بسم الله الرحمن الرحيم

❖ مادة الرياضيات العلمي (المستوى الرابع)

شــرح مُفــصّــل للــمــادة وتــضــم الــــــوحــدتــين الأثنيــين:

➢ **الوحدة الأولــى: التكامـــلات وتطبيـــقاتها.**

➢ **الوحدة الثانيـــة: القطوع المخروطية.**

❖ تأليف الأستاذ : أحمد فهمي

❖ رقم الهاتف: ٠٧٧٩٩٠٩٥١٦

فهرسة الكتاب

رقم الصفحة	الموضوع	#
٣	الوحدة الأولى: التكاملات وتطبيقاتها	١
٤	الدرس الأول: التكامل غير المحدود	٢
٦	تكاملات الاقترانات المثلثية المجدولة	٣
١٣	تمرينات على التكاملات	٤
١٥	الدرس الثاني: الاقتران البدائي للتكامل	٥
١٦	الدرس الثالث: التكامل المحدود	٦
٢٩	الدرس الرابع: الاقتران اللوغاريتمي والاقتران الأسي	٧
٢٩	مشتقة الاقتران اللوغاريتمي	٨
٣١	مشتقة الاقتران الأسي	٩
٣٤	تكامل الاقتران الأسي	١٠
٣٥	الدرس الخامس: التكامل باستخدام التعويض	١١
٤٩	الدرس السادس: التكامل باستخدام الأجزاء	١٢
٥٨	الدرس السابع: التكامل باستخدام الكسور الجزئية	١٣
٦٤	الدرس الثامن: المعادلات التفاضلية	١٤
٦٧	أمثلة متنوعة على التكاملات	١٥
٧٣	الدرس التاسع: المساحات	١٦
٧٣	الحالة الأولى: مساحة محصورة بين منحنى وأحد المحاور الرئيسية	١٧
٧٤	الحالة الثانية: مساحة محصورة بين منحنيين	١٨
٧٦	الحالة الثالثة: مساحة محصورة بين منحنى ومستقيمين ومحور السينات	١٩
٧٧	الحالة الرابعة: مساحة محصورة بين ثلاثة منحنيات فأكثر	٢٠
٨٣	الدرس العاشر: الحجوم الدورانية	٢١
٨٧	الوحدة الثانية: القطوع المخروطية	٢٢
٨٨	الدرس الأول: الدائرة	٢٣
٨٨	تطبيقات على الصورة القياسية لمعادلة الدائرة	٢٤
٩٠	تطبيقات على الصورة العامة لمعادلة الدائرة	٢٥
٩٤	الدرس الثاني: القطع المكافئ	٢٦
١٠٢	الدرس الثالث: القطع الناقص	٢٧
١١٣	الدرس الرابع: القطع الزائد	٢٨
١٢١	المتطابقات المثلثية	٢٩

الوحدة الأولى : التكاملات وتطبيقاتها

الدرس الأول : التكامل غير المحدود

- يُكتب تكامل الاقتران ق(س) في الرياضيات على الشكل الآتي: $\int$ ق(س) ءس.
- التكامل والاشتقاق مفهومان متضادان في الرياضيات.

✪ **قواعد التكامل غير المحدود:**

- **قاعدة(١)**: $\int$ ٩ ءس = ٩س + جـ ، حيث جـ ∈ ح (ويسمى الثابت ج بثابت التكامل).

مثال : أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية :

١) $\int$ ٤ ءس = ٤س + جـ

٢) $\int$ -٩ ءس = -٩س + جـ

- **قاعدة(٢)**: $\int$ سⁿ ءس = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، ن ≠ −١ .

- **قاعدة(٣)**: $\int$ ٩سⁿ ءس = ٩ $\int$ سⁿ ءس= ٩ × $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، ن ≠ −١ .

مثال : أوجد التكاملات الآتية :

١) $\int$ س ءس = $\frac{\text{س}^{١+١}}{١+١}$ + جـ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ.

٢) $\int$ ٧س^{٦} ءس = ٧ $\frac{\text{س}^{٧}}{٧}$ + جـ = س^{٧} + جـ.

➪ **(الخاصية الخطية)**: $\int$(ق ± هـ) ءس = $\int$ق ءس ± $\int$ هـ ءس.

مثال: أوجد كل من التكاملات الآتية :

١) $\int$(٥س^{٢} - ٣س) ءس = $\int$٥س^{٢} ءس - $\int$٣س ءس = $\frac{\text{٥س}^{٣}}{٣}$ − $\frac{\text{٣س}^{٢}}{٢}$ + جـ.

٢) $\int (\text{س}^{٨} - ٤\text{س}^{-٥} + ١)\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{٩}}{٩} - \frac{٤\text{س}^{-٤}}{-٤} + \text{س} + \text{ج} = \frac{\text{س}^{٩}}{٩} + \text{س}^{-٤} + \text{س} + \text{ج}.$

---

٣) $\int \text{ءس} = \text{س} + \text{ج}$

---

٤) $\int (\text{صفر})\ \text{ءس} = \text{صفر} \times \text{س}^{١} + \text{ج} = ٠ + \text{ج} = \text{ج}$

---

٥) $\int \sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + \text{ج} = \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ج} = \frac{٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{ج} = \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{ج}$

---

٦) $\int (\frac{٦}{\text{س}^{٤}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}})\ \text{ءس} = \int (٦\text{س}^{-٤} + \text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \text{س}^{-١})\ \text{ءس} = \int (٦\text{س}^{-٤} + \text{س}^{-\frac{١}{٢}})\ \text{ءس}$

$= ٦\frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} + \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ج} = ٢\sqrt{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^{٣}} + \text{ج}$

❖ <u>**ملاحظة**</u>: **يتوزع التكامل على عمليتي الجمع والطرح ولكن <u>لا</u> يتوزع على عمليتي الضرب والقسمة.**

---

٧) $\int (\text{س}^{٣} - ١)(٢\text{س} + ٤)\ \text{ءس} = \int (٢\text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س} - ٤)\ \text{ءس}$

$\Leftarrow \frac{٢}{٥}\text{س}^{٥} + \frac{٤}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٢}{٢}\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + \text{ج} = \frac{٢}{٥}\text{س}^{٥} + \text{س}^{٤} - \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + \text{ج}$

---

٨) $\int (\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س}}})\ \text{ءس} = \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣)\ \text{ءس} = \int (\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٣\text{س}^{-\frac{١}{٢}})\ \text{ءس}$

$= \frac{٢}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٦\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ج}$

0779 909 516

تكاملات الاقترانات المثلثية المجدولة:

١) ∫جاس ءس = − جتاس + جـ

٢) ∫جتاس ءس = جاس + جـ

٣) ∫قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ

٤) ∫قتا^{٢}س ءس = − ظتاس + جـ

٥) ∫ظاسقاس ءس = قاس + جـ

٦) ∫ظتاسقتاس ءس = − قتاس + جـ

مثال: حل التكاملات الآتية :

١) ∫(٢جاس + ٦س) ءس

الحل: ∫(٢جاس + ٦س) ءس = − ٢جتاس + $\frac{٦}{٢}$ س^{٢} + جـ = − ٢جتاس + ٣س^{٢} + جـ

---

٢) ∫(٧قتاسظتاس + ٣قا^{٢}س) ءس

الحل: ∫(٧قتاسظتاس + ٣قا^{٢}س) ءس = -٧قتاس + ٣ظاس + جـ

---

٣) ∫$\frac{\text{جا(٩س + ٣)}}{٢}$ ءس

الحل: كما نلاحظ أن هذا المقدار غير معروف تكامله مباشرة (ليس مجدولاً) ، وفي مثل هذه الحالة نلجأ إلى طريقة الفرض لحل السؤال.

ص= ٩س + ٣ ⟵ ءص = ٩ ءس ⟵ ءس = $\frac{\text{دص}}{٩}$

∴ ∫$\frac{\text{جا(٩س + ٣)}}{٢}$ ءس = $\frac{١}{٢}$∫جاص $\frac{\text{دص}}{٩}$ = $\frac{١}{١٨}$∫جاص ءص = $\frac{١}{١٨}$ × − جتاص + جـ

⇐ − $\frac{١}{١٨}$ جتا(٩س+٣)+ج

❖ **ملاحظة**: ∫جا(أس+ب) ءس = − $\frac{١}{أ}$جتا(أس+ب) + ج

وتنطبق هذه القاعدة على جميع الاقترانات المثلثية <u>بشرط أن تكون الزاوية خطية</u>.

📖 **<u>مثال</u>**: حل التكاملات الآتية :

١) ∫قتا$\frac{س}{٣}$ ظتا$\frac{س}{٣}$ ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ∫قتا$\frac{س}{٣}$ ظتا$\frac{س}{٣}$ ءس= −٣قتا$\frac{س}{٣}$ + ج

---

٢) ∫جتاس ظاس ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ∫جتاس ظاس ءس =∫جتاس× $\frac{جاس}{جتاس}$ ءس =∫جاس ءس = − جتاس + ج

---

٣) ∫ظا^{٢}س ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ∫ظا^{٢}س ءس =∫(قا^{٢}س−١) ءس = ظاس − س + ج

---

٤) ∫(١٢ − ظتا^{٢}٥س) ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ∫(١٢ − ظتا^{٢}٥س) ءس =∫(١٢ − (قتا^{٢}٥س − ١)) ءس =∫(١٣ - قتا^{٢}٥س) ءس

⇐ ١٣س + $\frac{١}{٥}$ ظتا٥س + ج

---

٥) ∫(ق(س)× هـَ(س) + هـ(س)×قَ(س)) ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ∫(ق(س)× هـَ(س) + هـ(س)×قَ(س)) ءس =∫(ق×هـ)َ$_{س}$ ءس = (ق×هـ)$_{س}$+ج

٦) $\int$ (٥ – ٣جا^٢^٧س) ءس

✍ **الحل**: $\int$(٥–٣جا^٢^٧س) ءس = $\int$(٥– ٣($\frac{١}{٢}$(١ – جتا١٤س))) ءس = $\int$(٥– $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ جتا١٤س) ءس

⇐ $\int$($\frac{٧}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ جتا١٤س) ءس = $\frac{٧}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢٨}$ جا١٤س + جـ

---

٧) إذا كان ٲ = $\int$قا^٢^س ءس ، ب = $\int$ $\frac{ظاس}{س^٢}$ ءس ، أوجد (ٲ – ب) ؟

✍ **الحل**: ٲ – ب = $\int$ قا^٢^س ءس – $\int$ $\frac{ظاس}{س^٢}$ ءس = $\int$(قا^٢^س – $\frac{ظاس}{س^٢}$) ءس = $\int$($\frac{س قا^٢س - ظاس}{س^٢}$) ءس

⇐ $\int$($\frac{ظاس}{س}$)َ ءس = $\frac{ظاس}{س}$ + جـ

---

٨) $\int$(٣جتا^٢^٥س – ٣جا^٢^٥س) ءس

✍ **الحل**: $\int$(٣جتا^٢^٥س – ٣جا^٢^٥س) ءس = ٣ $\int$(جتا^٢^٥س – جا^٢^٥س) ءس

⇐ ٣ $\int$جتا١٠س ءس ....(جتا٢س =جتا^٢^س – جا^٢^س ⇐ جتا^٢^٥س – جا^٢^٥س = جتا١٠س)

⇐ $\frac{٣}{١٠}$ جا١٠س + جـ

---

٩) $\int$جتا٣س جتا٧س ءس

✍ **الحل**: $\int$جتا٣س جتا٧س ءس = $\frac{١}{٢}$ $\int$(جتا(١٠س) + جتا(–٤)) ءس

∴ $\frac{١}{٢}$ $\int$ (جتا١٠س + جتا٤س) ءس = $\frac{١}{٢}$($\frac{١}{١٠}$ جا١٠س + $\frac{١}{٤}$ جا٤س) + جـ

---

١٠) $\int$ جاس جتاس ءس

✍ **الحل**: لأن جا٢س = ٢جاس جتاس ⟵ جاس جتاس = $\frac{جا٢س}{٢}$

∴ $\int$جاس جتاس ءس = $\int$ $\frac{جا٢س}{٢}$ ءس = $\frac{١}{٢}$ $\int$ جا٢س ءس = $\frac{١}{٢}$×–$\frac{١}{٢}$ جتا٢س + جـ

١١) $\int \left(\frac{١-جا^{٢}س}{جا^{٢}\frac{س}{٢}جتا^{٢}\frac{س}{٢}}\right)$ ءس

✍ **الحل**: $\int \left(\frac{١-جا^{٢}س}{جا^{٢}\frac{س}{٢}جتا^{٢}\frac{س}{٢}}\right)$ ءس $= \int \frac{جتا^{٢}س}{(جا\frac{س}{٢}جتا\frac{س}{٢})^{٢}}$ ءس $= \int \frac{جتا^{٢}س}{\frac{جا^{٢}\frac{٢س}{٢}}{٤}}$ ءس $= ٤\int \frac{جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}$ ءس

$\Leftarrow$ ٤ $\int$ ظتا^{٢}س ءس = ٤ $\int$ (قتا^{٢}س − ١) ءس = ٤(− ظتاس − س) + ج

---

١٢) $\int \frac{(١-جتاس)^{٢}}{١-جتا^{٢}س}$ ءس

✍ **الحل**: $\int \frac{(١-جتاس)^{٢}}{١-جتا^{٢}س}$ ءس $= \int \frac{١-٢جتاس+جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}$ ءس $= \int \left(\frac{١}{جا^{٢}س} - \frac{٢جتاس}{جا^{٢}س} + \frac{جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}\right)$ ءس

$\Leftarrow$ $\int$(قتا^{٢}س− ٢ $\frac{جتاس}{جاس} \times \frac{١}{جاس}$ +ظتا^{٢}س) ءس= $\int$(قتا^{٢}س−٢قتاسظتاس+(قتا^{٢}س - ١)) ءس

$\Leftarrow$ $\int$(٢قتا^{٢}س − ٢ظتاس قتاس − ١) ءس= −٢ظتاس + ٢قتاس − س + ج

---

١٣) $\int \frac{١-جا٢س}{جاس-جتاس}$ ءس

✍ **الحل**: $\int \frac{١-جا٢س}{جاس-جتاس}$ ءس $= \int \frac{جا^{٢}س+جتا^{٢}س-٢ جاس جتاس}{جاس-جتاس}$ ءس $= \int \frac{(جاس-جتاس)^{٢}}{جاس-جتاس}$ ءس

$\Leftarrow$ $\int$ (جاس − جتاس) ءس = − جتاس − جاس + ج

❖ **قاعدة**: $\int$ ق(س) ءس= ق(س) + ج

0779 909 516

$\int$ ق(س) ءس = ق(س) + جـ .... وهكذا.

📖 **مثال:** إذا كان قَ(س) = ٤س − ٩ ، وكان ق(٢) = ٣ ، أوجد قاعدة الاقتران ق(س)؟

✍ **الحل:** ق(س) = $\int$ قَ(س) ءس = $\int$(٤س − ٩) ءس = ٢س^{٢} − ٩س + جـ

لكن، ق(٢) = ٣ ⇐ ق(٢) = ٢×٤ − ٩×٢ + جـ = ٣ ⇐ ٨ − ١٨ + جـ = ٣ ⇐ جـ = ١٣

∴ ق(س) = ٢س^{٢} − ٩س + ١٣

📖 **مثال:** إذا كان تسارع الجاذبية الأرضية يساوي ١٠م/ث^{٢}، قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها ٣٥م/ث ، أحسب المسافة التي يقطعها الجسم من سطح الأرض بعد مرور (ن) ثانية؟

✍ **الحل:**

المعطيات: ت(ن) = -١٠ **(يأخذ التسارع قيمة سالبة هنا لأن الحركة عكس الجاذبية)** ، ع(٠)= ٣٥

المطلوب: ف (ن) =؟؟

ع(ن) = $\int$ت(ن) ءن = $\int$(−١٠) ءن= −١٠ن + جـ ،**لكن** ع(٠)= ٣٥ ⇐ −١٠ن + جـ = ٣٥

وعندما ن = ٠ ⇐ −١٠×٠ + جـ = ٣٥ ⇐ جـ = ٣٥ ، ∴ع(ن) = −١٠ن + ٣٥

ف (ن) = $\int$ع(ن) ءن= $\int$(−١٠ن + ٣٥) ءن= −٥ن^{٢} + ٣٥ن + جـ

لكن ف (٠) = ٠ **(لأن الجسم ابتدأ الحركة من سطح الأرض)** ، ∴ ف (٠) = ٠ + ٠ + جـ = ٠

⇐ جـ = ٠ ، ∴ ف (ن) = −٥ن^{٢} + ٣٥ن

📖 **مثال:** إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة، وكان قً(س)=٦س+١ ، وكانت النقطة (١,٠) نقطة حرجة للاقتران ق(س) ، أوجد قاعدة الاقتران ق(س)؟

✍ **الحل:**

المعطيات:

١) ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د **(لأنه من الدرجة الثالثة)**

٢) ق''(س) = ٦س + ١

٣) ق(٠) = ١ ⇐ ق'(٠) = ٠

المطلوب: ق(س) = ؟؟

ق'(س) = ∫ق''(س) ءس = ∫(٦س + ١) ءس = ٣س^{٢} + س + جـ$_{١}$ ، **لكن** ق'(٠) = ٠

⇐ ٠ + ٠ + جـ$_{١}$ = ٠ ⇐ جـ$_{١}$ = ٠ ، ∴ ق'(س) = ٣س^{٢} + س ، **وكذلك** ق(س) = ∫ق'(س) ءس

∫(٣س^{٢} + س) ءس ⇐ ق(س) = س^{٣} + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ ، **لكن** ق(٠) = ١

⇐ ٠ + ٠ + جـ = ١ ⇐ جـ = ١ ، ∴ ق(س) = س^{٣} + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ١

مثال : إذا كان تسارع جسم ما بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ت(ن) =٦ن+٤ ، فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٣) ثوانٍ من بدء الحركة ، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسم هي (٢م/ث) وأنه قطع مسافة (٢١م) بعد أول ثانيتين من بدء الحركة؟

الحل:

المعطيات:

١) ت(ن) = ٦ن + ٤ ، ٢) ع(٠) = ٢ ، ف(٢) = ٢١

المطلوب: ف(٣) =؟؟

ع(ن) = ∫ت(ن) ءن = ∫(٦ن + ٤) ءن =٣ن^{٢}+٤ن+جـ$_{١}$ ،**لكن** ع(٠) = ٢ ⇐ جـ$_{١}$ = ٢

∴ ع(ن) =٣ن^{٢}+٤ن+٢ ، ف(ن) = ∫ع(ن) ءن = ∫(٣ن^{٢} + ٤ن + ٢) ءن

⇐ ن^{٣}+٢ن^{٢}+٢ن +جـ ، **لكن** ف(٢) =٢١ ⇐ ف(٢) =٨+٨+٤+جـ = ٢١ ⇐ جـ = ١

∴ ف(ن) = ن^{٣}+٢ن^{٢}+٢ن +١ ⇐ ف(٣) = ٢٧ + ١٨ + ٦ + ١ = ٥٢م

مثال: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١،-١) يساوي ١٠ وكان ق''(س)=١٨س−٨ ، أوجد قاعد الاقتران ق(س)؟

✍ **الحل:**

المعطيات:

١) ق(١) = −١ ، ٢) قَ(١) = ١٠

المطلوب: ق(س) = ؟؟

قَ(س) = ∫قً(س) ءس = ∫(١٨س − ٨) ءس = ٩س^{٢}−٨س+جـ$_{١}$ ، ∴ قَ(س) = ٩س^{٢}−٨س+جـ$_{١}$

لكن قَ(١) = ١٠ ⇐ ٩ − ٨ + جـ$_{١}$ = ١٠ ⇐ جـ$_{١}$ = ٩ ، ∴ قَ(س) = ٩س^{٢}−٨س+٩

ق(س) = ∫قَ(س) ءس = ∫(٩س^{٢}−٨س+٩) ءس= ٣س^{٣} − ٤س^{٢} + ٩س + جـ

لكن ق(١) = −١ ⇐ ق(١) = ٣ − ٤ + ٩ + جـ = −١ ⇐ جـ = −٩

∴ ق(س) = ٣س^{٣} − ٤س^{٢} + ٩س − ٩

تذكر أن ∫قَ(س) ءس = ق(س) + جـ

📖 **مثال:** أوجد $\frac{ءص}{ءس}$∫(٣٠ − جا٣س) ءس؟

✍ **الحل:** $\frac{ءص}{ءس}$∫(٣٠ − جا٣س) ءس = ٣٠ − جا٣س

📖 **مثال:** أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للعلاقة ص = ∫$\frac{س}{س^{٢}-٩}$ ءس؟

✍ **الحل:** $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءس}$∫$\frac{س}{س^{٢}-٩}$ ءس ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س}{س^{٢}-٩}$

📖 **مثال:** إذا كان ∫ق(س) ءس = س^{٣} − س^{٢} + ٢س + ١ ، أوجد قَ(−٣)؟

✍ **الحل:** $\frac{ءص}{ءس}$∫ق(س) ءس = $\frac{ءص}{ءس}$(س^{٣} − س^{٢} + ٢س + ١) ⇐ ق(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٢

⇐ قَ(س) = ٦س − ٢ ، ∴ قَ(−٣) = −١٨ − ٢ = − ٢٠

مثال: إذا كان ∫ ق(س) ءس = جا² ٢س + ظاس + جـ ، أوجد قَ($\frac{\pi}{٤}$)؟

الحل: $\frac{ءص}{ءس}$ ∫ ق(س) ءس = $\frac{ءص}{ءس}$(جا² ٢س + ظاس + جـ) ⇐ ق(س) = ٤جا٢س جتا٢س + قا²س

⇐ ق(س) = ٢جا٤س + قا²س ... (جا٢س = ٢جاس جتاس)

∴ قَ(س) = ٨جتا٤س + ٢قاس × قاس ظاس = ٨جتا٤س + ٢قا²س ظاس = ٨جتا٤س + $\frac{٢}{جتا^٢ س}$ × $\frac{جاس}{جتاس}$

∴ قَ($\frac{\pi}{٤}$) = ٨جتا(π) + $\frac{٢}{جتا^٢ \frac{\pi}{٤}}$ × $\frac{جا\frac{\pi}{٤}}{جتا\frac{\pi}{٤}}$ = ٨×−١ + ٤×١ = −٤

مثال: إذا كانت ∫(قَ(س)+٢س) ءس = س³+٢س²+١ ، وكان قَ(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧ ، أوجد :

١) قيمة الثابت (٢)

٢) ق(٠) ، قَ(٤)

الحل:

١) $\frac{ءص}{ءس}$ ∫(قَ(س)+٢س) ءس = $\frac{ءص}{ءس}$(س³ + ٢س² + ١) ⇐ قَ(س)+٢س = ٣س²+٢٢س

⇐ قَ(س) = ٣س²+٢٢س −٢س ، **لكن** قَ(١) = ٥ ⇐ قَ(١) = ٣+٢٢−٢ = ٥ ⇐ ٢ = ٢

٢) ق(س) = ∫ قَ(س) ءس = ∫(٣س²+٢س) ءس = س³ + س² + جـ ، **لكن** ق(٢) = ٧

∴ ق(٢) = ٨ + ٤ + جـ = ٧ ⇐ جـ = ٧ − ١٢ = −٥ ، ∴ ق(س) = س³ + س² − ٥

∴ ق(٠) = −٥ ، قَ(٤) = ٣×١٦ + ٨ = ٥٦

✪ **التمرينات:**

☜ **التمرين الأول:** حل التكاملات الآتية :

١) ∫ $\frac{ق(س)×هـَ(س) − هـ(س)×قَ(س)}{ق^٢(س)}$ ءس

٢) ∫(جاس + جتاس)² ءس

٣) $\int \frac{\text{ظتاس}}{\text{جاس}}$ ءس

٤) $\int \frac{1}{3-3\text{جتا}^2\text{س}}$ ءس

٥) $\int \frac{\text{جتا}^3\text{س}-9}{1-\text{جا}^2\text{س}}$ ءس

٦) $\int$ ٢جا٣س جا٥س ءس

☜ **التمرين الثاني**: قُذف جسم رأسياً للأعلى من قمة بناية ترتفع ٣٠م عن سطح الأرض وكانت سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة ع (ن) = ٤٠−١٠ن، أوجد ارتفاع الجسم عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء الحركة؟

☜ **التمرين الثالث**: إذا كان $\int$ق (٣س) ءس = س^3 + ٦س^2 + ٤ ، أوجد قَ(٣)؟

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي

0779 909 516

الدرس الثاني : الاقتران البدائي للتكامل

تعريف: إذا كان ق(س) متصلاً على مجاله فإن الاقتران م(س) يُسمّى "الاقتران البدائي للاقتران ق(س)" إذا كان مَ(س) = ق(س) ، ∀س ∈ مجال ق(س).

مثال: إذا كان ق(س) = ٤س^{٣}، فإن كلاً من الاقترانات الآتية يعتبر اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س):

- م(س) = س^{٤}
- م(س) = س^{٤} ± ١
- م(س) = س^{٤} ± ٩
- م(س) = س^{٤} ± $\frac{٣}{٥}$
- م(س) = س^{٤} ± ن ، ن ∈ ح

وبصورة عامة فإن: م(س) = $\int$ق(س) ءس ⇐ مَ(س) = ق(س)

مثال: بين أن الاقتران م(س) هو اقتران بدائي للاقتران ق(س) في كل مما يلي:

١) م(س) = س^{٣}+٥س ، ق(س) = ٣س^{٢}+٥

٢) م(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٦س}$ ، ق(س) = $\frac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢}+٦س}}$

الحل:

١) مَ(س) = ٣س^{٢} + ٥ = ق(س)

٢) مَ(س) = $\frac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢}+٦س}}$ = ق(س)

مثال: إذا كان م(س) = س^{٣}+أس^{٢}–١ هو اقتران بدائي للاقتران ق(س)، وكان ق(٢)=٢٤ ،أوجد قيمة الثابت أ؟

الحل: بما أن م(س) هو اقتران بدائي للاقتران ق(س) ⇐ مَ(س) = ق(س) ⇐٣س^{٢}+ ٢أس = ق(س) لكن ق(٢)=٢٤ ⇐ ٣×٤ + ٢أ×٢ = ٢٤ ⇐ ٤أ = ١٢ ⇐ أ = ٣

الدرس الثالث : التكامل المحدود

تعريف: إذا كان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) ، فإن التكامل المحدود للاقتران ق(س) يُكتب على الصورة التالية:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\ ءس = م(س)\Big|_{أ}^{ب} = م(ب) - م(أ) = $$ (تعويض الحد العلوي – تعويض الحد السفلي)

❖ **ملاحظة:** لا يوضع ثابت التكامل(جـ) في التكامل المحدود.

✪ **قواعد التكامل المحدود:**

١) $\int_{أ}^{ب} ك\ ءس = ك\int_{أ}^{ب} ءس = ك\times(س)\Big|_{أ}^{ب} = ك\times(ب-أ)$ ، $ك \in ح$

أي أن: (تكامل الثابت = الثابت×طول الفترة)

٢) $\int_{أ}^{ب} س^{ن}\ ءس = \frac{١}{ن+١}\times(س^{ن+١})\Big|_{أ}^{ب} = \frac{١}{ن+١}\times(ب^{ن+١} - أ^{ن+١})$

مثال: أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية :

١) $\int_{١}^{٤}(٤س - س^{٢} - ٣)\ ءس$

الحل: $\int_{١}^{٤}(٤س - س^{٢} - ٣)\ ءس = (\frac{٤}{٢}س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س)\Big|_{١}^{٤} = (٢س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س)\Big|_{١}^{٤}$

$\Leftarrow (٢\times١٦ - \frac{٦٤}{٣} - ١٢) - (٢ - \frac{١}{٣} - ٣) = -\frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٠$

---

٢) $\int_{٠}^{١} س\sqrt{س}\ ءس$

الحل: $\int_{٠}^{١} س\sqrt{س}\ ءس = \int_{٠}^{١} س\times س^{\frac{١}{٢}}\ ءس = \int_{٠}^{١} س^{\frac{٣}{٢}}\ ءس = \frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}}\Big|_{٠}^{١} = \frac{٢}{٥}(١ - ٠) = \frac{٢}{٥}$

---

٣) $\int_{١}^{٤} \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}}\ ءس$

✍ **الحل**: $\int_{١}^{٤} \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}}$ ءس $= \int_{١}^{٤} (\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}} + \frac{١}{\sqrt{س}})$ ءس $= \int_{١}^{٤} (١ + س^{-\frac{١}{٢}})$ ءس $= (س - ٢س^{\frac{١}{٢}}) \Big|_{١}^{٤}$

$\Leftarrow (٤ - ٤) - (١ - ٢) = ٠ - (-١) = ١$

---

٤) $\int$ (جتاس - جاس) ءس ، س $\in [٠، \frac{\pi}{٢}]$

✍ **الحل**: $\int$ (جتاس - جاس) ءس = (جاس + جتاس) $\Big|_{٠}^{\pi/٢}$ = (جا(π/٢) + جتا(π/٢)) − (جا(٠) + جتا(٠)) =(١ + ٠) − (٠ + ١) = ١ − ١ = ٠

---

٥) $\int$ قتاس ظتاس ءس ، س $\in$ (π/٣ ، π/٦)

✍ **الحل**: $\int$ قتاس ظتاس ءس = −(قتاس)^{٢} $\Big|_{\pi/٣}^{\pi/٦}$ = − $\frac{١}{جا^{٢}س}$ $\Big|_{\pi/٣}^{\pi/٦}$ = − (٤ − $\frac{٤}{٣}$) = − $\frac{٨}{٣}$

---

٦) إذا كان م(س)=س^{٢}−٣س+جـ اقتران بدائي للاقتران ق(س) المتصل على الفترة [٢,٥] ، فجد قيمة $\int_{٢}^{٥}$ق(س) ءس؟

✍ **الحل**: بما أن م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) ∴ مَ(س) = ق(س)

⇐ ٢س−٣=ق(س) ⇐ $\int_{٢}^{٥}$ق(س) ءس = $\int_{٢}^{٥}$(٢س−٣) ءس =(س^{٢}−$\frac{٣}{٢}$س^{٢}) $\Big|_{٢}^{٥}$ =-١٢,٥+٢=-١٠,٥

---

٧) $\int_{٠}^{٤}$(٣س+$\int$٣جتاص ءص) ءس ، ص $\in$ [٠،π]

✍ **الحل**: $\int_{٠}^{٤}$(٣س+٣×جاص $\Big|_{٠}^{\pi}$) ءس = $\int_{٠}^{٤}$(٣س+٣(جاπ−جا٠)) ءس = $\int_{٠}^{٤}$(٣س+٣(٠)) ءس

⇐ $\int_{٠}^{٤}$٣س ءس = $\frac{٣}{٢}$(س^{٢}) $\Big|_{٠}^{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$(٦٤) = ٩٦

---

٨) إذا كان $\int_{٠}^{٣}$ ا ءس = ١٦ ، فجد قيمة الثابت ا ؟

✍ **الحل**: $\int_{٠}^{٣} \text{أ}\ \text{ءس} = ١٦ \Leftarrow \text{أ}(٣-٠) = ٣\text{أ} = ١٦ \Leftarrow \text{أ} = \frac{١٦}{٣}$

---

٩) إذا كان (ن) عدداً صحيحاً موجباً ، أوجد مجموعة قيم س التي تجعل العبارة التالية صحيحة دائماً :

$$\int_{-١}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = ٢\int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس}$$

✍ **الحل**: $\int_{-١}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = ٢\int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس}$

$\Leftarrow \frac{١}{\text{ن}+١} \times (\text{س})^{\text{ن}+١}\Big|_{-١}^{١} = \frac{٢}{\text{ن}+١} \times (\text{س})^{\text{ن}+١}\Big|_{٠}^{١}$

$\Leftarrow \frac{١}{\text{ن}+١}[(١)^{\text{ن}+١} - (-١)^{\text{ن}+١}] = \frac{٢}{\text{ن}+١}[(١)^{\text{ن}+١} - ٠]$

$\Leftarrow \frac{١}{\text{ن}+١}[١ - (-١)^{\text{ن}+١}] = \frac{٢}{\text{ن}+١} \Leftarrow ١ - (-١)^{\text{ن}+١} = ٢ \Leftarrow (-١)^{\text{ن}+١} = -١$

∴ ن+١ ∈ مجموعة الأعداد الفردية ⇐ ن ∈ مجموعة الأعداد الزوجية

∴ قيم س هي مجموعة الأعداد الزوجية.

---

١٠) إذا كان $\int_{-١}^{٣} (٣\text{س}^٢ - ٢\int_{٠}^{\text{ط}} ٣\text{م}\ \text{ءم})\ \text{ءس} = -٢٠$ ، فجد قيمة الثابت ط؟

✍ **الحل**: **نحسب التكامل الداخلي أولاً** ، $\int_{-١}^{٣} (٣\text{س}^٢ - ٢\int_{٠}^{\text{ط}} ٣\text{م}\ \text{ءم})\ \text{ءس} = \int_{-١}^{٣} (٣\text{س}^٢ - ٣\text{م}^٢\Big|_{٠}^{\text{ط}})\ \text{ءس}$

$\Leftarrow \int_{-١}^{٣} (٣\text{س}^٢ - ٣\text{ط}^٢)\ \text{ءس} = ٣\int_{-١}^{٣} (\text{س}^٢ - \text{ط}^٢)\ \text{ءس} = ٣[\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \text{ط}^٢\text{س}]\Big|_{-١}^{٣}$

$\Leftarrow ٣[(٩ - ٣\text{ط}^٢) - (-\frac{١}{٣} + \text{ط}^٢)] = -٢٠ \Leftarrow ٢٨ - ١٢\text{ط}^٢ = -٢٠ \Leftarrow ١٢\text{ط}^٢ = ٤٨$

$\Leftarrow \text{ط}^٢ = ٤ \Leftarrow \text{ط} = \pm ٢$

---

١١) أوجد كثير الحدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث أنه $\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ٢$؟

✍ **الحل**: $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$ ، **لكن** $\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ٤ \Leftarrow \int_{-١}^{١} (\text{أ}\text{س} + \text{ب})\ \text{ءس} = ٤$

$\Leftarrow (\frac{\text{أ}}{٢}\text{س}^٢ + \text{ب}\text{س})\Big|_{-١}^{١} = ٤ \Leftarrow (\frac{\text{أ}}{٢} + \text{ب}) - (\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ب}) = ٤ \Leftarrow ٢\text{ب} = ٤ \Leftarrow \text{ب} = ٢$

∴ $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س} + ٢$

ولكن أيضاً $\int_{1}^{3}$ ق(س) ءس =٢ ⇐ $\int_{1}^{3}$(أس+٢) ءس =٢ ⇐ ($\frac{أ}{٢}$س^{٢}+٢س) $\Big|_{1}^{3}$ = ٢

⇐ (٩×$\frac{أ}{٢}$ +٦)−($\frac{أ}{٢}$ +٢) =٢ ⇐ ٤أ+٤ =٢ ⇐ ٤أ=−٢ ⇐ أ=−$\frac{١}{٢}$

∴ ق(س) =−$\frac{١}{٢}$س+٢

---

١٢)إذا كان ق(٢)=٧ ، ق(٦)=١٠ ، فجد قيمة $\int_{2}^{6}$(قَ(س)+٢) ءس؟

✍ **الحل**: $\int_{2}^{6}$(قَ(س)+٢) ءس =$\int_{2}^{6}$(قَ(س) ءس + $\int_{2}^{6}$٢ ءس = ق(س) $\Big|_{2}^{6}$ +٢(٦−٢)

⇐ ق(٦) − ق(٢) + ٨ = ١٠ − ٧ + ٨ = ١١

---

١٣)إذا كان $\int$(قتا^{٢}س − ظتا^{٢}س)ق(س) ءس = ٨ − قا^{٢}٦س ، فجد ق(س)؟

✍ **الحل**: $\int$(قتا^{٢}س − ظتا^{٢}س)ق(س) ءس = ٨ − قا^{٢}٦س ⇐ $\int$($\frac{١}{جا^{٢}س}$ − $\frac{جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}$)ق(س) ءس = ٨ − قا^{٢}٦س

⇐ $\int$ $\frac{١−جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}$ ق(س) ءس ⇐ $\int$ $\frac{جا^{٢}س}{جا^{٢}س}$ ق(س) ءس ⇐ $\int$ق(س) ءس = ٨ − قا^{٢}٦س

⇐ $\frac{ءص}{ءس}\int$ق(س) ءس = $\frac{ءص}{ءس}$(٨ − قا^{٢}٦س) ⇐ ق(س) = ١٢قا٦س× قا٦س ظا٦س

⇐ ق(س) = ١٢قا^{٢}٦س ظا٦س

✪ **خواص التكامل المحدود**:

✍ **خاصية(١)**: التكامل حول نقطة يساوي (صفر) دائماً ($\int_{أ}^{أ}$ق(س) ءس = صفر).

✍ **خاصية(٢)**: $\int_{أ}^{س}$ق(س) ءس = −$\int_{س}^{أ}$ ق(س) ءس

📖 **مثال**: إذا كان $\int_{1}^{5}$ق(س) ءس = ٣ ، فجد $\int_{5}^{1}$(٢ق(س)+٣) ءس؟

✍ **الحل**: $\int_{5}^{1}$(٢ق(س)+٣) ءس = $\int_{5}^{1}$٢ق(س) ءس + $\int_{5}^{1}$٣ ءس ءس = ٢ ×−٣ + ٣(١−٥)

$\Leftarrow -٦ - ١٢ = -١٨$

📖 **مثال**: إذا كان $\int_{٢}^{ب} (\text{ق}(س)-١)\ \text{دس} = ٨$ ، فجد $\int_{ب}^{٢} ٤\text{ق}(س)\ \text{دس}$؟

✍ **الحل**: $\int_{٢}^{ب} (\text{ق}(س)-١)\ \text{دس} \Leftarrow \int_{٢}^{ب} \text{ق}(س)\ \text{دس} - \int_{٢}^{ب} \text{دس} \Leftarrow \int_{٢}^{ب} \text{ق}(س)\ \text{دس} + ٢ = ٨$

$\Leftarrow \int_{٢}^{ب} \text{ق}(س)\ \text{دس} = ٦$ ، $\therefore \int_{ب}^{٢} ٤\text{ق}(س)\ \text{دس} \Leftarrow -٤\int_{٢}^{ب} \text{ق}(س)\ \text{دس} \Leftarrow -٤\times٦ \Leftarrow -٢٤$

📖 **مثال**: إذا كان $\int_{-٢}^{٢} (أ+\text{ق}(س))\ \text{دس} = ١٦$، وكان $\int_{٢}^{-٢} ٤\text{ق}(س)\ \text{دس} = ٨أ$، فجد قيمة الثابت أ ؟

✍ **الحل**: $\int_{-٢}^{٢} (أ+\text{ق}(س))\ \text{دس} \Leftarrow ٤أ + \int_{-٢}^{٢} \text{ق}(س)\ \text{دس} = ١٦$ ، **لكن** $\int_{٢}^{-٢} ٤\text{ق}(س)\ \text{دس} = ٨أ$

$\Leftarrow \int_{٢}^{-٢} \text{ق}(س)\ \text{دس} = ٢أ$ ، $\therefore ٤أ + \int_{-٢}^{٢} \text{ق}(س)\ \text{دس} \Leftarrow ٤أ - ٢أ = ١٦ \Leftarrow ٢أ = ١٦ \Leftarrow أ = ٨$

خاصية(٣): "خاصية الإضافة"

$$\int_{أ}^{ط} \text{ق}(ص)\ \text{دص} = \int_{أ}^{س} \text{ق}(ص)\ \text{دص} + \int_{س}^{ط} \text{ق}(ص)\ \text{دص}$$

☜ **أماكن استخدامها:**

١. **في حال إعطاء عدة تكاملات(تجزئة الفترة الكلية) لنفس الاقتران.**
٢. **في إيجاد تكامل الاقترانات المتشعبة.**

فمثلاً: $\int_{ب}^{٦} \text{ق}(س)\ \text{دس} = \int_{ب}^{٥} \text{ق}(س)\ \text{دس} + \int_{٥}^{٦} \text{ق}(س)\ \text{دس}$، أو $\int_{ب}^{٦} \text{ق}(س)\ \text{دس} = \int_{ب}^{٢} \text{ق}(س)\ \text{دس} + \int_{٢}^{٦} \text{ق}(س)\ \text{دس}$

📖 **مثال**: أوجد $\int_{١}^{٥} |٤-٢س|\ \text{دس}$

✍ **الحل**: $٤-٢س = ٠ \Leftarrow س = ٢$

$\therefore \int_{١}^{٥} |٤-٢س|\ \text{دس} = \int_{١}^{٢} (٤-٢س)\ \text{دس} + \int_{٢}^{٥} (٢س-٤)\ \text{دس} \Leftarrow (٤س-س^{٢})\Big|_{١}^{٢} + (س^{٢}-٤س)\Big|_{٢}^{٥}$

$\Leftarrow [(٨-٤)-(٤-١)] + [(٢٥-٢٠)-(٤-٨)] = ١ + ٩ = ١٠$

📖 **مثال**: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٦س - ٤ &، \quad ٠ \leqslant س \leqslant ٢ \\ |س^{٢} - ٩| &، \quad ٢ \leqslant س \leqslant ٤ \end{cases}$$

فجد كلاً مما يلي:

١) $\int_{٠}^{٣} ق(س) \, ءس$

٢) $\int_{٠}^{٤} ق(س) \, ءس$

✍ **الحل**:

١) $\int_{٠}^{٣} ق(س) \, ءس = \int_{٠}^{٢} ق(س) \, ءس + \int_{٢}^{٣} ق(س) \, ءس \Leftarrow \int_{٠}^{٢} (٦س - ٤) \, ءس + \int_{٢}^{٣} (٩ - س^{٢}) \, ءس$

$\Leftarrow (٣س^{٢} - ٤س) \Big|_{٠}^{٢} + (٩س - \frac{١}{٣}س^{٣}) \Big|_{٢}^{٣} = [(١٢ - ٨)] + [(٢٧ - ٩) - (١٨ - \frac{٨}{٣})]$

$\Leftarrow ٤ + \frac{٨}{٣} = \frac{٢٠}{٣}$

٢) $\int_{٠}^{٤} ق(س) \, ءس = \int_{٠}^{٣} ق(س) \, ءس + \int_{٣}^{٤} ق(س) \, ءس = \frac{٢٠}{٣} + \int_{٣}^{٤} (س^{٢} - ٩) \, ءس$

$\Leftarrow \frac{٢٠}{٣} + (\frac{١}{٣}س^{٣} - ٩س) \Big|_{٣}^{٤} = \frac{٢٠}{٣} + [(\frac{٦٤}{٣} - ٣٦) - (٩ - ٢٧)] = \frac{٢٠}{٣} - ٢٦ = -\frac{٥٨}{٣}$

📖 **مثال**: إذا كان $\int_{٢}^{٥} ق(س) \, ءس = ٦$ ، $\int_{٩}^{٥} ٣ق(س) \, ءس = ٩$، فجد $\int_{٩}^{٢} \frac{١}{٢}ق(س) \, ءس$؟

✍ **الحل**: $\int_{٩}^{٢} ق(س) \, ءس = \int_{٩}^{٥} ق(س) \, ءس + \int_{٥}^{٢} ق(س) \, ءس$ ،لكن $\int_{٩}^{٥} ٣ق(س) \, ءس = ٩$

$\Leftarrow \int_{٩}^{٥} ق(س) \, ءس = ٣$ وأيضاً $\int_{٥}^{٢} ق(س) \, ءس = -\int_{٢}^{٥} ق(س) \, ءس = -٦$

$\therefore \int_{٩}^{٢} ق(س) \, ءس = ٣ - ٦ = -٣ \Leftarrow \int_{٩}^{٢} \frac{١}{٢}ق(س) \, ءس = -\frac{٣}{٢}$

📖 **مثال**: إذا كان $\int_{٦}^{١} (٢س - ق(س)) \, ءس = ٨$ ، $\int_{١}^{٤} ٢ق(س) \, ءس = ٣$ ، فجد $\int_{٤}^{٦} (٣ق(س) - ٢) \, ءس$؟

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الحل:

☜ $\int_{6}^{1} (2\text{س} - \text{و}(\text{س}))\,\text{ءس} = 8 \Leftarrow -35 - \int_{6}^{1} \text{و}(\text{س})\,\text{ءس} = 8 \Leftarrow \int_{6}^{1} \text{و}(\text{س})\,\text{ءس} = -43$

☜ $\int_{1}^{4} 2\text{و}(\text{س})\,\text{ءس} = 3 \Leftarrow \int_{1}^{4} \text{و}(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{3}{2}$

$\therefore \int_{4}^{6} (3\text{و}(\text{س}) - 2)\,\text{ءس} = 3\int_{4}^{6} \text{و}(\text{س})\,\text{ءس} - 2\int_{4}^{6} \text{ءس} \Leftarrow 3\left[\int_{1}^{6} \text{و}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{1}^{4} \text{و}(\text{س})\,\text{ءس}\right] - 2(6-4)$

$\Leftarrow 3(-43 - \frac{3}{2}) - 4 = -\frac{249}{2} - 4 = \frac{241}{2}$

مثال: أوجد $\int_{1}^{7} [\frac{1}{2}\text{س} + 1]\,\text{ءس}$

الحل: **نجد طول الدرجة أولاً: ل = ٢ ،** ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢ ، ٠

$\int_{1}^{7} [\frac{1}{2}\text{س} + 1]\,\text{ءس} = \int_{1}^{2} \text{ءس} + \int_{2}^{4} 2\,\text{ءس} + \int_{4}^{6} 3\,\text{ءس} + \int_{6}^{7} 4\,\text{ءس} = 2+4+6+4 = 16$

مثال: أوجد $\int_{0}^{1} |\text{س}^2 - 4|\,\text{ءس}$

الحل: $\int_{0}^{1} |\text{س}^2 - 4|\,\text{ءس} = \int_{0}^{1} (4 - \text{س}^2)\,\text{ءس} = (4\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3)\Big|_{0}^{1} = (4 - \frac{1}{3}) = \frac{11}{3}$

مثال: أوجد $\int_{2}^{15} [6 - \frac{\text{س}}{5}]\,\text{ءس}$

الحل: ل = ٥ ، ١٥ ، ١٠ ، ٥ ، ٠

$\therefore \int_{2}^{15} [6 - \frac{\text{س}}{5}]\,\text{ءس} = \int_{2}^{5} 5\,\text{ءس} + \int_{5}^{10} 4\,\text{ءس} + \int_{10}^{15} 3\,\text{ءس} = 15 + 20 + 15 = 50$

مثال: أوجد $\int_{0}^{2} \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}\,\text{ءس}$؟

الحل: $\int_{0}^{2} \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}\,\text{ءس} = \int_{0}^{2} \sqrt{(\text{س}-1)(\text{س}-1)}\,\text{ءس} = \int_{0}^{2} \sqrt{(\text{س}-1)^2}\,\text{ءس}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$$\Leftarrow \int_{٠}^{٢} |\text{س}-١|\ \text{ءس} = \int_{٠}^{١} (١-\text{س})\ \text{ءس} + \int_{١}^{٢} (\text{س}-١)\ \text{ءس} \Leftarrow \left(\text{س}-\frac{\text{س}^٢}{٢}\right)\Big|_{٠}^{١} + \left(\frac{\text{س}^٢}{٢}-\text{س}\right)\Big|_{١}^{٢}$$

$$\Leftarrow \left(١-\tfrac{١}{٢}\right) + \left(٢+\tfrac{١}{٢}\right) = ٣$$

📖 **مثال**: إذا كان $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{ءس} - \int_{٤}^{٧} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \int_{٧}^{٩} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$ ، فجد قيمة م ،ب؟

✍ **الحل**: $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \int_{٤}^{٧} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{٧}^{٩} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \int_{٤}^{٩} \text{ق(س)}\ \text{ءس} \Leftarrow \text{م}=٤\ ،\ \text{ب}=٩$

📖 **مثال**: إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} |-٢\text{س}+٢| &،\ -٣ \leqslant \text{س} < ٢ \\ ٥ &،\ \text{س} = ٢ \\ \text{م} &،\ ٢ < \text{س} \leqslant ٥ \end{cases}$$

وكان $\int_{٠}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ٢٤$، فجد قيمة الثابت (م)؟

✍ **الحل**: $\int_{٠}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس} \Leftarrow \int_{٠}^{٢} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{٢}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ٢٤$

$$\Leftarrow \left[\int_{٠}^{١} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{١}^{٢} \text{ق(س)}\ \text{ءس}\right] + \int_{٢}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \left[\int_{٠}^{١} (٢-٢\text{س})\ \text{ءس} + \int_{١}^{٢} (٢\text{س}-٢)\ \text{ءس}\right]$$

$$+ \int_{٢}^{٤} \text{م}\ \text{ءس} = ٢٤ \Leftarrow \left[(٢\text{س}-\text{س}^٢)\Big|_{٠}^{١} + (\text{س}^٢-٢\text{س})\Big|_{١}^{٢}\right] + ٢\text{م} = ٢٤$$

$$\Leftarrow \left[١+(٠-(-١))\right] + ٢\text{م} = ٢٤ \Leftarrow \text{م} = ١٢$$

خاصية(٤): خاصية المقارنة

❖ **ملاحظات**:

١. إذا كان $\text{ق(س)} \geqslant ٠\ \forall \text{س} \in [\text{م}،\text{ب}]$ فإن $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{ءس} \geqslant ٠$

٢. إذا كان $\text{ق(س)} \leqslant ٠\ \forall \text{س} \in [\text{م}،\text{ب}]$ فإن $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{ءس} \leqslant ٠$

٣. إذا كان ق(س) $\geqslant$ م(س) ∀س ∈[أ،ب] فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس $\geqslant$ $\int_{أ}^{ب}$ م(س) ءس

٤. إذا كان ق(س) $\leqslant$ م(س) ∀س ∈[أ،ب] فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس $\leqslant$ $\int_{أ}^{ب}$ م(س) ءس

📖 **مثال:** دون إجراء التكامل أثبت ان $\int_{-٢}^{١} \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ + ١}$ ءس < ٠

✍ **الحل:** يجب أن نبحث إشارة الاقتران وذلك بدراسة إشارة كل من البسط والمقام على حدة.

☜ **البسط:** س^٢−٩ < ٠ ∀س ∈[−٢،١]

☜ **المقام:** س^٢+١ > ٠ ∀س ∈[−٢،١]

∴ $\frac{-}{+}$ < ٠ ⇐ $\int_{-٢}^{١} \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ + ١}$ ءس < ٠ **(حسب خاصية المقارنة)**

📖 **مثال:** دون إجراء التكامل أثبت أن $\int_{١}^{٢}$ س ءس $\leqslant$ $\int_{١}^{٢}$ س^٢ ءس

✍ **الحل:** س < س^٢ ، ∀س ∈[١،٢] ⇐ $\int_{١}^{٢}$ س ءس $\leqslant$ $\int_{١}^{٢}$ س^٢ ءس ، ∀س ∈[١،٢]

📖 **مثال:** مستخدماً خاصية المقارنة ، قارن بين المقدارين التاليين:

$\int_{١}^{٣} \frac{١}{س^٢}$ ءس ، $\int_{١}^{٣} \frac{١}{س}$ ءس

✍ **الحل:** س^٢ $\geqslant$ س ، ∀س ∈[١،٣]

$\frac{١}{س^٢}$ $\leqslant$ $\frac{١}{س}$ ، ∀س ∈[١،٣] ⇐ $\int_{١}^{٣} \frac{١}{س^٢}$ ءس $\leqslant$ $\int_{١}^{٣} \frac{١}{س}$ ءس

📖 **مثال**: إذا كان ق(س)$\geqslant$٤،∀س ∈[−٢،١]، أوجد أقل قيمة ممكنة للمقدار: $\int_{-٢}^{١}$ (٢ق(س)+٣) ءس.

✍ **الحل:** ق(س) $\geqslant$٤

٢ق(س) $\geqslant$ ٨

٢ق(س)+٣ $\geqslant$ ١١

∴ $\int_{-٢}^{١}$(٢ق(س)+٣) ءس $\geqslant$ $\int_{-٢}^{١}$ ١١ ءس = ٣٣ ⇐ **أقل قيمة ممكنة هي ٣٣**

📖 **مثال**: من دون إجراء التكامل قارن بين المقدارين الآتيين: $\int_{2}^{4}$(س^2+٥) ءس ، $\int_{2}^{4}$(س+٢) ءس.

✍ **الحل**: س^2 ⩾ س ، ∀س ∈[٢،٤]

س^2+٥ ⩾ س+٢ ، ∀س ∈[٢،٤] ⇐ $\int_{2}^{4}$(س^2+٥) ءس ⩾ $\int_{2}^{4}$(س+٢) ءس

📖 **مثال**: إذا كان م ⩽ $\int_{1}^{3}$ق(س) ءس ⩽ ن ، وكان $\frac{1}{2}$ ⩽ ق(س) ⩽٤، أوجد القيم م ، ن.

✍ **الحل**: $\frac{1}{2}$ ⩽ ق(س) ⩽٤ ⇐ $\int_{1}^{3}\frac{1}{2}$ ءس ⩽ $\int_{1}^{3}$ق(س) ءس ⩽ $\int_{1}^{3}$٤ ءس

⇐ ١ ⩽ $\int_{1}^{3}$ق(س) ءس ⩽ ٨ ، ∴ م = ١ ، ن = ٨

📖 **مثال**: إذا كان ١ ⩽ س ⩽ ٤، من دون إجراء التكامل أثبت أن: $\frac{1}{2}$ ⩽ $\int_{1}^{4}\frac{1}{س+2}$ ءس ⩽ ١.

✍ **الحل**: ١ ⩽ س ⩽ ٤ ⇐ ٣⩽ س+٢ ⩽ ٦ ⇐ $\frac{1}{3}$ ⩾ $\frac{1}{س+2}$ ⩾ $\frac{1}{6}$

$\int_{1}^{4}\frac{1}{3}$ ءس ⩾ $\int_{1}^{4}\frac{1}{س+2}$ ءس ⩾ $\int_{1}^{4}\frac{1}{6}$ ءس ⇐ ١ ⩾ $\int_{1}^{4}\frac{1}{س+2}$ ءس ⩾ $\frac{1}{2}$

❖ **ملاحظة: يمكن استخدام طريقة القيم القصوى في حال معرفة قاعدة الاقتران فقط.**

حل آخر للسؤال السابق:

ق(س) = $\frac{1}{س+2}$ ⇐ قَ(س) = $\frac{-1}{(س+2)^2}$ = ٠ ⇐ (س+٢)^2 = ٠ ⇐ س = −٢ ∉[١،٤]

∴ ق(١) = $\frac{1}{3}$ **(عظمى مطلقة)**

ق(٤) = $\frac{1}{6}$ **(صغرى مطلقة)**

∴ $\frac{1}{3}$ ⩾ $\frac{1}{س+2}$ ⩾ $\frac{1}{6}$ ⇐ $\int_{1}^{4}\frac{1}{3}$ ءس ⩾ $\int_{1}^{4}\frac{1}{س+2}$ ءس ⩾ $\int_{1}^{4}\frac{1}{6}$ ءس ⇐ ١ ⩾ $\int_{1}^{4}\frac{1}{س+2}$ ءس ⩾ $\frac{1}{2}$

📖 **مثال**: دون إجراء التكامل أثبت أن المقدار $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-س^2}$ ءس محصور بين ٠ ، ١٨.

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي

0779 909 516

✍ **الحل**: $ق(س) = \sqrt{9-س^2} \Leftarrow ق'(س) = \frac{-س}{\sqrt{9-س^2}} = 0$

$س = 0$ أو $\sqrt{9-س^2} = 0 \Leftarrow 9-س^2 = 0 \Leftarrow س^2 = 9 \Leftarrow س = \pm 3$

$ق(0) = 3$ **(عظمى مطلقة)** ، $ق(3) = ق(-3) = 0$ **(صغرى مطلقة)**

$\therefore 3 \geqslant ق(س) = \sqrt{9-س^2} \geqslant 0 \Leftarrow \int_{-3}^{3} 3 \, ءس \geqslant \int_{-3}^{3} \sqrt{9-س^2} \, ءس \geqslant 0$

$\Leftarrow 18 \geqslant \int_{-3}^{3} \sqrt{9-س^2} \, ءس \geqslant 0$

📖 **مثال**: إذا كان $1 \leqslant ق(س) \leqslant 5$ ، $\forall س \in [3،5]$ ، فجد أكبر وأصغر قيمة للمقدار التالي:

$\int_{3}^{5} (4-2س) \, ءس$؟

✍ **الحل**: نأخذ التكامل لجميع الحدود ، $\int_{3}^{5} 1 \, ءس \leqslant \int_{3}^{5} ق(س) \, ءس \leqslant \int_{3}^{5} 5 \, ءس$

$\Leftarrow 2 \leqslant \int_{3}^{5} ق(س) \, ءس \leqslant 10 \Leftarrow$ **أكبر قيمة هي 10 ، وأصغر قيمة هي 2**

📖 **مثال**: دون إجراء التكامل بين أن $\pi \leqslant \int (جتا^2 س+1) \, ءس \leqslant 2\pi$ ، $س \in [0،\pi]$؟

✍ **الحل**: $-1 \leqslant جتاس \leqslant 1 \Leftarrow 0 \leqslant جتاس \leqslant 1 \Leftarrow 0 \leqslant جتا^2 س \leqslant 1 \Leftarrow 1 \leqslant جتا^2 س + 1 \leqslant 2$

وبأخذ التكامل للأطراف ينتج أن: $\int_{0}^{\pi} ءس \leqslant \int_{0}^{\pi} (جتا^2 س+1) \, ءس \leqslant \int_{0}^{\pi} 2 \, ءس$

$\Leftarrow \pi \leqslant \int_{0}^{\pi} (جتا^2 س+1) \, ءس \leqslant 2\pi$

📖 **مثال**: إذا كان $ق(س) = جا^2 س$ ، $س \in [0،\pi]$، وكان $م \leqslant \int_{0}^{\pi} ق(س) \, ءس \leqslant ن-3$ ، حيث

$م،ن \in ص$ ، فجد قيمة كل من م ، ن؟

الحل: $-١ \leqslant$ جاس $\leqslant ١ \Leftarrow ٠ \leqslant$ جاس $\leqslant ١ \Leftarrow ٠ \leqslant$ جا^{٢}س $\leqslant ١$ ، وبأخذ التكامل للأطراف ينتج

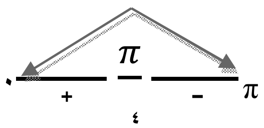
أن : $\int^{\pi} ٠$ ءس $\leqslant \int^{\pi}$ جا^{٢}س ءس $\leqslant \int^{\pi}$ ءس $\Leftarrow ٠ \leqslant \int^{\pi}$ جا^{٢}س ءس $\leqslant \pi$

$\Leftarrow$ م $= ٠$ ، ن$-٣ = \pi \Leftarrow$ ن $= \pi + ٣$

مثال: بين أن أكبر قيمة للمقدار $\int^{\pi}$(جتاس+جاس) ءس هي $\sqrt{٢}\,\pi$ ، وأصغر قيمة هي $-\pi$ ؟

الحل: لأن قاعدة الاقتران ق(س) معلومة فيمكننا أن نستخدم طريقة القيم القصوى لحل السؤال

جتاس − جاس = ٠ $\Leftarrow$ جاس = جتاس $\Leftarrow$ س $= \frac{\pi}{٤}$



ق$(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ (قيمة عظمى مطلقة)

ق$(٠) = ١$ (قيمة صغرى محلية).....للمقارنة فقط

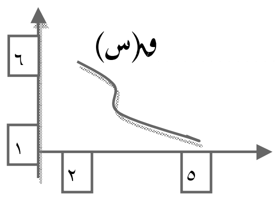
ق$(\pi) = -١$ (قيمة صغرى مطلقة)

$\therefore -١ \leqslant$ ق(س) $\leqslant \frac{٢}{\sqrt{٢}} \Leftarrow \int^{\pi}(-١)$ ءس $\leqslant \int^{\pi}$(جتاس+جاس) ءس $\leqslant \int^{\pi} \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ ءس

$\Leftarrow -\pi \leqslant \int^{\pi}$(جتاس+جاس) ءس $\leqslant \frac{٢\pi}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}\,\pi$

$\therefore$ أكبر قيمة هي $\sqrt{٢}\,\pi$ وأصغر قيمة هي $-\pi$.

مثال: اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، أثبت صحة العبارة الجبرية الآتية: $٣ \leqslant \int_{٢}^{٥}$ق(س) ءس $\leqslant ١٨$؟



الحل: $١ \leqslant$ ق(س) $\leqslant ٦ \Leftarrow \int_{٢}^{٥}$ ءس $\leqslant \int_{٢}^{٥}$ق(س) ءس $\leqslant \int_{٢}^{٥} ٦$ ءس $\Leftarrow ٣ \leqslant \int_{٢}^{٥}$ق(س) ءس $\leqslant ١٨$

مثال: دون إجراء التكامل أثبت أن $\int^{\pi/٢}$(٥جا^{٣}س-٣) $\leqslant \pi$ ؟

الحل: $-١ \leqslant$ جاس $\leqslant ١ \Leftarrow ٠ \leqslant$ جاس $\leqslant ١ \Leftarrow ٠ \leqslant$ جا^{٣}س $\leqslant ١ \Leftarrow ٠ \leqslant ٥$جا^{٣}س $\leqslant ٥$

$\Leftarrow -٣ \leqslant ٥\text{جا}^{٣}\text{س} - ٣ \leqslant ٢ \Leftarrow \int_{٠}^{\pi/٢} (-٣)\, \text{ءس} \leqslant \int_{٠}^{\pi/٢} (٥\text{جا}^{٣}\text{س} - ٣)\, \text{ءس} \leqslant \int_{٠}^{\pi/٢} ٢\, \text{ءس}$

$\Leftarrow -٣ \times \frac{\pi}{٢} \leqslant \int_{٠}^{\pi/٢} (٥\text{جا}^{٣}\text{س} - ٣)\, \text{ءس} \leqslant \pi$

☜ <u>**ملاحظة هامة**</u>: **نعرف سابقاً أن** $\int \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(\text{ق}(\text{س}))\, \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \int \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{ق}(\text{س})$ **، ولكن يجب الانتباه إلى أن** $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(\text{ق}(\text{س}))\, \text{ءس} \neq \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس}$ **، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتي:**

$\int_{٢}^{٣} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(٢\text{س} - ١)\, \text{ءس} = \int_{٢}^{٣} ٢\, \text{ءس} = ٢$**، بينما** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \int_{٢}^{٣} (٢\text{س} - ١)\, \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} (\text{س}^{٢} - \text{س}) \Big|_{٢}^{٣}$

$\Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(٤) = ٠$

أي أن ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ٠$ **دائماً**).

الدرس الرابع : الاقتران اللوغاريتمي والاقتران الأسي

أولاً: الاقتران اللوغاريتمي(مشتقته وتكامله)

قواعد الاقتران اللوغاريتمي:

١. لو١ = ٠

٢. $\text{لوص}^{ن} = \text{ن لوص}$ ، ن ∈ ص

٣. لو(س ص) = لوس + لوص

٤. $\text{لو}\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لوس} - \text{لوص}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي:

نظرية: إذا كان ق(س) = لوص ⟵ $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغاريتم}}{\text{ما داخل اللوغاريتم}}$.

مثال: أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلي:

١. ق(س) = لوس

٢. ق(س) = لو(٨س −٧)

٣. $\text{ق(س)} = \text{لو}(١١\text{جتا}^{٢}\,٣\text{س})$

الحل:

١) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

٢) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٨}{٨\text{س} - ٧}$

٣) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٦٦\ \text{جتا}\ ٣\text{س}\ \text{جا}\ ٣\text{س}}{١١\text{جتا}^{٢}\ ٣\text{س}} = \frac{-٦\ \text{جا}\ ٣\text{س}}{\text{جتا}\ ٣\text{س}} = -٦\text{ظا}٣\text{س}$.

استخدام اللوغاريتم في التكاملات:

قاعدة: $\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{ءس} = \text{لو}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$ ، **أي أنه (إذا كان البسط مشتقه للمقام فإن ناتج التكامل يكون دائماً يساوي (لو|المقام|)).**

مثال: أوجد $\int \frac{1}{س}$ ءس ؟

الحل: $\int \frac{1}{س}$ ءس = لو|س|+ج

مثال: أوجد $\int \frac{٥}{٥س - ١}$ ءس ؟

الحل: $\int \frac{٥}{٥س - ١}$ ءس = لو|٥س − ١|+ج

وبصورة عامة فإن: $\int \frac{ع}{مس + ب}$ ءس = $\int \frac{ع}{م\left(س + \frac{ب}{م}\right)}$ ءس = $\frac{ع}{م}$لو|س + $\frac{ب}{م}$|+ج

مثال: أوجد كل من التكاملات الآتية :

١. $\int \frac{٣}{٢س + ١}$ ءس ؟

الحل: $\int \frac{٣}{٢س + ١}$ ءس = ٣ $\int \frac{ءس}{٢\left(س + \frac{١}{٢}\right)}$ = $\frac{٣}{٢}$لو|س + $\frac{١}{٢}$|+ج

---

٢. $\int \frac{٧}{٥ - س}$ ءس ؟

الحل: $\int \frac{٧}{٥ - س}$ ءس = −٧لو|٥−س|+ج

---

٣. $\int \frac{١}{س}$ ءس ، س ∈ [هـ ، هـ^{٧}] ؟

الحل: $\int \frac{١}{س}$ ءس = لو|س| ، س ∈[هـ ، هـ^{٧}] ⇐ لوهـ^{٧} − لوهـ = ٧لوهـ − ١ = ٧−١ = ٦

---

٤. $\int \frac{س}{س^{٢} + ٣}$ ءس ؟

✍ **الحل**: $\int \frac{س}{س^2+3}\,ءس \Leftarrow \int \frac{\frac{1}{2}\times 2س}{س^2+3}\,ءس \Leftarrow \frac{1}{2}$ لو$|س^2+3|+ج$

❖ **ملاحظة**: **الاقترانات (قاس ، قتاس ، ظاس ، ظتاس) تحل باستخدام اللوغاريتم.**

📖 **مثال**: أوجد كل من التكاملات الآتية :

١. $\int$ ظتاس ءس $\Leftarrow \int \frac{جتاس}{جاس}$ ءس $\Leftarrow$ لو|جاس|+ج

٢. $\int$ قاس ءس $\Leftarrow \int$ قاس $\times \frac{ظاس+قاس}{ظاس+قاس}$ ءس $\Leftarrow \int \frac{ظاس\ قاس+قا^2س}{ظاس+قاس}$ ءس $\Leftarrow$ لو|ظاس+قاس|+جـ

٣. $\int \frac{جا\ 3س}{1-جتا\ 3س}$ ءس $\Leftarrow \frac{1}{3}$ لو|١-جتا٣س|+ج

٤. $\int \frac{جتا\ 2س}{جاس\ جتاس}$ ءس $\Leftarrow \int \frac{جتا\ 2س}{\frac{1}{2}جا\ 2س}$ ءس $\Leftarrow$ ٢لو|جا٢س|+ج

٥. $\int \frac{3+3ظا^2س}{ظاس}$ ءس $\Leftarrow \int \frac{3(1+ظا^2س)}{ظاس}$ ءس $\Leftarrow 3\int \frac{قا^2س}{ظاس}$ ءس $\Leftarrow$ ٣لو|ظاس| + جـ

٦. $\int$ قتاس ءس $\Leftarrow \int$ قتاس $\times \frac{قتاس-ظتاس}{قتاس-ظتاس}$ ءس $\Leftarrow \int \frac{قتا^2س-قتاس\ ظتاس}{قتاس-ظتاس}$ ءس $\Leftarrow$ لو|قتاس − ظتاس| + جـ

ثانياً: الاقتران الأسي(مشتقته وتكامله)

الصورة العامه للاقتران الأسي: ق(س) = $هـ^{م(س)}$

❖ **نظرية:** لو$هـ^{م(س)}$ = $هـ^{لوم(س)}$ = م(س)

☜ **البرهان**: ص = $هـ^{م(س)}$ **... وبأخذ اللوغاريتم للطرفين ينتج أن :**

لوص = لو$هـ^{م(س)}$ $\Leftarrow$ لوص = م(س) **... وبالاشتقاق الضمني ينتج أن:** $\frac{\frac{ءص}{ءس}}{ص}$ = مَ(س)

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س)×ص $\Leftarrow \frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س)×$هـ^{م(س)}$

مثال: أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلي:

١. $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٥س}}$

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٥ هـ}^{\text{٥س}}$

---

٢. $\text{ص} = \text{هـ}^{(\text{س}^{٢}-\text{٧س}+٤)}$

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{٢س}-٧) \times \text{هـ}^{(\text{س}^{٢}-\text{٧س}+٤)}$

---

٣. $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{هـ}^{\text{جاس}}}$

الحل: $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{جاس}})^{\frac{١}{٣}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٣}(\text{هـ}^{\text{جاس}})^{\frac{-٢}{٣}} \times \text{جتاس}$

---

٤. $\text{ص} = ٢^{\text{٣س}}$ ، $\text{س} = \frac{١}{٣}$

الحل: **دائماً نأخذ اللوغاريتم للطرفين في مثل هذه الحالة كما يلي:**

$\text{لوص} = \text{لو}٢^{\text{٣س}} \Leftarrow \text{لوص} = \text{٣س} \times \text{لو}٢$ ... وبالاشتقاق الضمني ينتج أن:

$\frac{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}{\text{ص}} = \text{٣لو}٢ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣لو}٢ \times \text{ص} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣لو}٢ \times ٢^{\text{٣س}}$

$\therefore \left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=\frac{١}{٣}} = \text{٢٤لو}٢$

---

٥. $\text{هـ}^{\text{ص}^{٢}} = \text{٥س}+١$

الحل: $\text{٢ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥}{\text{٢ص} \times \text{هـ}^{\text{ص}^{٢}}}$

---

٦. $\text{ص} = ٤^{(\text{س}^{٢}+\text{٣س})}$

الحل: $\text{لوص} = \text{لو}٤^{(\text{س}^{٢}+\text{٣س})} \Leftarrow \text{لوص} = (\text{س}^{٢}+\text{٣س}) \times \text{لو}٤ \Leftarrow \frac{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}{\text{ص}} = \text{لو}٤ \times (\text{٢س}+٣)$

$\Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}٤ \times (\text{٢س}+٣) \times \text{ص} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}٤ \times (\text{٢س}+٣) \times (٤^{(\text{س}^{٢}+\text{٣س})})$

٧. **إذا كان ص = أ$^{ق(س)}$ ، أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ص×لوأ×قَ(س)**

✍ **الحل**: نأخذ اللوغاريتم للطرفين: لوص = لوأ$^{ق(س)}$ ⇐ لوص = ق(س)×لوأ

⇐ $\frac{\frac{ءص}{ءس}}{ص}$ = قَ(س)×لوأ ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = قَ(س)×لوأ×ص

---

٨. أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ص = (١− س)× هـ^{س} +٣لوس+٢ ، عندما س = ١؟

✍ **الحل**: نقطة التماس هي (١ ، ق(١)) = (١ ، ٢) ، ولإيجاد الميل نشتق المعادلة:

$\frac{ءص}{ءس}$ = (١− س)× هـ^{س} + هـ^{س} ×(−١) +$\frac{٣}{س}$ ⇐ $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س=١}$ = ٠ − هـ + ٣ = ٣ − هـ

∴ معادلة المماس هي: ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

⇐ ص − ٢ = (٣ − هـ) (س − ١) ⇐ ص = (٣ − هـ) (س − ١) + ٢

---

٩. **إذا كان هـ$^{س ص}$ = س+ص، أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١-س ص- ص^{٢}}{س^{٢}+ س ص- ١}$**

✍ **الحل**: (س×صَ +ص×١)× هـ$^{س ص}$ = ١+صَ ⇐ س صَ ×هـ$^{س ص}$ +ص هـ$^{س ص}$ = ١+صَ

⇐ س صَ ×هـ$^{س ص}$ − صَ = ١ − ص هـ$^{س ص}$ ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$(س× هـ$^{س ص}$ − ١) = ١ − ص هـ$^{س ص}$

⇐ $\frac{ءص}{ءس}$(س(س+ص) − ١) = ١ − ص(س+ص) ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١-س ص- ص^{٢}}{س^{٢}+ س ص- ١}$

---

١٠. إذا كان ص = هـ^{أس} ، أ∈ ح$^{+}$، فجد قيمة الثابت (أ) بحيث أن صً−صَ−٦ص=٠؟

✍ **الحل**: صَ = أ × هـ^{أس} ⇐ صً = أ^{٢}× هـ^{أس}

∴ أ^{٢}× هـ^{أس} − أ × هـ^{أس} −٦ هـ^{أس} =٠ ⇐ هـ^{أس} (أ^{٢}−أ−٦) = ٠ ⇐ أ^{٢} − أ −٦ = ٠

(لاحظ أن هـ^{أس} >٠ دائماً).

أ^{٢} − أ −٦ = ٠ ⇐ (أ−٣)(أ+٢) = ٠ ⇐ أ = ٣ ، أ = −٢

تكامل الاقتران الأسي :

قاعدة: $\int هـ^{م(س)} \, ءس = \frac{هـ^{م(س)}}{م'(س)} + جـ$

مثال: أوجد كل من التكاملات الآتية :

١) $\int ١١ هـ^{س} \, ءس \Leftarrow ١١ هـ^{س} + جـ$

٢) $\int هـ^{(٢س+٣)} \, ءس \Leftarrow \frac{١}{٢} \times هـ^{(٢س+٣)} + جـ$

٣) $\int هـ^{(٩جا٢س - ٤)} \, ءس \Leftarrow \frac{هـ^{(٩ جا ٢س - ٤)}}{١٨ \text{ جتا } ٢س} + جـ$

٤) $\int (٢هـ^{٢س} + س - \frac{٢}{س}) \, ءس \Leftarrow هـ^{٢س} + \frac{١}{٢}س^٢ - ٢لو|س| + جـ$

٥) $\int \sqrt{هـ^{س}} \, ءس \Leftarrow \int (هـ)^{\frac{١}{٢}س} \, ءس \Leftarrow ٢ (هـ)^{\frac{١}{٢}س} + جـ$

٦) $\int \frac{هـ^{س} + ٤}{هـ^{س}} \, ءس \Leftarrow \int (\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} + \frac{٤}{هـ^{س}}) \, ءس \Leftarrow \int (١ + ٤هـ^{-س}) \, ءس \Leftarrow س - ٤هـ^{-س} + جـ$

٧) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ٤} \, ءس \Leftarrow لو|هـ^{س} + ٤| + جـ$

٨) $\int ٤س \, هـ^{لوس^٢} \, ءس \Leftarrow \int ٤س \times س^٢ \, ءس \Leftarrow ٤ \int س^٣ \, ءس \Leftarrow س^٤ + جـ$

0779 909 516

الدرس الخامس : التكامل باستخدام التعويض

☜ **يستخدم التعويض في التكامل في حال وجود علاقة بين اقترانين داخل التكامل.**

❖ **ملاحظة (هامة): دائماً نفرض المقدار صاحب المشكلة الأكبر.**

📖 **الأمثلة**: حل كل من التكاملات الآتية :

١) $\int$ س^{٢}(س^{٣}+٥)^{٥} ءس

✍ **الحل**: **كما نلاحظ أن المقدار (س^{٣}+٥)^{٥} هو صاحب المشكلة الأكبر في التكامل ، إذن نقوم بفرضه ودائماً يكون الفرض بدون القوة:** ص = س^{٣}+٥ ⟵ ءص = ٣س^{٢} ءس ⟵ ءس = $\frac{ءص}{٣س^{٢}}$

∴ $\int$ س^{٢}(س^{٣}+٥)^{٥} ءس = $\int$ س^{٢}×ص^{٥}×$\frac{ءص}{٣س^{٢}}$ = $\frac{١}{٣}\int$ ص ءص = $\frac{١}{٦}$ص^{٢} + جـ

---

٢) $\int \frac{٤-٦س^{٢}}{(س^{٣}-٢س+٧)^{٣}}$ ءس

✍ **الحل**: ص = س^{٣}−٢س+٧ ⟵ ءص = (٣س^{٢}−٢) ءس ⟵ ءس = $\frac{ءص}{(٣س^{٢}-٢)}$

⇐ $\int \frac{٤-٦س^{٢}}{(س^{٣}-٢س+٧)^{٣}}$ ءس ⇐ $\int \frac{٢(٢-٣س^{٢})}{ص^{٣}}$ × $\frac{ءص}{(٣س^{٢}-٢)}$ ⇐ −٢ $\int \frac{ءص}{ص^{٣}}$ ⇐ −٢ $\int$ ص$^{-٣}$ ءص

⇐ $\frac{-٢}{-٢}$ص$^{-٢}$ + جـ ⇐ (س^{٣}−٢س+٧)$^{-٢}$ + جـ

---

٣) $\int \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+٩}}$ ءس

✍ **الحل**: ص = س^{٢}+٩ ⟵ ءص = ٢س ءس ⟵ ءس = $\frac{ءص}{٢س}$

$\text{س}=٠ \longrightarrow \text{ص}=٩$ ، $\text{س}=٤ \longrightarrow \text{ص}=٢٥$

$$\int_{٠}^{٤} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٩}}\,\text{ءس} \Leftarrow \int_{٩}^{٢٥} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} \Leftarrow \frac{١}{٢}\int_{٩}^{٢٥} \frac{\text{ءص}}{\sqrt{\text{ص}}} \Leftarrow \frac{١}{٢}\int_{٩}^{٢٥} \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءص} \Leftarrow \sqrt{\text{ص}}\,\Big|_{٩}^{٢٥} = \sqrt{٢٥} - \sqrt{٩}$$

$\Leftarrow ٥ - ٣ = ٢$

---

٤) $\int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس}$

✍ **الحل**: $\text{ص} = \text{س}^{٢}+١ \longrightarrow \text{ءص} = ٢\text{س}\ \text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

$$\int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} \Leftarrow \int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} \Leftarrow \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٢}\sqrt{\text{ص}}\ \text{ءص}$$

لكن $\text{ص} = \text{س}^{٢}+١ \longrightarrow \text{ص} - ١ = \text{س}^{٢}$

$$\therefore \frac{١}{٢}\int (\text{ص}-١)\sqrt{\text{ص}}\ \text{ءص} \Leftarrow \frac{١}{٢}\int (\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} - \text{ص}^{\frac{١}{٢}})\ \text{ءص} \Leftarrow \frac{١}{٢}\left[\frac{٢}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\right] + \text{جـ}$$

---

٥) $\int \frac{\text{م}\ \text{مَ}}{\sqrt{١+\text{م}^{٢}}}\ \text{ءس}$

✍ **الحل**: $\text{ص} = ١+\text{م}^{٢} \longrightarrow \text{ءص} = ٢\text{م}\times\text{مَ}\ \text{ءم} \longrightarrow \text{ءم} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{م}\times\text{مَ}}$

$$\therefore \int \frac{\text{م}\ \text{مَ}}{\sqrt{١+\text{م}^{٢}}}\ \text{ءم} \Leftarrow \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءص} \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} + \text{جـ}$$

---

٦) إذا كانت٢٥ق(س) ءس = ٨ ، فجد قيمة $\int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\text{ق}(\text{س}^{٣}+٢)\ \text{ءس}$؟

✍ **الحل**: $\text{ص} = \text{س}^{٣}+٢ \longrightarrow \text{ءص} = ٣\text{س}^{٢}\ \text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣\text{س}^{٢}}$

$\text{س} = ٠ \longrightarrow \text{ص} = ٢$ ، $\text{س} = ١ \longrightarrow \text{ص} = ٣$

$$\int_{1}^{2} س^2 و(س^3+2)\ ءس = \int_{3}^{10} س^2 و(ص) \times \frac{ءص}{3س^2} \Leftarrow \frac{1}{3}\int_{3}^{10} و(ص)\ ءص = \frac{8}{5}$$

---

٧) $\int \frac{قَ\left(\frac{1}{س}\right)}{س^2}\ ءس$

✍ **الحل**: $ص = \frac{1}{س} \longrightarrow ءص = \frac{-1}{س^2}\ ءس \longrightarrow ءس = -س^2\ ءص$

$$\therefore \int \frac{قَ\left(\frac{1}{س}\right)}{س^2}\ ءس = \int \frac{قَ(ص)}{س^2} \times -س^2\ ءص \Rightarrow -\int قَ(ص)\ ءص \Rightarrow -ق(ص) = -ق\left(\frac{1}{س}\right) + جـ$$

---

٨) $\int \sqrt{س^4+س^2}\ ءس$ ، $س > 0$

✍ **الحل**: $\int \sqrt{س^4+س^2}\ ءس = \int \sqrt{س^2(س^2+1)}\ ءس \Leftarrow \int \sqrt{س^2} \times \sqrt{س^2+1}\ ءس$

$$\Leftarrow \int |س| \times \sqrt{س^2+1}\ ءس \Leftarrow \int س\sqrt{س^2+1}\ ءس$$

$ص = س^2 + 1 \longrightarrow ءص = 2س\ ءس \longrightarrow ءس = \frac{ءص}{2س}$

$$\therefore \int س\sqrt{س^2+1}\ ءس = \int س\sqrt{ص} \times \frac{ءص}{2س} \Leftarrow \frac{1}{2}\int ص^{\frac{1}{2}}\ ءص \Leftarrow \frac{1}{3}\sqrt{ص^3} + جـ$$

---

٩) $\int \frac{(س+1)^5}{س^7}\ ءس$

✍ **الحل**: يجب توحيد القوة للمقادير دائماً في مثل هذه الأسئلة:

$$\int \frac{(س+1)^5}{س^7}\ ءس = \int \frac{(س+1)^5}{س^5} \times \frac{1}{س^2}\ ءس \Leftarrow \int \left(\frac{س+1}{س}\right)^5 \times \frac{1}{س^2}\ ءس \Leftarrow \int \left(1+\frac{1}{س}\right)^5 \times \frac{1}{س^2}\ ءس$$

$ص = ١ + \frac{١}{س} \longleftarrow ءص = \frac{-١}{س^٢} ءس \longleftarrow ءس = - س^٢ ءص$

$\therefore \int (١ + \frac{١}{س})^٥ \times \frac{١}{س^٢} ءس = \int ص^٥ \times \frac{١}{س^٢} \times - س^٢ ءص \Leftarrow - \int ص^٥ ءص \Leftarrow - \frac{ص^٦}{٦} + جـ$

---

١٠) $\int \frac{(س-١)^{\frac{٣}{٢}}}{س^{\frac{٧}{٢}}} ءس$

✍ **الحل**: $\int \frac{(س-١)^{\frac{٣}{٢}}}{س^{\frac{٧}{٢}}} ءس = \int \frac{(س-١)^{\frac{٣}{٢}}}{س^{\frac{٣}{٢}}} \times \frac{١}{س^٢} ءس \Leftarrow \int (\frac{س-١}{س})^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{س^٢} ءس \Leftarrow$

$\int (١ - \frac{١}{س})^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{س^٢} ءس$ ، $ص = ١ - \frac{١}{س} \longleftarrow ءص = \frac{١}{س^٢} ءس \longleftarrow ءس = س^٢ ءص$

$\therefore \int (١ - \frac{١}{س})^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{س^٢} ءس \Leftarrow \int ص^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{س^٢} \times س^٢ ءص \Leftarrow \int ص^{\frac{٣}{٢}} ءص \Leftarrow \frac{٢}{٥} \times ص^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

---

١١) $\int س(س-١)^{-١} ءس$

✍ **الحل**: $ص = س-١ \longleftarrow ءص = ءس$ ، لكن $س = ص+١$

$\therefore \int س(س-١)^{-١} ءس = \int (ص+١) \times ص^{-١} ءص \Leftarrow \int (١ + \frac{١}{ص}) ءس \Leftarrow ص + لو|ص| + جـ$

$\Leftarrow س-١ + لو|س-١| + جـ$

---

١٢) $\int س^٣(س^٢+١)^٨ ءس$

✍ **الحل**: $ص = س^٢+١ \longleftarrow ءص = ٢س ءس \longleftarrow ءس = \frac{ءص}{٢س}$ ، لكن $س^٢ = ص-١$

∴ $\int$ س^{٣}(س^{٢}+١)^{٨} ءس = $\int$ س^{٣}×ص^{٨}×$\frac{ءص}{٢س}$ ⇐ $\frac{١}{٢}\int$ س^{٢}ص^{٨} ءص ⇐ $\frac{١}{٢}\int$(ص−١)ص^{٨} ءص

⇐ $\frac{١}{٢}\int$(ص^{٩}−ص^{٨}) ءص ⇐ $\frac{١}{٢}\left[\frac{ص^{١٠}}{١٠} - \frac{ص^{٩}}{٩}\right]$ + جـ

---

١٣) $\int$ س^{٦}(١− $\frac{١}{س}$)^{٥} ءس

✍ **<u>الحل</u>**: $\int$ س^{٦}(١− $\frac{١}{س}$)^{٥} ءس = $\int$ س×س^{٥}(١− $\frac{١}{س}$)^{٥} ءس ⇐ $\int$ س (س(١−$\frac{١}{س}$))^{٥} ءس

⇐ $\int$ س(س−١)^{٥} ءس ، ص = س−٥ ⟵ ءص = ءس ، لكن س = ص+٥

∴ $\int$ س(س−١)^{٥} ءس = $\int$ س ص^{٥} ءص ⇐ $\int$(ص+٥)ص^{٥} ءص ⇐ $\int$(ص^{٦}+٥ص^{٥}) ءص

⇐ $\frac{ص^{٧}}{٧}$ + $\frac{٥}{٦}$ص^{٦} + جـ = $\frac{١}{٧}$(س−٥)^{٧}+ $\frac{٥}{٦}$(س−٥)^{٦} + جـ

---

١٤) $\int$ س^{٢}قا^{٢}(س^{٣}−١) ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ص = س^{٣}−١ ⟵ ءص = ٣س^{٢} ءس ⟵ ءس = $\frac{ءص}{٣س^{٢}}$

∴ $\int$ س^{٢}قا^{٢}(س^{٣}−١) ءس = $\int$ س^{٢}قا^{٢}ص × $\frac{ءص}{٣س^{٢}}$ ⇐ $\frac{١}{٣}\int$ قا^{٢}ص ءص ⇐ $\frac{١}{٣}$ظاص+جـ = $\frac{١}{٣}$ظا(س^{٣}−١)+جـ

---

١٥) $\int \frac{١}{س}$ جا(لوس) ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ص = لوس ⟵ ءص = $\frac{١}{س}$ ءس ⟵ ءس = س ءص

∴ $\int \frac{١}{س}$ جا(لوس) ءس = $\int \frac{١}{س}$ جاص×س ءص ⇐ $\int$ جاص ءص ⇐ − جتاص + جـ

$\Leftarrow -\text{جتا}(\text{لو}\,\text{س}) + \text{ج}$

١٦) $\displaystyle\int \frac{\text{س}\,\text{ظا}^2\left(\sqrt{\text{س}^2+1}\right)}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\,\text{ءس}$

✍ **الحل**: $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2+1} \longrightarrow \text{ءص} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}\,\text{ءص}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{\text{س}\,\text{ظا}^2\left(\sqrt{\text{س}^2+1}\right)}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{س}\,\text{ظا}^2\text{ص}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}\,\text{ءص} \Leftarrow \int \text{ظا}^2\text{ص}\,\text{ءص} \Leftarrow \int (\text{قا}^2\text{ص} - 1)\,\text{ءص}$

$\Leftarrow \text{ظاص} + \text{ص} + \text{ج} = \text{ظا}\left(\sqrt{\text{س}^2+1}\right) + \sqrt{\text{س}^2+1} + \text{ج}$

---

١٧) $\displaystyle\int \text{جا}^3\text{س}\,\text{جتاس}\,\text{ءس}$

✍ **الحل**: $\text{ص} = \text{جاس} \longrightarrow \text{ءص} = \text{جتاس}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$\therefore \displaystyle\int \text{جا}^3\text{س}\,\text{جتاس}\,\text{ءس} = \int \text{ص}^3\,\text{جتاس} \times \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} \Leftarrow \int \text{ص}^3\,\text{ءص} \Leftarrow \frac{1}{4}\text{ص}^4 + \text{ج} = \frac{1}{4}\text{جا}^4\text{س} + \text{ج}$

---

١٨) $\displaystyle\int (\text{س}+1)\,\text{هـ}^{(\text{س}^2+2\text{س})}\,\text{ءس}$

✍ **الحل**: $\text{ص} = \text{س}^2 + 2\text{س} \longrightarrow \text{ءص} = (2\text{س}+2)\,\text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{(2\text{س}+2)}$

$\therefore \displaystyle\int (\text{س}+1)\,\text{هـ}^{(\text{س}^2+2\text{س})}\,\text{ءس} = \int (\text{س}+1)\,\text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{(2\text{س}+2)} \Leftarrow \frac{1}{2}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} \Leftarrow \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

---

١٩) $\displaystyle\int \text{جا}2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

✍ **الحل**: $\text{ص} = \text{جا}^2\text{س} \longrightarrow \text{ءص} = 2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}$

لكن $\displaystyle\int \text{جا}2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس} = \int 2\,\text{جاس}\,\text{جتاس} \times \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}} \Leftarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

⇐ هـ$^{\text{جا}^{2}\text{س}}$ + ج

---

٢٠) $\int$ جا^{6}س جا٢س ءس

✍ **<u>الحل</u>**: $\int$ جا^{6}س جا٢س ءس = $\int$ جا^{6}س(٢ جاس جتاس) ءس ⇐ ٢ $\int$ جا^{7}س جتاس ءس

ص = جاس ⟵ ءص = جتاس ءس ⟵ ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

∴ ٢ $\int$ جا^{7}س جتاس ءس = ⇐ ٢ $\int$ ص^{7} جتاس × $\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$ ⇐ ⇐ ٢ $\int$ ص^{7} ءص ⇐ $\frac{2}{8}$ ص^{8} + ج

⇐ $\frac{1}{4}$ جا^{8}س + ج

---

٢١) $\int \frac{\text{جا}^{2}\frac{\text{س}}{2}}{(\text{٢س} - \text{٢ جا س})^{3}}$ ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ص = ٢س − ٢ جاس ⟵ ءص = (٢ − ٢ جتاس) ءس ⟵ ءس = $\frac{\text{ءص}}{2(1 - \text{جتاس})}$

∴ $\int \frac{\text{جا}^{2}\frac{\text{س}}{2}}{(\text{٢س} - \text{٢ جا س})^{3}}$ ءس = $\frac{1}{4} \int \frac{(1 - \text{جتا س})}{\text{ص}^{3}} \times \frac{\text{ءص}}{(1 - \text{جتاس})}$ ⇐ $\frac{1}{4} \int$ ص$^{-3}$ ءص ⇐ $\frac{-1}{8}$ ص$^{-2}$ + ج

⇐ $\frac{-1}{8}$(٢س − ٢ جاس)$^{-2}$ + ج

---

٢٢) $\int \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جتا}^{4}\text{س}}$ ءس

✍ **<u>الحل</u>**: $\int \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جتا}^{4}\text{س}}$ ءس = $\int \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}(1 - \text{جتا}^{2}\text{س})}$ ءس ⇐ $\int \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س} \times \text{جا}^{2}\text{س}}$ ءس

⇐ ٢ $\int \frac{1}{\text{جا}^{2}\text{٢ س}}$ ءس ⇐ ٢ $\int$ قا^{2} ٢س ءس ⇐ ظا٢س + ج

٢٣) $\int \text{جا}^{٣}\text{س جتا}^{٣}\text{س ءس}$

✍ **الحل**: $\int \text{جا}^{٣}\text{س جتا}^{٣}\text{س ءس} = \int \text{جا}^{٢}\text{س جاس جتا}^{٣}\text{س ءس} \Leftarrow \int (١-\text{جتا}^{٢}\text{س})\text{جتا}^{٣}\text{س جاس ءس}$

$\Leftarrow \int \text{جاس}(\text{جتا}^{٣}\text{س} - \text{جتا}^{٥}\text{س})\text{ ءس}$ ، $\text{ص} = \text{جتاس} \longleftarrow \text{ءص} = -\text{جاس ءس} \longleftarrow \text{ءس} = \frac{-\text{ءص}}{\text{جاس}}$

$\Leftarrow \int \text{جاس}(\text{ص}^{٣}-\text{ص}^{٥})\times\frac{-\text{ءص}}{\text{جاس}} \Leftarrow -\int(\text{ص}^{٣}-\text{ص}^{٥})\text{ ءص} \Leftarrow -(\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}-\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}) + \text{ج}$

$\Leftarrow \frac{\text{جتا}^{٦}\text{س}}{٦} - \frac{\text{جتا}^{٤}\text{س}}{٤} + \text{ج}$

---

٢٤) $\int \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س ءس}$

✍ **الحل**: $٢\text{جاس جتاس} = \text{جا٢س} \Leftarrow ٤\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س} = \text{جا}^{٢}\text{٢س} \Leftarrow \frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س} = \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}$

$\therefore \int \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س ءس} = \int \frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س ءس} \Leftarrow \frac{١}{٤}\int\frac{١}{٢}(١-\text{جتا٤س})\text{ ءس} \Leftarrow \frac{١}{٨}(\text{س}-\frac{١}{٤}\text{جا٤س})+\text{ج}$

طريقة أخرى:

$\int \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س ءس} = \int\frac{١}{٢}(١-\text{جتا٢س})\times\frac{١}{٢}(١+\text{جتا٢س})\text{ ءس} \Leftarrow \frac{١}{٤}\int(١-\text{جتا}^{٢}\text{٢س})\text{ ءس}$

$\Leftarrow \frac{١}{٤}\int\text{جا}^{٢}\text{٢س ءس} \Leftarrow \frac{١}{٤}\int\frac{١}{٢}(١-\text{جتا٤س})\text{ ءس} \Leftarrow \frac{١}{٨}(\text{س}-\frac{١}{٤}\text{جا٤س})+\text{ج}$

---

٢٥) $\int \text{قتا}^{٧}\text{س ظتاس ءس}$

✍ **الحل**: $\text{ص} = \text{قتاس} \longleftarrow \text{ءص} = -\text{قتاس ظتاس ءس} \longleftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{ظتاس قتاس}} = \frac{-\text{ءص}}{\text{ص}\times\text{ظتا س}}$

$\therefore \int \text{قتا}^{٧}\text{س ظتاس ءس} = \int \text{ص}^{٧}\text{ظتاس}\times\frac{-\text{ءص}}{\text{ص}\times\text{ظتا س}} \Leftarrow -\int\text{ص}^{٦}\text{ ءص} \Leftarrow -\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}+\text{ج}$

٢٦) $\int \text{قا}^{6}\text{س}\ \text{ءس}$

✍ **<u>الحل</u>**: $\int \text{قا}^{6}\text{س}\ \text{ءس} = \int \text{قا}^{4}\text{س}\times\text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ءس} \Leftarrow \int (1+\text{ظا}^{2}\text{س})^{2}\times\text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ءس}$

$$\text{ص} = \text{ظاس} \longrightarrow \text{ءص} = \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$$

$$\therefore \int (1+\text{ظا}^{2}\text{س})^{2}\times\text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ءس} = \Leftarrow \int (1+\text{ص}^{2})^{2}\times\text{قا}^{2}\text{س}\times\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}} \Leftarrow \Leftarrow \int (1+2\text{ص}^{2}+\text{ص}^{4})\ \text{ءص}$$

$$\Leftarrow \text{ص} + \frac{2}{3}\text{ص}^{3} + \frac{\text{ص}^{5}}{5} + \text{جـ} = \text{ظاس} + \frac{2}{3}\text{ظا}^{3}\text{س} + \frac{1}{5}\text{ظا}^{5}\text{س} + \text{جـ}$$

---

٢٧) $\int \text{ظا}^{3}\text{س}\ \text{قا}^{5}\text{س}\ \text{ءس}$

✍ **<u>الحل</u>**: $\int \text{ظا}^{3}\text{س}\ \text{قا}^{5}\text{س}\ \text{ءس} = \int \text{ظاس قاس}\times\text{ظا}^{2}\text{س}\ \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ءس} \Leftarrow \int \text{ظاس قاس}\times(\text{قا}^{2}\text{س}-1)\ \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ءس}$

$$\Leftarrow \int \text{ظاس قاس}(\text{قا}^{6}\text{س}-\text{قا}^{4}\text{س})\ \text{ءس} \quad ، \quad \text{ص} = \text{قاس} \longrightarrow \text{ءص} = \text{ظاس قاس ءس}$$

$$\Leftarrow \int \text{ظاس قاس}(\text{ص}^{6}-\text{ص}^{4})\times\frac{\text{ءص}}{\text{قاس ظاس}} \Leftarrow \int (\text{ص}^{6}-\text{ص}^{4})\ \text{ءص} \Leftarrow \frac{\text{ص}^{7}}{7} - \frac{\text{ص}^{5}}{5} + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{7}\text{قا}^{7}\text{س} - \frac{1}{5}\text{قا}^{5}\text{س} + \text{جـ}$$

---

٢٨) $\int \text{س}^{2}\text{جاس}^{3}\ \text{جتا}^{4}\text{س}^{3}\ \text{ءس}$ ، $\text{س} \in [0،\pi]$

✍ **<u>الحل</u>**: $\text{ص} = \text{س}^{3} \longrightarrow \text{ءص} = 3\text{س}^{2}\ \text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{3\text{س}^{2}}$

$$\text{س}=0 \longrightarrow \text{ص}=0 \quad ، \quad \text{س}=\pi \longrightarrow \text{ص}=\pi^{3}$$

$\therefore \int$ س^{٢}جاس^٣ جتا^{٤}س^٣ ءس $= \int$ س^{٢}جاص جتا^{٤}ص $\times \frac{ءص}{٣س^٢} \Leftarrow \frac{١}{٣}\int$ جاص جتا^{٤}ص ءص ، ص $\in [\,٠ ، \pi^٣]$

ع = جتاص $\longleftarrow$ ءع = $-$جاص ءص $\longleftarrow$ ءص = $\frac{-\,ءع}{جاص}$

ص=٠ $\longleftarrow$ ع=١ ، ص=$\pi^٣$ $\longleftarrow$ ع=$-$١

$\therefore \frac{١}{٣}\int$ جاص جتا^{٤}ص ءص = $\frac{١}{٣}\int$ جاص$\times$ع$^٤\times\frac{-\,ءع}{جاص} \Leftarrow \frac{-١}{٣}\int_{١}^{-١}$ ع^٤ ءع $\Leftarrow \frac{-١}{١٥}$ع$^٥\Big|_{١}^{-١} \Leftarrow \frac{٢}{١٥}$

---

٢٩) $\int \frac{هـ^{\frac{٣}{س}}}{س^٢}$ ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ص = $\frac{٣}{س}$ $\longleftarrow$ ءص = $\frac{-٣}{س^٢}$ ءس $\longleftarrow$ ءس = $\frac{-١}{٣}$س^٢ ءص

$\therefore \int \frac{هـ^{\frac{٣}{س}}}{س^٢}$ ءس = $\int \frac{هـ^{ص}}{س^٢}\times\frac{-١}{٣}$س^٢ ءص $\Leftarrow \frac{-١}{٣}\int$هـ^{ص} ءص $\Leftarrow \frac{-١}{٣}\times$ هـ^{ص} $\Leftarrow \frac{-١}{٣}\times$ هـ$^{\frac{٣}{س}}$+جـ

---

٣٠) $\int$جتا^{٣}س ءس

✍ **<u>الحل</u>**: $\int$جتا^{٣}س ءس = $\int$جتاس$\times$جتا^{٢}س ءس $\Leftarrow \int$جتاس(١$-$جا^{٢}س) ءس

ص = جاس $\longleftarrow$ ءص = جتاس ءس $\longleftarrow$ ءس = $\frac{ءص}{جتاس}$

$\therefore \int$جتاس(١$-$جا^{٢}س) ءس = $\int$جتاس(١$-$ص^٢)$\times\frac{ءص}{جتاس} \Leftarrow \int$(١$-$ص^٢) ءص $\Leftarrow$ ص$-\frac{ص^٣}{٣}$+جـ

$\Leftarrow$ جاس$-\frac{١}{٣}$جا^{٣}س+جـ

٣١) $\int$ س قا(١−٢س^٢)ظا(١−٢س^٢) ءس

✍ **الحل**: ص = ١−٢س^٢ ⟵ ءص = −٤س ءس ⟵ ءس = $\frac{-\text{ءص}}{\text{٤س}}$

∴ $\int$ س قا(١−٢س^٢)ظا(١−٢س^٢) ءس = $\int$ س قاص ظاص × $\frac{-\text{ءص}}{\text{٤س}}$ ⇐ $\frac{-١}{٤}\int$ قاص ظاص ءص

⇐ $\frac{-١}{٤}$ قاص ⇐ $\frac{-١}{٤}$ قا(١−٢س^٢)+جـ

---

٣٢) $\int$ جا^٣س جتا^٢س ءس

✍ **الحل**: $\int$ جا^٣س جتا^٢س ءس = $\int$ جا^٢س×جاس×جتا^٢س ءس ⇐ $\int$(١−جتا^٢س)×جاس×جتا^٢س ءس

⇐ $\int$(جتا^٢س−جتا^٤س)جاس ءس ، ص = جتاس ⟵ ءص = − جاس ءس ⟵ ءس = $\frac{-\text{ءص}}{\text{جاس}}$

⇐ $\int$(جتا^٢س−جتا^٤س)جاس ءس = $\int$(ص^٢−ص^٤)جاس × $\frac{-\text{ءص}}{\text{جاس}}$ ⇐ $\int$(ص^٤−ص^٢) ءص

⇐ $\frac{\text{ص}^٥}{٥}$ − $\frac{\text{ص}^٣}{٣}$ + جـ = $\frac{١}{٥}$ جتا^٥س − $\frac{١}{٣}$ جتا^٣س + جـ

---

٣٣) $\int$ هـ^٣س×ظا(هـ^٣س) ءس

✍ **الحل**: ص = هـ^٣س ⟵ ءص = ٣هـ^٣س ءس =٣ص ءس ⟵ ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{٣ص}}$

∴ $\int$ هـ^٣س×ظا(هـ^٣س) ءس = $\int$ ص×ظا(ص)×$\frac{\text{ءص}}{\text{٣ص}}$ ⇐ $\frac{١}{٣}\int$ ظاص ءص ⇐ $\frac{١}{٣}\int\frac{\text{جاص}}{\text{جتاص}}$ ءص

⇐ $\frac{-١}{٣}$لو|جتاص|+جـ = $\frac{-١}{٣}$لو|جتا(هـ^٣س)|+جـ

٣٤) $\int$ جتا^{٤}س ءس

✍ **الحل**: $\int$ جتا^{٤}س ءس = $\int$($\frac{١}{٢}$(١+جتا٢س))^{٢} ءس ⇐ $\frac{١}{٤}\int$(١+٢ جتا٢س+جتا^{٢}٢س) ءس

⇐ $\frac{١}{٤}\int$(١+٢ جتا٢س+($\frac{١}{٢}$(١+جتا٢س)) ءس ⇐ $\frac{١}{٤}\int$(١+٢ جتا٢س+$\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$جتا٢س) ءس

⇐ $\frac{١}{٤}\int$($\frac{٣}{٢}$ + $\frac{٥}{٢}$جتا٢س) ءس ⇐ $\frac{١}{٤}$($\frac{٣}{٢}$س+$\frac{٥}{٤}$جا٢س)+جـ

---

٣٥) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{١+جتا ٢س}}$

✍ **الحل**: $\int \frac{\text{ءس}}{\text{١+جتا ٢س}}$ ⇐ $\int \frac{\text{ءس}}{\text{١+٢جتا}^{٢}\text{س−١}}$ ⇐ $\int \frac{\text{ءس}}{\text{٢جتا}^{٢}\text{س}}$ ⇐ $\frac{١}{٢}\int$قا^{٢}س ءس ⇐ $\frac{١}{٢}$ ظاس+جـ

---

٣٦) $\int$ جا^{٧}س جتا^{٣}س ءس

✍ **الحل**: ص = جاس ⟵ ءص = جتاس ءس ⟵ ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

∴ $\int$ جا^{٧}س جتا^{٣}س ءس = $\int$ص^{٧} جتا^{٣}س× $\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$ ⇐ $\int$ص^{٧}× جتا^{٢}س ءص ⇐ $\int$ص^{٧}(١−جا^{٢}س) ءص

⇐ $\int$ص^{٧}(١−ص^{٢}) ءص ⇐ $\int$(ص^{٧}−ص^{٩}) ءص ⇐ $\frac{\text{ص}^{٨}}{٨}$ + $\frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠}$ ⇐ $\frac{\text{جا}^{٨}\text{س}}{٨}$ + $\frac{\text{جا}^{١٠}\text{س}}{١٠}$ + جـ

---

٣٧) $\int\sqrt{\text{جاس − جا}^{٣}\text{س}}$ ءس ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$]

✍ **الحل**: $\int\sqrt{\text{جاس − جا}^{٣}\text{س}}$ ءس = $\int\sqrt{\text{جاس(١ − جا}^{٢}\text{س)}}$ ءس ⇐ $\int\sqrt{\text{جاس×جتا}^{٢}\text{س}}$ ءس

⇐ $\int\sqrt{\text{حاس}}$×|جتاس| ءس ⇐ $\int\sqrt{\text{حاس}}$×جتاس ءس ، ص = جاس ⟵ ءص = جتاس ءس

$\text{س} = ٠ \longrightarrow \text{ص} = ٠ \quad ، \quad \text{س} = \frac{\pi}{٢} \longrightarrow \text{ص} = ١$

$\therefore \int \sqrt{\text{حاس}} \times \text{جتاس} \; \text{ءس} = \int \sqrt{\text{ص}} \times \text{جتاس} \times \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} \Leftarrow \int \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \; \text{ءص} \Leftarrow \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{ص}^{٣}} + \text{جـ}$

---

٣٨) $\int \text{ظا}^{٤}\text{س} \; \text{ءس}$

✍ **<u>الحل</u>**: $\int \text{ظا}^{٤}\text{س} \; \text{ءس} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س} \times \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} \Leftarrow \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١) \times \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} \Leftarrow \int (\text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ظا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}) \; \text{ءس}$

$\Leftarrow \int \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} - \int \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} \quad ، \quad \text{ص} = \text{ظاس} \longrightarrow \text{ءص} = \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\therefore \int \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} - \int \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{ص}^{٢} \times \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} - \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١) \; \text{ءس}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{٢} \; \text{ءص} - [\text{ظاس} - \text{س}] + \text{جـ} \Leftarrow \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{جـ}$

---

٣٩) $\int \text{قا}^{٤}\text{س} \; \text{ءس}$

✍ **<u>الحل</u>**: $\int \text{قا}^{٤}\text{س} \; \text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} \Leftarrow \int \text{قا}^{٢}\text{س} \times (\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١) \; \text{ءس}$

$\Leftarrow \int (\text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{قا}^{٢}\text{س}) \; \text{ءس} \Leftarrow \int \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} + \int \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \longrightarrow \text{ءص} = \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\therefore \int \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} + \int \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{ص}^{٢} \times \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} + \text{ظاس} \Leftarrow \int \text{ص}^{٢} \; \text{ءص} + \text{ظاس}$

$\Leftarrow \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} - \text{ظاس} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٤٠) ∫(١+جا٢س)(جتاس−جاس) ءس

✍ **<u>الحل</u>**: ∫(١+جا٢س)(جتاس−جاس) ءس = ∫(جا^{٢}س+جتا^{٢}س+٢جاسجتاس)(جتاس−جاس) ءس

⇐ ∫(جاس+جتاس)^{٢}(جتاس−جاس) ءس ، ص= جاس+جتاس ⟵ ءص=(جتاس− جاس) ءس

∴ ∫(جاس+جتاس)^{٢}(جتاس−جاس) ءس = ∫ص^{٢}(جتاس−جاس)× $\frac{\text{ءص}}{\text{(جاس−جتاس)}}$

⇐ ∫ص^{٢} ءص = $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$× (جاس+جتاس)^{٣}+جـ

الدرس السادس : التكامل باستخدام الأجزاء

☜ تستخدم هذه الطريقة عند إيجاد التكامل لاقترانين ليس لأحدهما علاقة بالآخر على الأغلب (وجود اقترانين من جنسين مختلفين).

☜قانون الأجزاء: ∫ ق(س) ءم = ق(س)×م(س) – ∫ م(س) ءق

➢ **الأمثلة**: حل كل من التكاملات الآتية:

📖 **مثال ١**: ∫س جاس ءس

✍ **الحل**: لاحظ أن الاقترانين ليس لهما علاقة ببعضهما وهذه إشارة إلى أنه يمكن أن يُحل باستخدام الأجزاء ودائماً نفرض (ق) الاقتران الذي يصغر حجمه عند الاشتقاق.

ق = س ⟵ ءق = ءس ، ءم = جاس ءس ⟵ ∫ ءم = ∫ جاس ءس ⟵ م = –جتاس

∴ ∫س جاس ءس = ق×م –∫م× ءق = –س جتاس +∫جتاس ءس ⇐ –س جتاس+جاس+جـ

📖 **مثال ٢**: ∫س^{٢}جتاس ءس

✍ **الحل**: ق = س^{٢} ⟵ ءق = ٢س ءس ، ءم = جتاس ءس ⟵ م =جاس

∫س^{٢}جتاس ءس = س^{٢}جاس–∫(٢س)جاس ءس*....أجزاء مرة أخرى،،،

ع= س ⟵ ءع = ءس ، ءهـ = جاس ءس ⟵ هـ = –جتاس

∴ * = س^{٢}جاس–٢ [–س جتاس +∫جتاس ءس] ⇐ س^{٢}جاس–٢ [–س جتاس + جاس]

⇐ س^{٢}جاس+٢س جتاس–٢ جاس+جـ

📖 **مثال ٣**: $\int$ س جا $\frac{س}{٢}$ جتا $\frac{س}{٢}$ ءس

✍ **الحل**: جا٢س = ٢ جاس جتاس ⟵ جاس = ٢ جا $\frac{س}{٢}$ جتا $\frac{س}{٢}$ ⟵ $\frac{١}{٢}$ جاس = جا $\frac{س}{٢}$ جتا $\frac{س}{٢}$

∴ $\int$ س جا $\frac{س}{٢}$ جتا $\frac{س}{٢}$ ءس = $\int$ س × $\frac{١}{٢}$ جاس ءس ⇐ $\frac{١}{٢}\int$ س جاس ءس ...أجزاء...

ق = س ⟵ ءق = ءس ، ءم = جاس ءس ⟵ $\int$ ءم = $\int$ جاس ءس ⟵ م = −جتاس

∴ $\frac{١}{٢}\int$ س جاس ءس = $\frac{١}{٢}$ [−س جتاس + $\int$ جتاس ءس] ⇐ $\frac{١}{٢}$[−س جتاس + جاس] + ج

📖 **مثال ٤**: $\int$ س ق″(س) ءس

✍ **الحل**: ع = س ⟵ ءع = ءس ، ءم = ق″(س) ءس ⟵ م = ق′(س)

∴ $\int$ س ق″(س) ءس = س ق′(س) − $\int$ ق′(س) ءس = س ق′(س) − ق(س) + ج

📖 **مثال ٥**: $\int$ (س+٦) جا٤س ءس

✍ **الحل**: ق = س+٦ ⟵ ءق = ءس ، ءم = جا٤س ءس ⟵ م = $\frac{-١}{٤}$ جتا٤س

∴ $\int$ (س+٦) جا٤س ءس = (س+٦) × $\frac{-١}{٤}$ جتا٤س + $\frac{١}{٤}\int$ جتا٤س ءس

⇐ (س+٦) × $\frac{-١}{٤}$ جتا٤س + $\frac{١}{٤}$[$\frac{١}{٤}$ جا٤س] + ج ⇐ (س+٦) × $\frac{-١}{٤}$ جتا٤س + $\frac{١}{١٦}$ جا٤س + ج

📖 **مثال ٦**: إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ٢ق(س) ءس = ١٢ ، وكان ق(١)=٣، ق(٣)=٥ ، أوجد $\int_{٠}^{١}$ س ق′(٢س+١) ءس؟

✍ **الحل**: ص = ٢س+١ ⟵ ءص = ٢ ءس ، س=١ ⟵ ص=٣ ، س=٠ ⟵ ص=١

∴ ∫^١_٢ س قَ(٢س+١) ءس = ∫^٣_١ ½(ص−١)قَ(ص) × ءص/٢ = ¼ ∫^٣_١ (ص−١)قَ(ص) ءص

ع = ص−١ ⟵ ءع = ءص ، ءهـ = قَ(ص) ءص ⟵ هـ = ∫^٣_١ قَ(ص) ءص = ق(ص)

ص=٣ ⟵ ع=٢ ، ص=١ ⟵ ع = ٠

¼ ∫^٣_١ (ص−١)قَ(ص) ءص = ¼[(ص−١)ق(ص) |^٣_١ − ∫^٣_١ ق(ص) ءص] ⟸ ¼[٢ق(٣) − ∫^٣_١ ق(ص) ءص]

⟸ ¼[−٢ × ٥ + ٦] ⟸ ¼(−٤) = −١

📖 مثال ٧: ∫^١_١- س(س−١)^٥ ءس*

✍ **الحل**: ه = س ⟵ ءه = ءس ، ءم = (س−١)^٥ ءس ⟵ م = ⅙(س−١)^٦

∴ * = ⅙س(س−١)^٦ |^١_١- − ⅙ ∫^١_١- (س−١)^٦ ءس ⟸ ⅙س(س−١)^٦ |^١_١- − ⅙ × ⅐(س−١)^٧ |^١_١-

⟸ (⅙س(س−١)^٦ − ⅙ × ⅐(س−١)^٧) |^١_١- ⟸ (٠ − (٦٤/٦ + ⅙ × ١٢٨/٧)) ⟸ − (٣٢/٣ + ٦٤/٢١) = − ٢٤٨/٧

📖 مثال ٨: ∫ (س جاس)/(جتا^٣ س) ءس

✍ **الحل**: ∫ (س جاس)/(جتا^٣ س) ءس = ∫ س جاس جتا^-٣ س ءس(*)....أجزاء

ه = س ⟵ ءه = ءس ، ءم = جاس جتا^-٣ س ءس ⟵ م = ∫ جاس جتا^-٣ س ءس...تعويض،،،

ص = جتاس ⟵ ءص = −جاس ءس ⟵ ءس = −ءص/جاس

∴ م = ∫ جاس×ص^-٣ × −ءص/جاس ⟸ − −½ص^-٢ = ½ جتا^-٢ س

(*)= $\frac{1}{2}$س جتا$^{-2}$س − $\frac{1}{2}$ ∫ جتا$^{-2}$س ءس ⇐ $\frac{1}{2}$س جتا$^{-2}$س − $\frac{1}{2}$ ∫ قا^{2}س ءس = $\frac{1}{2}$س قا^{2}س − $\frac{1}{2}$ظاس+جـ

مثال ٩: ∫ س^{3}جا(س^{2}+١) ءس....*

الحل: ص = س^{2}+١ ⟵ س^{2} = ص−١ ⟵ ٢س ءس = ءص ⟵ ءس = $\frac{ءص}{٢س}$

∴* = ∫ س^{3}جاص × $\frac{ءص}{٢س}$ ⇐ $\frac{1}{2}$ ∫ (ص−١) جاص ءص...أجزاء

ﻫ = ص−١ ⟵ ءﻫ = ءص ، ءم = جاص ءص ⟵ م = − جتاص

∴* = $\frac{1}{2}$[(١−ص) جتاص + ∫ جتاص ءص] ⇐ $\frac{1}{2}$[(١−ص) جتاص +جاص]+جـ

مثال ١٠: ∫ جتا^{3}س ءس

الحل: ∫ جتا^{3}س ءس = ∫ جتا^{2}س×جتاس ءس...*

ﻫ = جتا^{2}س ⟵ ءﻫ = −٢جتاس جاس ءس ، ءم = جتاس ءس ⟵ م = جاس

∴ * = جاس جتا^{2}س+٢ ∫ جتاس جا^{2}س ءس...أجزاء مرة أخرى أو تعويض،،،

ع = جا^{2}س ⟵ ءع = ٢ جاس جتاس ، ءهـ = جتاس ءس ⟵ هـ = جاس

∴ * = جاس جتا^{2}س+٢[جا^{3}س −٢ ∫ جتاس جا^{2}س ءس]

∫ جتاس جا^{2}س ءس = جا^{3}س −٢ ∫ جتاس جا^{2}س ءس ⇐ ٣ ∫ جتاس جا^{2}س ءس = جا^{3}س

⇐ ∫ جتاس جا^{2}س ءس = $\frac{1}{3}$ جا^{3}س

∴ * = جاس جتا^{٢}س + ٢ [جا^{٣}س − ٢ × $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س] ⇐ جاس جتا^{٢}س + $\frac{٢}{٣}$ جا^{٣}س + جـ

📖 **مثال ١١**: ∫ لوس ءس

✍ **الحل**: ق = لوس ⟵ ءق = $\frac{١}{س}$ ءس ، ءم = ءس ⟵ م = س

∫ لوس ءس = س لوس − ∫ ءس ⇐ س لوس − س + جـ

📖 **مثال ١٢**: ∫ $\frac{(لو(س))^{٢}}{س}$ ءس

✍ **الحل**: ص = لوس ⟵ ءص = $\frac{١}{س}$ ءس ⟵ ءس = س ءص

∫ $\frac{(لو(س))^{٢}}{س}$ ءس = ∫ $\frac{ص^{٢}}{س}$ × س ءص ⇐ $\frac{ص^{٣}}{٣}$ + جـ

📖 **مثال ١٣**: ∫ (لوس)^{٢} ءس

✍ **الحل**: ق = (لوس)^{٢} ⟵ ءق = $\frac{٢}{س}$ لوس ءس ، ءم = ءس ⟵ م = س

∫ (لوس)^{٢} ءس = س(لوس)^{٢} − ∫ س × $\frac{٢}{س}$ لوس ءس ⇐ س(لوس)^{٢} − ٢ ∫ لوس ءس.......أجزاء

س(لوس)^{٢} − ٢ [س لوس − س] + جـ

📖 **مثال ١٤**: ∫ س^{٣}لوس^{٥} ءس

✍ **الحل**: ∫ س^{٣}لوس^{٥} ءس = ٥ ∫ س^{٣}لوس ءس....*

$هـ = لوس \longrightarrow ءهـ = \frac{١}{س}\ ءس$ ، $ءم = س^{٣}\ ءس \longrightarrow م = \frac{س^{٤}}{٤}$

$\therefore * = ٥\left[\frac{س^{٤}}{٤} لوس - \frac{١}{٤}\int س^{٣}\ ءس\right] \Leftarrow ٥\left[\frac{س^{٤}}{٤} لوس - \frac{١}{١٦} س^{٤}\right] + جـ$

📖 **مثال ١٥**: $\int \frac{١}{س + س\ لو\ س}\ ءس$

✍ **الحل**: $\int \frac{١}{س + س\ لو\ س}\ ءس = \int \frac{١}{س(١ + لو\ س)}\ ءس$ ، $ص = ١ + لوس \longrightarrow ءص = \frac{١}{س}\ ءس$

$\int \frac{١}{س(١ + لو\ س)}\ ءس \Leftarrow \int \frac{١}{س ص} \times س\ ءص \Leftarrow لو|ص| + جـ = لو|١ + لوس| + جـ$

📖 **مثال ١٦**: $\int س^{٢}\ هـ^{س}\ ءس$

✍ **الحل**: $هـ = س^{٢} \longrightarrow ءهـ = ٢س\ ءس$ ، $ءم = هـ^{س}\ ءس \longrightarrow م = هـ^{س}$

$\int س^{٢}\ هـ^{س}\ ءس = س^{٢}\ هـ^{س} - ٢\int س\ هـ^{س}\ ءس$ ....أجزاء مرة أخرى

$ع = س \longrightarrow ءع = ءس$ ، $ءك = هـ^{س}\ ءس \longrightarrow ك = هـ^{س}$

$\therefore \int س^{٢}\ هـ^{س}\ ءس = س^{٢}\ هـ^{س} - ٢[س\ هـ^{س} - \int هـ^{س}\ ءس] \Leftarrow س^{٢}\ هـ^{س} - ٢[س\ هـ^{س} - هـ^{س}] + جـ$

📖 **مثال ١٧**: $\int هـ^{\sqrt{س}}\ ءس$

✍ **الحل**: $ص = \sqrt{س} \Leftarrow ص^{٢} = س \longrightarrow ٢ص\ ءص = ءس$

$\int هـ^{\sqrt{س}}\ ءس = ٢\int ص\ هـ^{ص}\ ءص$.........أجزاء

$ع = ص \leftarrow ءع = ءص$ ، $ءم = هـ^{ص} ءص \leftarrow م = هـ^{ص}$

$\int هـ^{\sqrt{س}} ءس = ٢[ص هـ^{ص} - \int هـ^{ص} ءص] \Leftarrow ٢ص هـ^{ص} - ٢ هـ^{ص} + جـ$

📖 **مثال ١٨**: $\int \frac{٣ + هـ^{س}}{هـ^{س}} ءس$

✍ **الحل**: $\int \frac{٣ + هـ^{س}}{هـ^{س}} ءس = \int \frac{٣}{هـ^{س}} ءس + \int ءس \Leftarrow \int ٣هـ^{-س} ءس + س \Leftarrow -٣ هـ^{-س} + س + جـ$

📖 **مثال ١٩**: $\int \frac{جا س هـ^{قا س}}{جتا^{٢} س} ءس$

✍ **الحل**: $\int \frac{جا س هـ^{قا س}}{جتا^{٢} س} ءس = \int \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{١}{جتاس} \times هـ^{قاس} ءس \Leftarrow \int ظاس \times قاس \times هـ^{قاس} ءس .....*$

$ص = قاس \leftarrow ءص = ظاس قاس ءس \leftarrow ءس = \frac{ءص}{قاس ظاس}$

$\therefore * = \int ظاس \times قاس \times هـ^{ص} \times \frac{ءص}{قاس ظاس} \Leftarrow هـ^{ص} = هـ^{قاس} + جـ$

📖 **مثال ٢٠**: $\int \frac{لو س}{س^{٢}} ءس$

✍ **الحل**: $ع = لوس \leftarrow ءع = \frac{١}{س} ءس$ ، $ءم = \frac{١}{س^{٢}} \leftarrow م = -\frac{١}{س}$

$\int \frac{لو س}{س^{٢}} ءس = -\frac{١}{س} لوس + \int س^{-٢} ءس \Leftarrow -\frac{١}{س} لوس - \frac{١}{س} + جـ$

📖 **مثال ٢١:** $\int س^{٣} هـ^{س^{٢}+١}\ ءس$

✍ **الحل:** $ص = س^{٢}+١ \longrightarrow ءص = ٢س\ ءس \longrightarrow ءس = \frac{ءص}{٢س}$

$\int س^{٣} هـ^{س^{٢}+١}\ ءس = \frac{١}{٢}\int (ص-١)\ هـ^{ص}\ ءص$ *.........أجزاء

$ق = ص-١ \longrightarrow ءق = ءص \quad ، \quad ءم = هـ^{ص}\ ءص \longrightarrow م = هـ^{ص}$

$\therefore * = \frac{١}{٢}[(ص-١)\ هـ^{ص} - \int هـ^{ص}\ ءص] \Leftarrow \frac{١}{٢}[(ص-١)\ هـ^{ص} - هـ^{ص}] = \frac{١}{٢}[س^{٢} هـ^{س^{٢}+١} - هـ^{س^{٢}+١}]+جـ$

📖 **مثال ٢٢:** $\int هـ^{س}\ جتاس\ ءس$

✍ **الحل:** $ق = جتاس \longrightarrow ءق = -جاس\ ءس \quad ، \quad ءم = هـ^{س}\ ءس \longrightarrow م = هـ^{س}$

$\int هـ^{س}\ جتاس\ ءس = هـ^{س}\ جتاس + \int هـ^{س}\ جاس\ ءس$

$ع = جاس \longrightarrow ءع = جتاس\ ءس \quad ، \quad ءل = هـ^{س}\ ءس \longrightarrow ل = هـ^{س}$

$\therefore \int هـ^{س}\ جتاس\ ءس = هـ^{س}\ جتاس + هـ^{س}\ جاس - \int هـ^{س}\ جتاس\ ءس$

$٢\int هـ^{س}\ جتاس\ ءس = هـ^{س}\ جتاس + هـ^{س}\ جاس \Leftarrow \int هـ^{س}\ جتاس\ ءس = \frac{١}{٢}(هـ^{س}\ جتاس + هـ^{س}\ جاس)+جـ$

📖 **مثال ٢٣:** $\int \frac{س\ هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}\ ءس$

✍ **الحل:** $\int \frac{س\ هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}\ ءس = \int س\ هـ^{س} (س+١)^{-٢}\ ءس$ ....*

$ق = س\ هـ^{س} \longrightarrow ءق = س\ هـ^{س} + هـ^{س} \quad ، \quad ءم = (س+١)^{-٢}\ ءس \longrightarrow م = \frac{-١}{س+١}$

$\therefore * = \frac{-١}{س+١} \times س\ هـ^{س} + \int هـ^{س} (س+١) \times \frac{١}{س+١}\ ءس \Leftarrow \frac{-١}{س+١} \times س\ هـ^{س} + \int هـ^{س}\ ءس$

$\Leftarrow \frac{-١}{س+١} \times س\ هـ^{س} + هـ^{س} + جـ$

📖 **مثال ٢٤:** $\int هـ^{٣\ لو\ س}\ ءس$

✍ **الحل**: $\int$ هـ$^{٣ \text{لو} س}$ ءس = $\int$ هـ$^{\text{لو} س^٣}$ ءس = $\int$ س^٣ ءس = $\frac{س^٤}{٤}$ + جـ

📖 **مثال ٢٥**: $\int \frac{١}{\sqrt{س}}$ لوس ءس

✍ **الحل**: $\int$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ لوس ءس ، ق = لوس ← ءق = $\frac{١}{س}$ ، ءم = س$^{-\frac{١}{٢}}$ ءس ← م = ٢$\sqrt{س}$

$\int$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ لوس ءس = ٢$\sqrt{س}$ لوس − ٢ $\int$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ ءس ⇐ ٢$\sqrt{س}$ لوس − ٤$\sqrt{س}$ +جـ

📖 **مثال ٢٦**: إذا كان ق$^{(ن)}$(س) = $\frac{(-١)^ن (ن-١)!}{س^ن}$ هي المشتقة النونية للاقتران ق(س) ، أوجد

قاعدة الاقتران ق(س)؟

✍ **الحل**: ق(س) = $\int$ ق$'$(س) ءس ، لكن ق$'$(س) = $\frac{-١}{س}$

∴ ق(س) = $\int \frac{-١}{س}$ ءس = − لو|س| + جـ

الدرس السابع : التكامل باستخدام الكسور الجزئية

- تستخدم طريقة الكسور الجزئية في إيجاد التكامل لمقدار ما إذا كان المقدار يحقق الشروط التالية (شروط طريقة الكسور الجزئية):

١. أن يكون كل من الاقترانين ق(س) ، هـ(س) كثير حدود.
٢. أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام.
٣. أن يكون المقام قابلاً للتحليل.

طريقة الحل:

- حالة المقام اقتران خطي: $\frac{ص}{س} = \frac{أ}{س}$
- حالة المقام اقتران تربيعي: $\frac{ص}{س^٢} = \frac{أ}{س} + \frac{أس + ب}{س^٢}$

ملاحظة هامة: كما نلاحظ ، يجب أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام بمقدار درجة واحدة في التحليل.

مثال ١: $\int \frac{س+١}{س^٢-٤س+٣}\, ءس$

الحل: $\frac{س+١}{س^٢-٤س+٣} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س-١} = \frac{أ(س-١)+ب(س-٣)}{(س-٣)(س-١)}$

$\therefore \frac{س+١}{س^٢-٤س+٣} = \frac{أ(س-١)+ب(س-٣)}{(س-٣)(س-١)} \Leftarrow$ المقام = المقام ⟵ البسط = البسط

$\therefore$ س+١ = أ(س-١)+ب(س-٣): يفضل أخذ جذور الاقترانات (للسهولة) أو نعمل على المقارنة.

عندما س = ١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢ب $\Leftarrow$ ب = -١ ، وعندما س = ٣ $\Leftarrow$ ٤ = ٢أ $\Leftarrow$ أ = ٢

$\therefore \int \frac{س+١}{س^٢-٤س+٣}\, ءس = \int \frac{أ}{س-٣}\, ءس + \int \frac{ب}{س-١}\, ءس \Leftarrow \int \frac{٢}{س-٣}\, ءس + \int \frac{-١}{س-١}\, ءس$

$\Leftarrow$ ٢لو|س - ٣| - لو|س - ١| + جـ

مثال ٢: $\int \frac{س^٣+٣}{س^٢-٣س-٤}\, ءس$

✍ **__الحل__: لاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام ← لا يمكننا إجراء الكسور الجزئية لذا نجري القسمة الطويلة أولاً.**

$$\begin{array}{r} \text{س}+٣ \\ \text{س}^{٢}-٣\text{س}-٤ \;\big)\; \text{س}^{٣}+٣ \\ -\;\underline{\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}-٤\text{س}} \\ ٣\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣ \\ -\;\underline{٣\text{س}^{٢}-٩\text{س}-١٢} \\ ١٣\text{س}+١٥ \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{\text{س}^{٣}+٣}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٤}\,\text{ءس} = \int (\text{س}+٣)\,\text{ءس} + \int \frac{١٣\text{س}+١٥}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٤}\,\text{ءس}$$

$$\frac{١٣\text{س}+١٥}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٤} = \frac{١٣\text{س}+١٥}{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٤} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١} = \frac{\text{أ}(\text{س}+١)+\text{ب}(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)}$$

⇐ المقام = المقام ← البسط = البسط

$\therefore$ $١٣\text{س}+١٥ = \text{أ}(\text{س}+١)+\text{ب}(\text{س}-٤)$

عندما $\text{س}=-١ \Leftarrow ٢=-٥\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-٢}{٥}$

عندما $\text{س}=٤ \Leftarrow ٦٧ = ٥\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{٦٧}{٥}$

$$\therefore \int \frac{\text{س}^{٣}+٣}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٤}\,\text{ءس} = \tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢}+٣\text{س} + \int \frac{\frac{٦٧}{٥}}{\text{س}-٤}\,\text{ءس} + \int \frac{\frac{-٢}{٥}}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$$

$$\Leftarrow = \tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢}+٣\text{س}+\tfrac{٦٧}{٥}\text{لو}\,|\text{س}-٤| - \tfrac{٢}{٥}\text{لو}\,|\text{س}+١| + \text{جـ}$$

📖 **__مثال ٣__:** $\int \frac{١}{\text{س}^{٣}+\text{س}}\,\text{ءس}$

✍ **__الحل__:** $\frac{١}{\text{س}^{٣}+\text{س}} = \frac{١}{\text{س}\,(\text{س}^{٢}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب س}+\text{جـ}}{\text{س}^{٢}+١} = \frac{\text{أ}(\text{س}^{٢}+١)+\text{س}(\text{ب س}+\text{جـ})}{\text{س}(\text{س}^{٢}+١)}$

$\therefore$ $١ = \text{أ}(\text{س}^{٢}+١)+\text{س}(\text{ب س}+\text{جـ}) \Leftarrow ١ = \text{أ}\text{س}^{٢}+\text{أ}+\text{ب س}^{٢}+\text{جـ س}$

$\Leftarrow$ $١ = \text{س}^{٢}(\text{أ}+\text{ب})+\text{جـ س}+\text{أ}$

نعمل على مقارنة العناصر المتكافئة في الطرفين كما يلي:

أ+ب = صفر.....(١)

جـ = صفر

أ = ١ ← ومن معادلة رقم (١) ⇐ ١+ب = ٠ ⇐ ب = −١

$$\therefore \int \frac{١}{\text{س}^{٣}+\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} + \int \frac{-\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} + \int \frac{-\frac{١}{٢}(٢\text{س})}{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس}$$

$\Leftarrow \text{لو}|\text{س}| - \frac{1}{2}\text{لو}|\text{س}^2+1| + \text{جـ}$

مثال ٤: $\int \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1} \, \text{ءس}$

الحل: $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \longleftarrow \text{ءص} = \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{ءس} \longleftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$

$$\int \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1} \, \text{ءس} = \int \frac{1}{\text{ص}(\text{ص}-1)} \, \text{ءص}$$

$$\frac{1}{\text{ص}(\text{ص}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-1} = \frac{\text{أ}(\text{ص}-1)+\text{ب ص}}{\text{ص}(\text{ص}-1)} \Leftarrow 1 = \text{أ ص} + \text{ب ص} - \text{أ} = \text{ص}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{أ}$$

$\text{أ}+\text{ب} = 0$ ....(١)

$-\text{أ} = 1 \longleftarrow \text{أ} = -1$ ومن معادلة رقم(١) ينتج أن: $-1+\text{ب} = 0 \longleftarrow \text{ب} = 1$

$$\therefore \int \frac{1}{\text{ص}(\text{ص}-1)} \, \text{ءص} = \int \frac{-1}{\text{ص}} \, \text{ءص} + \int \frac{1}{\text{ص}-1} \, \text{ءص} \Leftarrow -\text{لو}|\text{ص}| + \text{لو}|\text{ص} - 1| + \text{جـ}$$

$\Leftarrow \text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}} - 1| - \text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{جـ}$

مثال ٥: $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س} + \text{جا س}} \, \text{ءس}$

الحل: $\text{ص} = \text{جاس} \longleftarrow \text{ءص} = \text{جتاس} \, \text{ءس} \longleftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$$\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س} + \text{جا س}} \, \text{ءس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{ص}^2+\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} \Leftarrow \int \frac{1}{\text{ص}^2+\text{ص}} \, \text{ءص}$$

$$\frac{1}{\text{ص}^2+\text{ص}} = \frac{1}{\text{ص}(\text{ص}+1)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+1} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+1)+\text{ب ص}}{\text{ص}(\text{ص}+1)} \longleftarrow 1 = \text{أ ص} + \text{ب ص} + \text{أ}$$

$\Leftarrow 1 = \text{ص}(\text{أ}+\text{ب}) + \text{أ}$

$\text{أ}+\text{ب} = 0$ .....(١)

$\text{أ} = 1 \longleftarrow 1 + \text{ب} = 0 \longleftarrow \text{ب} = -1$

$$\therefore \int \frac{1}{\text{ص}^2+\text{ص}} \, \text{ءص} = \int \frac{1}{\text{ص}} \, \text{ءص} + \int \frac{-1}{\text{ص}+1} \, \text{ءص} = \text{لو}|\text{ص}| - \text{لو}|\text{ص}+1| = \text{لو}|\text{جاس}| - \text{لو}|\text{جاس}+1| + \text{جـ}$$

مثال ٦: $\int \frac{٢س+٣}{س^{٢}-٦س+٩}\,ءس$

الحل: $\frac{٢س+٣}{س^{٢}-٦س+٩} = \frac{٢س+٣}{(س-٣)^{٢}} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{(س-٣)^{٢}} = \frac{أ(س-٣)+ب}{(س-٣)^{٢}}$

$\Leftarrow ٢س+٣ = أ(س-٣)+ب$

$٢س+٣ = أس-٣أ+ب \Leftarrow أ = ٢ \text{ ، } ب-٣أ = ٣ \longleftarrow ب-٦ = ٣ \longleftarrow ب = ٩$

$\therefore \int \frac{٢س+٣}{س^{٢}-٦س+٩}\,ءس = \int \frac{٢}{س-٣}\,ءس + \int \frac{٩}{(س-٣)^{٢}}\,ءس \Leftarrow ٢لو|س-٣| + \frac{٩}{٣-س} + ج$

مثال ٧: $\int \frac{١}{س+٢س\sqrt[٣]{س}}\,ءس$

الحل: $ص = \sqrt[٣]{س} \Leftarrow ص^{٣} = س \longleftarrow ٣ص^{٢}\,ءص = ءس$

$\therefore \int \frac{١}{س+٢س\sqrt[٣]{س}}\,ءس = \int \frac{١}{ص^{٣}+٢ص^{٤}} \times ٣ص^{٢}\,ءص \Leftarrow ٣\int \frac{١}{ص(٢ص+١)}\,ءص$

$\frac{١}{ص(٢ص+١)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{٢ص+١} = \frac{أ(٢ص+١)+ب\,ص}{ص(٢ص+١)}$

$١ = أ(٢ص+١) + ب\,ص \text{ ، } ص = ٠ \longleftarrow ١ = أ \text{ ، } ص = \frac{-١}{٢} \longleftarrow ١ = \frac{-١}{٢}ب \longleftarrow ب = -٢$

$\therefore ٣\int \frac{١}{ص(٢ص+١)}\,ءص = ٣\left[\int \frac{١}{ص}\,ءص - ٢\int \frac{١}{٢ص+١}\,ءص\right] \Leftarrow ٣لو|ص| - ٦لو|٢ص+١|+ج$

$\Leftarrow ٣لو|\sqrt[٣]{س}| - ٦لو|٢\sqrt[٣]{س}+١|+ج$

مثال ٨: $\int \frac{جتا^{٣}س}{جتا^{٢}س - جاس + ٥}\,ءس$

الحل: $ص = جاس \longleftarrow ءص = جتاس\,ءس \longleftarrow ءس = \frac{ءص}{جتاس}$

$\therefore \int \frac{جتا^{٣}س}{جتا^{٢}س - جاس + ٥}\,ءس = \int \frac{جتا^{٢}س}{جتا^{٢}س - ص + ٥}\,ءص = \int \frac{(١-جا^{٢}س)}{(١-جا^{٢}س)-ص+٥}\,ءص$

$\Leftarrow \int \frac{١-ص^{٢}}{٦-ص^{٢}-ص}\,ءص = \int \frac{ص^{٢}-١}{ص^{٢}+ص-٦}\,ءص$

$$\begin{array}{r|l} & \text{١} \\ \hline \text{ص}^{٢}+\text{ص}-٦ & \text{ص}^{٢}-١ \\ & -(\text{ص}^{٢}+\text{ص}-٦) \\ \hline & -\text{ص}+٥ \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{\text{ص}^{٢}-١}{\text{ص}^{٢}+\text{ص}-٦}\,\text{ءص} = \int \text{ءص} + \int \frac{٥-\text{ص}}{\text{ص}^{٢}+\text{ص}-٦}\,\text{ءص} = \int \text{ءص} + \int \frac{٥-\text{ص}}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+٣)}\,\text{ءص}$$

$$\frac{٥-\text{ص}}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+٣)} = \frac{\text{أ}}{(\text{ص}-٢)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}+٣)} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+٣)+\text{ب}(\text{ص}-٢)}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+٣)}$$

$$٥-\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}+٣)+\text{ب}(\text{ص}-٢)$$

$$\text{ص}=-٣ \Leftarrow ٨ = -٥\text{ب} \longleftarrow \text{ب} = \frac{-٨}{٥} \quad ، \quad \text{ص}=٢ \Leftarrow ٣ = ٥\text{أ} \longleftarrow \text{أ} = \frac{٣}{٥}$$

$$\therefore \int \frac{\text{ص}^{٢}-١}{\text{ص}^{٢}+\text{ص}-٦}\,\text{ءص} = \int \text{ءص} + \frac{٣}{٥}\int \frac{١}{(\text{ص}-٢)}\,\text{ءص} - \frac{٨}{٥}\int \frac{١}{(\text{ص}+٣)}\,\text{ءص}$$

$$\text{ص}+\frac{٣}{٥}\text{لو}|\text{ص}-٢| - \frac{٨}{٥}\text{لو}|\text{ص}+٣| = \text{جاس}+\frac{٣}{٥}\text{لو}|\text{جاس}-٢| - \frac{٨}{٥}\text{لو}|\text{جاس}+٣| + \text{جـ}$$

📖 **مثال ٩**: $\int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}-١}\,\text{ءس}$

✍ **الحل**: $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \longleftarrow \text{ءص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{ص}\,\text{ءس} \longleftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$

$$\therefore \int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}-١}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{ص}-١} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ص}} = \int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-١)}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-١} = \frac{\text{أ}(\text{ص}-١)+\text{ب ص}}{\text{ص}(\text{ص}-١)} \Leftarrow ١ = \text{أ}(\text{ص}-١)+\text{ب ص}$$

$$\text{ص} = ١ \longleftarrow ١ = \text{ب} \quad ، \quad \text{ص} = ٠ \longleftarrow ١ = -\text{أ} \longleftarrow \text{أ} = -١$$

$$\therefore \int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-١)}\,\text{ءص} = -\int \frac{١}{\text{ص}}\,\text{ءص} + \int \frac{١}{\text{ص}-١}\,\text{ءص} = \text{لو}|\text{ص}-١| - \text{لو}|\text{ص}|$$

$$\Leftarrow \text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}}-١| - \text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{جـ}$$

📖 **مثال ١٠**: $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٤}+٦\text{س}+٩}}{\text{س}^{٢}-\text{س}}\,\text{ءس}$

✍ **الحل:** $\int \frac{\sqrt{س^4+6س^2+9}}{س^2-س}$ ءس = $\int \frac{\sqrt{(س^2+3)^2}}{(س^2-س)}$ ءس = $\int \frac{|س^2+3|}{س^2-س}$ ءس

لكن $س^3+3 > 0 \Leftarrow |س^3+3| > 0$

$\therefore \int \frac{|س^2+3|}{س^2-س}$ ءس = $\int \frac{س^2+3}{س^2-س}$ ءس

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline س^2-س & س^2+3 \\ & -(س^2-س) \\ \hline & س-3 \end{array}$$

$\therefore \int \frac{س^2+3}{س^2-س}$ ءس = $\int$ ءس + $\int \frac{س-3}{س^2-س}$ ءس = س + $\int \frac{س-3}{س(س-1)}$ ءس

$\frac{س-3}{س(س-1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} = \frac{أ(س-1)+ب س}{س(س-1)} \Leftarrow س-3 = أ(س-1)+ب س$

س = 1 : −2 = ب ، س = 0 : −3 = −أ ⟵ أ = 3

$\therefore \int \frac{س^2+3}{س^2-س}$ ءس = س + $\int \frac{3}{س}$ ءس − $\int \frac{2}{س-1}$ ءس = س+3لو|س| − 2لو|س − 1| + جـ

الدرس الثامن : المعادلات التفاضلية

خطوات الحل :

١. **فصل المتغير (س) مع دلالته(دس) في طرف والمتغير (ص) مع دلالته (دص) في الطرف الآخر.**

٢. **إجراء التكامل لكلا الطرفين وإيجاد الاقتران ص.**

❖ ملاحظة : **حل المعادلة يعني إيجاد قاعدة الاقتران ص.**

مثال ١: حل المعادلة التفاضلية ءص/ءس = (٢س^{٢} - ١)/(٣ ص)

الحل: ٣ص ءص = (٢س^{٢}−١) ءس ⇐ ∫٣ص ءص = ∫(٢س^{٢}−١) ءس

⇐ ٣/٢ ص^{٢} = ٢/٣ س^{٣} − س + ج ⇐ ص^{٢} = ٤/٩ س^{٣} − ٢/٣ س + ج ⇐ ص = √(٤/٩ س^{٣} − ٢/٣ س + ج)

مثال ٢: حل المعادلة التفاضلية (س^{٢} ءص/ءس = قاص)

الحل: س^{٢} ءص = قاص ءس ⇐ س^{٢} ءص = ١/جتاص ءس ⇐ س^{٢}جتاص ءص = ءس

⇐ جتاص ءص = س$^{-٢}$ ءس ⇐ ∫جتاص ءص = ∫س$^{-٢}$ ءس ⇐ جاص = −١/س + ج

مثال ٣: حل المعادلة التفاضلية (ءص/ءس = √(س/ص))

الحل: ءص/ءس = √س/√ص ⇐ √ص ءص = √س ءس ⇐ ∫√ص ءص = ∫√س ءس

⇐ ٢/٣ √(ص^{٣}) = ٢/٣ √(س^{٣}) + ج ⇐ ص^{٣} = س^{٣} +ج

مثال ٤: أوجد منحنى العلاقة (ءص/ءس − ٣ص^{٢} = ٠) التي تمر بالنقطة (٢,٤)؟

الحل: ءص/ءس − ٣ص^{٢} = ٠ ⇐ ءص/ءس = ٣ص^{٢} ⇐ ءس/ءص = ١/٣ ص$^{-٢}$ ⇐ ءس = ١/٣ ص$^{-٢}$ ءص

⇐ ∫ءس = ١/٣ ∫ص$^{-٢}$ ءص ⇐ س+ج = −١/٣ × ١/ص ⇐ −٣س + ج = ١/ص ⇐ ص = (−٣س+ج)$^{-١}$

٤ = (−٦ + ج)$^{-١}$ ⇐ ١/٤ = ج − ٦ ⇐ ج = ٢٥/٤ ، ∴ ص = (−٣س+٢٥/٤)$^{-١}$

📖 **مثال ٥:** حل المعادلة التفاضلية (ءص = قتا^٢^س قاص ءس)

✍ **الحل:** ءص = قتا^{٢}س × $\frac{١}{\text{جتاص}}$ ءس ⇐ جتاص ءص = قتا^{٢}س ءس

$\int$ جتاص ءص = $\int$ قتا^{٢}س ءس ⇐ جاص = ـظتاس + جـ

📖 **مثال ٦:** حل المعادلة التفاضلية ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جا^{٢}٣ص جا٥س)

✍ **الحل:** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جا^{٢}٣ص جا٥س ⇐ ءص = جا^{٢}٣ص جا٥س ءس ⇐ جا$^{-٢}$٣ص ءص = جا٥س ءس

$\int$ جا$^{-٢}$٣ص ءص = $\int$ جا٥س ءس ⇐ $\int$ قتا^{٢}٣ص ءص = $\int$ جا٥س ءس ⇐ $\frac{-١}{٣}$ ظتا٣ص = $\frac{-١}{٥}$ جتا٥س + جـ

📖 **مثال ٧:** حل المعادلة التفاضلية (٢ جا^{٢}س ءص + ص^{٢} ءس = ٢ ءص)

✍ **الحل:** ص^{٢} ءس = ٢ ءص − ٢ جا^{٢}س ءص ⇐ ص^{٢} ءس = ٢ ءص (١ − جا^{٢}س)

⇐ ص^{٢} ءس = ٢ جتا^{٢}س ءص ⇐ جتا$^{-٢}$س ءس = ٢ ص$^{-٢}$ ءص ⇐ $\int$ قا^{٢}س ءس = ٢ $\int$ ص$^{-٢}$ ءص

⇐ ظاس + جـ = $\frac{-٢}{\text{ص}}$

📖 **مثال ٨:** إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة ما عند النقطة (س،ص) يساوي

$\frac{\text{جا س} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$ ، فجد قاعدة العلاقة (ص) علماً بأنها تمر بالنقطة (π ، ١)؟

✍ **الحل:** ميل المماس = $\frac{\text{جتا س} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$ ⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{جتا س} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$

⇐ ٣ص^{٢} ءص = (جتاس − قا^{٢}س) ءس

⇐ ٣ $\int$ ص^{٢} ءص = $\int$ (جتاس − قا^{٢}س) ءس ⇐ ص^{٣} = جاس − ظاس + جـ

لكن النقطة (π ، ١) تمر بالمنحنى ⇐ ١ = ٠ − ٠ + جـ ⇐ جـ = ١

∴ ص^{٣} = جاس − ظاس + ١

مثال ٩: يسير جسم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت(ن) = \frac{١}{ع}$ ، $ع > ٠$ فإذا تحرك الجسم من السكون فقطع مسافة مقدارها $١٠\sqrt{٢}$م بعد ٤ ثوان من بدء الحركة، فجد المسافة التي قطعها الجسم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة؟

الحل: $ت(ن) = \frac{١}{ع} \Leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{١}{ع} \Leftarrow ع\,دع = دن \Leftarrow \int ع\,دع = \int دن \Leftarrow \frac{١}{٢}ع^{٢} = ن + جـ$

لكن الجسم بدأ من السكون ، $\therefore ع(٠) = ٠ \Leftarrow ٠ = جـ$

$\therefore \frac{١}{٢}ع^{٢} = ن \Leftarrow ع^{٢} = ٢ن \Leftarrow ع = \pm\sqrt{٢ن} \Leftarrow ع = \sqrt{٢ن}$ (لأن $ع > ٠$)

$ع = \sqrt{٢ن} \Leftarrow \frac{دف}{دن} = \sqrt{٢}\sqrt{ن} \Leftarrow دف = \sqrt{٢}\sqrt{ن}\,دن \Leftarrow \int دف = \int \sqrt{٢}\sqrt{ن}\,دن$

$\Leftarrow ف(ن) = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢}\times\sqrt{ن^{٣}} + جـ$ ، لكن $ف(٤) = ١٠\sqrt{٢} \Leftarrow ١٠\sqrt{٢} = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢}\times\sqrt{٦٤} + جـ$

$\Leftarrow ١٠\sqrt{٢} = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢}\times ٨ + جـ \Leftarrow جـ = ١٠\sqrt{٢} - \frac{١٦}{٣}\sqrt{٢} = \sqrt{٢}(\frac{١٤}{٣})$

$\therefore ف(ن) = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢}\times\sqrt{ن^{٣}} + \sqrt{٢}(\frac{١٤}{٣})$

مثال ١٠: إذا كان ميل منحنى اقتران ما هو $(٢س ص^{٢})$ ويمر بالنقطة $(٣ ، ١)$ ، فجد معادلة هذا المنحنى؟

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٢س ص^{٢} \Leftarrow دص = ٢س ص^{٢}\,دس \Leftarrow ص^{-٢}\,دص = ٢س\,دس$

$\Leftarrow \int ص^{-٢}\,دص = ٢\int س\,دس \Leftarrow \frac{-١}{ص} = س^{٢} + جـ \longleftarrow -١ = ٩ + جـ \longleftarrow جـ = -١٠$

$\Leftarrow \frac{١}{ص} = ١٠ - س^{٢}$

مثال ١١: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص) هو $٦س^{٢} - ٣٠س + ٣٦$ ، فجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن له قيمة عظمى محلية مقدارها ٢٨؟

الحل: $ق(س) = \int ق'(س)\,دس = \int (٦س^{٢} - ٣٠س + ٣٦)\,دس \Leftarrow ٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٣٦س + جـ$

$\therefore ق(س) = ٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٣٦س + جـ$ ، **ولكن له قيمة عظمى:**

$٦س^{٢} - ٣٠س + ٣٦ = ٠ \Leftarrow س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠ \Leftarrow (س-٣)(س-٢) = ٠ \Leftarrow س = ٢ ، ٣$

عندما $س = ٢$ ؛ $ق(٢) = ١٦ - ٦٠ + ٧٢ + جـ = ٢٨ \longleftarrow جـ = ٠$

$\therefore ق(س) = ٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٣٦س$

☆ أمثلة متنوعة :

مثال ١: $\int$ قتا^٢ $\sqrt{\text{س}}$ ءس

الحل: ص = $\sqrt{\text{س}}$ ⇐ ص^٢ = س ⇐ ٢ص ءص = ءس

⇐ $\int$ قتا^{٢}ص × (٢ص ءص) ⇐ ٢ $\int$ ص قتا^{٢}ص ءص.... أجزاء

ﻫ = ص ⟵ ءﻫ = ءص ، ءم = قتا^{٢}ص ءص ⟵ م = −ظتاص

∴ ٢ $\int$ ص قتا^{٢}ص ءص = − ص ظتاص + $\int$ ظتاص ءص ⇐ − ص ظتاص + $\int \frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}}$ ءص

⇐ − ص ظتاص + لو|جاص| + جـ

مثال ٢: $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}\sqrt{\text{١ − س}}}$

الحل: ص = $\sqrt{\text{١ − س}}$ ⇐ ص^٢ = ١ − س ⇐ س = ١ − ص^٢ ⇐ ءس = −٢ص ءص

$\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}\sqrt{\text{١ − س}}}$ = $\int \frac{\text{−٢ ص ءص}}{\text{(١ − ص}^٢\text{) ص}}$ ⇐ −٢ $\int \frac{\text{١}}{\text{(١+ص)(١−ص)}}$ ءص ⇐ $\frac{\text{١}}{\text{(١+ص)(١−ص)}}$ = $\frac{\text{أ}}{\text{١+ص}}$ + $\frac{\text{ب}}{\text{١−ص}}$

⇐ $\frac{\text{أ(١−ص)+ب(١+ص)}}{\text{(١+ص)(١−ص)}}$ ⇐ ١ = أ(١−ص)+ب(١+ص)

ص=١ ⟵ ١ = ٢ب ⟵ ب = $\frac{١}{٢}$ ، ص=−١ ⟵ ١ = ٢أ ⟵ أ = $\frac{١}{٢}$

∴ −٢ $\int \frac{\text{١}}{\text{(١+ص)(١−ص)}}$ ءص = −٢[$\frac{١}{٢}$ $\int \frac{\text{١}}{\text{١+ص}}$ ءص + $\frac{١}{٢}$ $\int \frac{\text{ب}}{\text{١−ص}}$ ءص] = −لو|١+ص| − لو|١−ص| + جـ

مثال ٣: $\int \frac{\text{ءس}}{\text{١ + جتا س}}$

الحل: $\int \frac{\text{ءس}}{\text{١ + جتا س}} \times \frac{\text{١ − جتا س}}{\text{١ − جتا س}}$ ⇐ $\int \frac{\text{١ − جتاس}}{\text{١ − جتا}^٢\text{س}}$ ءس ⇐ $\int \frac{\text{١ − جتا س}}{\text{جا}^٢\text{ س}}$ ءس

⇐ $\int$(قتا^{٢}س − ظتاس قتاس) ءس ⇐ − ظتاس + قتاس + جـ

مثال ٤: $\int \frac{\text{٢ + ٢ جتا}^٣\text{س}}{\text{١ + جتا ٢ س}}$ ءس

✍ **الحل**: $\int \frac{2+2جتا^2س}{1+جتا2س}$ ءس = $2\int \frac{1+جتا^2س}{جا^2س+جتا^2س+جتا^2س-جا^2س}$ ءس

$\Leftarrow \int \frac{1+جتا^2س}{جتا^2س}$ ءس $\Leftarrow \int (\frac{1}{جتا^2س}$ + جتاس) ءس $\Leftarrow \int$ قا^{2}س ءس+جاس+جـ $\Leftarrow$ ظاس+جاس+جـ

📖 **مثال ٥**: $\int$ جا٤س جا٥س ءس

✍ **الحل**: $\int$ جا٤س جا٥س ءس = $\frac{1}{2}\int$(جتا(−س) − جتا٩س) ءس $\Leftarrow \frac{1}{2}\int$(جتاس − جتا٩س) ءس

$\Leftarrow \frac{1}{2}$(جاس − $\frac{1}{9}$جا٩س) + جـ

📖 **مثال ٦**: إذا كان ق(س) = أس+ب ، وكان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) حيث م(٢)=٧ ، مَ(٢)=٢ ،أوجد قيمة كل من أ،ب ؟

✍ **الحل**: مَ(س) = ق(س) = أس+ب ⟵ م(٢) = ٢أ+ب = ٧ ....(١)

مً(س) = أ $\Leftarrow$ مً(٢) = أ = ٢ ⟵ أ = ٢

∴ ٤ +ب = ٧ ⟵ ب =٣........من معادلة(١).

📖 **مثال ٧**: حل المعادلة التفاضلية ($(\frac{ءص}{ءس})^3$ = ٦٤س)

✍ **الحل**: $(\frac{ءص}{ءس})^3$ = ٦٤س $\Leftarrow \sqrt[3]{(\frac{ءص}{ءس})^3} = \sqrt[3]{٦٤س} \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٤\sqrt[3]{س} \Leftarrow$ ءص =٤$\sqrt[3]{س}$ ءس

$\Leftarrow \int$ ءص =٤$\int\sqrt[3]{س}$ ءس $\Leftarrow$ ص = ٣ $\sqrt[3]{س^4}$ + جـ

📖 **مثال ٨**: $\int \frac{هـ^{س^{\frac{1}{2}}}}{(س^{\frac{1}{2}}+1)^2}$ ءس

✍ **الحل**: ص =$\sqrt{س}$ $\Leftarrow$ ص^2 = س $\Leftarrow$ ٢ص ءص = ءس

∴ $\int \frac{هـ^ص}{(ص+1)^2}$ × ٢ص ءص =٢$\int$ص(ص+١)$^{-2}$× هـ^ص ءص

ق = ص هـ^{ص} ← ءق = (ص هـ^{ص} + هـ^{ص}) ءص ، ءم = (ص+١)$^{-٢}$ ءص ⇐ م = −(ص+١)$^{-١}$

∴ − ٢ص هـ^{ص} (ص+١)$^{-١}$ + ٢ $\int$ (ص+١)$^{-١}$ × هـ^{ص} (ص + ١) ءص

⇐ −٢ص هـ^{ص} (ص+١)$^{-١}$ + ٢ $\int$ هـ^{ص} ءص ⇐ −٢ص هـ^{ص} (ص+١)$^{-١}$ + ٢ هـ^{ص} + جـ

مثال ٩: إذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ س^{ن} × هـ^{س} ءس ، أثبت أن ع$_{ن}$ = س^{ن} × هـ^{س} − ن ع$_{ن-١}$

الحل: ق = س^{ن} ← ءق = ن س$^{ن-١}$ ءس ، ءم = هـ^{س} ءس ← م = هـ^{س}

$\int$ س^{ن} × هـ^{س} ءس = س^{ن} × هـ^{س} − ن $\int$ هـ^{س} × س$^{ن-١}$ ءس ⇐ س^{ن} × هـ^{س} − ن ع$_{ن-١}$

مثال ١٠: إذا كان ق(٢)=٦ ، ق(٤)=٧ ، $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) ءس=٤ ،

فجد قيمة $\int_{١}^{٢}$ ٢س قَ(٢س) ءس؟

الحل: ص = ٢س ← ءص = ٢ ءس : س=١ ← ص=٢ ، س=٢ ← ص=٤

∴ $\int_{١}^{٢}$ ٢س قَ(٢س) ءس = $\int_{٢}^{٤}$ ص قَ(ص) × $\frac{١}{٢}$ ءص = $\frac{١}{٢}\int_{٢}^{٤}$ ص قَ(ص) × ءص ... *

ق = ص ← ءق = ءص ، ءم = قَ(ص) ءس ← م = ق(ص)

∴ * = $\frac{١}{٢}$[ص ق(ص) $\Big|_{٢}^{٤}$ − $\int_{٢}^{٤}$ ق(ص) ءص] ⇐ $\frac{١}{٢}$[(٤ق(٤) − ٢ق(٢)) − ٤]

⇐ $\frac{١}{٢}$[٤×٧ − ٢×٦ − ٤] ⇐ $\frac{١}{٢}$[١٢] = ٦

مثال ١١: $\int$ س هـ$^{س + لوس}$ ءس

الحل: $\int$ س هـ$^{س + لوس}$ ءس = $\int$ س هـ^{س} × هـ^{لوس} ءس = $\int$ س^{٢} هـ^{س} ءس

ق = س^{٢} ← ءق = ٢س ءس ، ءم = هـ^{س} ءس ← م = هـ^{س}

∴ $\int$ س^{٢} هـ^{س} ءس = س^{٢} × هـ^{س} − ٢ $\int$ س هـ^{س} ءس

ع = س ← ءع = ءس ، ءك = هـ^س ءس ← ك = هـ^س

∫ س² هـ^س ءس = س² × هـ^س − ٢[س هـ^س − ∫ هـ^س ءس] ⇐ س² × هـ^س − ٢[س هـ^س − هـ^س] + جـ

📖 **<u>مثال ١٢</u>:** إذا كان ∫ ق(س) ءس = ١٠ ، فجد ∫ جتا٢س × ق(جا٢س) ءس ، س ∈ [π/٤ ، π/٢] ؟

✍ **<u>الحل</u>:** ص = جا٢س ← ءص = ٢جتا٢س ءس ، س = π/٤ ← ص = ١ ، س = π/٢ ← ص = ٠

∴ ∫ جتا٢س × ق(ص) × ءص/(٢جتا٢س) ⇐ ½ ∫ ق(ص) ءص = ½ × ١٠ = ٥

📖 **<u>مثال ١٣</u>:** ∫ ١/(∛س − √س) ءس

✍ **<u>الحل</u>:** نجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين (٢ ، ٣) وهو العدد ٦

∴ نفرض ص = ⁶√س ← ص⁶ = س ← ٦ص⁵ ءص = ءس

∴ ∫ ١/(∛س − √س) ءس = ∫ ١/(ص² − ص³) × ٦ص⁵ ءص ⇐ ٦ ∫ ص³/(١ − ص) ءص

−ص² − ص − ١

ص³ | −ص + ١

−ص³ − ص²

ص²

−ص² − ص

ص

−ص − ١

١

∴ ٦ ∫ ص³/(١ − ص) ءص = ٦[∫ (−ص² − ص − ١) ءص + ∫ ١/(١ − ص) ءص]

⇐ ٦[−⅓ص³ − ½ص² − ص − لو|١ − ص|] + جـ

📖 **<u>مثال ١٤</u>:** إذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطتين (١ ، ٣) و (٥ ، ٩) ، وكان

∫ ق(س) ءس = ٧ ، فجد :

١. $\int_{١}^{٥} \text{ق}'(\text{س})\ \text{ءس}$

٢. $\int_{٠}^{٢} ٨\text{س}\ \text{ق}'(\text{س}^{٢}+١)\ \text{ءس}$

✍ **الحل:**

١. $\int_{١}^{٥} \text{ق}'(\text{س})\ \text{ءس} = \text{ق}(\text{س})\Big|_{١}^{٥} = \text{ق}(٥)-\text{ق}(١) = ٩-٣ = ٦$

٢. $\text{ص} = \text{س}^{٢}+١ \longrightarrow \text{ءص} = ٢\text{س}\ \text{ءس}$ ، $\text{س} = ٠ \longrightarrow \text{ص}=١$ ، $\text{س}=٢ \longrightarrow \text{ص} =٥$

$\therefore \int_{٠}^{٢} ٨\text{س}\ \text{ق}'(\text{س}^{٢}+١)\ \text{ءس} = ٤\int_{١}^{٥} \text{س}\times\text{ق}'(\text{ص})\times\frac{١}{\text{س}}\ \text{ءص} \Leftarrow ٤\int_{١}^{٥} \text{ق}'(\text{ص})\ \text{ءص} = ٤\times ٧ = ١١$

📖 **مثال ١٥:** $\int \sqrt{١-\text{جاس}}\ \text{ءس}$ ، $\text{س} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

✍ **الحل:** $\int \sqrt{١-\text{جاس}} \times \frac{\sqrt{١+\text{جاس}}}{\sqrt{١+\text{جاس}}}\ \text{ءس} \Leftarrow \int \frac{\sqrt{(١-\text{جاس})}}{\sqrt{١+\text{جاس}}}\ \text{ءس} = \int \frac{\sqrt{\text{جتاس}}}{\sqrt{١+\text{جاس}}}\ \text{ءس}$

$\Leftarrow \int \frac{|\text{جتاس}|}{(١+\text{جاس})^{\frac{١}{٢}}}\ \text{ءس}$ ، $\text{جتاس} = ٠ \longrightarrow \text{س} = \pi \notin [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

$\Leftarrow \int \text{جتاس}(١+\text{جاس})^{\frac{-١}{٢}}\ \text{ءس}$ ، $\text{ص} = ١ + \text{جاس} \longrightarrow \text{ءص} = \text{جتاس}\ \text{ءس}$

$\text{س} = ٠ \longrightarrow \text{ص} = ١$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{٢} \longrightarrow \text{ص} = ٢$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} \text{جتاس}\times\frac{١}{\sqrt{\text{ص}}}\times\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} \Leftarrow \int_{١}^{٢} \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءص} \Leftarrow ٢\sqrt{\text{ص}}\Big|_{١}^{٢} = ٢\sqrt{٢} - ٢$

📖 **مثال ١٦:** $\int \text{جا}٢\text{س}\times \text{هـ}^{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

✍ **الحل:** $\int \text{جا}٢\text{س}\times \text{هـ}^{\text{جتاس}}\ \text{ءس} = \int ٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}\times \text{هـ}^{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جتاس} \longrightarrow \text{ءص} = -\text{جاس}\ \text{ءس} \longrightarrow \text{ءس} = -\frac{\text{ءص}}{\text{جاس}}$

$\therefore \int ٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}\times \text{هـ}^{\text{جتاس}}\ \text{ءس} = -٢\int \text{جاس}\ \text{ص}\times \text{هـ}^{\text{ص}}\times\frac{\text{ءص}}{\text{جاس}} \Leftarrow -٢\int \text{ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$ع = ص \longleftarrow دع = دص$ ، $دم = هـ^{ص}\ دص \longleftarrow م = هـ^{ص}$

$\therefore -٢ \int ص\, هـ^{ص}\ دص = -٢\left[ص\, هـ^{ص} - \int هـ^{ص}\ دص\right] \Leftarrow -٢\left[ص\, هـ^{ص} - هـ^{ص}\right] + جـ$

$\Leftarrow -٢\ جتاس \times هـ^{جتاس} + ٢\ هـ^{جتاس} + جـ$

<u>مثال ١٧</u>: إذا كان $\int_{١}^{٢} س\, ق(س)\ دس = -\frac{١}{٤}$ ، فجد قيمة $\int_{٠}^{لو٤} هـ^{س}\, ق(\sqrt{هـ^{س}})\ دس$؟

<u>الحل</u>: $ص = \sqrt{هـ^{س}} \longleftarrow ص^{٢} = هـ^{س} \longleftarrow ٢ص\ دص = هـ^{س}\ دس \Leftarrow ٢ص\ دص = ص^{٢}\ دس$

$\Leftarrow ٢\ دص = ص\ دس \longleftarrow دس = \frac{٢}{ص}\ دص$

$س = ٠ \longleftarrow ص = ١$ ، $س = لو٤ \longleftarrow ص = ٢$

$\therefore \int_{٠}^{لو٤} هـ^{س}\, ق(\sqrt{هـ^{س}})\ دس = \int_{١}^{٢} ص^{٢} \times ق(ص) \times \frac{٢}{ص}\ دص \Leftarrow ٢\int_{١}^{٢} ق(ص)\ ص\ دص = ٢ \times -\frac{١}{٤} = -\frac{١}{٢}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس التاسع : المساحات

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [أ ، ب] فإن المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) والمستقيمين س=أ ، س=ب ومحور السينات تُعطى بالعلاقة التالية:

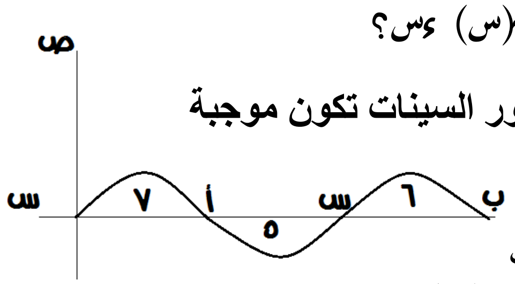
م = | ∫ من أ إلى ب ق(س) ءس |

حالات المساحة:

١. مساحة محصورة بين منحنى وأحد المحاور الرئيسية.
٢. مساحة محصورة بين منحنيين.
٣. مساحة محصورة بين منحنى ومستقيمين ومحور السينات.
٤. مساحة محصورة بين ثلاثة منحنيات فأكثر.

الحالة الأولى: مساحة محصورة بين منحنى وأحد المحاور الرئيسية..........

مثال ١: اعتماداً على الشكل التالي اوجد قيمة ∫ من أ إلى ب ق(س) ءس؟



الحل: في الرسم البياني دائماً المنطقية الواقعة فوق محور السينات تكون موجبة والمنطقة الواقعة أسفل محور السينات تكون سالبة وبناءً على ذلك فسوف يكون:

∫ من أ إلى ب ق(س) ءس = ∫ ق(س) ءس (إلى أ) + ∫ من أ إلى س ق(س) ءس + ∫ من س إلى ب ق(س) ءس

⇐ ٧ + (−٥) + ٦ = ٨

مثال ٢: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ٢س−٤ ،س ∋ [٣ ،٥] ومحور السينات؟

الحل: في مثل هذه الحالة المساحة تكون للاقتران ضمن الفترة المؤثرة على الاقتران مباشرة .

م = ∫ من ٣ إلى ٥ (٢س−٤) ءس = (س²−٤س) | من ٣ إلى ٥ = ٤٥ − ٢١ = ٢٤

مثال ٣: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}+١$ ومحور السينات حيث $\text{س} \in [-٢ ، ٢]$؟

الحل: $\text{م} = \int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣}+١)\ \text{ءس} = (\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \text{س})\Big|_{-٢}^{٢} = ٦ - ٢ = ٤$

مثال ٤: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جتاس ، ومحور السينات ، حيث $\text{س} \in [٠ ، \pi]$؟

الحل: $\text{م} = \int_{٠}^{\pi} \text{جتاس}\ \text{ءس} = \text{جاس}\Big|_{٠}^{\pi} = ٠ - ٠ = ٠$

مثال ٥: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص} = \text{س}^{٢}-\text{س}-٢$ ومحور السينات؟

الحل: عندما تكون حدود التكامل (الفترة) غير معطاة ، يجب إيجادها:

ومعنى أن المنحنى يقطع محور السينات هو أن ص=٠.

$\Leftarrow \text{س}^{٢}-\text{س}-٢ = (\text{س}-٢)(\text{س}+١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢، -١$

$\therefore \text{م} = \int_{-١}^{٢} (\text{س}^{٢}-\text{س}-٢)\ \text{ءس} = (\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}-٢\text{س})\Big|_{-١}^{٢} = (-\frac{١٠}{٣}) - (\frac{٧}{٦}) = |-\frac{٢٧}{٦}| = \frac{٢٧}{٦}$

مثال ٦: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص}^{٢} = ٤-\text{س}$ ومحور الصادات؟

الحل: $\text{س} = ٤-\text{ص}^{٢}$ **، ومعنى "ومحور االصادات" هو أن** $\text{س}=٠ \Leftarrow \text{ص}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{ص} = \pm ٢$

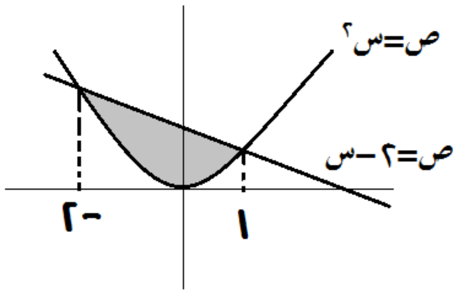
$\therefore \text{م} = \int_{-٢}^{٢} (٤-\text{ص}^{٢})\ \text{ءص} = (٤\text{ص}-\frac{١}{٣}\text{ص}^{٣})\Big|_{-٢}^{٢} = \frac{١٦}{٣} - (-\frac{١٦}{٣}) = \frac{٣٢}{٣}$

الحالة الثانية: مساحة محصورة بين منحنيين.............

- **في هذه النوع من الأسئلة لا يعطي حدود التكامل عادة ، فيجب علينا إيجادها (قيم س) وذلك من خلال مساواة الاقترانين ببعضهما.**

➢ م $= \int$ (الاقتران الأكبر) − (الاقتران الأصغر)

📖 **مثال ٧:** أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=س^{٢} ومنحنى الاقتران هـ(س)=٢ − س؟



✍ **الحل:** لإيجاد حدود التكامل نساوي الاقترانين ببعضهما ونجد قيم س كما يلي:

س^{٢} =٢− س ⇐ س^{٢}+س−٢=٠ ⇐ (س+٢)(س−١)=٠ ⇐ س = −٢ ، ١

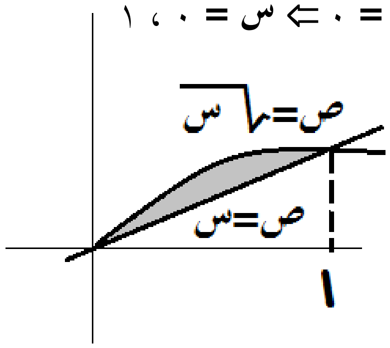
ولتحديد الاقتران الأكبر والاقتران الأصغر نأخذ قيمة واقعة في الفترة من [−٢ ، ١] ونقارن النتائج كما يلي:

لنأخذ العدد (٠) : ق(٠)= ٠ ، هـ(٠)= ٢ ، ٢ > ٠ ⟵ هـ(س) > ق(س)

∴ م = $\int_{-٢}^{١}$ (٢−س−س^{٢}) ءس = (٢س − $\frac{١}{٢}$س^{٢} − $\frac{١}{٣}$س^{٣}) $\Big|_{-٢}^{١}$ = $\frac{٧}{٦}$ − (−$\frac{١٠}{٣}$) = $\frac{٢٧}{٦}$

📖 **مثال ٨:** أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= س ومنحنى الاقتران هـ(س)=$\sqrt{\text{س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\sqrt{\text{س}}$ = س ⇐ س = س^{٢} ⇐ س^{٢}− س =٠ ⇐ س(س−١) = ٠ ⇐ س = ٠ ، ١



ق(٠,٥) = ٠,٥ ، هـ(٠,٥) = ٠,٧ ⇐ ق(س) < هـ(س)

∴ م = $\int_{٠}^{١}$(هـ(س) − ق(س)) ءس = $\int_{٠}^{١}$($\sqrt{\text{س}}$−س) ءس

⇐ ($\frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}}$ − $\frac{١}{٢}$س^{٢}) $\Big|_{٠}^{١}$ = $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$

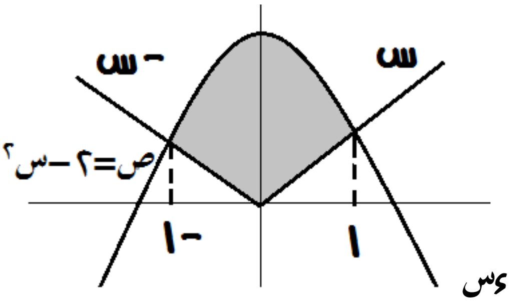
📖 **مثال ٩:** أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=|س| ومنحنى الاقتران هـ(س)=٢− س^{٢}؟

✍ **الحل:** |س| =٠ ⇐ س = ٠ ⟵ ق(س) =|س| = $\begin{cases} \text{س} ، & \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

∴ |س| = ٢ −س^{٢} ⇐ $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = (٢−س^{٢}) ⇐ س^{٢} =(٢−س^{٢})^{٢} ⇐ س^{٢} = ٤−٤س^{٢}+س^{٤}

⇐ س^4−٥س^2+٤ = ٠ ⇐ (س^2−٤)(س^2−١) = ٠ ⇐ س^2 = ٤ ، س^2 = ١

⇐ س = ±٢ ، ±١ ⟵ **نأخذ ±١ لأنها تحقق المعادلة**



ولتحديد الاقتران الأكبر:

س = ٠ ⟵ ق(٠) = ٠ ، هـ(٠) = ٢

هـ(س) > ق(س)

$$\therefore \text{م} = \int_{-1}^{1}[\text{هـ(س)} - \text{ق(س)}]\,\text{ءس} = \int_{-1}^{1}[2 - \text{س}^2 - |\text{س}|]\,\text{ءس}$$

$$\Leftarrow \int_{-1}^{0}[2 - \text{س}^2 + \text{س}]\,\text{ءس} + \int_{0}^{1}[2 - \text{س}^2 - \text{س}]\,\text{ءس} = \left(2\text{س} - \tfrac{1}{3}\text{س}^3 + \tfrac{1}{2}\text{س}^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(2\text{س} - \tfrac{1}{3}\text{س}^3 - \tfrac{1}{2}\text{س}^2\right)\Big|_{0}^{1}$$

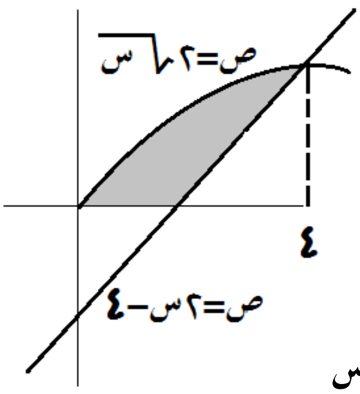
$$= -\left(-2 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{7}{3}$$

مثال ١٠: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص^2=٤س ، ومنحنى الاقتران ص=٢س−٤ ومحور السينات الموجب؟

الحل: ص^2=٤س ⟵ ص = ٢$\sqrt{\text{س}}$ ، ∴ ٢$\sqrt{\text{س}}$ = ٢س−٤ ⇐ $\sqrt{\text{س}}$ = س−٢

⇐ س−$\sqrt{\text{س}}$−٢=٠ ⇐ ($\sqrt{\text{س}}$−٢)($\sqrt{\text{س}}$+١) = ٠

⟵ $\sqrt{\text{س}}$=٢ ⇐ س=٤، $\sqrt{\text{س}}$=−١ **(غير ممكن)**



نأخذ العدد ٢ ونعوضه في كلا الاقترانين لمعرف الاقتران الأكبر على النحو الآتي:

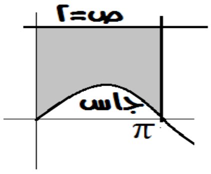
٢$\sqrt{2}$ ≈ ٣ ، ٢×٢−٤ = ٠

$$\therefore \text{م} = \int_{0}^{4}[2\sqrt{\text{س}} - (2\text{س} - 4)]\,\text{ءس} = \int_{0}^{4}[2\sqrt{\text{س}} - 2\text{س} + 4]\,\text{ءس}$$

$$\Leftarrow \left(\tfrac{4}{3}\sqrt{\text{س}^3} - \text{س}^2 + 4\text{س}\right)\Big|_{0}^{4} \Leftarrow \tfrac{32}{3}$$

الحالة الثالثة: مساحة محصورة بين منحنى ومستقيمين ومحور السينات.......

📖 **مثال ١١: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران** ص = جاس ، **والمستقيم ص=٢ ، والمستقيم** س=π **، ومحور السينات؟**



✍ **الحل:** م = $\int_{0}^{\pi}$ (٢ − جاس) ءس = (٢س + جتاس) $\Big|_{0}^{\pi}$ = ٢π−٢

📖 **مثال ١٢:** أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص =|جاس| ، والمستقيم ص=١ ، ومحور الصادات؟

✍ **الحل:** |جاس| = [جاس : س ≥ ٠ ، − جاس : س < ٠]

جاس = ١ ⇐ س = $\frac{1}{2}\pi$ ، − جاس = ١ ⇐ س= − $\frac{1}{2}\pi$

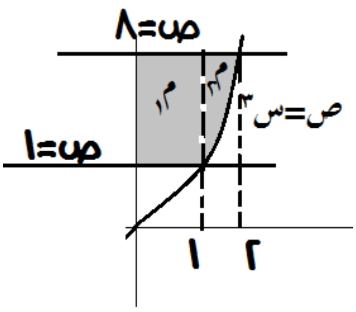
∴ م = $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0}$ (١−جاس) ءس + $\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}$ (١ − جاس) ءس = ٢ $\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}$ (١ − جاس) ءس=(س+جتاس) $\Big|_{0}^{\frac{1}{2}\pi}$

⇐ $\frac{1}{2}\pi$ + ١

➯ ***الحالة الرابعة:*** مساحة محصورة بين ثلاثة منحنيات فأكثر.......

➢ **هنا يفضّل الرسم البياني للاقترانات والمستقيمات المعطاه لكي نحدد فيما إذا كان يوجد تجزئة للتكامل:**

📖 **مثال ١٣: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران** ص = س^{3} ، والمستقيمين ص=١ ، ص=٨ ، ومحور الصادات؟



✍ **الحل:** س^{3}=٨ ⟵ س=٢

س^{3}=١ ⟵ س=١

م$_{1}$= $\int_{0}^{1}$ (٨−١) ءس = ٧×١ = ٧

م$_{2}$= $\int_{1}^{2}$ (٨−س^{3}) ءس = (٨س−$\frac{1}{4}$س^{4}) $\Big|_{1}^{2}$ = ١٢ − $\frac{31}{4}$

م = م$_{1}$+م$_{2}$ = ٧+ ١٢ − $\frac{31}{4}$ = ١٩ − $\frac{31}{4}$ = $\frac{45}{4}$

➯ **حل آخر: من الممكن أن نكامل بدلالة المتغير ص كما يلي:**

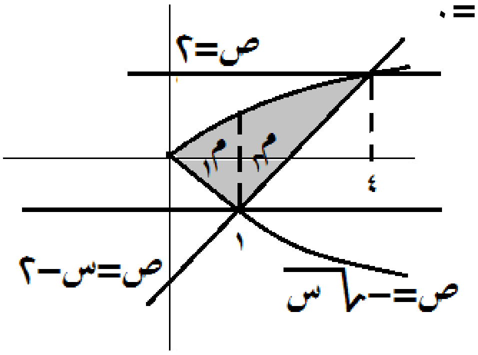
$\text{ص}=\text{س}^{٣} \longrightarrow \text{س} = \sqrt[٣]{\text{ص}}$

$\text{م} = \int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{\text{ص}}\ \text{ءص} = \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{\text{ص}^{٤}}\Big|_{١}^{٨} = \frac{٣}{٤}(١٦ - ١) = \frac{٤٥}{٣}$

مثال ١٤: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص}^{٢} = \text{س}$ ومنحنى الاقتران $\text{ص}=\text{س}-٢$ ، والمستقيمين $\text{ص}=٢$ ، $\text{ص}=-١$؟

الحل:

$\text{ص}^{٢}=\text{س} \longrightarrow \text{ص}=\pm\sqrt{\text{س}}$



$\text{س}-٢=\sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{س}-\sqrt{\text{س}}-٢ = ٠ \longrightarrow (\sqrt{\text{س}}-٢)(\sqrt{\text{س}}+١)=٠$

$\Leftarrow \sqrt{\text{س}}=٢ \longrightarrow \text{س}=٤$ ، $-\sqrt{\text{س}} = \text{س}-٢$

$\Leftarrow \text{س}+\sqrt{\text{س}}-٢=٠ \longrightarrow (\sqrt{\text{س}}+٢)(\sqrt{\text{س}}-١)=٠$

$\longrightarrow \sqrt{\text{س}} = -٢$ (غير ممكن)

$\sqrt{\text{س}}=١ \longrightarrow \text{س}=١$

$\text{م}_{١} = \int_{٠}^{١}\left(\sqrt{\text{س}} - (-\sqrt{\text{س}})\right)\text{ءس} = \int_{٠}^{١} ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{٤}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}}\Big|_{٠}^{١} = \frac{٤}{٣}$

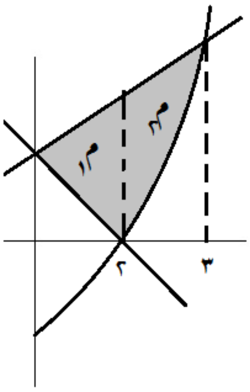
$\text{م}_{٢} = \int_{١}^{٤}\left(\sqrt{\text{س}} - (\text{س}-٢)\right)\text{ءس} = \int_{١}^{٤}(\sqrt{\text{س}}-\text{س}+٢)\ \text{ءس} = \left(\frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}+٢\text{س}\right)\Big|_{١}^{٤}$

$\Leftarrow \left(\frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨\right) - \left(\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢} + ٢\right) = \frac{١٦}{٣} - \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢ = \frac{١٤}{٣} - ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{٨}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{١٩}{٦}$

$\therefore \text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢} = \frac{٤}{٣} + \frac{١٩}{٦} = \frac{٢٧}{٦} = \frac{٩}{٢}$

مثال ١٥: أوجد المساحة الواقعة في الربع الأول، والمحصورة بين المنحنيات التالية :

$\text{ق}(\text{س})= \text{س}^{٢}-٤$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}+٢$ ، $\text{م}(\text{س})=٢ - \text{س}$؟



الحل: $\text{س}^{٢}-٤ = \text{س}+٢ \Leftarrow \text{س}^{٢}-\text{س}-٦ = ٠ \Leftarrow (\text{س}-٣)(\text{س}+٢)=٠$

$\Leftarrow \text{س}=٣$ ، $\text{س}=-٢$

$\text{س}^{٢}-٤ = ٢ - \text{س} \Leftarrow \text{س}^{٢}+\text{س}-٦=٠$

$\Leftarrow (\text{س}+٣)(\text{س}-٢)=٠$

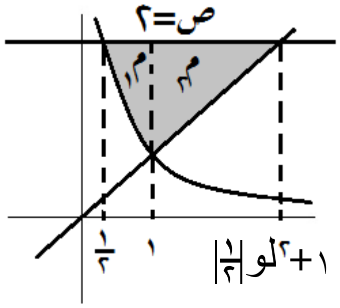
$\Leftarrow \text{س}=-٣$ ، $\text{س}=٢$

$م_١ = \int_{٠}^{٢} ((س+٢) - (٢-س))\, ءس = \int_{٠}^{٢} ٢س\, ءس = س^٢ \Big|_{٠}^{٢} = ٤$

$م_٢ = \int_{٢}^{٣} ((س+٢) - (س^٢-٤))\, ءس = \int_{٢}^{٣} (س-س^٢+٦)\, ءس = (\frac{١}{٢}س^٢ - \frac{١}{٣}س^٣ + ٦س) \Big|_{٢}^{٣} = \frac{١٣}{٦}$

$\therefore م = م_١ + م_٢ = ٤ + \frac{١٦}{٦} = \frac{٤٠}{٦} = \frac{٢٠}{٣}$

📖 **مثال ١٦: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران** $ق(س) = س$ ومنحنى الاقتران $ه(س) = \frac{١}{س}$ والمستقيم $ص=٢$



✍ **الحل:** $\frac{١}{س} = ٢ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{س} = س \Leftarrow س = ١$

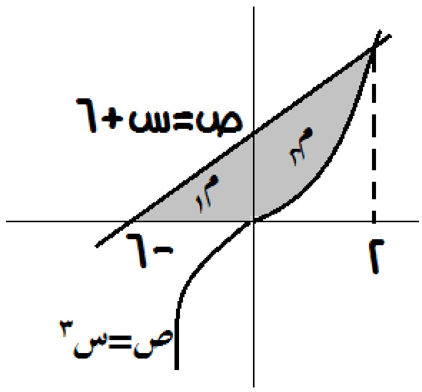
$م_١ = \int_{\frac{١}{٢}}^{١} (٢ - \frac{١}{س})\, ءس = (٢س - لو|س|) \Big|_{\frac{١}{٢}}^{١} = (٢-٠) - (١ - لو|\frac{١}{٢}|) = ١ + {}^{٢}لو|\frac{١}{٢}|$

$م_٢ = \int_{١}^{٢} (٢ - س)\, ءس = (٢س - \frac{١}{٢}س^٢) \Big|_{١}^{٢} = ٢ - \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢}$

$\therefore م = م_١ + م_٢ = \frac{٣}{٢} + لو|\frac{١}{٢}|$

📖 **مثال ١٧: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران** $ق(س) = س^٣$ ومنحنى الاقتران $ص=س+٦$ ، والمستقيم $ص=٠$.

✍ **الحل:**



$س^٣ = س+٦ \Leftarrow س^٣-س-٦=٠ \Leftarrow س=٢$ ، $س+٦=٠ \Leftarrow س = -٦$

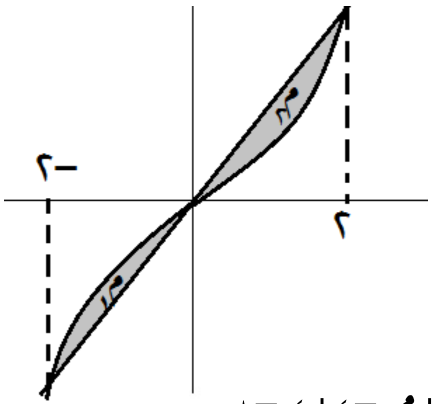
$م_١ = \int_{-٦}^{٠} (س+٦)\, ءس = (\frac{١}{٢}س^٢+٦س) \Big|_{-٦}^{٠} = ١٨-٣٦ = ١٨$

$م_٢ = \int_{٠}^{٢} (س+٦-س^٣)\, ءس = (\frac{١}{٢}س^٢+٦س-\frac{١}{٤}س^٤) \Big|_{٠}^{٢} = ١٠$

$\therefore م = م_١ + م_٢ = ١٨+١٠ = ٢٨$

📖 **مثال ١٨: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى العلاقة** $ص - س^٣ = ٠$ ومنحنى العلاقة $\frac{ص}{س} = ٤$

✍ **الحل:**



ص=س^{٣} ، ص=٤س

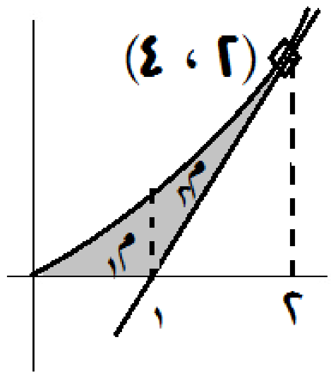
س^{٣}=٤س ⟵ س^{٣}−٤س=٠ ⟵ س(س^{٢}−٤)=٠

⟵ س=٠،±٢

م$_{١}$ = $\int_{-٢}^{٠}$ (س^{٣}−٤س) ءس = ($\frac{١}{٤}$س^{٤}−٢س^{٢}) $\Big|_{-٢}^{٠}$ =٤

م$_{٢}$ = $\int_{٠}^{٢}$ (٤س−س^{٣}) ءس =(٢س^{٢}−$\frac{١}{٤}$س^{٤}) $\Big|_{٠}^{٢}$ =٤ ، ∴ م = م$_{١}$+م$_{٢}$ =٤+٤ =٨

مثال ١٩: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=س^{٢}، ومحور السينات والمماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٢ ، ٤)؟



الحل: يجب أولاً إيجاد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) :

م = قَ(٢) = ٤ ⟵ الميل

∴ معادلة المماس هي: ص−٤=٤(س−٢) ⇐ ص=٤س−٤

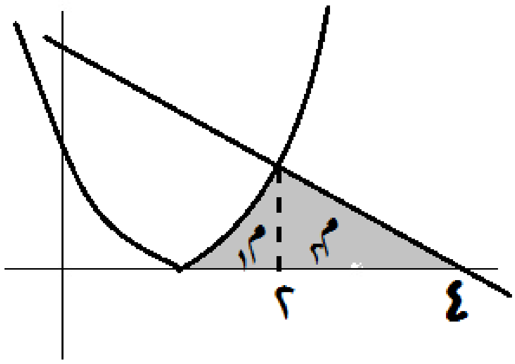
٤س−٤=٠ ⇐ س=١ ، س^{٢}=٤س−٤ ⇐ س^{٢}−٤س+٤=٠

⇐ (س−٢)^{٢}=٠ ⇐ س=٢

م$_{١}$=$\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس = $\frac{١}{٣}$س^{٣} $\Big|_{٠}^{١}$ = $\frac{١}{٣}$

م$_{٢}$=$\int_{١}^{٢}$ (س^{٢}−٤س+٤) ءس = ($\frac{١}{٣}$س^{٣} − ٢س^{٢}+٤س) $\Big|_{١}^{٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ، ∴ م = $\frac{٢}{٣}$

مثال ٢٠: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص=(س−١)^{٢}، ومنحنى العلاقة ص=٢−$\frac{١}{٢}$س ، ومحور السينات؟



الحل:

(س−١)^{٢}=٢−$\frac{١}{٢}$س ⟵ س^{٢}−٢س+١ = ٢−$\frac{١}{٢}$س

⟵ س^{٢}−$\frac{٣}{٢}$س−١ = ٠ ⇐ ٢س^{٢}−٣س−٢=٠

⇐ س = −$\frac{١}{٢}$ ، ٢

٢−$\frac{١}{٢}$س=٠ ⇐ س=٤

$م_1 = \int_{1}^{2} (س^2 - 2س + 1)\ ءس = (\frac{1}{3}س^3 - س^2 + س) \Big|_{1}^{2} = \frac{1}{3}$

$م_2 = \int_{2}^{4} (2 - \frac{1}{2}س)\ ءس \Leftarrow (2س - \frac{1}{4}س^2) \Big|_{2}^{4} = 1$

$\therefore م = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

📖 **<u>مثال ٢١</u>: إذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=س² ومنحنى الاقتران هـ(س)=أس تساوي ٤/٣ ، فما قيمة الثابت أ (أ>٠)؟**

✍ **<u>الحل</u>:** لأن المساحة محصورة بين المنحنيين إذن ∵ ق(س) = هـ(س) ⇐ س² = أس

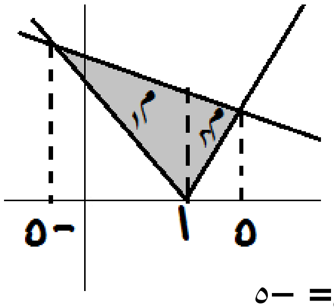
$\Leftarrow س^2 - أس = 0 \longleftarrow س(س - أ) = 0 \longleftarrow س = 0 ، أ$

$\therefore م = \int_{0}^{أ} (أس - س^2)\ ءس = (\frac{أ}{2}س^2 - \frac{1}{3}س^3) \Big|_{0}^{أ} = \frac{4}{3} \Leftarrow 3أ^3 = 24 \Leftarrow أ^3 = 8 \longleftarrow أ = 2$

📖 **<u>مثال ٢٢</u>: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= −⅕س+٧ ، والاقترن**

هـ(س)= ٢+|س−١|؟

✍ **<u>الحل</u>:**



هـ(س)= [س+١ : س> ١ ، ٣−س : س<١]

☜ $س + 1 = -\frac{1}{5}س + 7 \Leftarrow 5س + 5 = -س + 35 \Leftarrow 6س - 30 = 0 \Leftarrow س = 5$

☜ $3 - س = -\frac{1}{5}س + 7 \Leftarrow 15 - 5س = -س + 35 \Leftarrow 4س + 20 = 0 \Leftarrow س = -5$

$م_1 = \int_{-5}^{1} \left((-\frac{1}{5}س + 7) - (3 - س)\right)\ ءس = \int_{-5}^{1} (\frac{4}{5}س + 4)\ ءس \Leftarrow (\frac{4}{10}س^2 + 4س) \Big|_{-5}^{1} = \frac{72}{5}$

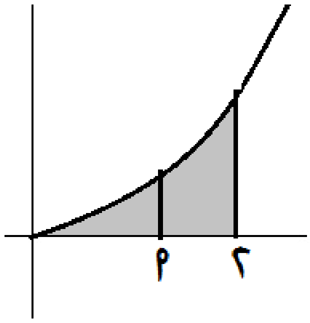
$م_2 = \int_{1}^{5} \left((-\frac{1}{5}س + 7) - (س + 1)\right)\ ءس = \int_{1}^{5} (-\frac{6}{5}س - 6)\ ءس = (-\frac{6}{10}س^2 - 6س) \Big|_{1}^{5} = -\frac{192}{5}$

$\therefore م = م_1 + م_2 = \frac{72}{5} - \frac{192}{5} = -\frac{120}{5} = |-24| = 24$

📖 **<u>مثال ٢٣</u>: أوجد قيمة الثابت أ بحيث أن المستقيم س=أ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى العلاقة س= √ص والمستقيم س=٢ ومحور السينات إلى قسمين متساويين؟**

✍ **<u>الحل</u>:**

$$\text{ص}=\text{س}^{2}\ \text{،}\ \text{س}=2$$



$$\int_{0}^{\text{م}} \text{س}^{2}\,\text{ءس} = \int_{\text{م}}^{2} \text{س}^{2}\,\text{ءس} \Leftarrow \left[\tfrac{1}{3}\text{س}^{3}\right]_{0}^{\text{م}} = \left[\tfrac{1}{3}\text{س}^{3}\right]_{\text{م}}^{2}$$

$$\Leftarrow \tfrac{1}{3}\text{م}^{3} = \tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{3}\text{م}^{3} \Leftarrow \text{م}^{3} = 4 \longrightarrow \text{م} = \sqrt[3]{4}$$

الدرس العاشر : الحجوم الدورانية

☜ **الحجم الناتج عن دوران منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ حول أحد المحاور الرئيسية هو:**

$$\text{ح} = \pi \int \text{ق}^{2}(\text{س})\ \text{ءس}$$

☜ **الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ ومنحنى الاقتران $\text{هـ}(\text{س})$ على فرض أن $\text{ق}(\text{س}) > \text{هـ}(\text{س})$ هو:**

$$\text{ح} = \pi \int [\text{ق}^{2}(\text{س}) - \text{هـ}^{2}(\text{س})]\ \text{ءس}$$

📖 **<u>مثال ١</u>:** أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$ ، $\text{س} \in [\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات؟

✍ **<u>الحل</u>:** $\text{ح} = \pi \int \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{ءس}$ ، $\text{س} \in [\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$

$$\Leftarrow \pi \int \tfrac{١}{٢}(١+\text{جتا}٢\text{س})\ \text{ءس} \Leftarrow \tfrac{١}{٢}\pi(\text{س}+\tfrac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}) \Big|_{٠}^{\frac{١}{٢}\pi} \Leftarrow \tfrac{١}{٢}\pi[(\tfrac{١}{٢}\pi+٠) - (٠)] = \tfrac{١}{٤}\pi^{٢}$$

📖 **<u>مثال ٢</u>:** أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٤$ ، $\text{س} \in [٣،٥]$ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات؟

✍ **<u>الحل</u>:** $\text{ح} = \pi \int_{٣}^{٥} (٢\text{س}-٤)^{٢}\ \text{ءس} = \pi \int_{٣}^{٥} (٤\text{س}^{٢} - ١٦\text{س} + ١٦)\ \text{ءس} = \pi(\tfrac{٤}{٣}\text{س}^{٣} - ٨\text{س}^{٢} + ١٦\text{س}) \Big|_{٣}^{٥}$

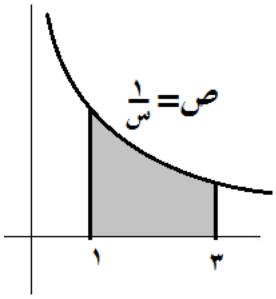
$$\Leftarrow \pi[\tfrac{١٤٠}{٣} - ١٢] = \tfrac{١٠٤}{٣}\pi$$

📖 **<u>مثال ٣</u>:** أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ ، والمستقيمين $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٣$ ومحور السينات دورة كاملة حول :

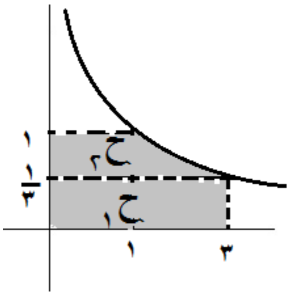
١ . محور السينات.

٢ . محور الصادات.

✍ **<u>الحل</u>:**



١. $ح = \pi \int_{١}^{٣} \frac{١}{س^٢}\, ءس \Leftarrow \pi \int س^{-٢}\, ءس \Leftarrow -\pi \times \frac{١}{س} \Big|_{١}^{٣} \Leftarrow -\pi(\frac{١}{٣} - ١) = \frac{٢}{٣}\pi$



٢. $ص = \frac{١}{س} \Leftarrow س = \frac{١}{ص}$ ، $س = ١ \longleftarrow ص = ١$ ، $س = ٣ \longleftarrow ص = \frac{١}{٣}$

$ح_١ = \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (٩-١)\, ءص \Leftarrow \frac{٨}{٣}\pi$

$\therefore ح_٢ = \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (\frac{١}{ص^٢} - ١)\, ءص \Leftarrow \pi(-\frac{١}{ص} - ص) \Big|_{\frac{١}{٣}}^{١} \Leftarrow \frac{٤}{٣}\pi$

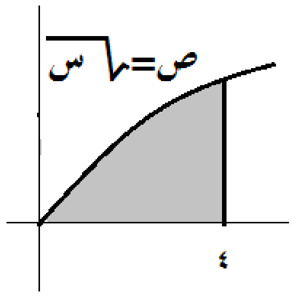
$\therefore ح = ح_١ + ح_٢ = (\frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٣})\pi = ٤\pi$

📖 **مثال ٤:** أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = \sqrt{س}$ ، والمستقيم $س = ٤$ ومحور السينات دورة كاملة حول:

١. محور السينات.

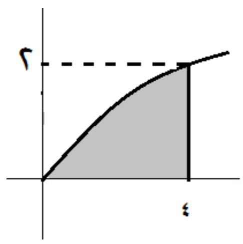
٢. محور الصادات.

✍ **الحل:**



١. $ح = \pi \int_{٠}^{٤} (\sqrt{س})^٢\, ءس = \pi \int_{٠}^{٤} س\, ءس = \frac{١}{٢}\pi\, س^٢ \Big|_{٠}^{٤}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢}\pi(٤) = ٢\pi$



٢. $ص = \sqrt{س} \Leftarrow س = ص^٢$

$س = ٠ \longleftarrow ص = ٠$ ، $س = ٤ \longleftarrow ص = ٢$

$ح = \pi \int_{٠}^{٢} (١٦ - ص^٤)\, ءص \Leftarrow \pi(١٦ص - \frac{١}{٥}ص^٥) \Big|_{٠}^{٢} \Leftarrow ٢٥\pi$

📖 **مثال ٥:** أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = \frac{١}{س}$ ، ومنحنى الاقتران $ص = س$ والمستقيم $ص = ٣$ دورة كاملة حول:

١. محور السينات.

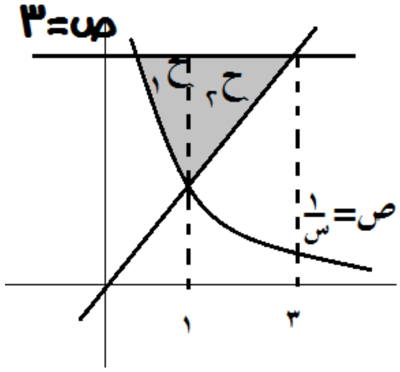
٢. محور الصادات.

✍ **الحل:**

١. ☜ $٣ = \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٣}$

☜ $\frac{١}{\text{س}} = \text{س} \Leftarrow \text{س} = ١$

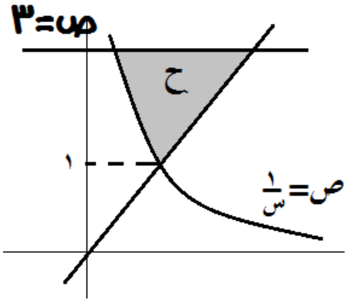
☜ $\text{س} = ٣$



$\text{ح}_١ = \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (٩ - \frac{١}{\text{س}^٢})\, \text{ءس} = ٤\pi$

$\text{ح}_٢ = \pi \int_{١}^{٣} (٩ - \text{س}^٢)\, \text{ءس} = \frac{٢٨}{٣}\pi$ ، $\therefore \text{ح} = \text{ح}_١ + \text{ح}_٢ = ٤\pi + \frac{٢٨}{٣}\pi = \frac{٤٠}{٣}\pi$

٢. $\text{س} = \text{ص}$ ، $\text{س} = \frac{١}{\text{ص}}$



$\therefore \text{ح} = \pi \int_{١}^{٣} (\text{ص}^٢ - \frac{١}{\text{ص}^٢})\, \text{ءص} = \pi(\frac{١}{٣}\text{ص}^٣ + \frac{١}{\text{ص}}) \Big|_{١}^{٣} \Leftarrow \frac{٢٦}{٣}\pi$

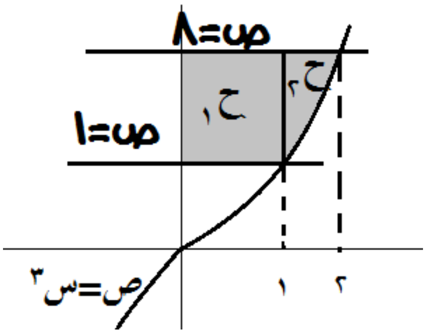
📖 **مثال ٦:** أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص}=\text{س}^٣$، والمستقيمين ص=١ ، ص=٨ ومحور الصادات دورة كاملة حول:

١. محور السينات.

٢. محور الصادات.

✍ **الحل:**

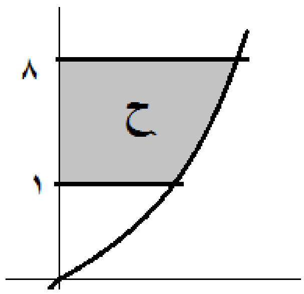
١. $\text{س}^٣=١ \longleftarrow \text{س}=١$ ، $\text{س}^٣=٨ \longleftarrow \text{س}=٢$



$\text{ح}_١ = \pi \int_{٠}^{١} (٦٤-١)\, \text{ءس} = ٦٣\pi$

$\text{ح}_٢ = \pi \int_{١}^{٢} (٦٤-\text{س}^٦)\, \text{ءس} = \pi(٦٤\text{س} - \frac{١}{٧}\text{س}^٧) \Big|_{١}^{٢} = \frac{٣٢١}{٧}\pi$

$\therefore \text{ح} = \text{ح}_١ + \text{ح}_٢ = ٦٣\pi + \frac{٣٢١}{٧}\pi = \frac{٧٦٢}{٧}\pi$



٢. $\text{ص}=\text{س}^٣ \longleftarrow \text{س} = \sqrt[٣]{\text{ص}}$

$\text{ح} = \pi \int_{١}^{٨} (\sqrt[٣]{\text{ص}^٢})\, \text{ءص} = \pi(\frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{\text{ص}^٥}) \Big|_{١}^{٨} = \frac{٩٣}{٥}\pi$

📖 **مثال ٧:** أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص=جاس ، ومنحنى الاقتران ص=جتاس ، ومحور الصادات دورة كاملة حول محور السينات حيث س > ٠؟

✍ **الحل:**

$\text{جاس} = \text{جتاس} \longleftarrow \text{س} = \frac{\pi}{\text{٤}}$

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{\text{٠}}^{\pi/\text{٤}} \left(\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} \right) \text{ءس}$

$\Leftarrow \pi \int_{\text{٠}}^{\pi/\text{٤}} \text{جتا٢س ءس} \Leftarrow \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جا٢س} \Leftarrow \frac{\text{١}}{\text{٢}}\pi$

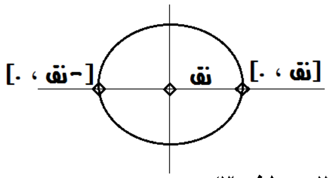
📖 **مثال ٨:** مستخدماً الحجوم الدورانية ، أثبت أن:

١. حجم الكرة يساوي $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{نق}^{\text{٣}}\pi$

٢. حجم المخروط يساوي $\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{نق}^{\text{٢}}\pi\ \text{ع}$

✍ **الحل:**

١. الكرة ناتجة من دوران دائرة حول أحد المحاور الرئيسية



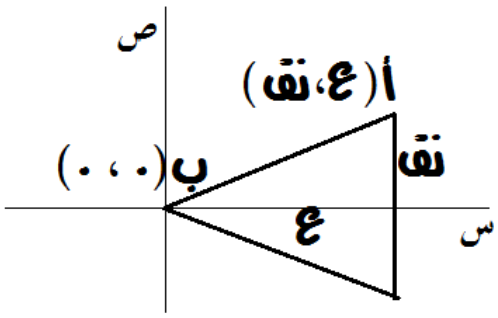
ومعادلة الدائرة هي: $\text{س}^{\text{٢}}+\text{ص}^{\text{٢}}=\text{نق}^{\text{٢}} \longleftarrow \text{ص}^{\text{٢}}=\text{نق}^{\text{٢}}-\text{س}^{\text{٢}}$

$\therefore \text{ح} = \text{٢}\pi \int_{\text{٠}}^{\text{نق}} \left(\text{نق}^{\text{٢}}-\text{س}^{\text{٢}}\right) \text{ءس} \Leftarrow \text{٢}\pi\left(\text{نق}^{\text{٢}}\text{س}-\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}}\right)\Big|_{\text{٠}}^{\text{نق}} \Leftarrow \text{٢}\pi\left(\text{نق}^{\text{٣}}-\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{نق}^{\text{٣}}\right)$

$\Leftarrow \text{٢}\pi\left(\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{نق}^{\text{٣}}\right) \Leftarrow \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{نق}^{\text{٣}}\pi$

٢. المخروط ينتج من دوران مثلث قائم الزاوية.

يجب إيجاد معادلة الخط المستقيم (أ ب)

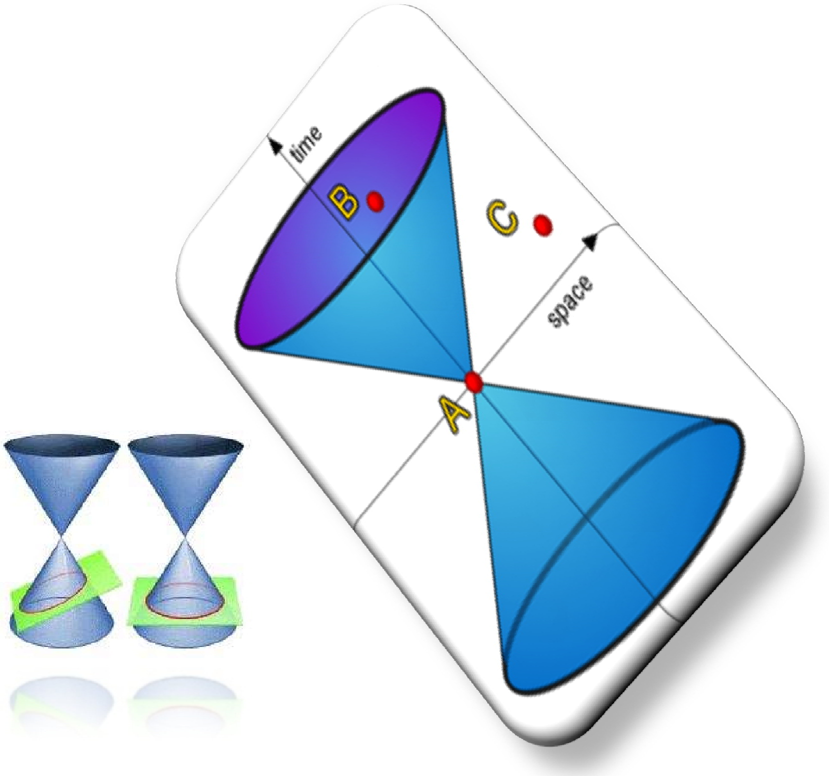


$\text{ص}=\text{م س} \Leftarrow \text{م} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}}$

$\therefore \text{ص} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}}\,\text{س}$

$\text{ح} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{ع}} \frac{\text{نق}^{\text{٢}}}{\text{ع}^{\text{٢}}}\,\text{س}^{\text{٢}}\ \text{ءس} \Leftarrow \pi \times \frac{\text{نق}^{\text{٢}}}{\text{ع}^{\text{٢}}} \times \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}}\Big|_{\text{٠}}^{\text{ع}} \Leftarrow \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{نق}^{\text{٢}}\pi\ \text{ع}$

الوحدة الثانية: القطوع المخروطية



الدرس الأول : الدائرة

تعريف (الدائرة) : **الدائرة هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي يكون بُعد كل منها يساوي مقداراً ثابتاً عن نقطة ثابتة (المركز) وهو ما نسميه بـ "نصف قطر الدائرة".**

معادلة الدائرة : **هناك صورتان لمعادلة الدائرة وهما:**

١. الصورة القياسية : $(س-م)^٢ + (ص-ب)^٢ = ر^٢$

حيث (م،ب) احداثيات مركز الدائرة ، (ر) نصف القطر.

٢. الصورة العامة : $س^٢+ص^٢+٢م س+٢ب س+ج = ٠$

حيث (-م ، -ب) مركز الدائرة ، $ر = \sqrt{م^٢+ب^٢-ج}$ هو نصف القطر.

الحالة الأولى: تطبيقات على الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

مثال ١: جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(س-٥)^٢+(ص+٧)^٢=١١$؟

الحل: المركز هو(٥ ، -٧) ونصف القطر هو ، $ر = \sqrt{١١}$

مثال ٢: جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^٢+(ص+٩)^٢=١٦$؟

الحل: المركز هو(٠ ،-٩) ونصف القطر ر=٤

مثال ٣: جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(٢س+٦)^٢+(٢ص-١٢)^٢=٨^٢$؟

الحل: $(٢(س+٣))^٢+(٢(ص-٦))^٢=٦٤ \Leftarrow ٤[(س+٣)^٢+(ص-٦)^٢] = ٦٤$

$\Leftarrow (س+٣)^٢+(ص-٦)^٢ = ١٦ \longrightarrow م(-٣،٦)$ ، نق= ٤

مثال ٤: جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^٢+ص^٢+٤س+٦ص-١٢ = ٠$؟

الحل: $٢م=٤ \Leftarrow م=٢$ ، $٢ب=٦ \Leftarrow ب=٣$ ، ج = -١٢

∴م (−٢،−٣) ، ر = $\sqrt{٤+٩+١٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

📖 **مثال ٥: جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها(٢س^٢+٢ص^٢−١٢س = ١٤)؟**

✍ **الحل:** س^٢+ص^٢−٦س−٧ = ٠

٢أ = −٦ ⇐ أ = −٣ ، ٢ب = ٠ ⇐ ب = ٠ ، جـ = −٧

∴م (٣،٠) ، ر = $\sqrt{١٦}$ = ٤

📖 **مثال ٦: جد معادلة الدائرة التي مركزها (−٢،١) وطول نصف قطرها ٤سم؟**

✍ **الحل:** م (−٢،١) ، ر = ٤

∴ **المعادلة هي:** (س+٢)^٢ + (ص−١)^٢ = ١٦

📖 **مثال٧: جد معادلة الدائرة التي مركزها (−٣ ، ٤) وتمر بنقطة الأصل؟**

✍ **الحل:** م(−٣ ، ٤)

ر= المسافة بين النقطتين (٠,٠) ، (−٣ ، ٤)

=$\sqrt{(٠ - -٣)^٢ + (٠ - ٤)^٢}$ =$\sqrt{٢٥}$ =٥

∴ **معادلة الدائرة هي:** (س+٣)^٢ + (ص−٤)^٢=٢٥

📖 **مثال٨: جد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، ٦) وتمس محور الصادات؟**

✍ **الحل:** م (٥،٦)

ر=٥

∴ **المعادلة هي:**(س−٥)^٢+(ص−٦)^٢=٢٥

📖 **مثال٩: جد معادلة الدائرة التي مركزها(−٢،−٣) وتمس المستقيم الذي معادلته ص=١؟**

✍ **الحل:** م (−٢،−٣) ، ر = ٣+١ =٤

∴ **المعادلة هي:**(س+٢)^٢+(ص+٣)^٢=١٦

مثال١٠: جد معادلة الدائرة التي مركزها (−٣،٣) وتمس المستقيم الذي معادلته ٣س−٤ص=−٩؟

الحل: م (−٣،٣) ، نق = المسافة بين المركز والمستقيم ٣س−٤ص=−٩

$$= \frac{|-٩+١٢+٩|}{\sqrt{١٨}} = \frac{٤}{\sqrt{٢}}$$

∴ المعادلة هي: $(س+٣)^٢+(ص-٣)^٢ = ٨$

مثال١١: أوجد معادلة الدائرة التي نهاية أحد أقطارها في النقطة (−١،٢) ونهاية القطر الآخر في النقطة (٥،−٨)؟

الحل: م = $\left(\frac{-١+٥}{٢} ، \frac{٢-٨}{٢}\right)$ = (٢ ، −٣)

$$نق = \sqrt{(٢-(-١))^٢+(-٣-٢)^٢} = \sqrt{٩+٢٥} = \sqrt{٣٤}$$

∴ المعادلة هي: $(س-٢)^٢+(ص+٣)^٢ = ٣٤$

الحالة الثانية: تطبيقات على الصورة العامة لمعادلة الدائرة

مثال١٢: جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠،٠) ، (٢ ، ٠) ، (٣،−١)؟

الحل: $س^٢+ص^٢+٢أس+٢ب ص+جـ = ٠$

(٠،٠): ٠ + ٠ + ٠ + ٠ + جـ = ٠ ⟵ $\boxed{جـ = ٠}$

(٢،٠): ٤ + ٠ + ٤أ + ٠ + ٠ = ٠ ⟵ ٤أ+٤=٠ ⟵ $\boxed{أ = -١}$

(٣،−١): ٩ + ١ + ٦×−١ − ٢ب + ٠ = ٠ ⟵ −٦−٢ب+١٠=٠ ⟵ $\boxed{ب = ٢}$

∴ المعادلة هي: $س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص = ٠$

مثال١٣: أوجد معادلة الدائرة التي تحقق النقطتين (١،٥)،(٣،−١) ويقع مركزها على محور السينات؟

الحل: $س^٢+ص^٢+٢أس+٢ب ص+جـ = ٠$

وبما أن المركز هو (−م ، −ب) ⟵ $\boxed{\text{ب} = ٠}$ (لأن المركز يقع على محور السينات).

(١،٥) : ١ + ٢٥ + ٢م + ج = ٠ ⟵ ٢م+٢٦+ج =٠ ....(١)

(٣،−١) : ٩ + ١ + ٦م + ج = ٠ ⟵ ٦م+١٠+ج =٠ ....(٢)

بطرح المعادلة ١ من المعادلة ٢ ينتج أن: ٦م+١٠+ج =٠ ....(٢)

٢م+٢٦+ج =٠ ....(١)

٤م−١٦= ٠ ⟵ $\boxed{\text{م} = ٤}$

وبتعويض قيمة م في المعادلة رقم ١ ينتج أن: ٢×٤ + ٢٦ + ج =٠ ⟵ $\boxed{\text{ج} = −٣٤}$

∴ المعادلة هي: س^2 + ص^2 − ٨س −٣٤ =٠

مثال١٤: أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (١،−٢)،(٤،−٣) ويقع مركزها على المستقيم ٣س+٤ص=٥؟

الحل: س^2+ص^2+٢م س+٢ب ص+ج =٠

(١،−٢) : ١ + ٤ + ٢م − ٤ب + ج = ٠ ⟵ ٢م − ٤ب + ٥ + ج = ٠.........(١)

(٤،−٣) : ١٦ + ٩ + ٨م − ٦ب + ج = ٠ ⟵ ٨م − ٦ب + ٢٥ + ج = ٠ ......(٢)

لكن المركز (−م ،−ب) يحقق المعادلة ٣س+٤ص=٥ ⟵ −٣م−٤ب =٥ ....(٣)

وبطرح المعادلة (١) من (٢) ⇐ ٨م − ٦ب + ٢٥ + ج =٠ ....(٢)

٢م − ٤ب + ٥ + ج = ٠ ....(١)

٦م−٢ب+٢٠=٠ ....(٤)

٢×(−٣م−٤ب =٥) = −٦م−٨ب = ١٠ ......(٣)

٦م−٢ب =−٢٠ .....(٤)

−١٠ب = −١٠ ⇐ $\boxed{\text{ب} = ١}$

ومن معادلة (٣) ⇐ −٣م−٤×١ = ٥ ⇐ $\boxed{\text{م} = −٣}$

ومن معادلة (١) ⇐ ٢×−٣ −٤×١ + ٥ + ج =٠ ⟵ $\boxed{\text{ج} = ٥}$

∴ المعادلة هي: س^2 + ص^2 − ٦س +٢ص + ٥ =٠

م (−م ،−ب) = (٣،−١)

📖 **مثال١٥:** أوجد معادلة الدائرة الواقعة في الربع الأول التي تمس محوري السينات والصادات وتمس المستقيم ٣س+٤ص =١٢؟

✍ **الحل:** م (ر،ر) ، **حيث** ر = **المسافة بين المستقيم** ٣س+٤ص =١٢ **والنقطة** (ر،ر)

ر = $\frac{|٣ر+٤ر-١٢|}{٥}$ ⇐ ٥ر =|٧ر-١٢|

إما ٧ر-١٢ = ٥ر ⟵ ٢ر = ١٢ ⇐ $\boxed{ر = ٦}$

أو ٧ر-١٢ = -٥ر ⟵ ١٢ر = ١٢ ⇐ $\boxed{ر = ١}$

إذن ، هناك دائرتين:

أولاً : **عندما** ر = ٦ **فإن المعادلة:** (س-٦)^{٢}+(ص-٦)^{٢}=٣٦

ثانياً : **عندما** ر = ١ **فإن المعادلة:** (س-١)^{٢}+(ص-١)^{٢}=١

📖 **مثال١٦:** أكتب معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (-١ ، ٨)؟

✍ **الحل:** (س+ر)^{٢}+(ص-ر)^{٢}=ر^{٢}

النقطة (-١ ، ٨) تحقق معادلة الدائرة: (-١+ر)^{٢}+(٨-ر)^{٢}=ر^{٢}

⇐ ١-٢ر+ر^{٢}+٦٤-١٦ر+ر^{٢}=ر^{٢} ⇐ ر^{٢}-١٨ر+٦٥=٠ ⟵ (ر-١٣)(ر-٥)=٠

∴ ر =١٣ ، ٥

المعادلة الأولى عندما ر=١٣ : (س+١٣)^{٢}+(ص-١٣)^{٢}=١٦٩

المعادلة الثانية عندما ر=٥ : (س+٥)^{٢}+(ص-٥)^{٢}=٢٥

📖 **مثال١٧:** أكتب معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند النقطة (٥،٠) ومركزها يقع على المستقيم ص = س-٤؟

✍ **الحل:**

من المحتمل أن تقع الدائرة في الربع الأول أو في الربع الرابع.

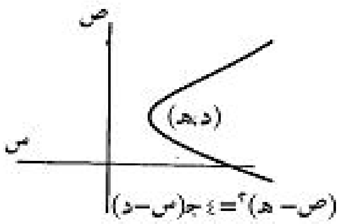
☜ الربع الأول : (٥،ر) **تحقق المعادلة** ص =س-٤ ⇐ $\boxed{ر = ١}$

∴ (س-٥)^{٢}+(ص-١)^{٢}=١

☜ **الربع الرابع: (٥،–ر) تحقق المعادلة ص =س–٤ ⇐ –ر =١ ⟵ ر = –١ ، وهذا غير ممكن (لا يمكن أن يكون نصف القطر قيمة سالبة).**
إذن وقوع الدائرة في الربع الرابع غير ممكن أبداً.

الدرس الثاني : القطع المكافئ

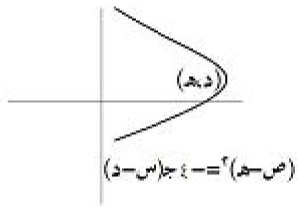
تعريف (القطع المكافئ) : هو المحل الهندسي لحركة النقاط التي يكون بعدها عن نقطة معلومة (البؤرة) يساوي بعدها عن مستقيم معلوم (الدليل).



➢ صور معادلات القطع المكافئ القياسية :

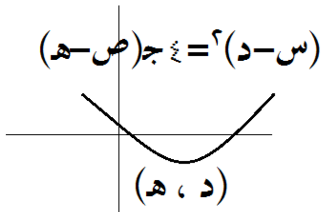
١. (ص – هـ)^{٢} = ٤جـ (س – د)

هذا الرسم سيني موجب



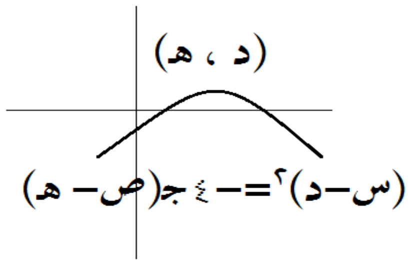
٢. (ص – هـ)^{٢} = –٤جـ (س – د)

هذا الرسم سيني سالب



٣. (س – د)^{٢} = ٤جـ (ص – هـ)

هذا الرسم صادي موجب



٤. (س – د)^{٢} = – ٤جـ (ص – هـ)

هذا الرسم صادي سالب

الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ: ص=أس^{٢}+ب س+جـ ، وتستخدم في حال إعطاء عدة نقاط في السؤال (عندما لا نستطيع تحديد اتجاه القطع موجبا أم سالباً).

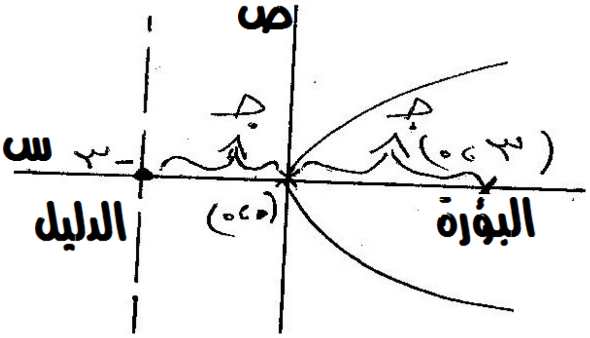
✪ ملاحظات هامة:

- **الرأس يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل.**
- **المسافة بين البؤرة والدليل تساوي ٢جـ.**
- **دائماً جـ > ٠**

- **البؤرة تقع داخل القطع والدليل خلف الرأس.**
- **لإيجاد معادلة محور التماثل نساوي المقدار المرفوع للقوة التربيعية بالصفر.**
- **معادلة محور التماثل تعاكس معادلة الدليل من حيث المتغير.**

<u>مثال١</u>: ناقش العبارة : ص^{٢}=١٢س

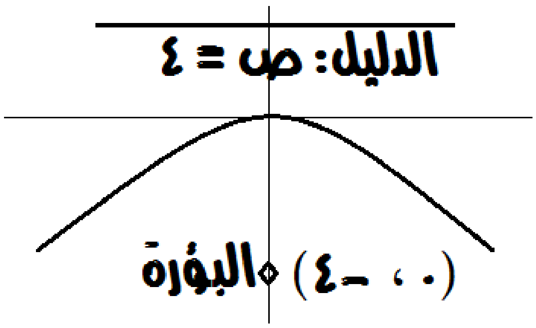
<u>الحل</u>: معادلة قطع مكافئ فيه:



١. الرسم سيني موجب.
٢. إحداثية الرأس: (٠ ، ٠).
٣. معادلة محور التماثل: ص^{٢}=٠ ⇐ ص=٠
٤. البعد البؤري: ٤ج =١٢ ⟵ ج = ٣
٥. معادلة الدليل: س = -٣
٦. إحداثية البؤرة:(٣ ، ٠)

<u>مثال٢</u>: ناقش المعادلة : س^{٢}=-١٦ص

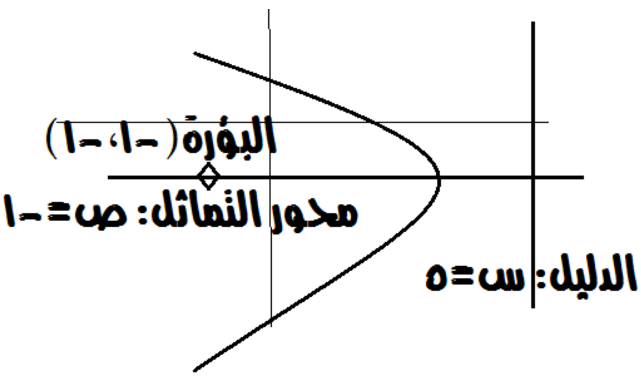
<u>الحل</u>: معادلة قطع مكافئ فيه:



١. الرسم صادي سالب.
٢. إحداثية الرأس: (٠ ، ٠).
٣. معادلة محور التماثل: س^{٢}=٠ ⟵ س=٠
٤. البعد البؤري: ٤ج = ١٦ ⟵ ج = ٤
٥. معادلة الدليل: ص= ٠ +٤ = ٤
٦. إحداثية البؤرة: (٠ ، -٤).

<u>مثال٣</u>: ما خصائص المعادلة : (ص+١)^{٢}=-١٢(س-٢)

<u>الحل</u>: معادلة قطع مكافئ فيه:



١. إحداثية الرأس: (٢،-١)
٢. الرسم سيني سالب.
٣. معادلة محور التماثل: ص+١=٠ ⟵ ص = -١
٤. البعد البؤري: ٤ج = ١٢ ⟵ ج = ٣
٥. معادلة الدليل: س = ٢+٣ = ٥

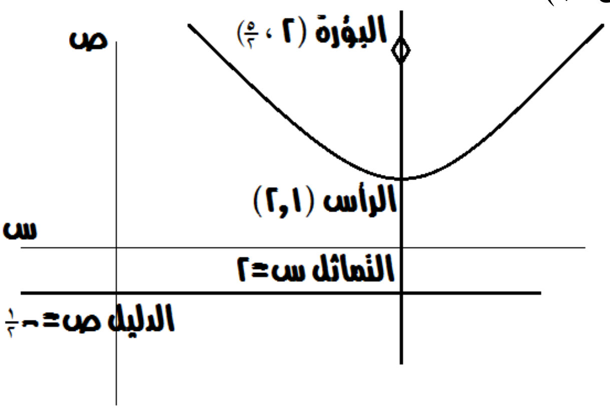
٦. إحداثية البؤرة: (٢–٣،–١) = (–١،–١)

📖 **<u>مثال٤:</u> ناقش العبارة:** (٢س–٤)^{٢}=٢٤(ص–١)

✍ **<u>الحل:</u>** (٢س–٤)^{٢}=٢٤(ص–١) ⟵ (٢(س–٢))^{٢}=٢٤(ص–١)

⇐ ٤(س–٢)^{٢}=٢٤(ص–١) ⟵ (س–٢)^{٢}=٦(ص–١)

وهذه معادلة قطع مكافئ فيه:



١. إحداثية الرأس: (٢،١)

٢. الرسم صادي موجب.

٣. معادلة محور التماثل: س–٢=٠ ⟵ س=٢

٤. البعد البؤري: ٤جـ=٦ ⟵ جـ = $\frac{٣}{٢}$

٥. إحداثية البؤرة: (٢،١+$\frac{٣}{٢}$)=(٢،$\frac{٥}{٢}$)

٦. معادلة الدليل: ص = ١–$\frac{٣}{٢}$ = –$\frac{١}{٢}$

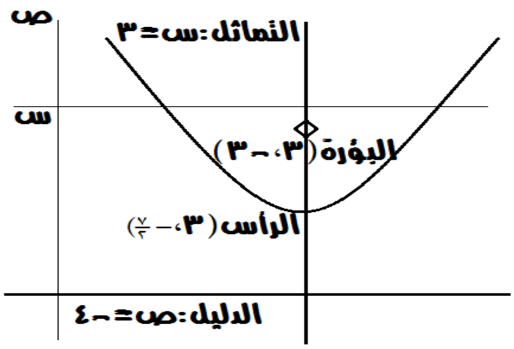
📖 **<u>مثال٥:</u> أكتب خصائص المعادلة:** ٢س^{٢}–١٢س+٤=٤ص

✍ **<u>الحل:</u> نعمل على إكمال المربع للمتغير س فقط لأنه مرفوع لقوة تربيعية.**

٢س^{٢}–١٢س+٤=٤ص ⇐ س^{٢}–٦س= ٢ص–٢ ، وبإكمال المربع تصبح المعادلة:

س^{٢}–٦س+٩–٩=٢ص–٢ ⟵ س^{٢}–٦س+٩=٢ص–٢+٩ ⇐ (س–٣)^{٢}=٢(ص+$\frac{٧}{٢}$)

∴ معادلة قطع مكافئ فيه:



١. إحداثية الرأس: (٣،–$\frac{٧}{٢}$)

٢. الرسم صادي موجب.

٣. معادلة محور التماثل: س–٣=٠ ⟵ س=٣

٤. البعد البؤري: ٤جـ = ٢ ⟵ جـ = $\frac{١}{٢}$

٥. معادلة الدليل: ص= –$\frac{٧}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ = –٤

٦. إحداثية البؤرة: (٣،–$\frac{٧}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$) = (٣،–٣)

📖 **<u>مثال٦:</u> إذا كان ٢س^{٢}–١٢س+٤=٤ص ، فجد معادلة محور التماثل؟**

✍ **الحل:** إذا طلب في السؤال محور التماثل فقط فيمكننا اشتقاق المتغير س فقط ونساويه بالصفر ونجد المعادلة ، أو نعمل على إكمال المربع للمتغير س ونساويه بالصفر.

إذن نستطيع إيجاده عم طريق الاشتقاق: ٤س−١٢=٠ ⟵ ٤س=١٢ ⟵ س=٣

📖 **مثال٧:** أوجد معادلة القطع المكافئ الذي فيه :

١. البؤرة (٠ ، −٤)

٢. الدليل ص = ٤

✍ **الحل:** نعلم أن الدليل يأتي دائماً خلف الرأس ومعادلته هي ص= ٤ ، نستنتج أن القطع صادي سالب.

وبما أن إحداثية البؤرة (٠ ، −٤) ، إذن معادلة محور التماثل هي : س=٠

وأيضاً: ٢ج = ٤−(−٤) ⟵ ٢ج = ٨ ⇐ ج = ٤ ، ومن هنا نستنتج أن إحداثية الرأس هي:(٠،٠)

إذن معادلة القطع هي: $س^{٢}$ = −١٦$ص^{٢}$

📖 **مثال٨:** قوس على شكل قطع مكافئ طول قاعدته (١٢م) وقمة القوس ترتفع فوق سطح الأرض بمقدار (٩م) ، اكتب معادلة هذا القوس ، ثم أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحناه ومحور السينات؟

✍ **الحل:** افترض أن النقطة (٠ ، ٠) نقطة الارتكاز للشكل.

من معطيات السؤال (ارتفع القمه = ٩م) نستنتج أن القطع صادي سالب ، ومنه س=٠ هو محور التماثل ، ومنه فإن إحداثية الرأس: (٠ ، ٩).

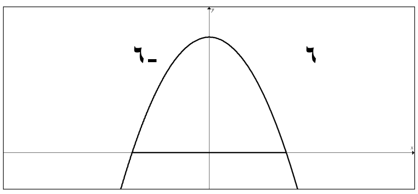
$(س-م)^{٢}=-٤ج\,(ص-ب) \Leftarrow (س-٠)^{٢}=-٤ج\,(ص-٩) \Leftarrow س^{٢}=-٤ج\,ص+٣٦ج$

لكن النقطة (٦ ، ٠) تحقق المعادلة: ٣٦ = ٣٦ج ⇐ ج = ١

إذن المعادلة هي: $س^{٢}=-٤(ص-٩)$ ، ولإيجاد المساحة نعيد ترتيب المعادلة:

$س^{٢}=-٤ص+٣٦ \longrightarrow ص=٩-\frac{س^{٢}}{٤}$

$\therefore م=٢\int_{٠}^{٦}\left(٩-\frac{س^{٢}}{٤}\right)ءس=٢\left(٩س-\frac{س^{٣}}{١٢}\right)\Big|_{٠}^{٦}=٧٢م^{٢}$



📖 **مثال٩:** ما معادلة القطع المكافئ الذي محوره هو محور السينات ويمر منحناه بالنقطتين (١٠،٨) ، (٤،٤)؟

✍ **الحل:** محور التماثل هو ص = ٠ ⇐ إحداثية الرأس: (د،٠) والرسم سيني موجب

(ص−٠)^{٢}=٤جـ (س−د) ⇐ ص^{٢}=٤جـ (س−د)

☜ النقطة (١٠ ، ٨) تحقق المعادلة: ٦٤ = ٤جـ (١٠−د) ⇐ ٦٤ = ٤٠جـ−٤جـ د ....(١)

☜ النقطة (٤ ، ٤) تحقق المعادلة: ١٦ = ٤جـ (٤−د) ⇐ ١٦ = ١٦جـ − ٤جـ د ....(٢)

٦٤ = ٤٠جـ−٤جـ د ....(١)

١٦ = ١٦جـ − ٤جـ د .....(٢)

٤٨ = ٢٤جـ ⟵ جـ = ٢

ومن المعادلة (١) ينتج أن: ٦٤=٤٠×٢−٤×٢د ⇐ ٦٤=٨٠−٨د ⇐ د = ٢

إذن المعادلة هي: ص^{٢}=٨ (س−٢)

📖 **مثال١٠:** ناقش المعادلة: (٤س−٨)^{٢}+١٦(ص+٢) = ٠

✍ **الحل:** (٤س−٨)^{٢}+١٦(ص+٢) = ٠ ⇐ (٤(س−٢))^{٢}=−١٦(ص+٢)

⇐ ١٦(س−٢)^{٢}=−١٦(ص+٢) ⇐ (س−٢)^{٢}= −(ص+٢)

معادلة قطع مكافئ فيه:

١. إحداثية الرأس: (٢،−٢)

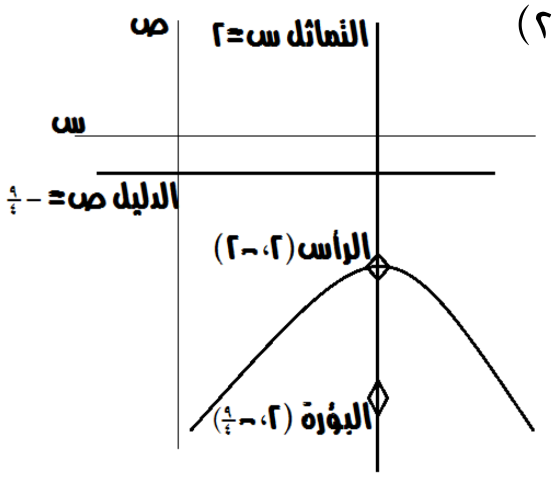
٢. القطع صادي سالب.

٣. معادلة محور التماثل: س−٢=٠ ⟵ س = ٢

٤. البعد البؤري: ٤جـ = ١ ⟵ جـ = $\frac{١}{٤}$

٥. معادلة الدليل: ص = −٢+$\frac{١}{٤}$ = −$\frac{٧}{٤}$

٦. إحداثيات البؤرة: (٢،−٢−$\frac{١}{٤}$) = (٢،−$\frac{٩}{٤}$)



📖 **مثال١١:** قذف جسم رأسياً للأعلى بحيث أن ف(ن) = ٢٤ن−٦ن^{٢}، أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم مستخدماً القطوع المخروطية (حدد نوع القطع الذي يمثل حركة الجسم)؟

✍ **الحل:** نستبدل المتغيرات (ف، ن) بالمتغيرات (س ، ص)

حيث ص=٢٤س−٦س^{٢} ⇐ ٦س^{٢}−٢٤س=−ص ⇐ س^{٢}−٤س=−$\frac{١}{٦}$ص

⇐ س^{٢}−٤س+٤ = −$\frac{١}{٦}$ص+٤ ⇐ (س−٢)^{٢}=−$\frac{١}{٦}$(ص−٢٤)

∴ نوع القطع مكافئ (صادي سالب) وإحداثية الرأس: (٢،٢٤) وهي قيمة عظمى ، ومنه فإن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم هو(٢٤م).

📖 **مثال١٢:** اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وتماثل حول محور الصادات ويمر منحناه بالنقطة (٤،−٢)؟

✍ **الحل:** بما أن النقطة (٤ ، −٢) تحقق معادلة المنحنى ، فإن القطع صادي سالب.

وبما أن رأسه النقطه (٠ ، ٠) فإن معادلة القطع تكون: س^{٢}=−٤جـ ص

لكن النقطة (٤،−٢) تحقق المعادلة: ∴ ١٦=−٤جـ×−٢ ⇐ ١٦=٨جـ ⇐ جـ = ٢

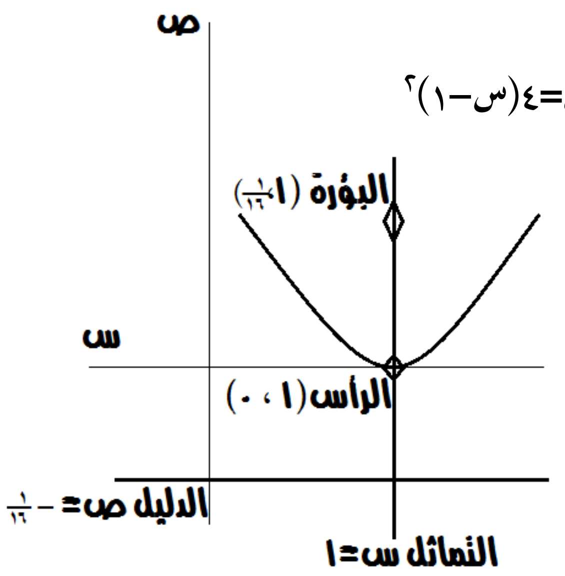
∴ المعادلة هي: س^{٢}=−٨ص

📖 **مثال١٣:** ناقش العبارة : ص=(٢س−٢)^{٢}

✍ **الحل:** ص=(٢س−٢)^{٢} ⟵ ص=(٢(س−١))^{٢} ⟵ ص=٤(س−١)^{٢}

⇐ $\frac{١}{٤}$ص=(س−١)^{٢}⟵ (س−١)^{٢}=$\frac{١}{٤}$ص

معادلة قطع مكافئ فيه:



١. إحداثية الرأس: (١،٠)
٢. القطع(الرسم) صادي موجب.
٣. معادلة محور التماثل: س−١=٠ ⇐ س=١
٤. البعد البؤري: ٤جـ =$\frac{١}{٤}$ ⇐ جـ = $\frac{١}{١٦}$
٥. معادلة الدليل:ص = ٠ − $\frac{١}{١٦}$ = −$\frac{١}{١٦}$
٦. إحداثية البؤرة: (١،٠+$\frac{١}{١٦}$) = (١،$\frac{١}{١٦}$)

📖 **مثال١٤:** أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٣ ، ١) ومحوره ص =١، ويمر منحناه بالنقطة (٥ ، ٠)؟

✍ **الحل:** بما أن البؤرة (٣ ، ١) ، إذن القطع سيني (إما موجب أو سالب).

إذا كان القطع موجب أو سالب سنحصل على نفس الحل في كلا الحالتين.
لذا، سنفرض أن القطع سيني سالب فإن إحداثية الرأس: (٣+ج ، ١)

∴ (ص−١)^2=−٤ج (س− (٣+ج))

النقطة (٠ ، ٥) تحقق المعادلة: ∴ ١٦=−٤ج (٠−(٣+ج)) ⇐ ١٦=٤ج×(٣+ج)

⇐ ١٦=١٢ج + ٤ج^2 ⇐ ج^2+٣ج−٤=٠ ⇐ (ج+٤)(ج−١)=٠ ⟵ ج = ١ ، −٤

عندما ج = ١: (ص−١)^2=−٤×١(س−(٣+١)) ⇐ (ص−١)^2=−٤(س−٤)

عندما ج =−٤: (ص−١)^2=−٤×−٤(س−(٣−٤)) ⇐ (ص−١)^2=١٦(س+١)

📖 **<u>مثال١٥</u>: ما معادلة القطع المكافئ الذي دليله س=٢ ومحور تماثله ص=٤ ويمر منحناه بالنقطة (٨ ، ١٠)؟**

✍ **<u>الحل</u>: لأن الدليل يكون دائماً خلف الرأس ،ويمر بالنقطة (٨ ، ١٠) ، إذن القطع سيني موجب.**

إحداثية الرأس: (ج+٢،٤)

إذن المعادلة: (ص−٤)^2=٤ج(س−(ج+٢))

لكن النقطة (٨ ، ١٠) تحقق المعادلة ، إذن: ٣٦=٤ج(٨−ج−٢)

⇐ ٣٦=٤ج(٦−ج) ⇐ ٣٦=٢٤ج−٤ج^2 ⇐ ج^2−٦ج+٩=٠ ⇐ (ج−٣)(ج−٣)=٠ ⟵ ج=٣

∴ (ص−٤)^2=١٢(س−٥)

📖 **<u>مثال١٦</u>: اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ويمر منحناه بالنقاط: (−٧ ، ٤) ، (−٥ ، ٥) ، (٣ ، ٢٩)؟**

✍ **<u>الحل</u>: في مثل هذه الحاله نلجأ إلى الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ.**

ص=أس^2+ب س+ج

النقطة (−٧ ، ٤) تحقق المعادلة: ٤=٤٩أ−٧ب+ج ....(١)

النقطة (−٥ ، ٥) تحقق المعادلة: ٥=٢٥أ−٥ب+ج ....(٢)

النقطة (٣ ، ٢٩) تحقق المعادلة: ٢٩=٩أ+٣ب+ج ......(٣)

☜ **(١) - (٢):**

٤=٤٩أ −٧ب+ج ....(١)

−

٥=٢٥أ −٥ب+ج ....(٢)

−١=٢٤أ −٢ ب ......(٤)

☜ (١) − (٣):

٤=٤٩أ −٧ب+ج ....(١)

−

٢٩=٩أ+٣ب+ج ....(٣)

−٢٥=٤٠أ −١٠ب ....(٥)

☜ ٥×(٤) − (٥):

−٥=١٢٠أ −١٠ب ....(٤)

−

−٢٥=٤٠أ −١٠ب ....(٥)

٢٠=٨٠أ ⇐ $\boxed{أ=\frac{١}{٤}}$ ، وبتعويض قيمة (أ) في معادلة (٤) ينتج أن:

−٥=١٢٠× $\frac{١}{٤}$ −١٠ب ⇐ $\boxed{ب=\frac{٣٥}{١٠}}$ ، وبتعويض قيمة (أ) و (ب) في معادلة (١) ينتج أن:

٤=٤٩× $\frac{١}{٤}$ −٧× $\frac{٣٥}{١٠}$ +ج ⇐ $\boxed{ج=\frac{٦٥}{٤}}$ ، ∴ المعادلة هي: ص= $\frac{١}{٤}$ س^{٢}+ $\frac{٣٥}{١٠}$س+ $\frac{٦٥}{٤}$

الدرس الثالث : القطع الناقص

تعريف (القطع الناقص) :هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي يكون بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين)يساوي مقداراً ثابتاً (٢أ) ، أي أن: ($ع ف_{١} + ع ف_{٢} = ٢أ$).

خصائص :

- **إحداثيات الرأسين تعتمد على قيمة المقدار (أ)**
- **إحداثيات البؤرتين تعتمد على قيمة المقدار (جـ)**
- **طول المحور الأكبر = ٢أ = البعد بين الرأسين (البعد بين كل من الرأسين والمركز = أ).**
- **طول المحور الأصغر = ٢ب.**
- **البعد بين البؤرتين = ٢جـ (البعد بين كل من البؤرتين والمركز = جـ).**
- **الاختلاف المركزي** ($هـ = \frac{جـ}{أ} < ١$).

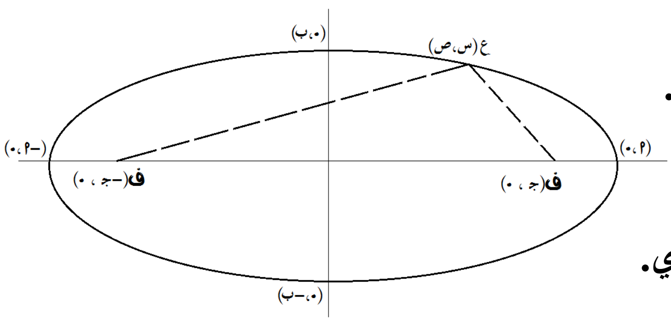
ملاحظات :

١. **في القطع الناقص دائماً ($أ^{٢}$) هو العدد الأكبر.**

٢. **إذا كان $أ^{٢}$ هو معامل المتغير س ، فيكون القطع سيني.**

٣. **إذا كان $أ^{٢}$ هو معامل المتغير ص ، فيكون القطع صادي.**

٤. **الصورة القياسية:**



$$\frac{(س-د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص-هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١ \Leftarrow$$ **القطع سيني.**

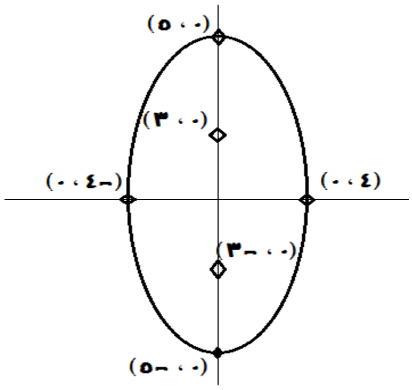
$$\frac{(س-د)^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{(ص-هـ)^{٢}}{أ^{٢}} = ١ \Leftarrow$$ **القطع صادي.**

٥. جـ^٢ = ؋^{٢} – ب^٢

٦. **للقطع الناقص محوري تماثل.**

٧. **مساحة القطع الناقص** = π ؋ ب

📖 **مثال١:** ناقش المعادلة : $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$



✍ **الحل: قطع ناقص فيه:**

١. **المركز:** (٠ ، ٠)

٢. **القطع صادي.**

٣. ؋^{٢}=٢٥ ⟵ $\boxed{؋=٥}$ ، ب^٢=١٦ ⟵ $\boxed{ب=٤}$ ، جـ^٢=؋^{٢}–ب^٢=٢٥–١٦=٩ ⟵ $\boxed{جـ=٣}$

٤. **طول المحور الأكبر** = ٢؋ = ٢×٥ = ١٠

٥. **طول المحور الأصغر** = ٢ب = ٢×٤ = ٨

٦. **إحداثيات الرأسين:** (٠،٠±؋) = (٠ ، ٠±٥) = (٠ ، ±٥)

٧. **إحداثيات البؤرتين:** (٠ ، ٠±جـ) = (٠ ، ٠±٣) = (٠ ، ±٣)

٨. **محاور التماثل:** س = ٠ **(الأكبر)** ، ص = ٠ **(الأصغر)**

٩. **الاختلاف المركزي:** هـ = جـ × $\frac{١}{؋}$ = $\frac{٣}{٥}$ < ١

📖 **مثال٢:** ناقش العبارة : ٤س^٢+١٦ص^٢= ٦٤

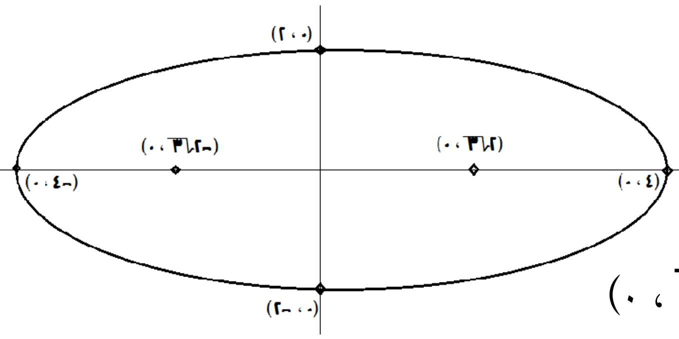
✍ **الحل: نقسم المعادلة على العدد (٦٤) لنجعل الطرف الأيسر يساوي (١).**

$\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$ .... **معادلة قطع ناقص فيه:**

١. **المركز:** (٠ ، ٠)

٢. **القطع سيني.**

٣. ؋^{٢}=١٦ ⟵ $\boxed{؋=٤}$ ،ب^٢=٤ ⟵ $\boxed{ب=٢}$ ، جـ^٢=؋^{٢}–ب^٢=١٦–٤=١٢ ⟵ $\boxed{جـ=٢\sqrt{٣}}$



٤. **طول المحور الأكبر:** ٢أ = ٢×٤ = ٨

٥. **طول المحور الأصغر:** ٢ب = ٢×٢ = ٤

٦. **إحداثيات الرأسين:** (±أ ، ٠) = (±٤ ، ٠)

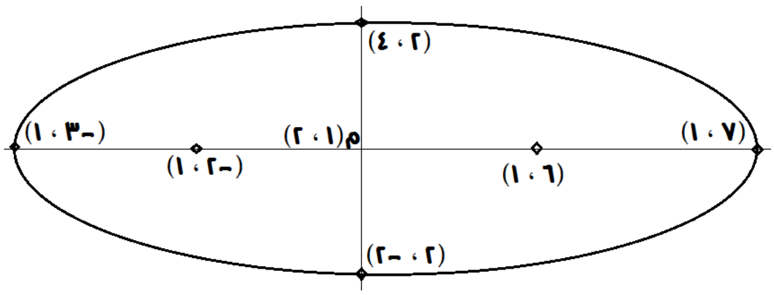
٧. **إحداثيات البؤرتين:** (±جـ ، ٠) = (±٢√٣ ، ٠)

٨. **محاور التماثل:** س = ٠ **(الأصغر)** ، ص = ٠ **(الأكبر)**

٩. **الاختلاف المركزي:** هـ = ٢√٣ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ < ١

مثال٣: ناقش العبارة: $\frac{(س-٢)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص-١)^{٢}}{٩} = ١$

الحل: **قطع ناقص فيه:**



١. **المركز:** (٢،١)

٢. **القطع سيني**

٣. أ^{٢}=٢٥ ⟵ $\boxed{أ=٥}$

ب^{٢}=٩ ⟵ $\boxed{ب=٣}$ ، جـ^{٢}=٢٥−٩ =١٦ ⟵ $\boxed{جـ = ٤}$

٤. **طول المحور الأكبر:** ٢أ = ٢×٥ = ١٠

٥. **طول المحور الأصغر:** ٢ب = ٢×٣= ٦

٦. **إحداثيات الرأسين:** (٢±أ ، ١) = (٢±٥ ، ١) = (٧ ، ١) ، (−٣ ، ١)

٧. **إحداثيات البؤرتين:** (٢±جـ ، ١) = (٢±٤ ، ١) = (٦ ، ١) ، (−٢ ، ١)

٨. **محاور التماثل:**

س−٢=٠ ⟵ س =٢ **(الأصغر)**

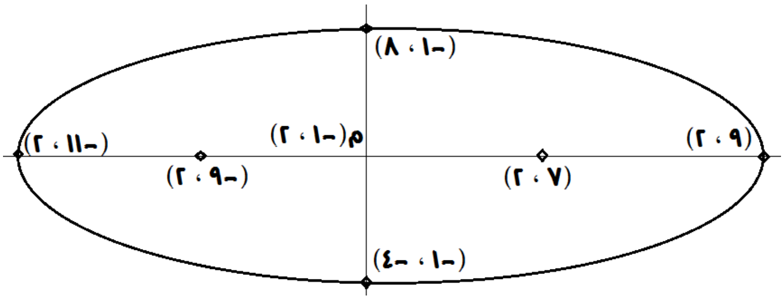
ص−١=٠ ⟵ ص=١ **(الأكبر)**

٩. **الاختلاف المركزي:** هـ = $\frac{٤}{٥}$ < ١

مثال٤: ناقش العبارة: ٣٦(س+١)^2+١٠٠(ص−٢)^2=٣٦٠٠

الحل: نقسم الطرفين على العدد (٣٦٠٠):

$$\frac{(س+١)^2}{١٠٠} + \frac{(ص-٢)^2}{٣٦} = ١$$ .... معادلة قطع ناقص فيها:



١. المركز: (−١ ، ٢)

٢. القطع سيني

٣. أ^2=١٠٠ ⟵ $\boxed{أ=١٠}$

ب^2=٣٦ ⟵ $\boxed{ب=٦}$

ج^2=١٠٠−٣٦=٦٤ ⟵ $\boxed{ج=٨}$

٤. طول المحور الأكبر: ٢أ = ٢×١٠ = ٢٠ (المسافة بين الرأسين)

٥. طول المحور الأصغر: ٢ب = ٢×٦=١٢

٦. إحداثيات الرأسين: (−١±أ ، ٢) = (−١±١٠ ، ٢) = (٩ ، ٢) ، (−١١ ، ٢)

٧. إحداثيات البؤرتين: (−١±ج ، ٢) = (−١±٨ ، ٢) = (٧ ، ٢) ، (−٩ ، ٢)

٨. محاور التماثل:

س−١ = ٠ ⟵ س =١ (الأصغر)

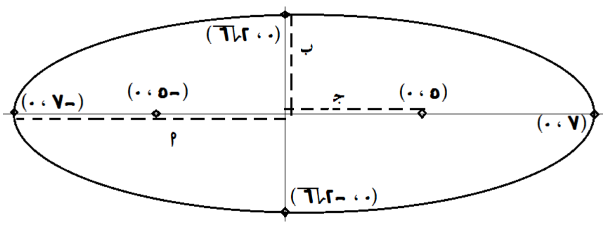
ص−٢ =٠ ⟵ ص=٢ (الأكبر)

٩. الاختلاف المركزي: هـ = $\frac{٨}{١٠}$ < ١

مثال٥: ما معادلة قطع ناقص بؤرته (±٥،٠) ويقطع محور السينات عندما س=±٧؟

الحل: إحداثية البؤرة (±٥،٠) ، ولأن البؤرة تقع على المحور الأكبر للقطع الناقص فإن القطع سيني ومركزه (٠،٠) ⟸ ج =٥ ⟵ $\boxed{ج^2=٢٥}$

وإحداثيات الرأسين: (±٧،٠) ⟸ أ=٧ ⟵ $\boxed{أ^2= ٤٩}$



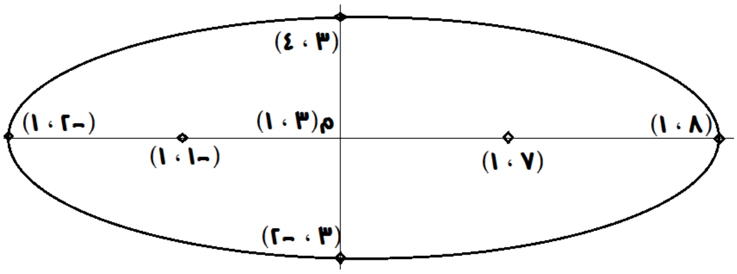
تأليف الأستاذ: أحمد فهمي
0779 909 516

جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ⇐ ٢٥ = ٤٩ − ب^{٢} ⇐ $\boxed{\text{ب}^{٢} = ٢٤}$

∴ **المعادلة هي:** $\frac{\text{س}^{٢}}{٤٩} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢٤} = ١$

📖 **مثال٦:** ما معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٣،١) وإحدى بؤرتيه (−١،١) وطول محوره الأصغر يساوي ٦ ؟

✍ **الحل: كل من المركز والبؤره تقع على المحور الأكبر للقطع دائماً والمسقط الصادي هنا (ص=١) ⇐ القطع سيني.**



∴ **جـ = المسافة بين المركز والبؤرة**

= ٣ − (−١) = ٤ ⟵ $\boxed{\text{جـ}^{٢} = ١٦}$

وكذلك طول المحور الأصغر يساوي ٦ :

٢ب = ٦ ⟵ ب = ٣ ⇐ $\boxed{\text{ب}^{٢} = ٩}$

جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ⇐ ١٦ = أ^{٢} − ٩ ⇐ $\boxed{\text{أ}^{٢} = ٢٥}$

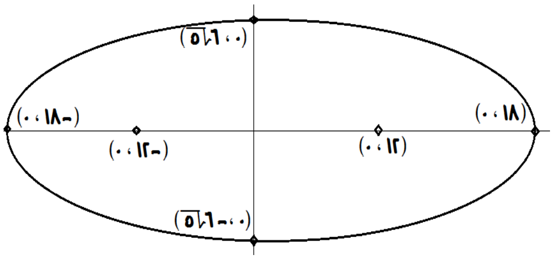
∴ $\frac{(\text{س}-٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{٩} = ١$

📖 **مثال٧:** أوجد معادلة القطع الذي بؤرتاه (±١٢،٠) واختلافه المركزي هو $\frac{٢}{٣}$ ؟

✍ **الحل: لأن هـ = $\frac{٢}{٣}$ < ١ ، فإن القطع ناقص ، والبؤرتان (±١٢،٠) ⇐ القطع سيني ، وكذلك**

جـ = ١٢ ⟵ $\boxed{\text{جـ}^{٢} = ١٤٤}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٢}{٣}$ ⇐ ٣جـ = ٢أ ⇐ ٣×١٢ = ٢أ ⇐ ٣٦ = ٢أ ⟵ أ = ١٨

⇐ $\boxed{\text{أ}^{٢} = ٣٢٤}$

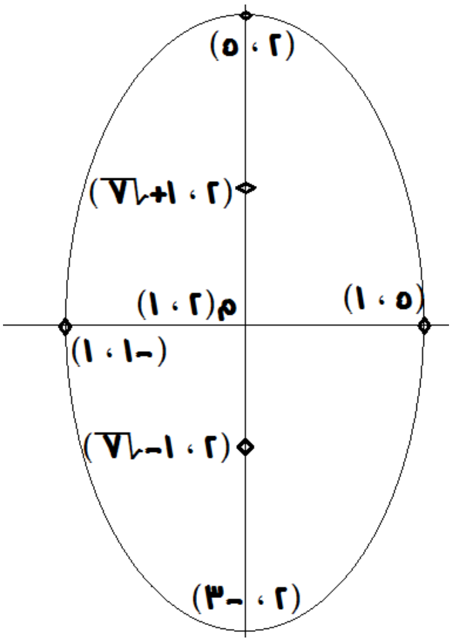


جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ⇐ ١٤٤ = ٣٢٤ − ب^{٢} ⇐ $\boxed{\text{ب}^{٢} = ١٨٠}$

$\therefore \frac{س^2}{324} + \frac{ص^2}{180} = 1$

📖 **<u>مثال8</u>:** ناقش خصائص العبارة: $16س^2 + 9ص^2 - 64س - 18ص - 71 = 0$

✍ **<u>الحل</u>:** $16س^2 - 64س + 9ص^2 - 18ص = 71$



$\Leftarrow 16(س^2 - 4س) + 9(ص^2 - 2ص) = 71$

$\Leftarrow 16(س^2 - 4س + 4 - 4) + 9(ص^2 - 2ص + 1 - 1) = 71$

$\Leftarrow 16(س^2 - 4س + 4) - 64 + 9(ص^2 - 2ص + 1) - 9 = 71$

$\Leftarrow 16(س-2)^2 + 9(ص-1)^2 = 71 + 64 + 9$

$\Leftarrow 16(س-2)^2 + 9(ص-1)^2 = 144$

$\Leftarrow \frac{(س-2)^2}{9} + \frac{(ص-1)^2}{16} = 1$ ....**قطع ناقص فيه:**

1. **المركز:** (٢،١)
2. **القطع صادي.**
3. $أ^2 = 16 \longrightarrow \boxed{أ=4}$ ، $ب^2 = 9 \longrightarrow \boxed{ب=3}$ ، $ج^2 = 16 - 9 = 7 \longrightarrow ج = \sqrt{7}$
4. **طول المحور الأكبر:** $2أ = 2 \times 4 = 8$ **(المسافة بين الرأسين)**
5. **طول المحور الأصغر:** $2ب = 2 \times 3 = 6$
6. **إحداثيات الرأسين:** $(2، 1 \pm أ) = (2، 1 \pm 4) = (2 ، 5)$ ، $(2 ، -3)$
7. **إحداثيات البؤرتين:** $(2، 1 \pm ج) = (2 ، 1 \pm \sqrt{7})$
8. **محاور التماثل:**

   $س-2 = 0 \longrightarrow س = 2$ **(الأكبر)**

   $ص-1 = 0 \longrightarrow ص = 1$ **(الأصغر)**
9. الاختلاف المركزي: $هـ = \sqrt{7} \times \frac{1}{4} < 1$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٩:** ما معادلة قطع ناقص مركزه (١،٢) وإحدى بؤرتيه (٦،٢) ويمر منحناه بالنقطة (٤،٦) ؟

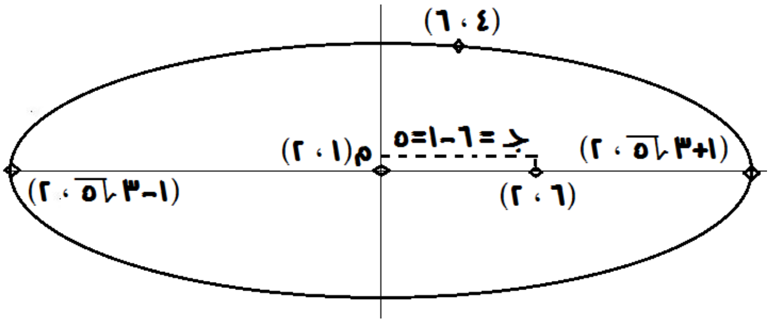
✍ **الحل: البؤرة والمركز لهما نفس الإسقاط الصادي هنا ، أي أن القطع سيني**

أيضاً: المسافة بين البؤرة والمركز = جـ (دائماً)

$\therefore \text{جـ} = ٦ - ١ = ٥ \longleftarrow \boxed{\text{جـ}^{٢} = ٢٥}$

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \Leftarrow ٢٥ = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

$\Leftarrow \boxed{\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - ٢٥}$



$$\therefore \frac{(\text{س}-١)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

$$\Leftarrow \frac{(\text{س}-١)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{\text{أ}^{٢}-٢٥} = ١$$

لكن النقطة (٤،٦) تحقق المعادلة:

$$\frac{(٤-١)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(٦-٢)^{٢}}{\text{أ}^{٢}-٢٥} = ١ \longleftarrow \frac{٩}{\text{أ}^{٢}} + \frac{١٦}{\text{أ}^{٢}-٢٥} = ١ \longleftarrow ٢٥\text{أ}^{٢} - ٢٢٥ = \text{أ}^{٤} - ٢٥\text{أ}^{٢}$$

$$\Leftarrow \text{أ}^{٤} - ٥٠\text{أ}^{٢} + ٢٢٥ = ٠ \longleftarrow (\text{أ}^{٢}-٤٥)(\text{أ}^{٢}-٥) = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{أ}^{٢} = ٤٥ \text{ ، } ٥}$$

$\therefore$ **عندما** $\text{أ}^{٢} = ٤٥$: $\text{ب}^{٢} = ٤٥ - ٢٥ = ٢٠ \Leftarrow \boxed{\text{ب}^{٢} = ٢٠}$

عندما $\text{أ}^{٢} = ٥$: $\text{ب}^{٢} = ٥ - ٢٥ = -٢٠$ **(هذا غير ممكن).**

$\therefore \boxed{\text{أ}^{٢} = ٤٥}$

$$\frac{(\text{س}-١)^{٢}}{٤٥} + \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{٢٠} = ١$$

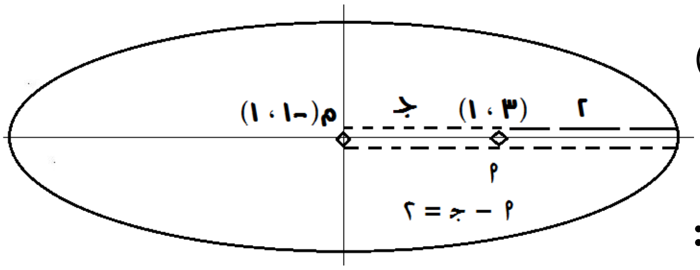
مثال١٠: أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر يوازي محور السينات وإحدى بؤرتيه النقطة (٣،١) وأقرب مسافة بين النقطة الواقعة عليه والبؤرة المعلومة تساوي (٢) واختلافه المركزي هـ = $\frac{٢}{٣}$ ؟

الحل: إن أقرب نقطة على البؤرة تقع على القطع الناقص هي نقطة إحداثية الرأس.

∴ إحداثية الرأس: (٣+٢ ، ١) = (٥،١)

وكذلك: $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٢}{٣}$ ← ٣جـ = ٢أ ....(١)

لكن لاحظ أن: أ − جـ = ٢ ⇐ أ = ٢+جـ ....(٢)



وبالتعويض بمعادلة (١) : ٣جـ = ٢(٢+جـ)

⇐ ٣جـ = ٤+٢جـ ⇐ $\boxed{\text{جـ = ٤}}$

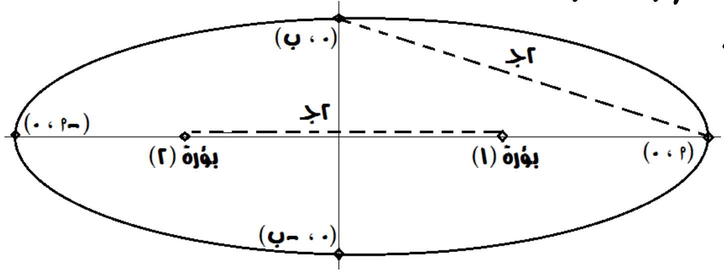
وبتعويض قيمة جـ في معادلة (٢) ينتج أن:

أ=٢+٤ ← أ = ٦ ⇐ $\boxed{\text{أ}^٢\text{=٣٦}}$

لكن جـ^٢=أ^٢− ب^٢ ← ١٦=٣٦− ب^٢ ← $\boxed{\text{ب}^٢\text{ = ٢٠}}$ ، ولأن إحداثية البؤرة هي (٣،١) والبعد البؤري (جـ = ٤) نستنتج أن إحداثية المركز: (−١،١)

∴ المعادلة هي: $\frac{(\text{س}+١)^٢}{٣٦} + \frac{(\text{ص}-١)^٢}{٢٠} = ١$

مثال١١: احسب الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي فيه المسافة بين بؤرتيه تساوي المسافة بين طرفي محوريه الأصغر والأكبر؟



الحل: (٢جـ)^٢=أ^٢+ ب^٢ ⇐ ٤جـ^٢=أ^٢+ ب^٢

لكن جـ^٢=أ^٢− ب^٢ ← ب^٢=أ^٢− جـ^٢

٤جـ^٢=أ^٢+(أ^٢− جـ^٢) ⇐ ٤جـ^٢=٢أ^٢− جـ^٢

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$\Leftarrow$ ٥ج^2=٢م^2 $\Leftarrow \frac{ج^2}{م^2} = \frac{٢}{٥} \Leftarrow \frac{ج}{م} = \sqrt{\frac{٢}{٥}}$

📖 **مثال١٢:** ما معادلة قطع سيني ناقص مركزه (٠،٠) ويمر بالنقطتين (٦،٢)،(٤،٣)؟

✍ **الحل:** $\frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

(٦،٢): $\frac{٦^2}{م^2} + \frac{٢^2}{ب^2} = ١ \Leftarrow \frac{٣٦}{م^2} + \frac{٤}{ب^2} = ١$ ....(١)

(٤،٣): $\frac{٤^2}{م^2} + \frac{٣^2}{ب^2} = ١ \Leftarrow \frac{١٦}{م^2} + \frac{٩}{ب^2} = ١$ ....(٢)

٩×(معادلة ١) ـ ٤(معادلة ٢):

$\frac{٣٢٤}{م^2} + \frac{٣٦}{ب^2} = ٩$ ....(١)

ـ

$\frac{٦٤}{م^2} + \frac{٣٦}{ب^2} = ٤$ ....(٢)

$\frac{٢٦٠}{م^2} = ٥ \longleftarrow \boxed{م^2=٥٢}$

وبتعويض قيمة (م^2) في معادلة (١) ينتج أن: $\frac{س^2}{٥٢} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١ \Leftarrow \boxed{ب^2 = ١٣}$

$\therefore \frac{س^2}{52} + \frac{ص^2}{13} = 1$

📖 **مثال13**: ناقش العبارة: $4س^2 + ص^2 = 1$

✍ **الحل:** $\frac{س^2}{\frac{1}{4}} + \frac{ص^2}{1} = 1$ **.......قطع ناقص فيه:**

1. **المركز:**(٠،٠)
2. **القطع صادي**
3. $أ^2 = 1 \longleftarrow \boxed{أ = 1}$ ، $ب^2 = \frac{1}{4} \longleftarrow \boxed{ب = \frac{1}{2}}$ ، $ج^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \longleftarrow \boxed{ج = \frac{1}{2}\sqrt{3}}$
4. **إحداثيات الرأسين:** (٠،٠±أ) = (٠،±١) = (٠،١) ، (٠،−١)
5. **إحداثيات البؤرتين:** (٠،٠±ج) = (٠،± $\frac{1}{2}\sqrt{3}$)
6. **طول المحور الأكبر:** ٢أ = ٢×١ = ٢
7. **طول المحور الأصغر:** ٢ب = ٢× $\frac{1}{2}$ = ١
8. هـ = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
9. **محاور التماثل:**

س = ٠ (الأكبر)

ص = ٠ (الأصغر)

📖 **مثال14**: ناقش العبارة: $2(5س-5)^2 + \frac{ص^2}{2} + 2ص = 2$

✍ **الحل:** $2(5(س-1))^2 + \frac{1}{2}(ص^2 + 4ص) = 2$

$\Leftarrow 50(س-1)^2 + \frac{1}{2}(ص^2 + 4ص + 4 - 4) = 2$

$\Leftarrow 50(س-1)^2 + \frac{1}{2}(ص^2 + 4ص + 4) - 2 = 2$

$$\Leftarrow 50(\text{س}-1)^2+\frac{1}{2}(\text{ص}+2)^2=4 \Leftarrow \frac{(\text{س}-1)^2}{\frac{4}{50}}+\frac{(\text{ص}+2)^2}{8}=1$$

معادلة قطع ناقص فيه:

1. **المركز:** $(1, -2)$
2. **نوع القطع صادي**
3. $\text{أ}^2=8 \longrightarrow \text{أ}=2\sqrt{2}$ ، $\text{ب}^2=\frac{4}{50}=\frac{2}{25} \longrightarrow \text{ب}=\frac{1}{5}\times\sqrt{2}$ ، $\text{ج}^2=\frac{198}{25} \Leftarrow \text{ج}=\frac{3}{5}\sqrt{22}$
4. **إحداثيات الرأسين:** $(1, -2\pm\text{أ}) = (1, -2\pm2\sqrt{2})$
5. **إحداثيات البؤرتين:** $(1, -2\pm\text{ج}) = (1, -2\pm\frac{3}{5}\sqrt{22})$
6. $\text{هـ}=\frac{3}{5}\sqrt{22}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{5}\sqrt{2}\times\sqrt{11}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{10}\sqrt{11} < 1$
7. **طول المحور الأكبر:** $2\text{أ} = 2\times2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
8. **طول المحور الأصغر:** $2\text{ب} = 2\times\frac{1}{5}\times\sqrt{2} = \frac{2}{5}\sqrt{2}$
9. **محاور التماثل:**

$\text{س}-1=0 \longrightarrow \text{س}=1$ (الأكبر)

$\text{ص}+2=0 \longrightarrow \text{ص}=-2$ (الأصغر)

الدرس الرابع : القطع الزائد

☜ **تعريف (القطع الزائد) : هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي يكون الفرق المطلق بين بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً ($٢أ$) ، أي أن:**

$$\left| ك ب_{١} - ك ب_{٢} \right| = ٢أ$$

☆ الصورة القياسية : $\frac{(س-د)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(ص-هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

خصائص :

☜ **إيجاد إحداثيات الرأسين يعتمد على قيمة المقدار أ**

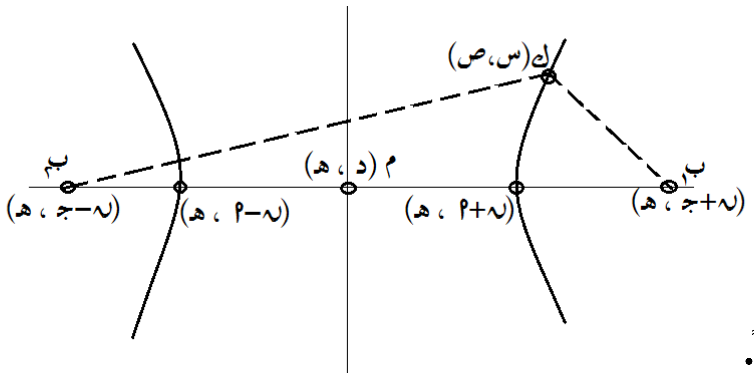
☜ **إيجاد إحداثيات البؤرتين يعتمد على قيمة جـ**

☜ **طول المحور القاطع = ٢أ**

☜ **طول المحور المرافق = ٢ب**

☜ **البعد بين البؤرتين = ٢جـ**

☜ **الاختلاف المركزي: هـ = $\frac{جـ}{أ}$ > ١ دائماً.**



ملاحظات :

١. إذا كان معامل $س^{٢}$ > صفر فإن القطع سيني.

٢. إذا كان معامل $ص^{٢}$ > صفر فإن القطع صادي.

(نعتمد على الإشارة الموجبه لتحديد نوع القطع الزائد)

٣. ($ب^٢$) هو العدد الموجود تحت المتغير الذي يكون القطع بدلالته.

٤. $ج^٢ = ب^٢ + ب^٢$

📖 **مثال١:** ناقش المعادلة: $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

✍ **الحل:** معادلة قطع زائد فيه:

١. المركز: (٠،٠)

٢. القطع سيني

٣. $ب^٢=٩ \longrightarrow ب=٣$ ، $ب^٢=١٦ \longrightarrow ب=٤$ ، $ج^٢ = ب^٢ + ب^٢ = ٢٥ \longrightarrow ج = ٥$

٤. طول المحور القاطع: ٢ب = ٢ × ٣ =٦ (المسافة بين الرأسين)

٥. طول المحور المرافق: ٢ب = ٢ × ٤ =٨

٦. إحداثيات الرأسين: (±ب،٠) = (±٣،٠)

٧. إحداثيات البؤرتين: (±ج،٠) = (±٥،٠)

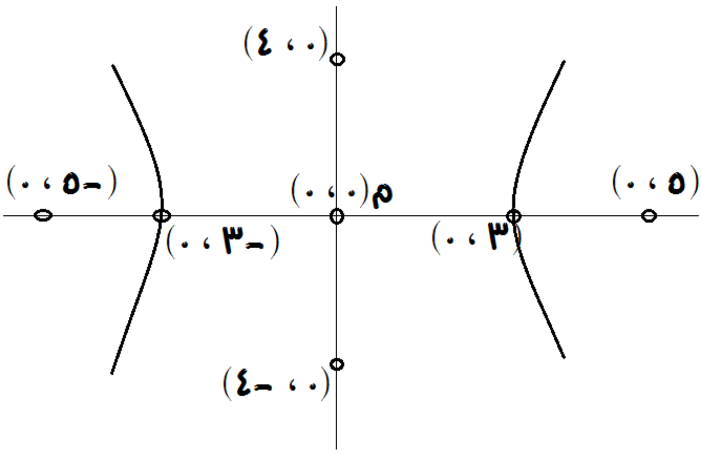
٨. محاور التماثل:

س=٠ (المرافق)

ص=٠ (القاطع)

٩. الاختلاف المركزي: هـ = $\frac{٥}{٣}$

١٠. البعد البؤري: ٢ج = ٢ × ٥ = ١٠



📖 **مثال٢:** ناقش العبارة: $\frac{(ص-٣)^٢}{١٦} - \frac{(س+١)^٢}{٩} = ١$

✍ **الحل:** قطع زائد فيه:

١. المركز: (-١،٣)

٢. القطع صادي

٣. $ب^٢=١٦ \longrightarrow ب=٤$ ، $ب^٢=٩ \longrightarrow ب=٣$ ، $ج^٢ = ب^٢ + ب^٢ = ٢٥ \longrightarrow ج = ٥$

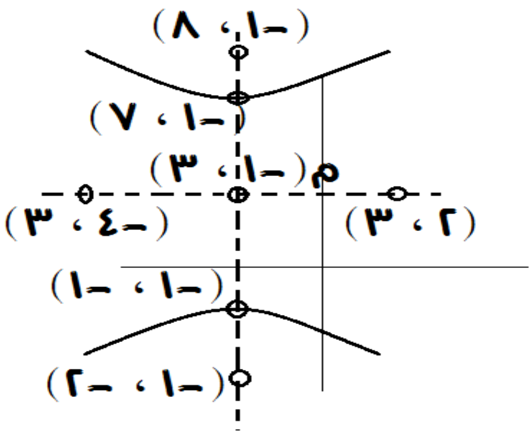
تأليف الأستاذ: أحمد فهمي
0779 909 516

٤. طول المحور القاطع: ٢أ = ٢×٤ =٨ (المسافة بين الرأسين)

٥. طول المحور المرافق: ٢ب = ٢×٣=٦

٦. إحداثيات الرأسين: (−١،٣±أ) = (−١،٣±٤) = (−١،٧) ، (−١،−١)

٧. إحداثيات البؤرتين: (−١،٣±جـ) = (−١،٣±٥) = (−١،٨) ، (−١،−٢)



٨. محاور التماثل:

س+١=٠ ← س=−١ (القاطع)

ص−٣=٠ ← ص=٣ (المرافق)

٩. الاختلاف المركزي: هـ = $\frac{٥}{٤}$

١٠. البعد البؤري: ٢جـ = ٢×٥ = ١٠

مثال٣: ناقش العبارة: ٤ص^{٢}−٤س^{٢}=١٠٠

الحل: نقسم الطرفين على العدد (١٠٠):

$\frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢٥} = ١$

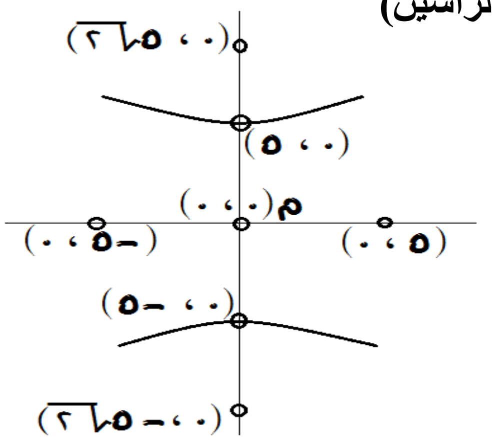
قطع زائد فيه:

١. المركز: (٠،٠)

٢. القطع صادي

٣. أ^{٢}=٢٥ ← أ=٥ ، ب^{٢}=٢٥ ← ب=٥ ، جـ^{٢}=أ^{٢}+ ب^{٢} = ٥٠ ← جـ = ٥$\sqrt{٢}$

٤. طول المحور القاطع: ٢أ = ٢×٥ =١٠ (المسافة بين الرأسين)



٥. طول المحور المرافق: ٢ب = ٢×٥=١٠

٦. إحداثيات الرأسين: (٠،٠±أ) = (٠،٠±٥)

٧. إحداثيات البؤرتين: (٠،٠±جـ) = (٠،٠±٥$\sqrt{٢}$)

٨. محاور التماثل:

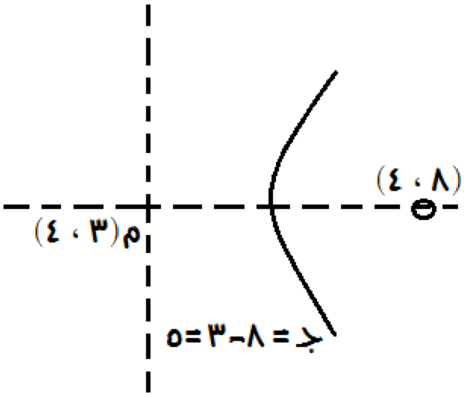
س=٠ (القاطع)

ص=٠ (المرافق)

٩. الاختلاف المركزي: $\text{هـ} = \frac{٥}{٥}\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

١٠. البعد البؤري: $٢\text{ج} = ٢ \times ٥\sqrt{٢} = ١٠\sqrt{٢}$

مثال٤: أوجد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه (٣،٤) وإحدى بؤرتيه (٨،٤) واختلافه المركزي يساوي $\frac{١٠}{٦}$؟



الحل: ج = ٨−٣ = ٥ ⇐ ج^٢ = ٢٥ ، والقطع سيني

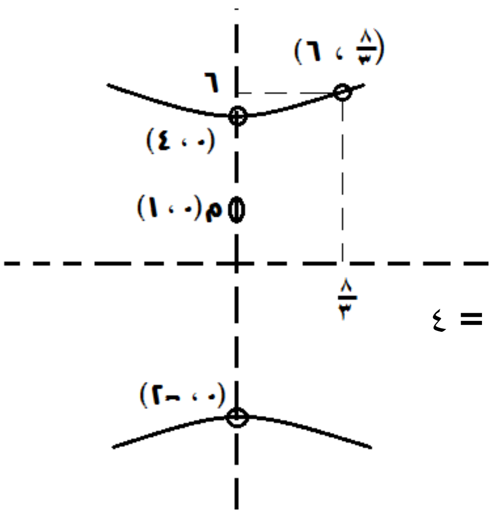
لكن هـ = $\frac{١٠}{٦}$ > ١ ⟵ القطع زائد

$\frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{\text{أ}}$ ⇐ أ = ٣ ⟵ أ^٢=٩ ، ج^٢= أ^٢ + ب^٢

⇐ ٢٥ = ٩+ ب^٢ ⟵ ب^٢ = ١٦

$$\therefore \frac{(\text{س}-٣)^٢}{٩} - \frac{(\text{ص}-٤)^٢}{١٦} = ١$$

مثال٥: أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٠،٤) ، (٠، −٢) ويمر بالنقطة ($\frac{٨}{٣}$،٦)؟



الحل: المركز: $(\frac{٠+٠}{٢} ، \frac{٤-٢}{٢})$ = (٠،١)

$\therefore$ أ = ٤−١ = ٣ ⟵ أ^٢=٩ ⇐ $\frac{(\text{ص}-١)^٢}{٩} - \frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

لكن النقطة ($\frac{٨}{٣}$،٦) تحقق المعادلة: $\frac{٢٥}{٩} - \frac{٦٤}{٩} \times \frac{١}{\text{ب}^٢}$ ⟵ ب^٢ = ٤

$$\therefore \frac{(\text{ص}-١)^٢}{٩} - \frac{\text{س}^٢}{٤} = ١$$

مثال٦: إذا كانت معادلة القطع الزائد: ٥ص^٢−٩س^٢=٣٦ ، أوجد فرق المسافة بين النقطة (٤،٦) وبؤرتي القطع؟

الحل: النقطة (٤،٦) تقع على المنحنى ، إذن الفرق في المسافة = ٢أ

$$\frac{٥ص^{٢}}{٣٦} - \frac{س^{٢}}{٤} = ١ \Leftarrow \frac{ص^{٢}}{\frac{٣٦}{٥}} - \frac{س^{٢}}{٤} = ١ \Leftarrow أ^{٢} = \frac{٣٦}{٥} \longleftarrow أ = \frac{٦}{\sqrt{٥}}$$

$\therefore$ **فرق المسافة** $= ٢أ = ٢ \times \frac{٦}{\sqrt{٥}} = \frac{١٢}{\sqrt{٥}}$

مثال٧: ناقش المعادلة: $س^{٢} - ٩ص^{٢} - ٨س + ٣٦ص - ٢٩ = ٠$

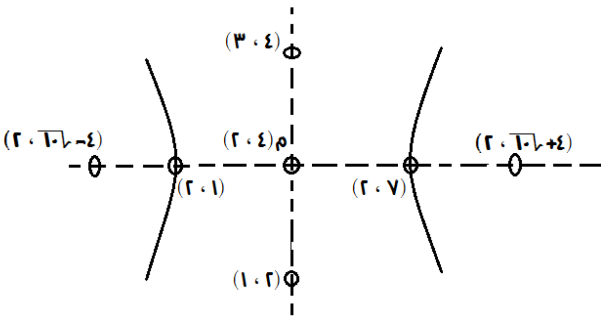
الحل: $س^{٢} - ٨س - ٩ص^{٢} + ٣٦ص - ٢٩ = ٠$

$\Leftarrow س^{٢} - ٨س + ١٦ - ١٦ - ٩(ص^{٢} - ٤ص + ٤ - ٤) - ٢٩ = ٠$

$\Leftarrow (س-٤)^{٢} - ٩(ص-٢)^{٢} - ٢٩ - ١٦ + ٣٦ = ٠$

$\Leftarrow (س-٤)^{٢} - ٩(ص-٢)^{٢} = ٩$

$\Leftarrow \frac{(س-٤)^{٢}}{٩} - \frac{(ص-٢)^{٢}}{١} = ١$ **......قطع زائد فيه:**



١. **المركز:** (٤،٢)

٢. **القطع سيني**

٣. $أ^{٢} = ٩ \longleftarrow أ = ٣$ ، $ب^{٢} = ١ \longleftarrow ب = ١$ ، $ج^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = ١٠ \longleftarrow ج = \sqrt{١٠}$

٤. **طول المحور القاطع:** $٢أ = ٢ \times ٣ = ٦$ **(المسافة بين الرأسين)**

٥. **طول المحور المرافق:** $٢ب = ٢ \times ١ = ٢$

٦. **إحداثيات الرأسين:** $(٤ \pm أ، ٢) = (٤ \pm ٣، ٢) = (٧، ٢)$ ، $(١، ٢)$

٧. **إحداثيات البؤرتين:** $(٤ \pm ج، ٢) = (٤ \pm \sqrt{١٠}، ٢)$

٨. **محاور التماثل:**

$س - ٤ = ٠ \longleftarrow س = ٤$ **(المرافق)**

$ص - ٢ = ٠ \longleftarrow ص = ٢$ **(القاطع)**

٩. **الاختلاف المركزي:** $هـ = \frac{\sqrt{١٠}}{٣}$

١٠. **البعد البؤري:** $٢ج = ٢\sqrt{١٠}$

مثال٨: ما معادلة القطع المخروطي الذي بؤرتاه (١،٩)،(١،−٣) واختلافه المركزي يساوي $\frac{٣}{٢}$ ؟

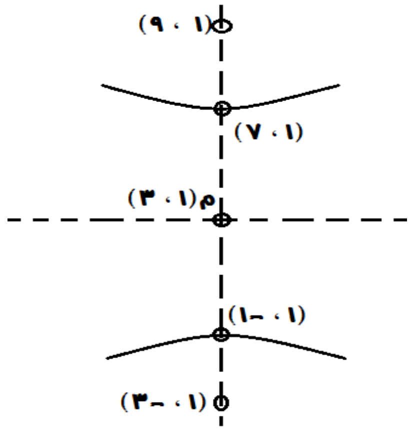
الحل: هـ = $\frac{٣}{٢}$ > ١ ⇐ القطع زائد ، ومن إحداثيات البؤرتين نستنتج أن القطع صادي فيه:

٢جـ = ٩−(−٣) = ١٢ ⟵ جـ = ٦ ⇐ جـ^{٢}=٣٦

$\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٣}{٢}$ ⇐ $\frac{٦}{أ}$ = $\frac{٣}{٢}$ ⇐ أ = ٤ ⟵ أ^{٢} = ١٦ ، لكن جـ^{٢}=أ^{٢}+ ب^{٢} ⇐ ٣٦ = ١٦+ ب^{٢}

⇐ ب^{٢}= ٢٠ ، المركز: (١ ، ٩−جـ) = (١،٩−٦) = (١ ، ٣)

∴ $\frac{(ص-٣)^{٢}}{١٦} - \frac{(س-١)^{٢}}{٢٠} = ١$



مثال٩: ما معادلة القطع المخروطي الذي مركزه (−٥،١) والبعد بين بؤرتيه يساوي ١٠ والبعد بين رأسيه يساوي ١٢ ؟

الحل: ٢جـ = ١٠ ⟵ جـ = ٥ ⇐ $\boxed{جـ^{٢} = ٢٥}$

٢أ = ١٢ ⟵ أ = ٦ ⇐ $\boxed{أ^{٢} = ٣٦}$ ، هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٥}{٦}$ <١ ⟵ القطع ناقص

جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ⇐ ٢٥ = ٣٦ − ب^{٢} ⟵ $\boxed{ب^{٢} = ١١}$

لا يوجد معلومة تخبر بأن القطع سيني أو صادي ، إذن هناك حلان:

$\frac{(س+٥)^{٢}}{٣٦} + \frac{(ص-١)^{٢}}{١١} = ١$ ، $\frac{(ص-١)^{٢}}{٣٦} + \frac{(س+٥)^{٢}}{١١} = ١$

مثال١٠: ما معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي يساوي ٢ وبؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص ٩س^{٢} = ٢٢٥−٢٥ص^{٢} ؟

✍ **الحل: نجد إيجاد إحداثيات بؤرتي القطع الناقص أولاً :**

$٩س^٢+٢٥ص^٢=٢٢٥ \longrightarrow \frac{س^٢}{٢٥}+\frac{ص^٢}{٩}=١$ ....قطع ناقص فيه:

١. **المركز:** (٠،٠)

٢. **$م^٢=٢٥ \longrightarrow \boxed{م=٥}$ ، $ب^٢=٩ \longrightarrow \boxed{ب=٣}$ ، $جـ^٢=١٦ \longrightarrow \boxed{جـ=٤}$**

٣. **القطع سيني**

٤. **البؤرتان:** (±جـ ، ٠) = (±٤ ، ٠)

∴ القطع الزائد سيني بؤرتاه (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) ، والمركز: (٠،٠)

لكن، $هـ=٢ \longrightarrow \frac{جـ}{م}=٢ \longrightarrow \frac{٤}{م}=٢ \longrightarrow م=٢ \Leftarrow \boxed{م^٢=٤}$

$جـ^٢=م^٢+ب^٢ \longrightarrow ١٦=٤+ب^٢ \longrightarrow \boxed{ب^٢=١٢}$

إذن المعادلة: $\frac{س^٢}{٤}-\frac{ص^٢}{١٢}=١$

📖 **مثال:** أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠،٠) وبؤرتاه على محور السينات ويمس المستقيم $ص=\sqrt{٣}س-٢$ عند النقطة $(٢\sqrt{٣}، ٤)$ ؟

✍ **الحل: لأن البؤرتان على محور السينات نستنتج أن القطع سيني ومنه:**

$\frac{س^٢}{م^٢}-\frac{ص^٢}{ب^٢}=١$ ، لكن النقطة $(٢\sqrt{٣}، ٤)$ تحقق المعادلة ، إذن: $\frac{١٢}{م^٢}-\frac{١٦}{ب^٢}=١$ ....(١)

وعند نقطة التماس يكون دائماً: ميل المنحنى = ميل المستقيم ، ومنه فإن ميل المنحنى يعطى

بالعلاقة : $\frac{٢س}{م^٢}-\frac{٢ص\times\frac{دص}{دس}}{ب^٢}=٠$ ، وبتعويض نقطة التماس في المعادلة ينتج أن:

$\frac{٤}{\text{أ}^{٢}} \times \sqrt{٣} - \frac{٨ \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{\text{ب}^{٢}} = ٠$ ، لكن ميل المستقيم ص $= \sqrt{٣}$ س-٢ يساوي $\sqrt{٣}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{٣}$ ، $\therefore \frac{٤}{\text{أ}^{٢}} \times \sqrt{٣} - \frac{٨}{\text{ب}^{٢}} \times \sqrt{٣} = ٠ \longleftarrow \frac{٤}{\text{أ}^{٢}} \times \sqrt{٣} = \frac{٨}{\text{ب}^{٢}} \times \sqrt{٣}$

$\Leftarrow ٢\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢}$................(٢)

وبتعويض معادلة(٢) في معادلة (١) ينتج أن:

$\frac{١٢}{\text{أ}^{٢}} - \frac{١٦}{٢\text{أ}^{٢}} = ١ \longleftarrow \frac{٢٤-١٦}{٢\text{أ}^{٢}} = ١ \longleftarrow ٢\text{أ}^{٢} = ٨ \longleftarrow \boxed{\text{أ}^{٢} = ٤}$ ، **وبتعويض قيمة (أ) في معادلة**

(٢) ينتج: $٢ \times ٤ = \text{ب}^{٢} \longleftarrow \boxed{\text{ب}^{٢} = ٨}$

$\therefore$ **المعادلة:** $\frac{\text{س}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٨} = ١$

📖 **مثال١٢:** قطع مخروطي معادلته هي س-٢ص $= \frac{٤}{\text{س}+٢\text{ص}}$ ، أوجد الاختلاف المركزي له؟

✍ **الحل: من الضرب التبادلي لطرفي المعادلة ينتج:** $\text{س}^{٢} - ٤\text{ص}^{٢} = ٤$

$\Leftarrow \frac{\text{س}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ص}^{٢}}{١} = ١$ **.... قطع زائد فيه:** $\text{أ}^{٢} = ٤ \longleftarrow \text{أ} = ٢$ ، $\text{ب}^{٢} = ١ \longleftarrow \text{ب} = ١$

$\text{ج}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \longleftarrow \text{ج}^{٢} = ٤ + ١ = ٥ \longleftarrow \text{ج} = \sqrt{٥}$ ، $\therefore \text{هـ} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

0779 909 516

المتطابقات المثلثية :

١. جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

٢. جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ – جتا٢س)

٣. جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢س)

٤. جا٢س = ٢جاس جتاس

٥. جتا٢س = جتا^{٢}س – جا^{٢}س = ٢جتا^{٢}س–١ = ١–٢جا^{٢}س

٦. ١– جتاس = ٢جا^٢ $\frac{١}{٢}$ س

٧. ١+ جتاس = ٢جتا^٢ $\frac{١}{٢}$ س

٨. جاس – جاص = ٢جتا($\frac{س+ص}{٢}$) × جا($\frac{س–ص}{٢}$)

٩. جتاس – جتاص = –٢جا($\frac{س+ص}{٢}$) × جا($\frac{س–ص}{٢}$)

١٠. جتاس جتاص = $\frac{١}{٢}$(جتا(س + ص) + جتا(س – ص))

١١. جاس جاص = $\frac{١}{٢}$(جتا(س – ص) – جتا(س + ص))

١٢. جاس جتاص = $\frac{١}{٢}$(جا(س + ص) + جا(س - ص))

١٣. ظاس = $\frac{جاس}{جتاس}$

١٤. ظتاس = $\frac{جتاس}{جاس}$

١٥. قاس = $\frac{١}{جتاس}$

١٦. قتاس = $\frac{١}{جاس}$

١٧. قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س

١٨. قتا^{٢}س = ١ + ظتا^{٢}س

١٩. جا(– س) = – جاس

٢٠. جتا(– س) = جتاس

٢١. نصف قطر الدائرة عمودياً على المماس دائماً.

٢٢. مقدار بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم = $\frac{١}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ × |أس+ب ص+جـ|

٢٣. المسافة بين نقطتين = $\sqrt{(س_١ – س_٢)^٢ + (ص_١ – ص_٢)^٢}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516