}{٦}}$

⇐ $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}\frac{|س^٣ - ٤س| + ٥}{س^٢ + ٢} = \boxed{\frac{٥}{٦}}$.

مثال ④:- جد $\underset{س \leftarrow -٥}{نها}$ (|س + ٢| + |٣ − س| + س)

الحل:-

= $\underset{س \leftarrow -٥}{نها}(-س - ٢ + ٣ \cancel{-س} + \cancel{س})$

= ٥ − ٢ + ٣ = $\boxed{٦}$.

مثال ⑤ :- اذا كانت :-

ق(س) = { ١ ، |س - ١| ≤ ٣
　　　　{ صفر ، |س - ١| > ٣

جد نها ق(س) ، نها ق(س)
　　س ← ٤　　　　س ← ٢

الحل :-

|س - ١| ≤ ٣ ⟸ -٣ ≤ س - ١ ≤ ٣
　+١　　+١　　+١

← -٢ ≤ س ≤ ٤

|س - ١| > ٣ ← س - ١ > ٣ ← س > ٤
　　　　　　　　+١　+١

← س - ١ < -٣ ← س < -٤
　　+١　+١

← ق(س) = { ١ ، -٢ ≤ س ≤ ٤
　　　　　　{ صفر ، س > ٤ ، س < -٢

← ١) نها ق(س) = صفر ، نها ق(س) = ١
　　س ← ٤⁺　　　　　س ← ٤⁻

⟸ نها ق(س) غ.م .
　　س ← ٤

← ٢) نها ق(س) = نها ١ = $\boxed{١}$.
　　س ← ٢　　　س ← ٢

مثال ⑥ :- جد نها $\sqrt{|س|}$
　　　　　س ← ٠

الحل :-

|س| ⟸ س = ٠

— — —　　+ + +
　　　٠

← نها $\sqrt{س}$ = صفر .
　س ← ٠⁺

← نها $\sqrt{-س}$ = صفر .
　س ← ٠⁻

⟸ نها $\sqrt{|س|}$ = $\boxed{صفر}$.
　　س ← ٠

مثال ⑦ :- اذا كانت :-

ق(س) = { س |س - ١| ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ،
　　　　{ ٣س ، ٢ < س ≤ ٤ ،

[illegible] :-

جد :- نها ق(س) ، نها ق(س)
　　　س ← ٢　　　س ← ١⁺

الحل :-

نعيد تعريف |س - ١| ← س - ١ = ٠ ← س = ١

— — —　　+ + +
٠　　　١　　　٢

ق(س) = { س(١ - س) ، ٠ ≤ س ≤ ١
　　　　{ س(س - ١) ، ١ ≤ س ≤ ٢
　　　　{ ٣س ، ٢ < س ≤ ٤

← ١) نها ق(س) = ٣ × ٢ = $\boxed{٦}$.
　　س ← ٢⁺

≠

نها ق(س) = ٢(٢ - ١) = ٢(١) = $\boxed{٢}$
س ← ٢⁻

← نها ق(س) غ.م .
　س ← ٢

← ٢) نها ق(س) = ١(١ - ١) = ١(صفر)
　　س ← ١⁺

= $\boxed{صفر}$.

مثال ⑧ :- اذا كان :-

نها $\frac{-٢س}{أ + |س|}$ = ١ جد قيمة أ ؟
س ← -٣

الحل :-

← $\frac{-٢ \times -٣}{أ + |-٣|}$ = ١

← $\frac{٦}{أ + ٣}$ = ١ ⟸ ٦ = أ + ٣ ⟸ $\boxed{أ = ٣}$

ملاحظة مهمة جداً :-

لإيجاد قيمة مجهول في النهايات التي تحتوي على القيمة المطلقة يتم التعويض المباشر مع بقاء رمز المطلقة .

مثال ⑨ :- اذا كانت :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٢\text{س} + ٢\text{أ}| & ، \text{س} > ١ \\ ٣\text{س} + ١ & ، \text{س} \le ١ \end{cases}$$

وكانت $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة جد قيمة أ ؟

الحل :-

⇐ $\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) (النهاية موجودة)

|٢س + ٢أ| = ٣س + ١ (بتعويض ١)

|٢ + ٢أ| = ٤ ⇐ ٢ + ٢أ = ٤ ⇐ أ = ١

⇐ ٢ + ٢أ = -٤ ⇐ أ = -٣

⇐ أ تأخذ قيمتين ⇐ أ = ١ ، -٣ .

مثال ⑩ :- اذا كانت :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٤ - \text{س}}{|\text{س} - ٤|} & ، \text{س} > ٤ \\ \text{أس}^{٢} - ٩ & ، \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

وكانت $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة جد قيمة أ ؟

الحل :-

⇐ |س - ٤| نعيد تعريفها ⇐ س - ٤ = ٠ ⇐ س = ٤

− − − + + +

٤

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٤ - \text{س}}{\text{س} - ٤} = -١ & ، \text{س} > ٤ \\ \text{أس}^{٢} - ٩ & ، \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

⇐ $\underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \to ٤^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) (النهاية موجودة)

⇐ -١ = أ(٤)^{٢} - ٩

⇐ -١ = ١٦أ - ٩ ⇐ ١٦أ = ٨

⇐ $\boxed{\text{أ} = \frac{١}{٢}}$.

مثال ⑪ :- اذا كانت ق(س) كثير حدود وكانت

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ق(١ - س) = -١ وكانت $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ ق(س) · ق(٢ - س) = -٣

جد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ (|٣ + س| · ق(١ + س) + ٤س^{٢}) .

الحل :-

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ق(١ - س) = -١

نفرض أن ص = ١ - س ، عندما س ← ١ فإن ص ← ٠

⇐ $\underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نها}}$ ق(ص) = -١

لكن ، $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ ق(س) · ق(٢ - س) = -٣

= $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ ق(س) · $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ ق(٢ - س) = -٣

⇐ = -١ · $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ ق(٢ - س) = -٣ .

نفرض ايضاً أن ع = ٢ - س ، عندما س ← ٠ ، فإن ع ← ٢

⇐ $\underset{\text{ع} \to ٢}{\text{نها}}$ ق(ع) = ٣ ـــــ ① .

⇐ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ |٣ + س| · $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ق(١ + س) + $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ٤س^{٢}

= ٤ · $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ق(١ + س) + ٤

= ١٦ × $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ ق(١ + س)

⇐ نفرض أن ص = ١ + س

عندما س ← ١ فإن ص ← ٢

⇐ ١٦ × $\underset{\text{ص} \to ٢}{\text{نها}}$ ق(ص) من ①

⇐ ١٦ × ٣ = $\boxed{٤٨}$.

* نهاية أكبر عدد صحيح :-

مثال ① :- أوجد ① نها [٢س - ٤ر٠]
س ← ٧ر٠

② نها [٢س - ٤ر٠]
س ← ٠

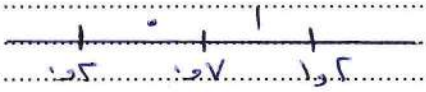
الحل :-

① نعيد تعريف [٢س - ٤ر٠]

← طول الدرجة = ١/٢ = ٥ر٠

← ٢س - ٤ر٠ = ٠ ⟸ ٢س = ٤ر٠

⟸ س = ٢ر٠



نلاحظ أن ٧ر٠ هي نقطة تشعب لذلك يجب إيجاد النهاية من اليمين واليسار .

← نها [٢س - ٤ر٠] = ١
س ← ٧ر٠⁺

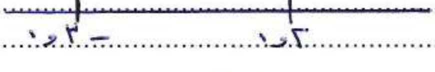
≠

← نها [٢س - ٤ر٠] = ٠
س ← ٧ر٠⁻

⟸ نها [٢س - ٤ر٠] غ.م .
س ← ٧ر٠

② نعيد تعريف [٢س - ٤ر٠]

ل = ١/٢ = ٥ر٠ ، ٢س - ٤ر٠ = ٠ ← س = ٢ر٠



هنا عند س = ٠ نأخذ فترة واحدة لأن

س = ٠ ليست نقطة تشعب .

← نها [٢س - ٤ر٠] = $\boxed{-١}$.
س ← ٠

مثال ⑤ :- جد نها [س - ١] - [س + ٣] .
س ← ٦ر٢

الحل :-

نها [~~س~~] - ١ - [~~س~~] + ٣
س ← ٦ر٢

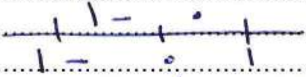
⟸ نها -١ - ٢ = $\boxed{-٣}$
س ← ٦ر٢

مثال ③ :- جد نها (٣س + ٢)^[س]
س ← ٠

الحل :-

نعيد تعريفه [س]

ل = ١ ، س = ٠



← نها (٣س + ٢)^٠ = نها ١ = ١
س ← ٠⁺ س ← ٠⁺

≠

← نها (٣س + ٢)^-١ = نها ١/(٣س + ٢) = ١/٢
س ← ٠⁻ س ← ٠⁻

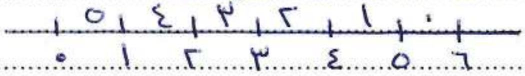
∴ نها (٣س + ٢)^[س] غ.م .
س ← ٠

مثال ④ :- جد نها |س - ٢| + [٦ - س]
س ← ٢

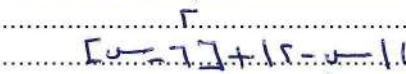
الحل :-

نعيد تعريف [٦ - س] :-

ل = ١ ، ٦ - س = ٠ ⟸ س = ٦



نعيد تعريف |س - ٢| ⟸ س - ٢ = ٠ ← س = ٢



⟸ نها |س - ٢| + [٦ - س]
س ← ٢⁺

= نها س - ٢ + ٣ = $\boxed{٣}$.
س ← ٢⁺

⟸ نها |س - ٢| + [٦ - س]
س ← ٢⁻

= نها ٢ - س + ٤ = $\boxed{٤}$
س ← ٢⁻

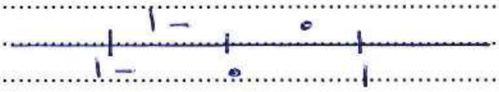
⟸ نها |س - ٢| + [٦ - س] غ.م
س ← ٢

مثال ⑤: جد $\underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س}| + ٣}{[\text{س} + ٧] - ١}$

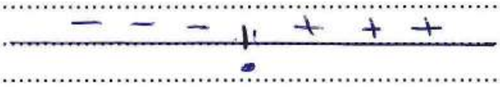
الحل:

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س}| + ٣}{[\text{س} + ٧] - ١} = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س}| + ٣}{[\text{س}] + ٦}$

[س]



|س|

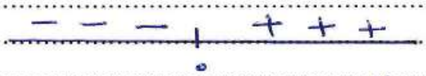


$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{-\text{س} + ٣}{-١ + ٦} = \frac{٠ + ٣}{٥} = \boxed{\frac{٣}{٥}}$

مثال ⑥: جد: $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{١}{١ - [|\text{س}|]}$

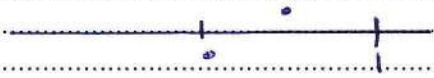
الحل:

$\Leftarrow |\text{س}| =$



$= \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{١}{١ - [\text{س}]}$

$\Leftarrow [\text{س}]$



$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{١}{١ - ٠} = \boxed{١}$

مثال ⑦: إذا كانت م ∈ ص وكانت

$\underset{\text{س} \to ٣^-}{\text{نهـا}} [\text{س} + \text{م}] = ٥$ جد قيمة م ؟

الحل:

بما أن م ∈ ص يمكن استخدام الخواص:

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٣^-}{\text{نهـا}} [\text{س}] + \text{م} = ٥$

$\Leftarrow [٣]^- + \text{م} = ٥$

$٢ + \text{م} = ٥ \Leftarrow \boxed{\text{م} = ٣}$

مثال ⑧: إذا كانت $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} \left[\frac{\text{س}}{٣}\right] ، & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ [٢ - ٢\text{س}] ، & ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$

جد: $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$

الحل:

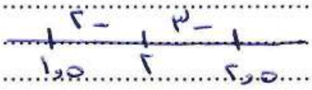
$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نهـا}} [٢ - ٢\text{س}] = \underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نهـا}} -٣ = -٣$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نهـا}} \text{س} \left[\frac{\text{س}}{٣}\right] = \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نهـا}} (\text{س} \times ٠)$

= صفر.

$[٢ - ٢\text{س}] \Leftarrow \text{ل} = \frac{١}{٢}$



$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ غ.م

مثال ⑨: أوجد قيم الثابت م في الحالات التالية:

١) $\underset{\text{س} \to ٣^-}{\text{نهـا}} [\text{س} + \text{م}] = ٧$ ،

٢) $\underset{\text{س} \to ٣^+}{\text{نهـا}} [\text{س} + \text{م}] = ٧$ ،

٣) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} [\text{س} + \text{م}] = ٧$.

الحل:

١) $\underset{\text{س} \to ٣^-}{\text{نهـا}} [\text{س} + \text{م}] = ٧$

$\Leftarrow [\text{س} + \text{م}]^- = ٧ \Leftarrow [٣ + \text{م}]^- = ٧$

$\Leftarrow [\text{م}]^- + ٣ = ٧$

$\Leftarrow [\text{م}]^- = ٤$ لها حالتان:

$\Leftarrow \text{م} \in \text{ص} \Leftarrow [\text{م}]^- = \text{م} - ١ = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{م} = ٥}$.

$\Leftarrow \text{م} \notin \text{ص} \Leftarrow [\text{م}]^- = [\text{م}] = ٤ \Leftarrow \boxed{٤ \le \text{م} < ٥}$.

لكن م ∉ ص تهمل ٤ ⟸ ٤ < م < ٥ أو (٤ ، ٥)

٢) $\underset{\text{س} \to ٣^+}{\text{نهـا}} [\text{س} + \text{م}] = ٧$

$\Leftarrow [٣ + \text{م}]^+ = ٧ \Leftarrow [\text{م}]^+ + ٣ = ٧ \Leftarrow [\text{م}]^+ = ٤$

لها حالتان:

م ∈ ص ⟵ م = ٤

م ∉ ص ⟵ [م] = ٤ ومنها ٤ ≤ م < ٥

م = [٤ ، ٥) .

٣) طلبت بشكل عام ⟵ ٣ + م ∉ ص (النهاية موجودة).

$\Leftarrow [٣ + \text{م}] = ٧ \Leftarrow ٣ + [\text{م}] = ٧ \Leftarrow [\text{م}] = ٤$

م ∈ ص ⟵ مرفوضة .

م ∉ ص ⟵ [م] = ٤ ⟵ ٤ ≤ م < ٥ تهمل ٤

٤ < م < ٥ ⟸ م ∈ (٤ ، ٥) .

مثال ⑩ :- اذا كانت :-

$ق(س) = \begin{cases} [\![س + ١]\!] ، & س < أ \\ ٨ - [\![س]\!] ، & س > أ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة نجد قيمة أ ؟

الحل :-

$\Leftarrow \underset{س \to أ^{+}}{\text{نها}}\ ق(س) = \underset{س \to أ^{-}}{\text{نها}}\ ق(س)$

$\Leftarrow \underset{س \to أ^{+}}{\text{نها}}\ ٨ - [\![س]\!] = \underset{س \to أ^{-}}{\text{نها}}\ [\![س + ١]\!]$

$\Leftarrow ٨ - [\![أ]\!]^{+} = [\![أ]\!]^{-} + ١$

لها حالتان :-

① أ ∈ ص :-

$[\![أ]\!]^{+} = أ \ ، \ [\![أ]\!]^{-} = أ - ١$

$\Leftarrow ٨ - أ = أ - ١ + ١ \Leftarrow ٢أ = ٨ \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

② أ ∉ ص :-

$[\![أ]\!]^{+} = [\![أ]\!] \ ، \ [\![أ]\!]^{-} = [\![أ]\!]$

$\Leftarrow ٨ - [\![أ]\!] = [\![أ]\!] + ١$

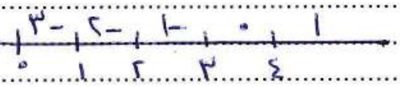
$\leftarrow ٢[\![أ]\!] = ٧$

$\leftarrow [\![أ]\!] = \frac{٧}{٢} = ٣٫٥$ مستحيل !!!

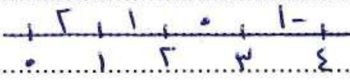
مثال ⑪ :- اذا كانت $ق(س) = [\![س + ٣]\!]$ ، $هـ(س) = [\![٣ - س]\!]$ نجد $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س) \times هـ(س)$

الحل :-

$[\![س + ٣]\!]$



$[\![٣ - س]\!]$



$\Leftarrow \underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}}\ ق(س) \times هـ(س) = ٠ \times -١ = \text{صفر}$.

$\Leftarrow \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}}\ ق(س) \times هـ(س) = -١ \times ٠ = \text{صفر}$.

$\Leftarrow \underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س) \times هـ(س) = \text{صفر}$.

* تسمى هذه العملية دمج الاقترانات .

---

* ملاحظات هامة على نهاية اكبر عدد صحيح :-

① اذا كانت أ ∈ ص فإن :-

$[\![أ]\!]^{+} = أ \ ، \ [\![أ]\!]^{-} = أ - ١$

② اذا كانت أ ∉ ص فإن :

$[\![أ]\!]^{+} = [\![أ]\!]^{-} = [\![أ]\!]$.

③ معادلة اكبر عدد صحيح هي :-

$[\![س]\!] = أ$

$\Leftarrow أ \leq س < أ + ١$

④ أ ∈ ص فإن :-

$\leftarrow [\![س + أ]\!] = [\![س]\!] + أ$.

$\leftarrow [\![س - أ]\!] = [\![س]\!] - أ$.

النهاية عند الجذور :-

وهنالك حالتان وهما :-

① الجذور الفردية :-

- يتم إيجاد النهاية بالتعويض المباشر لأن الجذور الفردية دائماً معرفة :

② الجذور الزوجية :-

ولها ثلاث حالات :-

أ) إذا كان ناتج التعويض تحت الجذر الزوجي موجب يكون هو الجواب .

ب) إذا كان ناتج التعويض تحت الجذر الزوجي سالب تكون النهاية غير موجودة .

جـ) إذا كان ناتج التعويض تحت الجذر الزوجي صفراً فهنالك مشكلة ولحل هذه المشكلة نقوم بتحديد المجال وإذا كانت النقطة داخل المجال نعوض تعويض مباشر ، وإذا كانت النقطة خارج المجال يمنع التعويض نهائياً وتكون النهاية غير موجودة .

مثال ①:- إذا كانت $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{٢} - \text{س}}$ جد :-

أ) مجال ق(س) ب) $\text{نها}_{\text{س} \to \text{١}} \text{ق(س)}$

جـ) $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٣}} \text{ق(س)}$ د) $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٢}} \text{ق(س)}$

الحل :-

→ $\text{٢} - \text{س} = \text{٠} \rightarrow \text{س} = \text{٢}$ $\underset{\text{٢}}{+ + + \,|\, - - -}$

أ) مجال ق هو $\{\text{س} : \text{س} \le \text{٢}\}$

ب) $\text{نها}_{\text{س} \to \text{١}} \text{ق(س)} = \sqrt{\text{٢} - \text{١}} = \text{١}$

جـ) $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٣}} \text{ق(س)}$ غ.م (لأن ق غير معرفة عند س = ٣) .

د) $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٢}} \text{ق(س)}$ → $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٢}^-} \sqrt{\text{٢} - \text{س}} = \text{صفر}$

→ $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٢}^+} \text{ق(س)} =$ غ.م .

→ $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٢}} \text{ق(س)}$ غ.م .

مثال ②:- جد $\text{نها}_{\text{س} \to -\text{٢}^+} \left(\sqrt{\text{س}^\text{٢} - \text{٤}} + \text{س}\right)$

الحل :-

→ نعوض −٢ ⟸ $\sqrt{\text{٠}}$ (مشكلة) .

$\text{س}^\text{٢} - \text{٤} = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \pm \text{٢}$ $\underset{-\text{٢} \qquad \text{٢}}{+ \,|\, - \,|\, +}$

→ $\text{نها}_{\text{س} \to -\text{٢}^+} \left(\sqrt{\text{س}^\text{٢} - \text{٤}} + \text{س}\right)$ غ.م

مثال ③:- جد :- $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٣}} \sqrt{\text{س}^\text{٢} - \text{٤س} + \text{٣}}$

الحل :-

→ نعوض ٣ ⟸ $\sqrt{\text{٠}}$ (مشكلة) .

$\text{س}^\text{٢} - \text{٤س} + \text{٣} = (\text{س} - \text{٣})(\text{س} - \text{١}) = \text{٠}$ ؛

س = ٣ ، س = ١

$\underset{\text{١} \qquad \text{٣}}{+ \,|\, - \,|\, +}$

→ $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٣}^+} \sqrt{\text{س}^\text{٢} - \text{٤س} + \text{٣}} = \text{٠}$

→ $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٣}^-} \sqrt{\text{س}^\text{٢} - \text{٤س} + \text{٣}}$ غ.م

→ $\text{نها}_{\text{س} \to \text{٣}} \sqrt{\text{س}^\text{٢} - \text{٤س} + \text{٣}}$ غ.م

مثال ④:- جد قيم جـ التي تجعل $\text{نها}_{\text{س} \to \text{جـ}} \sqrt{\text{٦} - \text{س}}$ غ.م

الحل :-

نبحث عن إشارة ٦ − س ← ٦ − س = ٠ ؛

س = ٦ $\underset{\text{٦}}{+ \,|\, -}$

→ ق(س) غير معرفة عندما س > ٦

→ $\text{نها}_{\text{س} \to \text{جـ}} \text{ق(س)}$ غ.م عندما جـ > ٦ .

مثال ⑤:- جد قيمة النهاية التالية :-

$$\text{نها}_{\text{س} \to \text{٤}} \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س} - \text{٣١}} + \text{٣س}}{\text{س} + \text{٣}}$$

الحل :-

$$= \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{٤} - \text{٣١}} + \text{١٢}}{\text{٤} + \text{٣}} = \frac{\sqrt[\text{٣}]{-\text{٢٧}} + \text{١٢}}{\text{٧}}$$

$$= \frac{-\text{٣} + \text{١٢}}{\text{٧}} = \boxed{\frac{\text{٩}}{\text{٧}}}$$

مثال ⑥ :- جد قيمة النهايات الآتية :

١) $\lim_{\text{س} \to ٥} \sqrt{١٠ - ٢\text{س}}$

الحل :

← نعوض ← $\sqrt{١٠ - ٢ \times ٥} = \sqrt{٠}$ (مشكلة)

← $١٠ - ٢\text{س} = ٠ \leftarrow ٢\text{س} = ١٠ \leftarrow \text{س} = ٥$

+ + + + | - - - - -

٥

← $\lim_{\text{س} \to ٥^+} \sqrt{١٠ - ٢\text{س}}$ غ.م

← $\lim_{\text{س} \to ٥^-} \sqrt{١٠ - ٢\text{س}} = \sqrt{٠} = ٠$

← $\lim_{\text{س} \to ٥} \sqrt{١٠ - ٢\text{س}}$ غ.م

٢) $\lim_{\text{س} \to ٣} \sqrt{\text{س} - ٣}$

الحل :

← نعوض ← $\sqrt{٣ - ٣} = \sqrt{٠}$ (مشكلة)

← $\text{س} - ٣ = ٠ \leftarrow \text{س} = ٣$

- - - - | + + + +

٣

← $\lim_{\text{س} \to ٣^+} \sqrt{\text{س} - ٣} = \sqrt{٣ - ٣} =$ صفر

← $\lim_{\text{س} \to ٣^-} \sqrt{\text{س} - ٣}$ غ.م

⇐ $\lim_{\text{س} \to ٣} \sqrt{\text{س} - ٣}$ غ.م

مثال ⑦ :- جد قيم م بحيث $\lim_{\text{س} \to \text{م}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$ غ.م

الحل :-

← $\lim_{\text{س} \to \text{م}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$ غ.م عندما م ∉ المجال

← $\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦ = ٠$

$(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢) = ٠$

$\text{س} = ٣$ ، $\text{س} = ٢$

+ + + | - - - | + + +

٢ ٣

$\text{م} \in]٢ ، ٣[$

مثال ⑧ :- جد : $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س}} + ٢\text{س}}{٣\text{س} - ٨}$

الحل :

← نعوض ← $\sqrt{(٤)^٢ - ٤ \times ٤} = \sqrt{٠}$ (مشكلة)

← $\text{س}^٢ - ٤\text{س} = ٠ \leftarrow \text{س}(\text{س} - ٤) = ٠$

$\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٤$

+ + + | - - - | + + +

٠ ٤

← $\lim_{\text{س} \to ٤^+} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س}} + ٢\text{س}}{٣\text{س} - ٨} = \frac{٠ + ٢ \times ٤}{٣ \times ٤ - ٨}$

$= \frac{٨}{٤} = \boxed{٢}$

← $\lim_{\text{س} \to ٤^-} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س}} + ٢\text{س}}{٣\text{س} - ٨}$ غ.م

← $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س}} + ٢\text{س}}{٣\text{س} - ٨}$ غ.م

مثال ⑨ :- اوجد قيمة / قيم م بحيث $\lim_{\text{س} \to \text{م}} \sqrt{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}$ غ.م ؟

الحل :-

نحدد المجال :

$\text{س}^٢ + \text{س} + ١ = ٠$ لا يحلل

← المميز = ب² - ٤ أ جـ

$= ١ - ٤ \times ١ \times ١ \Leftarrow -٣ < ٠$

⇐ تكون دائماً موجبة على ح

⇐ م = ∅

أي انه لا يوجد قيم تكون عندها النهاية غ.م

+ + + + + + + + +

مثال ⑩ :- جد :-

$$\lim_{س \to ٣} \sqrt{\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}}$$

الحل :-

← نعوض ← $\sqrt{\frac{٩ - ٩}{٣ - ٣}} = \sqrt{\frac{٠}{٠}}$ (مشكلة)

← $س^{٢} - ٩ = ٠$ ← س = ± ٣

+ + + | − − − | + + +
−٣ ، ٣

← س − ٣ = ٠ ← س = ٣

− − − − − − | + + +
٣

← $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

− − − | + + + + | + + +
−٣ ، ٣

نلاحظ أنه على يمين ويسار العدد ٣ موجب

← $\lim_{س \to ٣} \sqrt{\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}}$

← $\lim_{س \to ٣} \sqrt{\frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)}{\cancel{س - ٣}}}$

⇐ $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س + ٣}$

$= \boxed{\sqrt{٦}}$

مثال ⑪ :- جد :-

$$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$$

الحل :-

← نعوض ← $\frac{٠}{٠}$ (مشكلة)

← $س^{٢} - ٩ = ٠$ ← س = ± ٣

+ + | − − − | + + +
−٣ ، ٣

← س − ٣ = ٠ ← س = ٣

− − − − − − | + + +
٣

← $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

| + + + +
٣

⇐ $\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}} = \sqrt{\frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)}{\cancel{(س - ٣)}}}$

$= \boxed{\sqrt{٦}}$

⇐ $\lim_{س \to ٣^{-}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$ غ.م

⇐ $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$ غ.م

نهاية الاقترانات المتشعبة:-

إذا كانت ق(س): اقتراناً متشعباً على صورة:-

ق(س) = { قاعدة (١) ، س ≤ أ
قاعدة (٢) ، س > أ

أو

ق(س) = { قاعدة (١) ، س ≠ أ
قاعدة (٢) ، س = أ

لإيجاد النهاية للاقترانات المتشعبة فإننا نعوض قيم س في القاعدة التي تنتمي إليها س

أما إذا كانت س نقطة تشعب مثل أ فإننا ندرس النهاية من اليمين واليسار حول أ

← نها ق(س) تعوض في س > أ ، س ≠ أ
س → أ⁺

← نها ق(س) تعوض في س < أ ، س ≠ أ
س → أ⁻

← كذلك س ≠ أ تعني س > أ أو س < أ

مثال ①:- أذا كان:-

ق(س) = { ٢س − ١ ، −٢ ≤ س ≤ ١
س² ، ١ < س ≤ ٣

جد:-

١) نها ق(س) = نها ٢س − ١ = ٢ × ٠ − ١ = $\boxed{-١}$
س → ٠ س → ٠

٢) نها ق(س) = نها س² = (٢)² = $\boxed{٤}$.
س → ٢ س → ٢

٣) نها ق(س) ⇐ هنا (١) نقطة تشعب (تحول).
س → ١

← نها ق(س) = نها س² = (١)² = $\boxed{١}$.
س → ١⁺ س → ١⁺

← نها ق(س) = نها ٢س − ١ = ٢(١) − ١ = $\boxed{١}$
س → ١⁻ س → ١⁻

← نها ق(س) = $\boxed{١}$.
س → ١

مثال ②:- اذا كان:-

ق(س) = { س³ + √س ، س ≠ ٤
٥ ، س = ٤

جد:-

١) ق(٤) = ٥

٢) نها ق(س) = نها س³ + √س = ٤³ + √٤ = ٦٤ + √٤ = $\boxed{٦٦}$
س → ٤ س → ٤

مثال ③:- اذا كان:-

ق(س) = { ٢س + ٥ ، س < ٢
٤س ، س ≥ ٢

جد:-

١) نها ق(س² + ١)
س → ٠

الحل:-
ص = س² + ١ ← س → ٠ ← ص → ١

= نها ق(ص) = نها ٢(١) + ٥ = $\boxed{٧}$.
ص → ١ ص → ١

٢) نها ق(س + ٢)
س → ٠

الحل:-
ص = س + ٢ ، س → ٠ ← ص → ٢

= نها ق(ص) ⇐ نها ق(ص) = ٤(٢) = $\boxed{٨}$
ص → ٢ ص → ٢⁺

≠

← نها ق(ص) = ٢(٢) + ٥ = $\boxed{٩}$
ص → ٢⁻

∴ نها ق(ص) غ.م .
ص → ٢

٣) نها ق(٥ − س)
س → ٣⁺

الحل:-
ص = ٥ − س ، س → ٣⁺ ← ص ← (٥ − ٣⁺)
ص → ٢⁻

= نها ق(ص) = ٢(٢) + ٥ = $\boxed{٩}$.
ص → ٢⁻

اسئلة الوزارة الواردة على الدرس:-

سؤال وزارة (٢٠١٣ ش) :-

اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{|س - ٣|} ، & س < ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ ، & س \geq ٣ \end{cases}$$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة جد قيمة جـ ؟

الحل:-

نعيد تعريف $|س - ٣|$:-

$|س - ٣| \Leftarrow س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

− − − | + + +

٣

$$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{س - ٣} = -١ ، & س < ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ ، & س \geq ٣ \end{cases}$$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٣^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{-}} ق(س)$

$-١ = ٩جـ - ٤ \Leftarrow ٩جـ = ٣$

$\boxed{جـ = \frac{١}{٣}}$.

سؤال وزارة (٢٠٠٨ ص) :-

اذا كان $ق(س) = \frac{\sqrt{س - ٥} + ٣}{س^{٢} + ٢}$

جد $\lim\limits_{س \to ٥} ق(س)$

الحل:-

نعوض $\Leftarrow \sqrt{٥ - ٥} = \sqrt{٠}$ (مشكلة) .

$\Leftarrow س - ٥ = ٠ \Leftarrow س = ٥$

− − − | + + +

٥

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٥^{+}} ق(س) = \frac{\sqrt{٠} + ٣}{٢٥ + ٢} = \boxed{\frac{٣}{٢٧}}$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٥^{-}} ق(س)$ غ.م

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٥} ق(س)$ غ.م

سؤال وزارة (٢٠١٣ ص) :-

اوجد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$

الحل:

نعوض $\Leftarrow \frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$ (مشكلة)

$\Leftarrow س^{٢} - ٩ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$

$\Leftarrow س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

+ + + | − − − | + + +

−٣ ٣

− − − − − | + + +

٣

$\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ | + + +

٣

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٣^{+}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}} = \frac{\cancel{\sqrt{س - ٣}} \times \sqrt{س + ٣}}{\cancel{\sqrt{س - ٣}}}$

$= \boxed{\sqrt{٦}}$.

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٣^{-}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$ غ.م

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$ غ.م

سؤال وزارة (٢٠١٤ ش) :-

اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + \frac{١}{س} + \left[\frac{س}{٣}\right] ، & ١ \leq س \leq ٣ \\ \frac{|س - ٣|}{س^{٢} - ٩} ، & ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$

الحل:-

نعيد تعريف $\left[\frac{س}{٣}\right] \Leftarrow ل = ٣$.

٠ ١

| | |

٠ ٣ ٦

$|س - ٣| \Leftarrow$ − − − | + + +

٣

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٣^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{+}} \frac{\cancel{س - ٣}}{(\cancel{س - ٣})(س + ٣)} = \boxed{\frac{١}{٦}}$.

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٣^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{-}} ٢س^{٢} + \frac{١}{س} + ٠$

$= ٢(٩) + \frac{١}{٣} = \boxed{\frac{٥٥}{٣}}$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$ غ.م .

نهاية اقترانات كسرية :-

سيتم تقسيم هذا الدرس الى اقسام عدة وهي:-

① اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (مشكلة)

② اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$:

ملاحظة :

① عند بداية حل $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

١) نحلل ← نختصر ← نعوض.

٢) نوحد المقامات ← نبسط ← نختصر ← نعوض.

٣) نضرب بالمرافق ← نبسط ← نختصر ← نعوض.

② عندما يكون ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ فإن النهاية غير موجودة.

③ اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ فإن النهاية تساوي صفراً.

مثال ①:- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت:-

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤}$:

الحل:-

مثال ②:- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت:-

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{٤\text{س} - ١٢}{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}$:

الحل:-

مثال ③:- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت:-

$\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$

الحل:-

مثال ④ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{٢س^{٤} - ٣٢}{س^{٣} - ٨}$$

الحل :-

مثال ⑤ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(س + ١)^{٣} - ٨}{١ - س^{٢}}$$

الحل :-

مثال ⑥ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(س^{٢} - ١)^{١٠}}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{٥}}$$

الحل :-

مثال ⑦ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(٢س + ١)^{٣} - ٢٧}{٣س^{٢} + ٢س - ٥}$$

الحل :-

مثال ⑧ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \sqrt{\frac{٣\text{س} - ٩}{٢\text{س}^٢ - ١٨}}$$

الحل :-

مثال ⑨ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٣ + ٢ + \text{س}}{\text{س}(\text{س} - ١) - ٢}$$

الحل :-

مثال ⑩ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٥ + \text{س}^٢ - ٢}{(٢\text{س} - ١)^٣ - ١}$$

الحل :-

مثال ⑪ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٣ - ٧\text{س} + ٦}{\text{س}^٣ + \text{س}^٢ - ٢\text{س}}$$

الحل :-

مثال ⑫ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{(س+١)^{٣} - (س+١)^{٢} - ٤}{س - ١}$$

الحل :-

طريقة ① :- التعويض :

طريقة ② :- التحليل :-

مثال ⑬ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{|س - ٣|}{س - ٣}$$

الحل :-

مثال ⑭ :- جد قيمة النهاية التالية إن وجدت :-

$$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{[\![س - ٢]\!]}{|س - ٢|}$$

الحل :-

(ج) توحيد المقامات :-

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \mp \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ} \times \text{د} \mp \text{جـ} \times \text{ب}}{\text{ب} \times \text{د}}$$

$$\frac{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}{\frac{\text{جـ}}{\text{د}}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{جـ}}$$

مثال ①:- جد :-

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\frac{٢}{\text{س} - ١} - \frac{٤}{\text{س} + ١}}{\text{س}^٢ - ٩}$$

الحل :-

مثال ⑤:- جد :-

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٧} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢\text{س}}{\text{س} + ٣}}{٧ - \text{س}}$$

الحل :-

مثال ③:- جد :-

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{١}{\text{س}} \left(\frac{١}{(\text{س} + ١)^٣} - ١ \right)$$

الحل :-

مثال ④:- جد :-

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١^-} \frac{\left| \frac{١}{\text{س} + ٣} \right| - \frac{١}{٤}}{|\text{س} - ١|}$$

الحل :-

مثال ⑤ :- جد :-

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\frac{٢}{\text{س}} - \text{س} - ١}$$

الحل :-

مثال ⑥ :- جد :-

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٦^{-}} \frac{٦ - \text{س}}{\frac{٣٦}{\text{س}} - ٦}$$

الحل :-

مثال ⑦ :- جد :-

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \left(\frac{\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} - ١} + \frac{٦}{١ - \text{س}^{٢}} \right)$$

الحل :-

مثال ⑧ :- جد :-

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣} \left(\frac{٦ - ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س} - ٣} \right)$$

الحل :-

نهاية الاقترانات الأسية :-

تذكر أن :-

* $(أ^{ن})^{م} = (أ^{م})^{ن} = أ^{ن×م}$ ،

* $(أ×ب)^{ن} = أ^{ن}×ب^{ن}$.

* $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$.

* $أ^{ن}×أ^{٣} = أ^{ن+٣}$

* $\frac{أ^{ن}}{أ^{٣}} = أ^{ن-٣}$ ،

مثال ①:- جد:-

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٨^{س} - ١}{٤^{س} - ١}$$

الحل:-

مثال ②:- جد:-

$$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٥^{س} - ٥}{٥^{س+١} - ٢٥}$$

الحل:-

مثال ③:- جد:-

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٢٥^{س} - ٥^{س}}{١ - ٥^{س}}$$

الحل:-

مثال ④:- جد:-

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٦^{س} - ٣^{س}}{٣^{س} - ١}$$

الحل:-

مثال ⑤:- جد:-

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٤^{س} - ١٧ × ٢^{س} + ١٦}{٤^{س} - ١}$$

الحل:-

③ الضرب بالمرافق:-

المقدار	مرافقه	الناتج
$\sqrt{س} - \sqrt{م}$	$\sqrt{س} + \sqrt{م}$	$س - م$
$\sqrt{س + ١} - ٣$	$\sqrt{س + ١} + ٣$	$س + ١ - ٩$
$\sqrt{س} - ٣$	$\sqrt{س} + ٣$	$س - ٩$
$س\sqrt{س} - ٥$	$س\sqrt{س} + ٥$	$س^{٣} - ٢٥$
$\sqrt{س - ٣} + س$	$\sqrt{س - ٣} - س$	$س - ٣ - س^{٢}$

مثال ①:- جد:-

$$\underset{س \leftarrow ٦}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٣}{س - ٦}$$

الحل:-

مثال ②:- جد:-

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$$

الحل:-

مثال ③:- جد:-

$$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{١٢ - ٣س}{س\sqrt{س} - ٨}$$

الحل:-

مثال ④:- جد:-

$$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢س + ١} - \sqrt{س + ٥}}{س^{٢} - ١٦}$$

الحل:-

مثال ⑤:- جد:-

$$\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نها}} \frac{\frac{٣}{\sqrt{س}} - ١}{س - ٩}$$

الحل

*ملاحظة:
عندما يكون عدد الحدود ٣ نلجأ الى تجزئة الحدود الى حدين حيث نجعل الجزء الداخل الذي يحتوي على الجذر حد والباقي حد آخر:

مثال ⑥: جد:

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + 3}{\text{س}^2 - 1}$$

الحل:

مثال ⑦: جد

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2 - 4}{\sqrt{\text{س}^3 + 1} - 2\text{س} + 1} ،$$

الحل:

مثال ⑧: جد:

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{1}{2}} \frac{2\text{س} - 1}{\sqrt{\frac{2}{\text{س}}} - 1 - \sqrt{2\text{س}}} ،$$

الحل:

مثال ⑨: جد:

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to 0^+} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{9 + \sqrt{\text{س}}} - 3} ،$$

الحل:

المقدار	المرافق	الناتج
$\sqrt[3]{س} \pm \sqrt[3]{م}$	$\sqrt[3]{س^2} \mp \sqrt[3]{س}\sqrt[3]{م} + \sqrt[3]{م^2}$	$س \pm م$
$\sqrt[3]{س} - ٢$	$\sqrt[3]{س^2} + ٢\sqrt[3]{س} + ٤$	$س - ٨$
$\sqrt[3]{س} + ٣$	$\sqrt[3]{س^2} - ٣\sqrt[3]{س} + ٩$	$س + ٢٧$
$\sqrt[3]{س-١} - ٥$	$\sqrt[3]{(س-١)^2} + ٥\sqrt[3]{س-١} + ٢٥$	$س - ١ - ١٢٥$
$س\sqrt[3]{س} + ٢$	$(س\sqrt[3]{س})^2 - ٢س\sqrt[3]{س} + ٤$	$س^٤ + ٨$

مثال ① :- جد :-

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[3]{س + ٦} - ٢}{س^2 - ٤}$$ ،

الحل :-

مثال ③ :- جد :-

$$\lim_{س \to ٨} \frac{س\sqrt[3]{س} - ١٦}{س - ٨}$$

الحل :-

مثال ② :- جد :-

$$\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س + ٥} - ٢}{\sqrt[3]{س} + ١}$$

مثال ④ :- جد :-

$$\lim_{س \to -١} \frac{١}{س + ١}\left(\frac{١}{\sqrt[3]{٢س + ١}} + ١\right)$$ ،

الحل :-

④ فصل النهايات :-

يفضل استخدامها في حالة الجمع كان :-

١) الجذر مع حدين او اكثر مثل $\text{س}^{\text{٢}}+\sqrt{\text{س}}-\text{٢}$.

٢) الجذر مع نسبي مثل $\sqrt{\text{س}+\text{١}}-\frac{\text{١}}{\text{س}}$.

٣) جذور مختلفة معاً مثل $\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}-\sqrt{\text{س}}$.

ولكن بشرط :-

ان تبقى نهاية كل جزء جديد = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

وذلك بتعويض النهاية في الحد الاول ثم

اطرح واجمع الناتج للبسط (مكان وجود الجذر)

ثم وزع البسط على المقام ضمن الشرط.

مثال ① :- جد :-

$$\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٤}}+\sqrt{\text{س}}-\text{٢}}{\text{س}-\text{١}}$$

الحل :-

مثال ② :- جد :-

$$\underset{\text{س}\to-\text{٨}}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}+\sqrt{\text{س}+\text{١٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٨س}}$$

الحل :-

مثال ③ :- جد :-

$$\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{\text{س}}-\frac{\text{س}+\text{١}}{\text{٢}}}{\text{س}-\text{١}}$$

الحل :-

مثال ④ :- جد :-

$$\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}-\text{٤}}{\text{س}-\sqrt{\text{س}}-\text{٢}}$$

الحل :-

⑤ فصل النهايات في حال كان الجذر مضروب بمقدار:

مثل $\text{س}\sqrt{\text{س}}$ ، $(\text{س}+١)\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س}^٢\sqrt{\text{س}-٣}$ ، ...

هنا نطرح ونجمع $\left(\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{المقدار}\right) \times \sqrt{\text{س}}$ أو العكس

أي نفوض النهاية في أحدهما ونثبت الآخر

ثم نفصل النهاية:

مثال ①:- جد:

$$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}^٢\sqrt{\text{س}} - ٣٢}{\text{س} - ٤}$$

الحل:-

مثال ②:- جد:

$$\lim_{\text{س}\to ١} \frac{(\text{س}+١)^٢\sqrt{\text{س}+٣} - ٨}{\text{س}^٢ - ١}$$

الحل:-

*ملاحظة:-

في القيمة المطلقة عوض النهاية اذا كانت الناتج داخل المطلقة

→ موجب → خذ القاعدة الموجبة واكمل الحل:

→ سالب → " " السالبة " " " :

→ صفر → خذ النهاية من الجهتين (في حال كانت الإشارة مختلفة).

مثال ①:- جد:-

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}|\text{س}| - ٤}{\text{س} - ٢}$$

الحل:-

مثال ②:- جد:-

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{|\text{س}-٣| - |٢\text{س}-٣|}{\text{س}}$$

مثال ③:- جد:-

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{|\text{س}^٢ - ٤|}{\text{س} - ٢}$$

الحل:-

مثال ①:- جد:-

$$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$$

الحل:-

مثال ②:- جد:-

$$\lim_{س \to ١^{+}} \frac{\sqrt{س^{٢} - س}}{\sqrt{س - ١}}$$

الحل:-

مثال ③:- جد:-

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}}{س - ٢}$$

الحل:-

مثال ④:- جد:-

$$\lim_{س \to -٢} \frac{|س^{٣}| + ٤س}{|س^{٢} - ٤|}$$

الحل:-

مثال ⑤:- جد:-

$$\lim_{س \to ١^{-}} \frac{\left|\frac{١}{س + ٣}\right| - \frac{١}{٤}}{|س - ١|}$$

الحل:-

مثال ⑥:- جد:- $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) اذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{|س - ٣|}{س^{٢} - ٩} ، & س < ٣ \\ \frac{١}{٦} ، & س \geq ٣ \end{cases}$$

الحل:-

* ايجاد المجاهيل في نهاية الاقترانات الكسرية:

اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ موجودة ← عوض س = أ

أولاً:- الناتج $\frac{\text{مقدار}}{\text{مقدار}}$ ← ضرب تبادلي ثم حل المعادلة.

ثانياً:- الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ← حلل ثم اختصر ثم عوض.

ثالثاً:- نهاية المقام = صفر والبسط مقدار هنا

تكون $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ البسط = صفر (معادلة حلها).

أو نهاية البسط = صفر والمقام مقدار (بشرط النهاية الأصلية ≠ صفر) تكون نها المقام = صفر (معادلة حلها).

مثال ①:- اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{أس}^٢ - ٤\text{أ}}{\text{س} - ٢} = ٦$

جد قيمة أ ؟

الحل:-

مثال ②:- اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}{\text{أس} - ٤\text{أ}} = ٣$

جد قيمة أ ؟

الحل:-

مثال ③:- اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\sqrt{\text{س}+١} - ٢}{\text{أس}^٢ - ٩\text{أ}} = \frac{١}{٦}$

جد قيمة أ ؟

الحل:-

مثال ④:- اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - \text{أس} - ٢}{\text{س} - ٢} = ٣$

جد قيمة أ ؟

الحل:-

مثال ⑤:- اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^٣ + \text{ل}}{\text{أس}^٢ - ٤\text{أ}} = -٣$

جد قيمة أ، ل ؟

الحل:-

مثال ⑥ :- اذا كانت $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{أس} + \text{ب}} = \frac{١}{١٣}$

نجد قيمة أ، ب ؟

الحل :-

مثال ⑦ :- اذا كانت $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{أس} + \text{ب}} - ٢}{\text{س} - ٤} = \frac{١}{٢}$

نجد قيمة أ، ب ؟

الحل :-

مثال ⑧ :- اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - \text{أس} + ٢٠}{\text{س} - ٥} ، & \text{س} > ٥ \\ \text{ب س} + ٢ ، & \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

و كانت $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \text{ق(س)}$ موجودة جد قيمة كل من أ، ب.

الحل :-

مثال ⑨ :- اذا كانت $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - ٤}{\text{س} - ١} = -٧$ حيث ق

كثير حدود نجد

١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{ق(س)} - ٥}{\text{س} - ١}$

٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س ق(س)} - ٤}{\text{س} - ١}$

مثال ⑩ :- اذا كانت: $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + أس - (٩ + ٣أ)}{س - ٣} = ٥$

جد قيمة أ ؟

الحل :-

مثال ⑪ :- اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{أس^٢ + ٢ب س + ٦}{س - ٢} = ١٠$

جد قيمة أ، ب ؟

الحل:

مثال ⑫ :- اذا كانت :

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - أس + ٣}{س - ١} & ، س > ١ \\ ب س - ٥ & ، س \le ١ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ١}$ ق(س) موجودة جد قيمة أ، ب ؟

الحل :

اسئلة الوزارة :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١٠) :-

اذا كانت ق اقتران كثير حدود وكانت

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} + ٥}{\text{س} - ٣} = ٤$ وكانت

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} (\text{ق(س)} - ٢\text{س} + ٣\text{ب}) = ٧$ جد قيمة ب؟

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١١) :-

جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}} \left(\frac{١}{\sqrt{\text{س} + ١}} - ١ \right)$

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠٠٨) :-

① جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{٦\text{س}^٤ + ١٨\text{س}^٢}{٢\text{س}^٢ - ٣\text{س}^٣}$

الحل :-

② اذا كانت $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{م}\text{س}^٢ + ٢\text{ب}\text{س} + ٢}{\text{س} - ١} = ١$

فجد قيمة م ، ب ؟

الحل

سؤال وزارة (جـ ٢٠٠٩) :-

اذا كان هـ اقتران كثير حدود وكانت

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{هـ(س)} + ٥}{\text{س}} \right) = \frac{١}{٢}$ وكانت

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\text{هـ(س)} - ٥ + ٣\text{ب} \right) = ٢$ جد قيمة ب ؟

الحل :-

سؤال وزارة (جـ ٢٠١٣) :-

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٣} - \sqrt{٤\text{س} + ١}}{\text{س} - ٢}$

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١٤) :-

جد :- ① $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{٤ - \frac{\text{س}}{٢}}$

الحل :-

② $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{٥ - |٣\text{س} + ١|}{\text{س}^٣ + ٨}$

الحل :-

③ اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}} + \left[\frac{\text{س}}{٣}\right] & ، ١ \leq \text{س} < ٣ \\ \frac{|\text{س} - ٣|}{\text{س}^٢ - ٩} & ، ٣ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)}$.

الحل :-

سؤال وزارة (ص ٢٠١١) :

إذا كانت $\lim_{\text{س} \to -\text{١}} \frac{\text{أ س}^{\text{٢}} - \text{ب س} - \text{٥}}{\text{س} + \text{١}} = -\text{٧}$

جد قيمة أ، ب ؟

الحل:

سؤال وزارة (ش ٢٠١٥) :

جد $\lim_{\text{س} \to \text{٣}} \left(\frac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٢٧}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}} - \frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{س} - \text{٣}} \right)$.

الحل:

سؤال وزارة (ش ٢٠١٦) :-

جد $\underset{\text{س} \to 3}{\text{نها}} \dfrac{6 - \text{س}\sqrt{\text{س}+1}}{9 - 3\text{س}}$

الحل :-

سؤال وزارة (ص ٢٠١٦) :-

جد :- $\underset{\text{س} \to -27}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{9 - \text{س}} - 6}{3 + \sqrt[3]{\text{س}}}$

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١٧) :-

$\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^3 + 3\text{س}^2 - 4\text{س} - 12}{\text{س}^2 - 4}$

الحل :-

نهاية الاقترانات الدائرية (المثلثية) :-

تذكر أن :-

$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ، $\text{ظتا س} = \frac{1}{\text{ظا س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$\text{قا س} = \frac{1}{\text{جتا س}}$ ، $\text{قتا س} = \frac{1}{\text{جا س}}$.

* $\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$.

* $1 + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$ ،

* $1 + \text{ظتا}^2\text{س} = \text{قتا}^2\text{س}$.

* $\text{جا ٢س} = 2\,\text{جا س جتا س}$ ،

* $\text{جتا ٢س} = \text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}$.

$= 1 - 2\,\text{جا}^2\text{س}$.

$= 2\,\text{جتا}^2\text{س} - 1$.

* $\text{ظا ٢س} = \frac{2\,\text{ظا س}}{1 - \text{ظا}^2\text{س}}$.

* $\text{جا}(\text{أ} \mp \text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} \mp \text{جتا أ جا ب}$.

* $\text{جتا}(\text{أ} \mp \text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} \pm \text{جا أ جا ب}$ ،

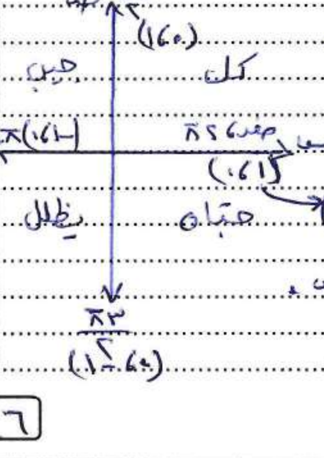
* $\text{ظا}(\text{أ} \mp \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} \mp \text{ظا ب}}{1 \pm \text{ظا أ ظا ب}}$

* $\text{جا س} - \text{جا ص} = 2\,\text{جتا}\left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{س}-\text{ص}}{2}\right)$

* $\text{جتا س} - \text{جتا ص} = -2\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{س}-\text{ص}}{2}\right)$

* $\text{جا س} + \text{جا ص} = 2\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{2}\right)\text{جتا}\left(\frac{\text{س}-\text{ص}}{2}\right)$ ،

* $\text{جتا س} + \text{جتا ص} = 2\,\text{جتا}\left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{2}\right)\text{جتا}\left(\frac{\text{س}-\text{ص}}{2}\right)$



	٣٠	٤٥	٦٠
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
جا س	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
جتا س	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

* $\text{جا}(-\text{س}) = -\text{جا س}$.

* $\text{جتا}(-\text{س}) = \text{جتا س}$ ،

نظرية :-

$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1$ ، س : بالتقدير الدائري .

النتائج :-

① $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{أ س}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

② $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{أ س}}{\text{ظا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

مثال① :- جد قيمة النهايات التالية :-

① $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا ٥س}}{\text{٢س}} =$

② $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{٩س}}{\text{ظا ٥س}} =$

③ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}^2}{\text{٥س}^2} =$

④ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\,\text{٢س}}{\text{٣س}^2} =$

⑤ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{٥س}^3}{\text{ظا}^3\text{س}} =$

⑥ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\,\text{٥س}}{\text{٢س}} =$

⑦ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا}^3\,\text{٢س}}{\text{٥س}^2} =$

مثال ⑥: جد قيمة النهايات التالية:

① $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٥\text{س} \times \text{جتا}٢\text{س}}{٢\text{س}}$.

الحل:

② $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٢\text{س} \times \text{ظا}٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}$.

الحل:

③ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} - \text{جا}٢\text{س}}{\text{س}}$

الحل:

④ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} - \text{جا}٥\text{س} + \text{ظا}٣\text{س}}{\text{س}}$

الحل:

⑤ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س} - \text{جا}٣\text{س} + \text{ظا}\text{س}}{٢\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$.

الحل:

⑥ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\text{جا}٢\text{س} + \text{ظا}٣\text{س}}$

الحل:

⑦ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}\ \text{جا}\text{س}}{٣\text{س}^{٢} - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$.

الحل:

⑧ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} ٥\text{س}^{٢} \left(\text{قتا}^{٢}٣\text{س} - \text{ظتا}^{٢}٢\text{س} \right)$

الحل:

⑨ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(٥\text{س}^{٣}\ \text{ظتا}٣\text{س}\ \text{قتا}^{٢}٧\text{س} \right)$.

الحل

ملاحظات هامة

① $\frac{\text{أ} \times \text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \text{ب}$ أو $\text{أ} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$.

② $\frac{\text{أ} \mp \text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \mp \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

③ $\frac{\text{أ}}{\text{ب} \pm \text{جـ}} \neq \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \pm \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

(لا يجوز توزيع المقام على البسط) .

④ في توزيع البسط على المقام أو قسمة البسط والمقام على مقدار معين يشترط هنا أن تكون نهاية كل مقدار موجودة وفي ذلك لا يجوز .

مثال ③ :- جد النهايات التالية :-

① $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا } ٢\text{س} + \text{س}^٢ - \text{جتا}^٢ \text{س}}{٢\text{س}^٢}$

الحل :

② $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{٥ - ٥ \text{ جتا}^٢ ٣\text{س}}{\text{س ظا } ٢\text{س}}$.

الحل :

③ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا}^٢ ٣\text{س} - \text{جتا}^٢ \text{س}}{\text{س}^٢ \text{ جتا } ٢\text{س}}$.

الحل :-

④ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا } ٦\text{س} - ١}{٤\text{س}^٢}$.

الحل :-

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا}^٢ ٥\text{س} - \text{جتا } ٧\text{س}}{\text{جتا س} - ١}$

الحل :-

* ملاحظة مهمة *

$\text{نها} \frac{\text{جاهـ(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، $\text{نها} \frac{\text{ظاهـ(س)}}{\text{هـ(س)}}$

طريقة الحل ⇐

① نفرض أن ص = هـ(س)

② في حالة $\text{نها} \frac{\text{جاهـ(س)}}{\text{ل(س)}}$ نضرب البسط والمقام في الزاوية هـ(س) بشرط أن

$\text{هـ(س)} \rightarrow \text{٠}$

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\rightarrow}{\text{نها}} \frac{\text{جاهـ(س)} \times \text{هـ(س)}}{\text{ل(س)} \times \text{هـ(س)}}$$

$$= \text{نها} \frac{\text{جاهـ(س)}}{\text{هـ(س)}} \times \text{نها} \frac{\text{هـ(س)}}{\text{ل(س)}} .$$

مثال ①:- جد قيمة النهايات التالية :-

① $\underset{\text{س}\rightarrow\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا(س} - \text{٢)}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣}}$

الحل:-

② $\underset{\text{س}\rightarrow\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا(س}^{\text{٢}} - \text{٤)}}{\text{س} - \text{٢}}$

الحل:-

③ $\underset{\text{س}\rightarrow\text{١}}{\text{نها}} \frac{\text{جا(س} - \text{١)}}{\text{(س} - \text{١)(س} + \text{٢)}}$

الحل:-

④ $\underset{\text{س}\rightarrow\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا(ظا٣س)}}{\text{س}}$

الحل:-

⑤ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٤)}{\text{ظا}(\text{س}^{٣} - ٨)}$ ،

الحل:

⑥ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\ ٣\text{س}}{\sqrt{٥\text{س} + ١} - ١}$.

الحل:

⑦ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - \text{جا}(\sqrt{\text{س}} - ١)}{\text{س} - ١}$

الحل:

⑧ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\sqrt{\text{س}} - ١)}{\text{س}^{٣} - ١}$

الحل:

⑨ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ١}{\text{جا}(\text{س}^{٣} - ١)}$ ،

الحل:

مثال ①: جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٣س - \text{جتا}س}{س^٢}$.

الحل:

مثال ③: جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٥ - ٥\text{جتا}٤س}{س^٢ - س^٣}$.

الحل:

مثال ②: جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}^٢ ٣س - \text{جتا}٨س}{س^٢}$

الحل:

مثال ④: جد نها $\frac{١ - \text{جا}٢س}{\text{جتا}س - \text{جا}س}$.

الحل:

مثال ⑤ :- جد $\underset{\text{٠}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١ − قتا ٢س}}{\text{س جاس}}$

الحل :-

مثال ⑥ :- جد $\underset{\text{٠}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{١ − قتا ٢س}}}{\sqrt{\text{٢}}\ \text{س}}$

الحل :-

مثال ⑦ :- جد $\underset{\text{٠}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١ − ٣س جاس − قتا ٢س}}{\text{س ظا ٢س}}$

الحل :-

مثال ⑧ :- جد $\underset{\frac{\pi}{\text{٦}}\leftarrow\text{س}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢جاس − ١}}{\text{٤ قتا}^{\text{٢}}\text{س − ٣}}$ ،

الحل :-

* ملاحظة هامة *

نستخدم المرافق عندما يكون السؤال على احد الاشكال الآتية :-

١ ± جا ، ١ ± جتا (فردي) ، ١ ± قا

جا ± جتا ، جا ± ١ ، جتا ± جا ، $\sqrt{\text{جتا س} \pm 1}$ ، ..

مثال ① :- جد $\lim\limits_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا ٥ س}}{\text{جتا ٤ س} - 1}$

الحل :-

مثال ③ :- جد $\lim\limits_{س \to \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \text{جتا س}}}{\text{جا س}}$

الحل :-

مثال ② :- جد $\lim\limits_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{س^2}$

مثال ④ :- جد $\underset{س \to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جا}\,2س}{\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س}$.

الحل :-

مثال ⑤ :- جد $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^2 س}{\text{قا}\,س - 1}$

الحل :-

* ملاحظة مهمة *

طريقة الفرض (الزاوية المتممة ، الزاوية المكملة) :-

① المتممة أن يكون مجموع الزاويتين = $90°$.

المتممة = $\frac{\pi}{2}$ − الزاوية .

② المكملة أن يكون مجموع الزاويتين = $180°$.

المكملة = π − الزاوية .

* جا الزاوية = جتا المتممة مع الانتباه للربع .

مثال ① :- جد قيمة النهايات التالية :-

① $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - 2س\right)}{س}$

الحل :-

② $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - 5س\right)}{\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{2} - 3س\right)}$

الحل :-

③ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\left(\pi - 3س\right)}{4س}$

الحل :-

④ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\left(\pi - 5س\right)}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - 3س\right)}$.

الحل :-

* ملاحظة هامة *

عندما يكون جا ، جتا ، ظا ، ظتا حد وحيد نستخدم الفرض الجبري أن :

نفرض أن ص = الاقتران الآخر وليس الاقتران الدائري بشرط أن

1. الزاوية اقتران خطي .
2. الاقتران الآخر خطي .

مثال ①: جد $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}\,٣س}{\pi - ٦س}$

الحل :

مثال ②: اذا كانت :

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{\text{ظا}\,\pi س}{١ - س} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{مس - ٢م}{\text{جا}\,\pi س}$ ،

فجد قيمة الثابت م ؟

الحل :

مثال ③ :- جد $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٤}\text{س})}{\text{س} + ٢}$

الحل :-

مثال ④ :- جد $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\pi\,\text{س}}{\text{س} + ١}$

مثال ⑤ :- جد $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

الحل :-

* ملاحظة مهمة *

عندما تكون الزاوية ليست اقتران خطي نستخدم التعويض مرتين حيث نفرض الزاوية اولاً :

مثال ① :- جد $\lim_{س \to ٢} \frac{قتا \frac{٣ط}{س}}{س - ٢}$

الحل :

مثال ② اذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - قتا ٢س}{س^{ن}}$ موجودة

حيث ن عدد صحيح > ٠ ، فجد قيمة ن ؟

الحل :-

أسئلة الوزارة :-

سؤال وزارة (ش ٢٠٠٨) :-

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ + \text{جتا}\,٤\text{س} - ٢\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}}$

الحل :-

سؤال وزارة (ص ٢٠٠٨) :-

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}\,٢\text{س}}{٦\text{س}^{٢}}$

الحل :-

سؤال وزارة (ص ٢٠٠٩) :-

جد :-

① $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{\text{س}}$

الحل :-

② $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(٧\text{س}^{٣}\,\text{ظتا}^{٢}(٢\text{س})\,\text{قتا}(٥\text{س})\right)$

الحل :

سؤال وزارة (ص ٢٠١٢)

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{قا}\,\text{س}}{\text{س}\,\text{جا}\,\text{س}}$

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١١) :-

جد $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا س} - \text{جا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

الحل :-

سؤال وزارة (ص ٢٠١١) :-

جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} ٣\text{س} \left(\text{ظتا} ٢\text{س} + \text{قتا} ٣\text{س}\right)$

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١٣) :-

جد $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٢}\text{س}}{\text{س} - ١}$

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١٧) :-

جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{٢ \text{جا} ٢\text{س} - \text{جا} ٤\text{س}}{\text{س}^{٣}}$

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١٦) :

جد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢س - جاس}{\sqrt{١ - جتا٢س}}$

الحل :

سؤال وزارة (ش ٢٠١٥) :

جد $\lim\limits_{س \to \pi} \frac{١ + قتا٥س}{(س - \pi)^{٢}}$

الحل :

الاتصال عند نقطة :-

يكون ق(س) متصلاً عند س = أ اذا حقق

الشروط الآتية :-

١) ق(أ) موجودة (أي ق(س) معرف عند س = أ)

٢) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة .

٣) ق(أ) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س)

و اذا لم يتحقق اي شرط منها يكون الاقتران

غير متصل عند س = أ .

مثال ① :- اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ - ٩} & ، س \neq ٣ \\ ٩ & ، س = ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٣

الحل :-

مثال ② :- اذا كان :-

ق(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ابحث في اتصال ق(س)

عند س = ٢

الحل :-

مثال ③ :- اذا كانت ق(س) =

$$\begin{cases} \sqrt{٦ - س} & ، س < ٢ \\ ٢ & ، س = ٢ \\ س^٣ - س^٢ - ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

الحل :-

مثال ④ :- اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} س [١ - س] & ، ٢ \leq س \leq ٣ \\ \frac{١س^٢ - ١٩}{٣ - س} & ، س > ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٣ .

الحل :-

مثال ⑤ :- ابحث في اتصال ق(س) = [٢س-٣]

عند س = ١ ، س = ٧,٥ ؟

الحل :-

مثال ⑥ :- اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - (\text{٣} - \text{٢ج})\text{س} - \text{٦ج}}{\ldots} & \text{، س} \neq \text{٣} \\ \text{٤س} - \text{١} & \text{، س} = \text{٣} \end{cases}$$

متصلاً عند س = ٣ نجد قيمة ج ؟

الحل :-

نظريات في الاتصال :-

نظرية (١) :- اذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود

فإن ق متصل عند س لكل س ∈ ح .

نظرية (٢) :- اذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند س = أ

فإن :

١) كلا الاقترانين ق + هـ ، ق - هـ متصل عند س = أ

٢) الاقتران ق × هـ متصل عند س = أ .

٣) الاقتران $\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$ متصل عند س = أ

(بشرط أن هـ(أ) ≠ صفر) .

نظرية (٣) :- ليكن ق(س) متصل عند س = أ

ق(س) ≥ صفر حول س = أ ، فإن هـ(س) = $\sqrt{\text{ق(س)}}$

متصل عند س = أ

* نتيجة *

اذا كان ق اقتراناً نسبياً معرفاً عند س = أ

فإن ق متصل عند س = أ .

(بشكل عام الاقتران النسبي متصل على ح

ما عدا اصفار مقامه) .

مثال ① :- اذا كان ق(س) = س² + ٥س ،

هـ(س) = ٣س - ١ ابحث في اتصال ق(س) + هـ(س)

عند س = ٢

الحل :-

مثال ②: اذا كان:

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} &، س < ٢ \\ ٣س - ٢ &، س \geq ٢ \end{cases}$$

$هـ(س) = س^{٣} - ١$

بين أن $ق(س) \times هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

الحل:

مثال ③: اذا كان:

$ق(س) = ٣س + |٢س - ١| + [س]$ ابحث في اتصال $ق(س)$ عند $س = \frac{١}{٤}$

الحل:

مثال ④: اذا كان:

$$ع(س) = \begin{cases} \dfrac{\frac{١}{٨}س^{٣} + ١}{س + ٢} &، س > -٢ \\ \frac{٣}{٢} &، س \leq -٢ \end{cases}$$

$هـ(س) = \dfrac{ظا \frac{ط}{٤} س}{س}$ ابحث في اتصال ع + هـ عند $س = -٢$

الحل:

مثال ⑤ :- اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ &، س \le ١ \\ ٣ + ٢س &، س > ١ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢س &، س \le ١ \\ -٢ &، س > ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق + هـ عند س = ١

الحل :-

مثال ⑥ :- اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س\sqrt{س} - ١}{س - ١} &، س > ١ \\ ب &، س = ١ \\ ٢أس &، س < ١ \end{cases}$$

متصلاً عند س = ١ جد قيمة أ ، ب ؟

الحل :-

مثال ⑦ :- اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} أس^٣ - ب س + ١ &، س > ١ \\ ٥ &، س = ١ \\ س^٢ - (أ+ب)س + ٢ &، س < ١ \end{cases}$$

متصلاً عند س = ١ جد قيمة أ ، ب ؟

الحل :-

أسئلة الوزارة :-

سؤال وزارة (ص ٢٠٠٨) :-

اذا كان ق(س) = $$\begin{cases} [س] + ب ، & ١ \le س < ٢ \\ \frac{١٠}{س} ، & ٢ \le س \le ٣ \end{cases}$$

جد قيمة الثابت ب التي تجعل ق متصلاً عند س = ٢

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠٠٩) :-

اذا كان ق اقتران متصل عند س = ٤ ، وكان

$$٣ ق(٤) = ٦ \quad \text{وكانت} \quad \lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٤ ب$$

جد قيمة ب ؟

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١٧) :-

اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} (س - ٣)^٢ ، & س \ge ٤ \\ \frac{|[س] - س| + [س - ٤]}{س - ٤} ، & س < ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٤

الحل :-

الاتصال على فترة :-

خطوات بحث اتصال ق(س) على الفترة [أ ، ب]:

أولاً: نبحث في اتصال القواعد كل قاعدة على مجالها ويكفي هنا الاستفادة من بعض النظريات والنتائج ...

مثل:-

١) كثير الحدود متصل على ح .

٢) الاقتران النسبي متصل على ح / اصفار المقام

٣) الجذور الفردية متصلة اذا كان مابداخلها متصل

٤) الجذور الزوجية متصلة اذا كان مابداخلها متصل وأكبر من صفر .

٥) الجيب والجتا متصلة اذا كانت الزاوية متصلة .

٦) أي اقترانين متصلين مجموعهما ، حاصل ضربهما طرحهما اقتران متصل وكذلك قسمتهما بشرط المقام ≠ صفر .

ثانياً: - نبحث الاتصال عند نقط التحول (التشعب)

ثالثاً: - نبحث الاتصال عند اطراف الفترة وهنا يكون البحث من جهة واحدة بالنسبة لبداية الفترة من جهة اليمين وبالنسبة لنهاية الفترة من جهة اليسار

رابعاً: - نتيجة تلخص ما سبق .

مثال ①: - ابحث في اتصال :-

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 ، & ٠ \le س < ١ \\ س^3 ، & ١ \le س < ٢ \\ ٦ ، & س = ٢ \end{cases}$$

على الفترة [٠ ، ٢] :-

الحل :-

مثال ⑤ :- اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} س\,[س - ٢] & ، اذا س \geq ٢ \\ \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & ، س < ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [١ ، ٥)

الحل :-

مثال ⑥ :- اذا كان $ق(س) = \left[\frac{س}{٢}\right]$

$هـ(س) = س^{٢} - ٤$ ابحث في اتصال

$ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ على الفترة [-٢ ، ٢]

الحل :-

مثال ④ :- ليكن ق(س) =

$$ق(س) = \begin{cases} [س+١] - س^{٢} ، & س \leq ١ \\ \sqrt{٧-س} ، & س > ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله ؟

الحل :-

مثال ⑤ :- اذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٤ - س^{٢}} ، & |س| \leq ٢ \\ ١ - \frac{١}{س-١} ، & |س| > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله .

الحل :-

اسئلة الوزارة الواردة على الدرس :-

سؤال وزارة (ص ٢٠٠٨) :-

اذا كان :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}] + \text{س} \text{ ، } & -١ \le \text{س} < ٠ \\ \sqrt{\text{س}} + \frac{٣}{٥}\text{س}^{٢} \text{ ، } & ٠ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على الفترة [-١ ، ٢]

الحل :

سؤال وزارة (٢٠١٠ ص) :-

اذا كان :-

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ١} \text{ ، } & -٢ \le \text{س} < -١ \\ \text{س}[\text{س}] + ١ \text{ ، } & -١ \le \text{س} < ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على الفترة [-٢ ، ١)

الحل :-

سؤال وزارة (ش ٢٠١٢) :

اذا كان :

ق(س) = { ٥س - ٩ ، س ≤ ٢
[٣ - ½ س] ، ٢ < س ≤ ٤
|س - ٤| ، س > ٤

ابحث في اتصال ق على مجموعة الاعداد الحقيقية ،

الحل :-

سؤال وزارة (ص ٢٠١٥) :

إذا كان ق(س) = س + ٢ ، هـ(س) = [٥ - س]

ابحث في اتصال $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ في الفترة (٤ ، ٧) .

الحل :-