بسم الله الرحمن الرحيم

مادة الرياضيات العلمي (المستوى الثالث)

شرح مفصل للمادة التي تضم الوحدات الآتية:

☝ النهاية والاتصال

✌ حساب التفاضل

👌 تطبيقات التفاضل

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي

رقم الهاتف : ٠٧٧٩٩٠٩٥١٦

أنواع المجموعات العددية:

١. **المجموعة المغلقة (الفترة المغلقة) : وهي الفترة التي تكون جميع الأعداد (بما فيها أطراف الفترة) التي تحتويها تحقق حل لنظام ما ، ويرمز إلى إليها [أ،ب].**

٢. **المجموعة المفتوحة(الفترة المفتوحة) : وهي الفترة التي تكون جميع الأعداد (دون أطراف الفترة) التي تحتويها تحقق حل لنظام ما ، ويرمز إلى إليها (أ،ب).**

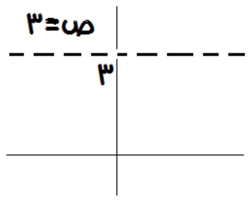
٣. **المجموعة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة: وهي الفترة التي تكون جميع الأعداد (مع أحد أطراف الفترة) التي تحتويها تحقق حل لنظام ما ، ويرمز إلى إليها (أ،ب] أو [أ،ب).**

دراسة لبعض أنواع الاقترانات:

١. **الاقتران الثابت: هو الاقتران ذو الدرجة الصفرية المكتوب على الصورة: ق(س) = ج ، ج ∈ ح**
مثل: ق(س)=٣ ، ق(س)= − $\frac{٥}{٣}$ ، ق(س)= − ١٠ ، ... وهكذا

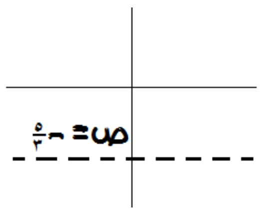
📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=٣ ؟

✍ **الحل:** ص=٣



📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)= − $\frac{٥}{٣}$؟

✍ **الحل:** ص= − $\frac{٥}{٣}$



☆ **ملاحظة:** إذا كان ق(س)=ج ⟵ ق(أ)=ج ، أ،ج ∈ ح

📖 **مثال:** إذا كان ق(س)=−١ ، أوجد ق(٠) ، ق($\frac{١}{٢}$) ؟

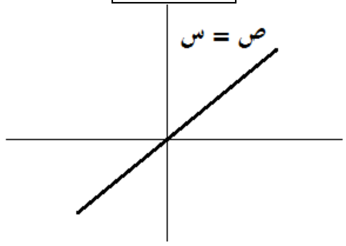
✍ **الحل:** ق(٠)= − ١ ، ق($\frac{١}{٢}$) = −١

٢. <u>الاقتران الخطي</u>: هو الاقتران ذو الدرجة الأولى المكتوب على الصورة: ق(س)=م س+ب حيث م،ب ∈ ح

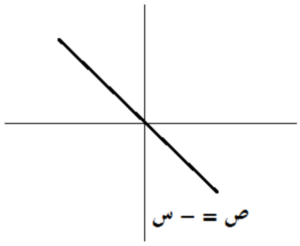
مثل: ق(س)=س ، ق(س)= ٢س−١ ...وهكذا

➢ **الرسمات الأساسية(حفظ):**

و(س)=م س

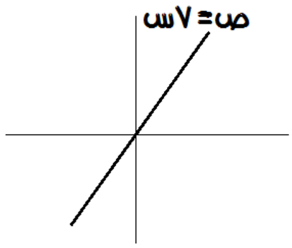


و(س)=−م س



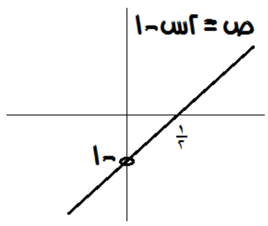
📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=٧س؟

✍ **الحل:** ص=٧س



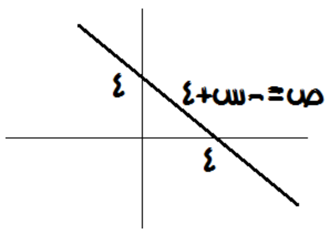
📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=٢س−١؟

✍ **الحل:** ص=٢س−١



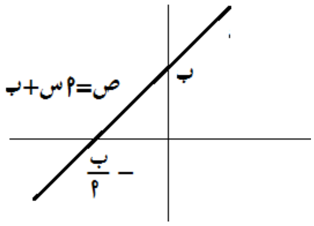
📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=− س+٤؟

✍ **الحل:** ص=− س+٤



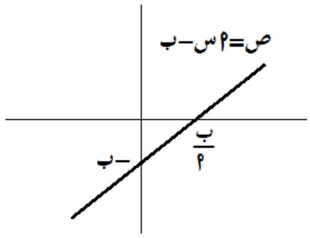
📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=م س+ب؟

✍ **الحل:** ص=أس+ب



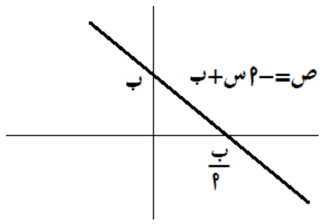
📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=أس−ب؟

✍ **الحل:** ص=أس−ب



📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=−أس+ب؟

✍ **الحل:** ص=−أس+ب

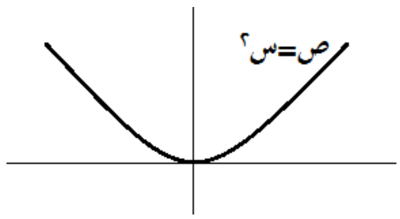


٣. الاقتران التربيعي: هو الاقتران ذو الدرجة الثانية المكتوب على الصورة: ق(س)=أس²+ب س+جـ ، **حيث** أ،ب،جـ ∈ ح

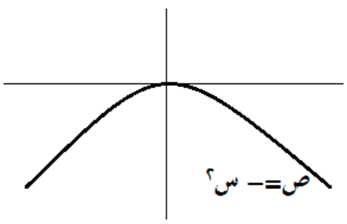
مثل: ق(س)=س²−٩ ، ق(س)=٤س−٨س²−١٠ .... وهكذا

➢ **الرسمات الأساسية(حفظ):**

ق(س)=أس²

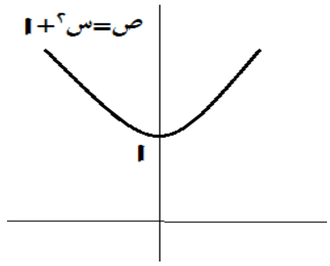


ق(س)= −أس²



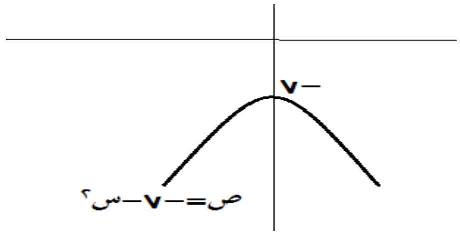
📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=س²+١ ؟

✍ **الحل:** ص=س²+١



📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=−٧− س^{٢} ؟

✍ **الحل:** ص=−٧ − س^{٢}

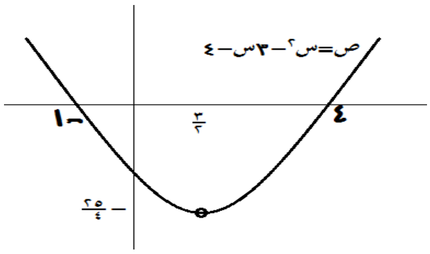


📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=س^{٢}−٣س−٤ ، ثم أوجد أصفاره؟

✍ **الحل:** نجد إحداثية الرأس: $(\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق$(\frac{-ب}{٢أ}))$ = $(\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٢٥}{٤})$

ولإيجاد الجذور : س^{٢}−٣س−٤=٠ ⇐ (س−٤)(س+١)=٠

⇐ س = ٤ ، −١

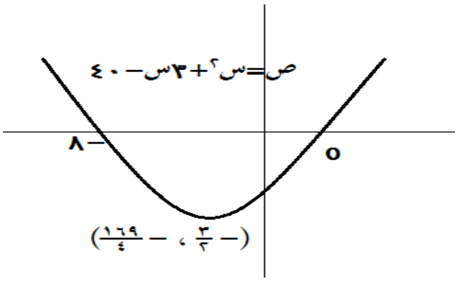


📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=س^{٢}+٣س−٤٠ ، ثم أوجد أصفاره؟

✍ **الحل:** إحداثية الرأس: $(-\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{١٦٩}{٤})$

الحلول (الأصفار): س^{٢}+٣س−٤٠=٠ ⟵ (س+٨)(س−٥)=٠

⇐ س=−٨ ، ٥



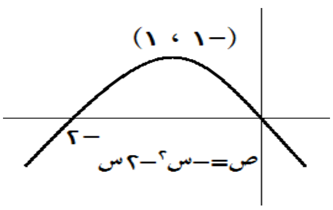
📖 **مثال:** أوجد جذور الاقتران ق(س)=− س^{٢}+٩؟

✍ **الحل:** ٩−س^{٢}=٠ ⇐ (٣−س)(٣+س)=٠ ⟵ س=٣ ، −٣

📖 **مثال:** أوجد حلول الاقتران ق(س)= − س^{٢}−٢س ، ثم مثله بيانياً؟

✍ **الحل:** − س^{٢}−٢س=٠ ⟵ −(س^{٢}+٢س)=٠ ⟵ س^{٢}+٢س=٠ ⟵ س(س+٢)=٠ ⟵ س=٠ ، −٢

ولتمثيله بيانياً يجب تحديد إحداثية الرأس: $(\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق$(\frac{-ب}{٢أ}))$ = (−١ ، ١)



📖 **مثال:** أوجد أصفار الاقتران ق(س)= $س^{٢}-٤س+٢$؟

✍ **الحل:** هذا الاقتران لا يحلل بسهولة ،لذا نلجأ إلى فحص المميز لمعرفة قابليته للتحليل أولاً :

$ب^{٢}-٤أجـ = ١٦-٤\times١\times٢ = ١٦-٨=٨ > ٠$ ، ∴ **يحلل**

$$س=\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢}-٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٤\pm\sqrt{٨}}{٢} = \frac{٤\pm٢\sqrt{٢}}{٢} = ٢\pm\sqrt{٢}$$

---

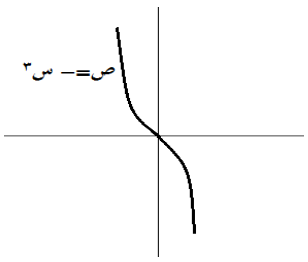
٤. **<u>الاقتران التكعيبي</u>: هو الاقتران ذو الدرجة الثالثة المكتوب على الصورة:** ق(س)=$أس^{٣}+ب س^{٢}+جـ س+د$

حيث أ ،ب،جـ،د ∈ ح

➢ **الرسمات الأساسية(حفظ):**

ق(س)=$س^{٣}$

ق(س)= $-س^{٣}$



📖 **مثال:** أوجد أصفار الاقتران ق(س)=$س^{٣}-٥س^{٢}+س+٣$؟

✍ **الحل:** لتحليل أي اقتران تكعيبي نجد عوامل الحد المطلق ونبدأ بالتجريب.

عوامل العدد ٣ هي: {±١ ، ±٣}

$س^{٣}-٥س^{٢}+س+٣=٠$ ، نأخذ العدد ١ ونعوضه في المعادلة:

$١-٥+١+٣=٠$ ، ∴ العدد ١ يحقق المعادلة ⟵ س = ١

∴ $س^{٣}-٥س^{٢}+س+٣=$ (س−١)($س^{٢}-٤س-٣$)=٠

$ب^{٢}-٤أجـ = ١٦-٤\times١\times-٣ = ٢٨>٠$

∴ $س=\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢}-٤أجـ}}{٢أ}$

$\Leftarrow \frac{٤}{٢} \pm \frac{٢}{٢}\sqrt{٧} = ٢\pm\sqrt{٧}$

∴ **الجذور هي:** س= {١، ٢+$\sqrt{٧}$ ، ٢−$\sqrt{٧}$}

$س^{٠}$	س	$س^{٢}$	$س^{٣}$	
٣	١	−٥	١	
−٣	−٤	١		١
صفر	−٣	−٤	١	

📖 **مثال:** أوجد قيم س للاقتران ق(س)=$س^{٣}-٢س^{٢}$؟

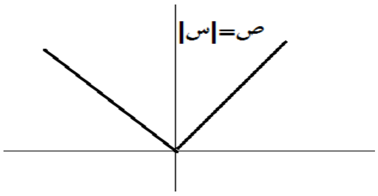
✍ **الحل:** $س^{٣}-٢س^{٢}=٠$ ⟵ $س^{٢}$(س−٢)=٠ ⟵ س=٠ ، ٢

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

٥. اقتران القيمة المطلقة: هو الاقتران المكتوب على الصورة: ق(س) = | هـ (س) |

➢ الرسمة الأساسية(حفظ):

$\boxed{\text{ق(س)}= |\text{س}|}$



➢ **خطوات إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة:**

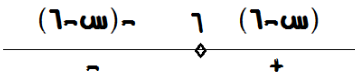
١. نهمل رمز القيمة المطلقة ونساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر.
٢. نجد أصفار الاقتران ونحددها على خط الأعداد.
٣. نبحث إشارة الاقتران من يمين ويسار الأصفار.

✪ **ملاحظة:** اقتران القيمة المطلقة يدرس نوع إشارة الاقترانات فقط.

📖 **مثال:** أعد تعريف الاقتران ق(س)= |س−٦|

✍ **الحل:** س−٦=٠ ← س = ٦

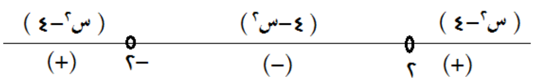
∴ ق(س)= { س−٦ ، س > ٦
٦−س ، س ≤ ٦ }

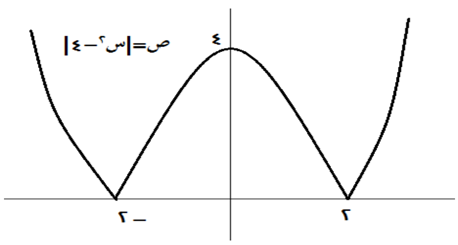


📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س)=|س٢−٤|؟

✍ **الحل:** س٢−٤=٠ ← (س−٢)(س+٢)=٠ ← س= ٢ ، −٢

ق(س)= { س٢−٤ ، س > ٢ ، س < −٢
٤−س٢ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ }





✪ **خصائص القيمة المطلقة:**

➢ |س×ص| = |س| × |ص|

➢ $\left|\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right| = \frac{|\text{س}|}{|\text{ص}|}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

➢ $|ق(س)| = \sqrt{ق^2(س)}$

➢ إذا كان $|ق(س)| \le أ \longrightarrow ق(س) \le أ$ أو $ق(س) \ge -أ$

➢ إذا كان $|ق(س)| \ge أ \longrightarrow ق(س) \ge أ$ أو $ق(س) \le -أ$

➢ إذا كان $|ق(س)| = أ \longrightarrow ق(س) = أ$ أو $ق(س) = -أ$

📖 **مثال:** حل كل من المعادلات الآتية:

١. $|٢س-٤|=١٢$

٢. $|س+١| \ge ٣$

٣. $|٣س-٣| < ٦$

✍ **الحل:**

١) $|٢س-٤|=١٢ \Leftarrow$ إما $٢س-٤=١٢$ ، أو $٢س-٤=-١٢$

$\Leftarrow ٢س = ١٦$ ، أو $٢س = -٨$

$\Leftarrow س = ٨$ ، $س = -٤$

٢) $|س+١| \ge ٣ \Leftarrow$ إما $س+١ \ge ٣$ ، أو $س+١ \le -٣$

$\Leftarrow س \ge ٢$ ، $س \le -٤$

$\therefore س \in (-\infty,-٤] \cup [٢,\infty) = ح-(-٤,٢)$

٣) $|٣س-٣| < ٦ \Leftarrow$ إما $٣س-٣ < ٦$ ، أو $٣س-٣ > -٦$

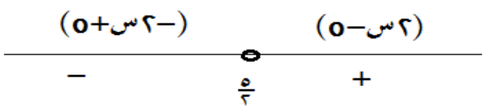
$\Leftarrow ٣س < ٩$ ، $٣س > -٣$

$\Leftarrow س < ٣$ ، $س > -١$

$\therefore س \in (-\infty,٣) \cap (-١,\infty) = (-١,٣)$

📖 **مثال:** أعد تعريف الاقتران $ق(س)=|٢س-٥|+٧س^2$ ؟

✍ **الحل:** $٢س-٥=٠ \longrightarrow س=\frac{٥}{٢}$



$$ق(س)=\begin{cases} ٧س^2+٢س-٥ \text{ ، } س \ge \frac{٥}{٢} \\ ٧س^2-٢س+٥ \text{ ، } س < \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

---

٦. **<u>اقتران أكبر عدد صحيح</u>:** هو الاقتران المكتوب على الصورة: $ق(س) = [هـ(س)]$ ، وهو يعطي أكبر قيمة صحيحة أقل من أو تساوي القيمة س ، مثلاً: $[٦,٥] = ٦$ ، $[-١٠,٤] = -١١$

❶ **خصائص:**

☜ [ق(س) ± م] = [ق(س)] ± م ، فقط إذا كان م ∈ ص

☜ إذا كان [ق(س)] = ن ⟵ ن ≤ ق(س) ≤ ن + ١

---

❶ **خطوات إعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح:**

١. نجد مقلوب معامل س، ويسمى "طول الدرجة" ل = $\frac{١}{|م|}$ ، حيث م هو معامل المتغير س.
٢. نبدأ من الصفر دائماً في حال وجود عدد صحيح ونتحرك بمقدار طول الدرجة.
٣. نبدأ من صفر الاقتران في حال وجود عدد عشري.
٤. نعيد التعريف على شكل متعدد قواعد.

📖 **مثال:** أعد تعريف الاقتران ق(س) = [٢س+١] على الفترة [-١ ، ٢]

✍ **الحل:** مقلوب معامل س هو ل = $\frac{١}{٢}$

٢ ، ١,٥ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، $-\frac{١}{٢}$ ، -١

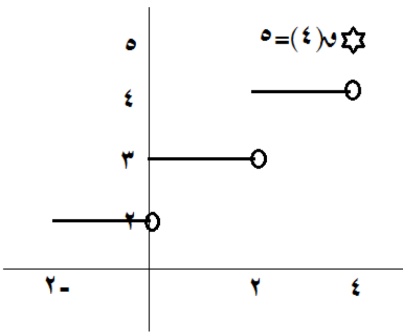
ق(س) =
- -١ ، -١ ≤ س < $-\frac{١}{٢}$
- ٠ ، $-\frac{١}{٢}$ ≤ س < ٠
- ١ ، ٠ ≤ س < $\frac{١}{٢}$
- ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ≤ س < ١
- ٣ ، ١ ≤ س < ١,٥
- ٤ ، ١,٥ ≤ س < ٢
- ٥ ، س = ٢

📖 **مثال:** أعد تعريف الاقتران ق(س) = [$\frac{١}{٢}$س+٣] على الفترة [-٢،٤]

✍ **الحل:** ل = ٢

٤ ، ٢ ، ٠ ، -٢

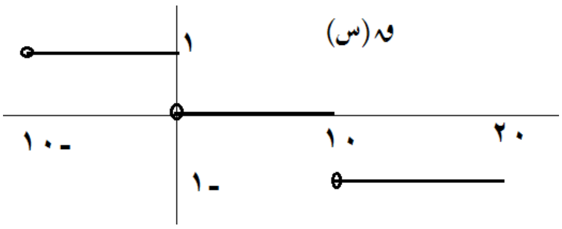
ق(س) =
- ٢ ، -٢ ≤ س < صفر
- ٣ ، صفر ≤ س < ٢
- ٤ ، ٢ ≤ س < ٤
- ٥ ، س = ٤



📖 **مثال:** ارسم منحنى الاقتران ق(س) = [$-\frac{س}{١٠}$ + ١] ، [-١٠، ٢٠]

✍ **الحل:** ل = ١٠ ، إذا لم يحدد الفترة في السؤال فتكون الفترة هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

٢٠ ، ١٠ ، ٠ ، -١٠



ق(س)= {
١ ، -١٠ < س ≤ ٠
٠ ، ٠ < س ≤ ١٠
-١ ، ١٠ < س ≤ ٢٠

📖 **مثال:** حل المعادلات الآتية:

١. [س] = ٣
٢. [٩- س] = ٥

✍ **الحل:**

١) ٣ ≤ س < ٤
٢) ٥ ≤ ٩ – س < ٦ ⇐ -٤ ≤ – س < -٣ ⇐ ٣ < س ≤ ٤

📖 **مثال:** أعد تعريف الاقتران ق(س) = س +[س + ٠,٨] ؟

✍ **الحل:** عندما يكون الحد المطلق عدداً غير صحيح نبدأ من صفر الاقتران كالآتي:

س+٠,٨ = ٠ ⇐ س = – ٠,٨ ، لكن ل = ١

١,٢ ، ٠,٢ ، -٠,٨ ، -١,٨ ، -٢,٨

ق(س) = {
. .
. .
. .
س – ٢ ، -٢,٨ ≤ س < -١,٨
س – ١ ، -١,٨ ≤ س < -٠,٨
س ، -٠,٨ ≤ س < ٠,٢
س +١ ، ٠,٢ ≤ س < ١,٢
. .
. .
. .

✪ **التحليلات الرياضية:**

١. **الفرق بين مربعين:** ص٢ – س٢ = (ص – س)(ص + س)
٢. **الفرق بين مكعبين:** ص٣ – س٣ = (ص – س)(ص٢ + ص س + س٢)
٣. **مجموع مكعبين:** ص٣ + س٣ = (ص + س)(ص٢ – ص س + س٢)

٤. (ص ± س)^{٢} = ص^{٢} ± ٢س ص + س^{٢}

٥. (ص ± س)^{٣} = ص^{٣} ± ٣ص^{٢}س + ٣ص س^{٢} ± س^{٣}

مثال: حلل كلاً من المقادير الآتية:

١. س^{٢} − ٨١

٢. ص^{٢} − ٢٥م^{٢}

٣. (س+٣)^{٣} − ١

٤. س^{٤} − ٢٧س

٥. $\frac{١}{٨}$ − س^{٣}

٦. (٢ − ٤س)^{٣}

٧. (س − ٥)^{٢}

٨. ٢س^{٣} + $\frac{١}{٤}$

٩. (ع + ٣)^{٣}

الحل:

١. س^{٢} − ٨١ = (س − ٩)(س + ٩)

٢. ص^{٢} − ٢٥م^{٢} = (ص − ٥م)(ص + ٥م)

٣. (س+٣)^{٣} − ١ = (س+٣−١)((س+٣)^{٢} + (س+٣) + ١) = (س+٢)((س+٣)^{٢} + س + ٤)

٤. س^{٤} − ٢٧س = س (س^{٣} − ٢٧) = س (س − ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)

٥. $\frac{١}{٨}$ − س^{٣} = ($\frac{١}{٢}$ − س)($\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$س + س^{٢})

٦. (٢ − ٤س)^{٣} = ٢^{٣} − ٣×٢^{٢}×٤س + ٣×٢×(−٤س)^{٢} +(−٤س)^{٣} = ٨ − ٤٨س + ٩٦س^{٢} − ٦٤س^{٣}

٧. (س − ٥)^{٢} = س^{٢} − ٢×س×٥ + (−٥)^{٢} = س^{٢} − ١٠س + ٢٥

٨. ٢س^{٣} + $\frac{١}{٤}$ = ٢(س^{٣} + $\frac{١}{٨}$) = ٢(س+$\frac{١}{٢}$)(س^{٢} − $\frac{١}{٢}$س + $\frac{١}{٤}$)

٩. (ع + ٣)^{٣} = ع^{٣} + ٣×ع^{٢}×٣ + ٣×ع×٣^{٢} + ٣^{٣} = ع^{٣} + ٩ع^{٢} + ٢٧ع + ٢٧

الوحدة الأولى : النهاية والاتصال

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

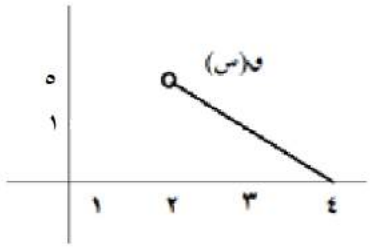
الدرس الأول: نهاية الاقتران عند نقطة

➢ **تعريف: إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً على الفترة [أ،ب] فإن الاقتران ق(س) له نهاية وتساوي قيمة حقيقية**

إذا كان: $\underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to أ^+}{\text{نهـا}}$ ق(س)

أي إذا كان $\underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to أ^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = جـ ← $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = جـ

📖 **مثال١: أوجد قيمة** $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) ، $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) **(إن وجدت) بناءً على الرسم البياني التالي:**



✍ **الحل:**

☜ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) : $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٥ ، $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) **(غير موجودة)**

لاحظ أن $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) ⇐ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) **غير موجودة.**

☜ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) : $\underset{س \to ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ، $\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

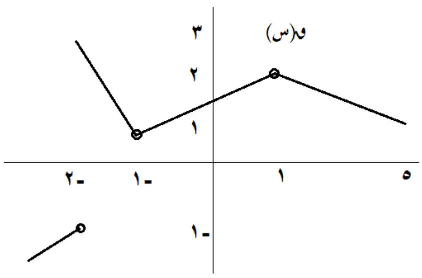
بما أن $\underset{س \to ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) ← $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)=١

📖 **مثال٢: بناءً على الشكل التالي ، أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):**

١) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٣) ق(-٢)



✍ **الحل:**

١) $\underset{س \to -١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ، $\underset{س \to -١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ، $\underset{س \to -١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to -١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

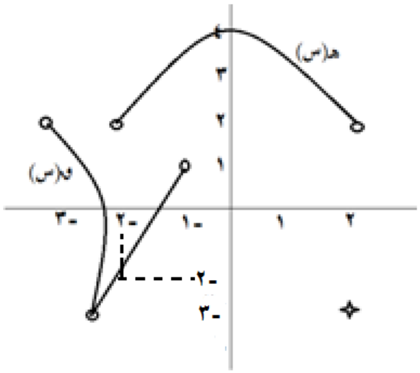
∴ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

٢) $\underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢ ، $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢ ، $\underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢ ⇐ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢

٣) ق(-٢) = ٣

📖 **مثال٣: بناءً على الشكل التالي الذي يمثل كل من منحنى الاقتران ق(س) ومنحنى الاقتران هـ(س) ، احسب قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):**

١) نهـا$_{س \leftarrow ١}$ هـ(س)
٢) نهـا$_{س \leftarrow -٢}$ و(س)
٣) نهـا$_{س \leftarrow -٢}$ هـ(س)
٤) نهـا$_{س \leftarrow -١}$ و(س)
٥) و(−١)
٦) هـ(٢)
٧) هـ(٠)
٨) نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ هـ (س)



الحل:

١) نهـا$_{س \leftarrow ١^+}$ هـ(س) = ٣ ، نهـا$_{س \leftarrow ١^-}$ هـ(س) = ٣ ، ∴ نهـا$_{س \leftarrow ١^+}$ هـ(س) = نهـا$_{س \leftarrow ١^-}$ هـ(س) = ٣ ⇐ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ هـ(س) = ٣

٢) نهـا$_{س \leftarrow -٢^+}$ و(س) = −٢ ، نهـا$_{س \leftarrow -٢^-}$ و(س) =−٢ ، نهـا$_{س \leftarrow -٢^+}$ و(س) = نهـا$_{س \leftarrow -٢^-}$ و(س)

∴ نهـا$_{س \leftarrow -٢}$ و(س)=−٢

٣) نهـا$_{س \leftarrow -٢^+}$ هـ(س) = ٢ ، نهـا$_{س \leftarrow -٢^-}$ هـ(س) **غير موجودة** ، ∴ نهـا$_{س \leftarrow -٢}$ هـ(س) **غير موجودة.**

٤) نهـا$_{س \leftarrow -١^+}$ و(س) **غير موجودة** ، نهـا$_{س \leftarrow -١^-}$ و(س) = ١ ، ∴ نهـا$_{س \leftarrow -١}$ و(س) **غير موجودة.**

٥) و(−١) **غير موجودة.**

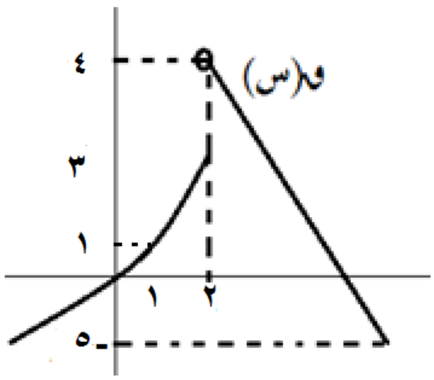
٦) هـ(٢) = −٣

٧) هـ(٠) = ٤

٨) نهـا$_{س \leftarrow ٠^+}$ و (س)=٤ ، نهـا$_{س \leftarrow ٠^-}$ و (س)=٤ ⇐ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ و (س)=٤

مثال٤: بناءً على الشكل التالي ، أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):

١. نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ و(س)
٢. نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ و(س)
٣. نهـا$_{س \leftarrow ١^+}$ و(س)
٤. و(٢)
٥. و(٠)



الحل:

١) نهـا$_{س \leftarrow ٠^-}$ و(س) = ٠ ، نهـا$_{س \leftarrow ٠^+}$ و(س) = ٠ ⇐ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ و(س)=٠

٢) نهـا$_{س \leftarrow ٢^-}$ و(س) = ٣ ، نهـا$_{س \leftarrow ٢^+}$ و(س) = ٤ ⇐ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ و(س) **غير موجودة.**

٣) نهـا$_{س \leftarrow ١^+}$ و(س) = ١

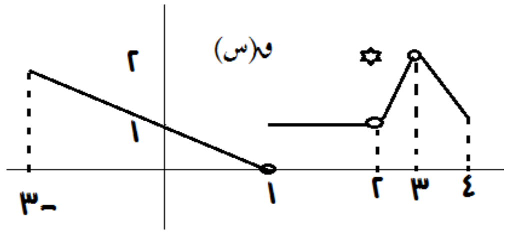
٤) و(٢) = ٣
٥) و(٠) = ٠

➊ **ملاحظة: النهاية غير موجودة عند:**

☜ **أطراف الفترة المغلقة.**

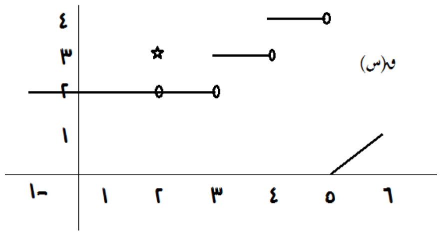
☜ **نقاط الانفصال للاقتران.**

🕮 **مثال٥: اعتماداً على الشكل المجاور ، أكتب قيم س التي تكون النهاية عندها غير موجودة:**



✍ **الحل:** س = {-٣ ، ١ ، ٤}

🕮 **مثال٦: ادرس الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران و(س) ، ثم أجب على الأسئلة الآتية:**



أ) أوجد مجموعة قيم س التي تجعل النهاية غير موجودة.
ب) أوجد مجموعة قيم س بحيث أن: $\underset{س \leftarrow م}{نهـا}$ و(س) = ٣

✍ **الحل:**

أ) س = {-١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
ب) س ∋ (٣ ، ٤)

الدرس الثاني: العمليات على النهايات

✪ **الأصل في النهاية التعويض المباشر.**

وفي حال تعويض النقطة في الاقتران يمكن أن ينتج من التعويض إحدى الحالات الآتية:

☜ **حالة (١): نتيجة مباشرة من التعويض (النهاية موجودة = عدد).**

☜ **حالة (٢): ناتج التعويض يعطي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وفي مثل هذه الحالة نلجأ إلى التحليل الجبري لمعرفة أن النهاية موجودة أم لا.**

☜ **حالة (٣): ناتج التعويض يعطي (صفر× ∞) وفي هذه الحالة أيضاً نلجأ للتحليل الجبري.**

☜ **حالة (٤): ناتج التعويض يعطي (∞ × صفر) وفي هذه الحالة أيضاً نلجأ للتحليل الجبري.**

📖 **مثال١:** أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٢}(١٥\text{س} - ٢\text{س} + ٦)$ ؟

✍ **الحل:** الأصل في النهاية التعويض المباشر ومنه ينتج أن:

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٢}(١٥\text{س} - ٢\text{س} + ٦) = ١٥\times٢ - ٢\times٢ + ٦ = ٣٠ - ٤ + ٦ = ٢٠$$

📖 **مثال٢:** أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٣}(٧\text{س}\times\sqrt{\text{س} + ١})$ ؟

✍ **الحل:** $\lim\limits_{\text{س}\to ٣}(٧\text{س}\times\sqrt{\text{س} + ١}) = ٧\times٣\times\sqrt{٣+١} = ٢١\times٢ = ٤٢$

📖 **مثال٣:** إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + ٢\sqrt{\text{س}} + ١$ ، أوجد قيمة $\lim\limits_{\text{س}\to ٩}\text{ق}(\sqrt{\text{س}} + ١)$ ؟

✍ **الحل:** أولاً نجد $\text{ق}(\sqrt{\text{س}} + ١)$ كما يلي:

$$\text{ق}(\sqrt{\text{س}} + ١) = \sqrt{\text{س}} + ١ + ٢\sqrt{\sqrt{\text{س}} + ١} + ١$$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to ٩}\text{ق}(\sqrt{\text{س}} + ١) = \lim\limits_{\text{س}\to ٩}(\sqrt{\text{س}} + ١ + ٢\sqrt{\sqrt{\text{س}} + ١} + ١) = \sqrt{٩} + ١ + ٢\sqrt{\sqrt{٩} + ١} + ١)$$

$$\Leftarrow ٣ + ١ + ٢\times\sqrt{٤} + ١ = ٤ + ٤ + ١ = ٩$$

📖 **مثال٤:** إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١$ ، **فجد قيمة** $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}}(٤\text{ق}(٥\text{س} - ٦) - ٦\text{س})$ ؟

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

✍ **الحل:** إما أن نجد قيمة ق(٥س−٦) مباشرة ، أو أن نفرض المقدار (٥س−٦) وهو الأفضل

هـ = (٥س−٦) ، وعندما س ⟵ ٢ ⟸ هـ ⟵ ٥×٢−٦ = ٤

∴ نهـا (س ⟵ ٢) (٤ق(٥س−٦)−٦س) = نهـا (هـ ⟵ ٤) (٤ق(ص)) − نهـا (س ⟵ ٢) ٦س = نهـا (هـ ⟵ ٤) ٤(هـ² −٣هـ−١)−١٢

⟸ ٤(١٦−١٢−١)−١٢ ⟸ ٤×٣−١٢ = ٠

📖 **مثال٥:** إذا كان نهـا (س ⟵ ١−) (٢(س−٤س³)− هـ(س)) = ٠ ، **فجد قيمة** نهـا (س ⟵ ١−) هـ(س) +٧ ؟

✍ **الحل:** نهـا (س ⟵ ١−) (٢(س−٤س³)− هـ(س)) = ٠ ⟸ نهـا (س ⟵ ١−) ٢(س−٤س³) − نهـا (س ⟵ ١−) هـ(س) = ٠

⟸ نهـا (س ⟵ ١−) ٢(س−٤س³) = نهـا (س ⟵ ١−) هـ(س)

⟸ ٢×٣ = نهـا (س ⟵ ١−) هـ(س) ⟸ نهـا (س ⟵ ١−) هـ(س) = ٦

∴ نهـا (س ⟵ ١−) هـ(س) +٧ = ٦ + ٧ = ١٣

📖 **مثال٦:** إذا كان نهـا (س ⟵ م) (٤س² −٢س³+ نهـا ((٢+س) ⟵ ٤) (س² −١٦)) = ٢٠ ، **أوجد قيمة الثابت م؟**

✍ **الحل:** ٢+س ⟵ ٤ ⟸ س ⟵ ٢

∴ نهـا (س ⟵ م) (٤س² −٢س³+ نهـا (س ⟵ ٢) (س² −١٦)) = ٢٠ ⟸ ٤م² −٢م³ −١٢ = ٢٠

م³	م²	م	م⁰	
١	−٢	٠	١٦	
	−٢	٨	−١٦	$\boxed{-٢}$
١	−٤	٨	٠	

⟸ م³ −٢م² +١٦ = ٠ ، **عوامل (١٦) هي: { ±١٦ ، ±٨ ، ±٤ ، ±٢ ، ±١}**

وبالتجريب نجد أن العدد (−٢) يحقق المعادلة:

∴ م³ −٢م² +١٦ = (م+٢)(م² −٤م+٨) = ٠ ، **لكن** ب² −٤أجـ = ١٦−٣٢ = −١٦ < ٠ **(لا يحلل)**

∴ م = −٢

✪ **نهاية الاقتران المتشعب:**

وله حالتان:

☜ **حالة(١): يضم إشارتي (=) و (≠) والنهاية دائماً في اللامساواة.**

☜ **حالة(٢): يضم إشارتي (<) و (>) وهنا نبحث النهاية من اليسار واليمين.**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

✪ **تعريف:** **نقطة التشعب هي النقطة التي يغير عندها الاقتران قاعدته ، أي يضم عندها إشارة ($\geq$) وإشارة ($\leq$) في نفس الآن.**

📖 **مثال:** إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٥ &، س \neq ١ \\ ٢س &، س = ١ \end{cases}$ ، فجد قيمة $\lim_{س \to ١} ق(س)$؟

✍ **الحل:** $\lim_{س \to ١} ق(س) = \lim_{س \to ١} (س^٣ - ٥) = ١ - ٥ = -٤$

📖 **مثال٢:** إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[٣]{٣س - ١} - ٢}{س - ٣} &، س \neq ٣ \\ -٦ &، س = ٣ \end{cases}$ ، وكان $\lim_{س \to م} ق(س) = \lim_{س \to م} \dfrac{س^٢ - م^٢}{س - م}$ ، فجد قيمة الثابت م؟

✍ **الحل:** بما أن $\lim_{س \to م} ق(س) = \lim_{س \to م} \dfrac{س^٢ - م^٢}{س - م} \leftarrow \lim_{س \to م} \dfrac{س^٢ - م^٢}{س - م} = \lim_{س \to ٣} \left(\dfrac{\sqrt[٣]{٣س - ١} - ٢}{س - ٣} \right)$

لكن: $هـ = \sqrt[٣]{٣س - ١} \Leftarrow هـ^٣ = ٣س - ١ \Leftarrow هـ^٣ + ١ = ٣س \Leftarrow س = \dfrac{هـ^٣ + ١}{٣}$

عندما $س \to ٣ \Leftarrow هـ \to ٢$

$\therefore \lim_{س \to م} \dfrac{(س - م)(س + م)}{س - م} = \lim_{هـ \to ٢} \left(\dfrac{هـ - ٢}{\frac{هـ^٣ + ١}{٣} - ٣} \right) \Leftarrow ٢م = \lim_{هـ \to ٢} \left(\dfrac{٣(هـ - ٢)}{هـ^٣ - ٨} \right) = \lim_{هـ \to ٢} \left(\dfrac{٣(هـ - ٢)}{(هـ - ٢)(هـ^٢ + ٢هـ + ٤)} \right)$

$\Leftarrow ٢م = \frac{٣}{١٢} \Leftarrow م = \frac{١}{٨}$

📖 **مثال٣:** إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٤س &، س < ١ \\ \dfrac{س^٢ + س - ١٢}{س - ٣} &، ١ < س < ٣ \\ ٥س - ٨ &، س > ٣ \end{cases}$ ، فجد ما يلي:

① $\lim_{س \to ١} ق(س)$ ، ② $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ ، ③ $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ، ④ $\lim_{س \to ١} ق(٢س + ١)$

✍ **الحل:**

① $\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^+} \left(\dfrac{س^٢ + س - ١٢}{س - ٣} \right) = \dfrac{١ + ١ - ١٢}{-٢} = \dfrac{١٠}{٢} = ٥$

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} (س^٢ + ٤س) = ١ + ٤ = ٥$

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٥ \Leftarrow \lim_{س \to ١} ق(س) = ٥$

② $\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^+} (٥س - ٨) = ١٥ - ٨ = ٧$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} (\frac{س^٢ + س - ١٢}{س - ٣}) = \lim_{س \to ٣^-} (\frac{(س-٣)(س+٤)}{(س-٣)}) = ٣ + ٤ = ٧ \Leftarrow \lim_{س \to ٣} ق(س) = ٧$

③ $\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} (\frac{س^٢ + س - ١٢}{س - ٣}) = \frac{-٦}{-١} = ٦$

④ $\lim_{س \to ١} ق(٢س+١)$ ، لكن نفرض أن هـ = ٢س+١ ، س ⟵ ١ ⇐ هـ ⟵ ٣

$\therefore \lim_{هـ \to ٣} ق(هـ) = ٧$

📖 **مثال٤:** إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + س_٤ - م}{س - ٣} & ، س < ٣ \\ مس + ب & ، س \geq ٣ \end{cases}$ ، فجد قيمة كل من م،ب علماً بأن النهاية موجودة عندما س = ٣؟

✍ **الحل:** معنى أن النهاية موجودة عندما س= ٣ أي أن:

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} ق(س) \Leftarrow \lim_{س \to ٣^+} (مس + ب) = \lim_{س \to ٣^-} (\frac{س^٢ + ٤س - م}{س - ٣})$

$\Leftarrow ٣م + ب = \lim_{س \to ٣^-} (\frac{(س-٣)(س+٧)}{(س-٣)}) \Leftarrow ٣م + ب = ١٠ ....①$

وبما أن المقام = صفر والنهاية موجودة ، إذن البسط = صفر

$\therefore \lim_{س \to ٣} (س^٢ + ٤س - م) = ٠ \Leftarrow ٩ + ١٢ - م = ٠ \Leftarrow \boxed{م = ٢١}$

ومن تعويض قيمة م في المعادلة ① ينتج أن: $٣ \times ٢١ + ب = ١٠ \Leftarrow \boxed{ب = -٥٣}$

✪ **نهاية اقتران القيمة المطلقة:**

☜ **الطريقة الأولى:** نعيد التعريف ونجد النهاية.

☜ **الطريقة الثانية:** نعوض بالنقطة داخل القيمة المطلقة فإذا كان الناتج:

١. قيمة موجبة ، فإننا نهمل رمز القيمة المطلقة ونجد النهاية.
٢. قيمة سالبة ، فإننا نهمل رمز القيمة المطلقة ونضرب المقدار بإشارة (-) ونجد النهاية.
٣. قيمة صفرية ، فيجب علينا إعادة التعريف وإيجاد النهاية.

📖 **مثال١:** أوجد $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}^٢-١٢|}{٣\text{س}}$ ؟

✍ **الحل:** عند تعويض (-٣) داخل القيمة المطلقة فإن الناتج يكون ٩-١٢ = -٣ وهو عدد سالب ، إذن نهمل رمز القيمة المطلقة ونضرب المقدار بإشارة (-):

$$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س}^٢-١٢|}{٣\text{س}} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{١٢-\text{س}^٢}{٣\text{س}} = \frac{١٢-٩}{-٩} = -\frac{٣}{٩} = -\frac{١}{٣}$$

📖 **مثال٢:** أوجد $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}^٢+\text{س}-٦|}{١٦-\text{س}^٢}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}^٢+\text{س}-٦|}{١٦-\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢+\text{س}-٦}{١٦-\text{س}^٢} = \dfrac{١٤}{٠} \Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

📖 **مثال٣:** أوجد $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٨+\text{س}^٣}{|١-\text{س}^٣|}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٨+\text{س}^٣}{|١-\text{س}^٣|} = \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٨+\text{س}^٣}{١-\text{س}^٣} = \dfrac{٨-٨}{٩} = \dfrac{٠}{٩} = ٠$

📖 **مثال٤:** أوجد $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}^٢-٢٥|}{٢\text{س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}^٢-٢٥|}{٢\text{س}}$: يجب إعادة التعريف للاقتران لأن ناتج تعويض النقطة ٥ يساوي صفر:

$\text{س}^٢-٢٥=٠ \longleftarrow (\text{س}-٥)(\text{س}+٥)=٠$

$\Leftarrow \text{س}=٥ \text{ ، } -٥$

(س²-٢٥)		- (س²-٢٥)		(س²-٢٥)
+++++	٥	-----	-٥	++++

$$\therefore \text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢-٢٥}{٢\text{س}} \text{ ، } \text{س} \geqslant ٥ \\ \dfrac{٢٥-\text{س}^٢}{٢\text{س}} \text{ ، } -٥ < \text{س} < ٥ \\ \dfrac{\text{س}^٢-٢٥}{٢\text{س}} \text{ ، } \text{س} \leqslant -٥ \end{cases}$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

∴ **النقطة (٥) نقطة تشعب ، إذن سنبحث النهاية من اليمين ومن اليسار:**

$$\lim_{س \to ٥^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٥^{+}} \left(\frac{س^{٢}-٢٥}{٢س}\right) = \frac{٠}{١٠} = ٠ \quad ، \quad \lim_{س \to ٥^{-}} ق(س) = \lim_{س \to ٥^{-}} \left(\frac{٢٥-س^{٢}}{٢س}\right) = \frac{٠}{١٠} = ٠$$

$$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{|س^{٢}-٢٥|}{٢س} = ٠$$

📖 **مثال:** إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة ، بحيث أن $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+أس & ، \ س > ٣ \\ أس^{٢}+\frac{|س^{٢}-١٢|}{٦س} & ، \ س \leqslant ٣ \end{cases}$

فجد قيمة الثابت (أ)؟

✍ **الحل:** بما أن النهاية موجودة هذا يضمن أن:

$$\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٣^{-}} ق(س) \Leftarrow \lim_{س \to ٣^{+}} (س^{٢}+أس) = \lim_{س \to ٣^{-}} \left(أس^{٢} + \frac{|س^{٢}-١٢|}{٦س}\right)$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to ٣^{+}} (س^{٢}+أس) = \lim_{س \to ٣^{-}} \left(أس^{٢} + \frac{١٢-س^{٢}}{٦س}\right)$$

$$\Leftarrow ٩+٣أ = ٩أ+\frac{١٢-٩}{٦\times٣} \Leftarrow ٩+٣أ = ٩أ+\frac{٣}{١٨}$$

$$\Leftarrow ٩-\frac{١}{٦} = ٦أ \Leftarrow \frac{٥٣}{٦} = ٦أ \Leftarrow ٣٦أ=٥٣ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{٥٣}{٣٦}}$$

✪ **نهاية اقتران أكبر عدد صحيح:**

☜ **الطريقة الأولى:** نعيد التعريف ونجد النهاية.

☜ **الطريقة الثانية(للأسئلة الموضوعية فقط) :** نعوض النقطة داخل أكبر عدد صحيح فإذا كان الناتج:

١. عدد صحيح (أ ∈ ص) فإن النهاية غير موجودة.

٢. عدد غير صحيح (أ ∉ ص) فأن النهاية موجودة وتساوي الصورة.

📖 **مثال:** إذا كان $ق(س)=[\frac{١}{٢}س+٦]+٨س$ ، $[٠، ٣]$ ، **فجد كلاً مما يلي:**

① $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

② $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

✍ **الحل:**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

① $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\, ق(س)$: نعوض العدد (٢) داخل أكبر عدد صحيح فيكون الناتج $\frac{١}{٢}\times ٢+٦ = ٧ \in ص$

$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\, ق(س)$ غير موجودة.

ولكن لحل السؤال بطريقة إنشائية نعيد التعريف: ل = ٢ ٣ ، ٢ ، ٠،

$$\therefore ق(س) = \begin{cases} ٦+٨س ، & ٠ \le س < ٢ \\ ٧+٨س ، & ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

☜ $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\, ق(س) = \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\, (٧+٨س) = ٧+١٦ = ٢٣$

☜ $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\, ق(س) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\, (٦+٨س) = ٦+١٦ = ٢٢$

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\, ق(س) \ne \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\, ق(س) \Leftarrow \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\, ق(س)$ غير موجودة.

② $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\, ق(س)$:

☜ $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\, ق(س) = \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\, (٧+٨س) = ٧+٢٤ = ٣١$

☜ $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\, ق(س)$ غير موجودة.

لاحظ أن العددان {٠ ، ٣} أطراف فترة مغلقة ، وبالتالي فإن نهاية كل منهما غير موجودة.

$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\, ق(س)$ غير موجودة.

📖 **مثال٢:** أوجد $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}\, \dfrac{[\frac{س^٢}{٣}+٤]+س}{|س|-٢}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}\, \dfrac{[\frac{س^٢}{٣}+٤]+س}{|س|-٢} = \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}\, \dfrac{٢+س}{-س-٢} = \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}\, \dfrac{٢+س}{-(س+٢)} = -١$

📖 **مثال٣:** أوجد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\, \dfrac{\sqrt{(٢-س)^٢}}{س^٣+٣س^٢-٤س-١٢}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\, \dfrac{\sqrt{(٢-س)^٢}}{س^٣+٣س^٢-٤س-١٢} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\, \dfrac{|٢-س|}{س^٣+٣س^٢-٤س-١٢}$

نعمل القسمة التركيبية للمقام:

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	$س^٠$
	١	٣	-٤	-١٢
$\boxed{٢}$		٢	١٠	١٢
	١	٥	٦	٠

$\therefore$ س^3+٣س^2−٤س−١٢ = (س−٢)(س^2+٥س+٦)

ويجب إعادة التعريف:

☜ $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \dfrac{|س-٢|}{س^3+٣س^2-٤س-١٢} = \underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \dfrac{س-٢}{س^3+٣س^2-٤س-١٢} = \underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \dfrac{(س-٢)}{(س-٢)\left(س^2+٥س+٦\right)} = \dfrac{١}{٢٠}$

☜ $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} \dfrac{|س-٢|}{س^3+٣س^2-٤س-١٢} = \underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} \dfrac{٢-س}{(س-٢)\left(س^2+٥س+٦\right)} = -\dfrac{١}{٢٠}$

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) $\neq$ $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) $\Leftarrow$ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

✪ دراسة نهاية الاقترانات الجذرية:

ليكن ق(س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ ، فإذا كان:

① ن عدد فردي ، فإن النهاية موجودة وتساوي الصورة.

② ن عدد زوجي ، ومنه إذا كان ناتج التعويض داخل الجذرهو:

أ. عدد موجب ، فإن النهاية موجودة وتساوي الصورة.
ب. عدد سالب ، فإن النهاية غير موجودة.
ت. (صفر) ، فإن الاقتران له نهاية من جهة واحدة فقط وهي جهة المجال الموجب للاقتران ، وبهذه الحال تكون النهاية للاقتران ق(س) بشكل عام غير موجودة.

📖 **مثال: أوجد قيمة كل من النهايات الآتية:**

① $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \sqrt[3]{س^2-٩}$ **$\Leftarrow$ الجذر فردي ، إذن تعويض مباشر:** $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \sqrt[3]{س^2-٩} = \sqrt[3]{-٨} = -٢$

② $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \sqrt{س^3-٢٧}$ **$\Leftarrow$ الجذر زوجي وناتج التعويض يساوي صفر ، إذن النهاية لهذا الاقتران غير موجودة ولكن له نهاية من جهة المجال الموجب:**

$\therefore$ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهــا}} \sqrt{س^3-٢٧} = \sqrt{٠} = ٠$ **، ولكن** $\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهــا}} \sqrt{س^3-٢٧}$ **غير موجودة.**

$\therefore$ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \sqrt{س^3-٢٧}$ **غير موجودة**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

③ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \sqrt{٥\text{س}^٢+٢٥} \Leftarrow \sqrt{٠+٢٥} = \sqrt{٢٥} = ٥$

④ $\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٢} \Leftarrow$ **لاحظ أننا إذا أخذنا قيمة تقع على يسار العدد ٢ مثل (١,٩) وعوضناها داخل الجذر التربيعي فسيكون الناتج عدد سالب ، وبالتالي تكون النهاية غير موجودة.**

⑤ $\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢-٤}}{\text{س}+٢} \Leftarrow \dfrac{\sqrt{٠}}{٤} = \dfrac{٠}{٤} = ٠$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}^٣-٨}}{٧\text{س}+٢} \Leftarrow -\dfrac{٢}{٢} = -١$

⑦ **إذا كان** $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} ٢\sqrt{\text{ق(س)}} = ٨$ ، $\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نهـا}} \frac{١}{٣}\text{هـ(س}-٤\text{)}=٣$ ، **فجد قيمة:**

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \left(٥(\text{س}^٢-١) + ٨\,\text{هـ(س}-١\text{)} + ٢\,\text{ق(س)}\right)$ ؟

الحل: $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} ٢\sqrt{\text{ق(س)}} = ٨ \Leftarrow ٢\sqrt{\text{ق(}٣\text{)}} = ٨ \Leftarrow ٤\text{ق(}٣\text{)} = ٦٤ \Leftarrow \boxed{\text{ق(}٣\text{)} = ١٦}$

$\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نهـا}} \frac{١}{٣}\text{هـ(س}-٤\text{)}=٣ \Leftarrow \frac{١}{٣}\text{هـ(}٢\text{)}=٣ \Leftarrow \boxed{\text{هـ(}٢\text{)} = ٩}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \left(٥(\text{س}^٢-١) + ٨\,\text{هـ(س}-١\text{)} + ٢\,\text{ق(س)}\right) = ٥\times٨ + ٨\times\text{هـ(}٢\text{)} + ٢\,\text{ق(}٣\text{)}$

$\Leftarrow ٤٠+٨\times٩+٢\times١٦ \Leftarrow ٤٠+٧٢+٣٢ \Leftarrow ١٤٤$

⑧ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٧-\text{س}^٣} \Leftarrow \sqrt{٧-٢٧} = \sqrt{-٢٠} \Leftarrow$ **النهاية غير موجودة.**

الدرس الثالث: نهاية الاقترانات النسبية

❶ **هناك عدة حالات من ناتج تعويض العدد في الاقترانات النسبية:**

☜ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

☜ صفر $\times\infty$

☜ $\infty\times$ صفر

📖 **مثال:** أوجد كلاً من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢} \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{(\cancel{\text{س}-٢})(\text{س}+٢)}{(\cancel{\text{س}-٢})}\right) \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} (\text{س}+٢) = ٤$

---

٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س} - ١}{١ - \text{س}^٢}\right) \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{(\cancel{\text{س}-١})}{(١+\text{س})(\cancel{١-\text{س}})}\right) \Leftarrow \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{-١}{(\text{س}+١)}\right) \Leftarrow -\frac{١}{٢}$

---

٣) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{١٦ - \text{س}^٤}{\text{س}^٢ - ٤}\right) \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{(\cancel{٤-\text{س}^٢})(٤+\text{س}^٢)}{(\cancel{\text{س}^٢-٤})}\right) \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} (-(٤+\text{س}^٢)) \Leftarrow -٨$

---

٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥^{\text{س}+٢} - ٥^{٣\text{س}}}{٥^{\text{س}} - ٥}\right) \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١}\left(\frac{٥^{\text{س}}\times ٥^{٢}-(٥^{\text{س}})^{٣}}{٥^{\text{س}}-٥}\right) \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١}\left(\frac{٥^{\text{س}}\left(٢٥-(٥^{\text{س}})^{٢}\right)}{٥^{\text{س}}-٥}\right) \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١}\left(\frac{٥^{\text{س}}\left(\cancel{٥-٥^{\text{س}}}\right)\left(٥+٥^{\text{س}}\right)}{\left(\cancel{٥^{\text{س}}-٥}\right)}\right) = -٥\times ١٠ = -٥٠$$

---

٥) $\lim_{\text{س}\to ٢}\left(\frac{\text{س}^{٢}-٤}{٢\text{س}^{٣}-٢\text{س}^{٢}-٨\text{س}+٨}\right) \longrightarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٢}\left(\frac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}{\cancel{(\text{س}-٢)}\left(٢\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٤\right)}\right) \Leftarrow \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٢}$	س	س .	
٢	٢-	٨-	٨	$\boxed{٢}$
	٤	٤	٨-	
٢	٢	٤-	٠	

---

٦) $\lim_{\text{س}\to ٢}\left(\frac{٦}{\text{س}}-٣\right)\left(\frac{٢}{\text{س}-٢}\right) \longrightarrow \text{صفر}\times\infty$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٢}\left(\frac{٦-٣\text{س}}{\text{س}}\right)\left(\frac{٢}{\text{س}-٢}\right) \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٢} ٣\left(\frac{\cancel{٢-\text{س}}}{\text{س}}\right)\left(\frac{٢}{\cancel{\text{س}-٢}}\right) \Leftarrow -\frac{٣}{٢}\times ٢ = -٣$$

---

٧) $\lim_{\text{س}\to ٢}\left(\frac{٣٢-\text{س}^{٥}}{\text{س}-٢}\right) \longrightarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٢}\left(\frac{\cancel{(٢-\text{س})}\left(٢^{٤}+٢^{٣}\text{س}+٢^{٢}\times\text{س}^{٢}+٢\text{س}^{٣}+\text{س}^{٤}\right)}{\cancel{(\text{س}-٢)}}\right) \Leftarrow -٥\times(٢)^{٤} = -٨٠$$

---

٨) $\lim_{\text{س}\to ٣}\left(\frac{(٢\text{س}-٤)^{٣}-٨}{٣-|\text{س}|}\right) \longrightarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٣}\left[\frac{\left((٢\text{س}-٤)-٢\right)\left((٢\text{س}-٤)^{٢}+٢(٢\text{س}-٤)+٤\right)}{(٣-\text{س})}\right] \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٣}\left[\frac{(٢\text{س}-٦)\left((٢\text{س}-٤)^{٢}+٢(٢\text{س}-٤)+٤\right)}{(٣-\text{س})}\right]$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٣}\left[\frac{٢\cancel{(\text{س}-٣)}\left((٢\text{س}-٤)^{٢}+٢(٢\text{س}-٤)+٤\right)}{\cancel{(٣-\text{س})}}\right]$$

$$\Leftarrow -٢(٤+٤+٤) = -٢٤$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

٩) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\frac{س^{٦}+٢س^{٥}-س^{٣}+٢س^{٢}-٤}{س^{٣}+٣س-٤} \right) \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

⇐ عندما تكون درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام نلجأ إلى إحدى القسمتين:

$$\begin{array}{l}
س^{٣}+٢س^{٢}-٣س-٣ \\
\hline
س^{٦}+٢س^{٥}-س^{٣}+٢س^{٢}-٤ \quad \Big) \quad س^{٣}+٣س-٤ \\
س^{٦}+٣س^{٤}-٤س^{٣} \\
\hline
٢س^{٥}-٣س^{٤}+٣س^{٣}+٢س^{٢}-٤ \\
٢س^{٥} \qquad +٦س^{٣}-٨س^{٢} \\
\hline
-٣س^{٤}-٣س^{٣}+١٠س^{٢}-٤ \\
-٣س^{٤} \qquad -٩س^{٢}-١٢س \\
\hline
-٣س^{٣}+١٩س^{٢}-١٢س-٤ \\
-٣س^{٣} \qquad -٩س+١٢ \\
\hline
١٩س^{٢}-٣س-١٦
\end{array}$$

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\frac{س^{٦}+٢س^{٥}-س^{٣}+٢س^{٢}-٤}{س^{٣}+٣س-٤} \right) = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(س^{٣}+٢س^{٢}-٣س-٣ \right) + \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\frac{١٩س^{٢}-٣س-١٦}{س^{٣}+٣س-٤} \right)$

$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ث	
١	٠	٣	٤-	
	١	١	٤	$\boxed{١}$
١	١	٤	٠	

$س^{٢}$	س	ث	
١٩	٣-	١٦-	
	١٩	١٦	$\boxed{١}$
١٩	١٦	٠	

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(س^{٣}+٢س^{٢}-٣س-٣ \right) + \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\frac{١٩س^{٢}-٣س-١٦}{س^{٣}+٣س-٤} \right) = -٣ + \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\frac{\cancel{(س-١)}(١٩س+١٦)}{\cancel{(س-١)}(س^{٢}+س+٤)} \right)$

$= -٣ + \frac{٣٥}{٩} = \frac{١٧}{٩}$

---

١٠) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} (لو_{٢}(س^{٣}-٢س-٤) - لو_{٢}(س^{٢}-٤))$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} لو_{٢} \left(\frac{س^{٣}-٢س-٤}{س^{٢}-٤} \right) \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} لو_{٢} \left(\frac{\cancel{(س-٢)}(س^{٢}+٢س+٢)}{\cancel{(س-٢)}(س+٢)} \right) \Leftarrow لو_{٢}(\frac{١٠}{٤})$

$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ث	
١	٠	٢-	٤-	
	٢	٤	٤	$\boxed{٢}$
١	٢	٢	٠	

---

١١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\frac{٧س^{٢} \times (٢س-٣)^{٣}-٢٨}{١٦-س^{٤}} \right)$

في حالة ضرب اقترانين دائماً نضيف ونطرح (الأول × قيمة الثاني) كالآتي:

$$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{7\text{س}^2\times(2\text{س}-3)^3-28}{16-\text{س}^4}\right)=\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{7\text{س}^2\times(2\text{س}-3)^3-7\text{س}^2+7\text{س}^2-28}{16-\text{س}^4}\right)\Leftarrow\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{7\text{س}^2\left((2\text{س}-3)^3-1\right)}{16-\text{س}^4}\right)+\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{7(\text{س}^2-4)}{16-\text{س}^4}\right)$$

$$\Leftarrow\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left[\frac{7\text{س}^2(2\text{س}-3-1)\left((2\text{س}-3)^2+(2\text{س}-3)+1\right)}{16-\text{س}^4}\right]+\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{7(\text{س}^2-4)}{(4-\text{س}^2)\left(4+\text{س}^2\right)}\right)$$

$$\Leftarrow 14\times\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{س}^2\left(\cancel{(\text{س}-2)}\right)\left((2\text{س}-3)^2+(2\text{س}-3)+1\right)}{(4+\text{س}^2)\left(\cancel{2-\text{س}}\right)\left(2+\text{س}\right)}\right)-\frac{7}{8}\Leftarrow-\frac{21}{4}-\frac{7}{8}=-\frac{49}{8}$$

---

12) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{4}{\text{س}}-\text{س}\right)\left(\frac{2}{2-\text{س}}\right)\longleftarrow$ صفر $\times\infty$

$$\Leftarrow\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{4-\text{س}^2}{\text{س}}\times\frac{2}{2-\text{س}}\right)\Leftarrow\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{\left(\cancel{2-\text{س}}\right)\left(2+\text{س}\right)}{\text{س}}\times\frac{2}{\cancel{2-\text{س}}}\right)\Leftarrow\frac{4}{2}\times 2=4$$

---

13) **إذا كان** $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{أس}^2-3\text{ب س}+12}{\text{س}^2-4}\right)=8$ ، **فجد قيمة كل من الثابتين أ، ب؟**

$$\Leftarrow\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\frac{(\text{أس}-6)\left(\cancel{\text{س}-2}\right)}{\left(\cancel{\text{س}-2}\right)\left(\text{س}+2\right)}\right)=8\Leftarrow 2\text{أ}-6=32\Leftarrow 2\text{أ}=38\Leftarrow\boxed{\text{أ}=19}$$

لكن بما أن النهاية موجودة والمقام = صفر ، إذن البسط = صفر.

$$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(\text{أس}^2-3\text{ب س}+12\right)=0\Leftarrow 4\text{أ}-6\text{ب}+12=0\Leftarrow 76-6\text{ب}+12=0\Leftarrow\text{ب}=\frac{44}{3}$$

---

14) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{5\text{س}^2+4}-3}{\text{س}^3-1}$

نضرب ونقسم بمرافق الجذر التربيعي:

$$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{5\text{س}^2+4}-3}{\text{س}^3-1}=\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{5\text{س}^2+4}-3}{\text{س}^3-1}\times\frac{\sqrt{5\text{س}^2+4}+3}{\sqrt{5\text{س}^2+4}+3}=\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\frac{5\text{س}^2+4-9}{6(\text{س}-1)\left(\text{س}^2+\text{س}+1\right)}$$

$$\Leftarrow\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\frac{5\left(\cancel{\text{س}-1}\right)\left(\text{س}+1\right)}{6\times 3\left(\cancel{\text{س}-1}\right)}=\frac{5}{9}$$

---

15) $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نهـا}}\frac{24-6\text{س}}{6-\sqrt{8\text{س}+4}}$

$$\Leftarrow\underset{\text{س}\to 4}{\text{نهـا}}\frac{24-6\text{س}}{6-\sqrt{8\text{س}+4}}\times\frac{6+\sqrt{8\text{س}+4}}{6+\sqrt{8\text{س}+4}}\Leftarrow\underset{\text{س}\to 4}{\text{نهـا}}\left(\frac{6\times 12\left(4-\text{س}\right)}{36-\left(8\text{س}+4\right)}\right)\Leftarrow\underset{\text{س}\to 4}{\text{نهـا}}\left(\frac{72\left(\cancel{4-\text{س}}\right)}{8\left(\cancel{4-\text{س}}\right)}\right)\Leftarrow 9$$

١٦) $$\lim_{\text{س}\to 2}\left(\frac{(\text{س}-1)^3+1}{(\text{س}-1)^2-1}\right)$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 2}\frac{(\text{س}-1+1)\left((\text{س}-1)^2-(\text{س}-1)+1\right)}{(\text{س}-1-1)\left(\text{س}-1+1\right)} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to 2}\left(\frac{\cancel{(\text{س}-2)}(1+1+1)}{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س})}\right) \Leftarrow -\frac{3}{2}$$

---

١٧) $$\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\sqrt{8+\sqrt{\text{س}}}-3}{\text{س}^3-1}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 1}\frac{\sqrt{8+\sqrt{\text{س}}}-3}{\text{س}^3-1}\times\frac{\sqrt{8+\sqrt{\text{س}}}+3}{\sqrt{8+\sqrt{\text{س}}}+3} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to 1}\frac{8+\sqrt{\text{س}}-9}{6(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{\text{س}}-1)}}{18\cancel{(\sqrt{\text{س}}-1)}(\sqrt{\text{س}}+1)} \Leftarrow \frac{1}{36}$$

---

١٨) $$\lim_{\text{س}\to 5}\frac{\sqrt{2\text{س}^2-1}-7}{4-\sqrt{4\text{س}-4}}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 5}\frac{\sqrt{2\text{س}^2-1}-7}{4-\sqrt{4\text{س}-4}} = \lim_{\text{س}\to 5}\frac{\sqrt{2\text{س}^2-1}-7}{4-\sqrt{4\text{س}-4}}\times\frac{\sqrt{2\text{س}^2-1}+7}{\sqrt{2\text{س}^2-1}+7}\times\frac{4+\sqrt{4\text{س}-4}}{4+\sqrt{4\text{س}-4}}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 5}\frac{8(2\text{س}^2-1-49)}{14(16-4\text{س}+4)} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to 5}\frac{4(2\text{س}^2-50)}{7(20-4\text{س})} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to 5}\frac{4\times 2\left(\text{س}^2-25\right)}{7\times 4\left(5-\text{س}\right)}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 5}\frac{2\cancel{(\text{س}-5)}(\text{س}+5)}{7\cancel{(5-\text{س})}} = -\frac{20}{7}$$

---

١٩) $$\lim_{\text{س}\to 4}\frac{\sqrt{\text{س}^2-4}-\sqrt{\text{س}-2}}{\sqrt{\text{س}-2}}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 4}\frac{\sqrt{\text{س}^2-4}-\sqrt{\text{س}-2}}{\sqrt{\text{س}-2}} = \lim_{\text{س}\to 4}\frac{\sqrt{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}-\sqrt{(\text{س}-2)}}{\sqrt{(\text{س}-2)}} = \lim_{\text{س}\to 4}\frac{\cancel{\sqrt{\text{س}-2}}\left(\sqrt{\text{س}+2}-1\right)}{\cancel{\sqrt{\text{س}-2}}} = 3$$

---

٢٠) $$\lim_{\text{س}\to 3}\frac{\sqrt[3]{6\text{س}+9}-3}{\text{س}^2-9}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 3}\frac{\sqrt[3]{6\text{س}+9}-3}{\text{س}^2-9}\times\frac{\sqrt[3]{(6\text{س}+9)^2}+3\sqrt[3]{6\text{س}+9}+9}{\sqrt[3]{(6\text{س}+9)^2}+3\sqrt[3]{6\text{س}+9}+9} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to 3}\frac{(6\text{س}+9)-27}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)(9+9+9)}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 3}\frac{6\cancel{(\text{س}-3)}}{27\cancel{(\text{س}-3)}(\text{س}+3)} \Leftarrow \frac{1}{27}$$

٢١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥-\sqrt{٢\text{س}+٢٥}}{\sqrt[٣]{٣\text{س}-٨}+٢}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥-\sqrt{٢\text{س}+٢٥}}{\sqrt[٣]{٣\text{س}-٨}+٢} \times \dfrac{٥+\sqrt{٢\text{س}+٢٥}}{٥+\sqrt{٢\text{س}+٢٥}} \times \dfrac{\sqrt[٣]{(٣\text{س}-٨)^٢}-٢\sqrt[٣]{٣\text{س}-٨}+٤}{\sqrt[٣]{(٣\text{س}-٨)^٢}-٢\sqrt[٣]{٣\text{س}-٨}+٤} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(٢٥-(٢\text{س}+٢٥)\right)(٤+٤+٤)}{\left((٣\text{س}-٨)+٨\right)(٥+٥)}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-١٢(\cancel{٢\text{س}})}{١٠(\cancel{٣\text{س}})} = -\dfrac{٤}{٥}$

---

٢٢) أثبت أن $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[\text{أ}]{\text{ب س}+١}-١}{\sqrt[\text{جـ}]{\text{د س}+١}-١} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ د}}$

⇐ نقسم كل من البسط والمقام على (س):

$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\sqrt[\text{أ}]{\text{ب س}+١}-١}{\text{س}}}{\dfrac{\sqrt[\text{جـ}]{\text{د س}+١}-١}{\text{س}}} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[\text{أ}]{\text{ب س}+١}-١}{\text{س}} \times \dfrac{\text{س}}{\sqrt[\text{جـ}]{\text{د س}+١}-١}$

$\text{ص} = \sqrt[\text{أ}]{\text{ب س}+١} \longleftarrow \text{ص}^{\text{أ}} = \text{ب س}+١ \longleftarrow \text{س} = \dfrac{\text{ص}^{\text{أ}}-١}{\text{ب}}$ ، وعندما $\text{س} \longrightarrow ٠$ فإن $\text{ص} \longrightarrow ١$

$\text{ع} = \sqrt[\text{جـ}]{\text{د س}+١} \longleftarrow \text{ع}^{\text{جـ}} = \text{د س}+١ \longleftarrow \text{س} = \dfrac{\text{ع}^{\text{جـ}}-١}{\text{د}}$ ، وعندما $\text{س} \longrightarrow ٠$ فإن $\text{ع} \longrightarrow ١$

$\therefore \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ب}(\text{ص}-١)}{\text{ص}^{\text{أ}}-١} \times \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع}^{\text{جـ}}-١}{\text{د}(\text{ع}-١)}$

$\Leftarrow \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ب}(\cancel{\text{ص}-١})}{(\cancel{\text{ص}-١})\underbrace{\left(\text{ص}^{\text{ن}-١}+\text{ص}^{\text{ن}-٢}+\cdots+١\right)}_{\text{أ مرّه}}} \times \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(\cancel{\text{ع}-١})\overbrace{\left(\text{ع}^{\text{ن}-١}+\text{ع}^{\text{ن}-٢}+\cdots+١\right)}^{\text{جـ مرّه}}}{\text{د}(\cancel{\text{ع}-١})} \Leftarrow \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ د}}$

---

٢٣) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}+١٠}+\text{س}-٦}{\text{س}-٢}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}+١٠}+\text{س}-٦}{\text{س}-٢} \times \dfrac{\sqrt{٣\text{س}+١٠}-(\text{س}-٦)}{\sqrt{٣\text{س}+١٠}-(\text{س}-٦)}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}+١٠-(\text{س}-٦)^٢}{٨(\text{س}-٢)} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(٣\text{س}+١٠-\left(\text{س}^٢-١٢\text{س}+٣٦\right)\right)}{٨(\text{س}-٢)} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(١٥\text{س}-\text{س}^٢-٢٦)}{٨(\text{س}-٢)}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢-١٥\text{س}+٢٦}{-٨(\text{س}-٢)} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\cancel{\text{س}-٢})(\text{س}-١٣)}{-٨(\cancel{\text{س}-٢})} \Leftarrow \dfrac{١١}{٨}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

٢٤) $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{س} + 2س - 3}{س - 1}$

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{س} - 1 + 2س - 2}{س - 1} \Leftarrow \lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{س} - 1}{س - 1} + \lim\limits_{س \to 1} \frac{2(س-1)}{(س-1)} \Leftarrow \lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{س} - 1}{س - 1} \times \frac{\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س} + 1}{\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س} + 1} + 2$$

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 1} \frac{\cancel{(س-1)}}{3\cancel{(س-1)}} + 2 \Leftarrow \frac{1}{3} + 2 \Leftarrow \frac{7}{3}$$

---

٢٥) $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س - 2}{س + \sqrt[3]{س - 1} - 3}$

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 2} \frac{س - 2}{س + \sqrt[3]{س-1} - 1 - 2} \Leftarrow \lim\limits_{س \to 2} \frac{س - 2}{\left(\sqrt[3]{س-1} - 1\right) + \left(س - 2\right)}$$

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 2} \frac{س - 2}{\sqrt[3]{س-1} - 1 \times \dfrac{\sqrt[3]{(س-1)^2} + \sqrt[3]{(س-1)} + 1}{\sqrt[3]{(س-1)^2} + \sqrt[3]{(س-1)} + 1} + \left(س - 2\right)} \Leftarrow \lim\limits_{س \to 2} \frac{س - 2}{\dfrac{(س-1)-1}{3} + \left(س - 2\right)} \Leftarrow \lim\limits_{س \to 2} \frac{(س-2)}{\dfrac{(س-2)+3(س-2)}{3}}$$

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 2} \left(\cancel{س-2}\right) \times \frac{3}{4\cancel{(س-2)}} \Leftarrow \frac{3}{4}$$

---

٢٦) $\lim\limits_{س \to -2} \dfrac{س\sqrt{س^2 + 5} - 2س + 2}{2س^2 + 3س - 2}$

نضيف ونطرح (الأول × قيمة الثاني)

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to -2} \frac{س\sqrt{س^2+5} - 3س + 3س - 2س + 2}{2س^2 + 3س - 2} \Leftarrow \lim\limits_{س \to -2} \frac{س\left(\sqrt{س^2+5} - 3\right)}{2س^2 + 3س - 2} + \lim\limits_{س \to -2} \frac{س + 2}{2س^2 + 3س - 2}$$

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to -2} \frac{س\left(\sqrt{س^2+5} - 3\right)}{2س^2 + 3س - 2} \times \frac{\sqrt{س^2+5} + 3}{\sqrt{س^2+5} + 3} + \lim\limits_{س \to -2} \frac{\cancel{(س+2)}}{\cancel{(س+2)}(2س-1)}$$

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to -2} \frac{س^2 + 5 - 9}{6(2س^2 + 3س - 2)} - \frac{1}{5} \Leftarrow \lim\limits_{س \to -2} \frac{س\left(س^2 - 4\right)}{6(س+2)(2س-1)} - \frac{1}{5}$$

$$\Leftarrow \lim\limits_{س \to -2} \frac{س(س-2)\cancel{(س+2)}}{6\cancel{(س+2)}(2س-1)} - \frac{1}{5} \Leftarrow -\frac{4}{15} - \frac{1}{5} = -\frac{7}{15}$$

---

٢٧) إذا كان $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{\sqrt[ن]{(5س - 9)} - 1}{س - 2} = \dfrac{1}{2}$ ، فجد قيمة الثابت ن ؟

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$\text{ص} = \sqrt[\text{ن}]{(٥\text{س}-٩)} \leftarrow \text{ص}^{\text{ن}} = ٥\text{س}-٩ \leftarrow \text{س} = \frac{\text{ص}^{\text{ن}}+٩}{٥}$ ، **وعندما** $\text{س} \leftarrow ٢$ **فإن** $\text{ص} \leftarrow ١$

$$\therefore \lim_{\text{ص}\to ١} \frac{\text{ص}-١}{\frac{\text{ص}^{\text{ن}}+٩}{٥}-٢} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \lim_{\text{ص}\to ١} \frac{٥(\text{ص}-١)}{\text{ص}^{\text{ن}}-١} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \lim_{\text{ص}\to ١} \frac{٥\cancel{(\text{ص}-١)}}{\cancel{(\text{ص}-١)}\left(\text{ص}^{\text{ن}-١}+\text{ص}^{\text{ن}-١}+\dots+١\right)} = \frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow \frac{٥}{\underbrace{(١+١+\dots+١)}_{\text{ن-مرة}}} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{٥}{\text{ن}} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{ن} = ١٠$$

---

٢٨) إذا كان $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\sqrt[\text{ن}]{٣\text{س}-٢}-١}{\text{س}^٣+٥\text{س}^٢-٦} = \frac{١}{١٣}$ ، **فجد قيمة الثابت (ن) ؟**

$\text{ص} = \sqrt[\text{ن}]{٣\text{س}-٢}$ ، **عندما** $\text{س} \leftarrow ١$ ، **فإن** $\text{ص} \leftarrow ١$

س^٣	س^٢	س	.	
١	٥	٠	٦-	$\boxed{١}$
	١	٦	٦	
١	٦	٦	٠	

لكن $\text{س}^٣+٥\text{س}^٢-٦ = ٠ \Leftarrow (\text{س}-١)(\text{س}^٢+٦\text{س}+٦)=٠$

$$\therefore \frac{\lim_{\text{ص}\to ١}(\text{ص}^{\text{ن}}-١)}{\lim_{\text{س}\to ١}(\text{س}-١)\left(\text{س}^٢+٦\text{س}+٦\right)} = \frac{١}{١٣} \Leftarrow \frac{\lim_{\text{ص}\to ١}\cancel{(\text{ص}-١)}\left(\left(\text{ص}^{\text{ن}-١}+\text{ص}^{\text{ن}-١}+\dots+١\right)\right)}{\lim_{\text{س}\to ١}\cancel{(\text{س}-١)}\left(\text{س}^٢+٦\text{س}+٦\right)} = \frac{١}{١٣}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{ن}}{١٣} = \frac{١}{١٣} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ١}$$

---

٢٩) $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\frac{١}{\text{س}}-\frac{١}{\text{س}^٣}}{\frac{١}{\text{س}^٥}-\frac{١}{\text{س}^٢}}$

نقوم بتوحيد المقامات في مثل هذه الحالة دائماً:

$$\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\frac{\text{س}^٣-\text{س}}{\text{س}^٤}}{\frac{\text{س}^٢-\text{س}^٥}{\text{س}^٧}} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}\left(\text{س}^٢-١\right)}{\text{س}^٤} \times \frac{\text{س}^٧}{\text{س}^٢\left(١-\text{س}^٣\right)} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^٢\left(\text{س}^٢-١\right)}{\left(١-\text{س}^٣\right)} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^٢\cancel{(\text{س}-١)}\left(\text{س}+١\right)}{\cancel{(١-\text{س})}\left(١+\text{س}+\text{س}^٢\right)} \Leftarrow -\frac{٢}{٣}$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

٣٠) $\lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{\frac{١}{٣}-\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}-٨١}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{\frac{\sqrt{\text{س}}-٣}{٣\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}-٨١} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-٣}{٣\sqrt{\text{س}}\left(\text{س}^{٢}-٨١\right)} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-٣}{٣\sqrt{\text{س}}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}}+٣}{\sqrt{\text{س}}+٣} \times \dfrac{١}{(\text{س}-٩)(\text{س}+٩)}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{\cancel{(\text{س}-٩)}}{٩\times٦\cancel{(\text{س}-٩)}(\text{س}+٩)} = \dfrac{١}{٩٧٢}$

---

٣١) $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} \left(\dfrac{١}{٣\text{س}^{٢}-\text{س}-١٤}\right)\left(\dfrac{١}{\text{س}+١}+\dfrac{١}{٢\text{س}+٥}\right)$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to -٢} \left(\dfrac{١}{٣\text{س}^{٢}-\text{س}-١٤}\right)\left(\dfrac{(٢\text{س}+٥)+(\text{س}+١)}{(\text{س}+١)(٢\text{س}+٥)}\right) \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to -٢} \dfrac{١}{(\text{س}+٢)(٣\text{س}-٧)} \times \dfrac{٣\text{س}+٦}{(\text{س}+١)(٢\text{س}+٥)}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to -٢} \dfrac{١}{(\text{س}+٢)(٣\text{س}-٧)} \times \dfrac{٣(\text{س}+٢)}{(\text{س}+١)(٢\text{س}+٥)} = -\dfrac{١}{١٣} \times -٣ = \dfrac{٣}{١٣}$

---

٣٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\overset{\text{موجب}}{|٢\text{س}+٣|}-\overset{\text{سالب}}{|\text{س}-٦|}}{\frac{١}{\text{س}}-١}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{٢\text{س}+٣-(٦-\text{س})}{\frac{١}{\text{س}}-١} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{٣\text{س}-٣}{\frac{١-\text{س}}{\text{س}}} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{٣\text{س}\cancel{(\text{س}-١)}}{\cancel{(١-\text{س})}} \Leftarrow -٣$

---

٣٣) $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} \dfrac{\text{س}^{٢}-\overset{\text{سالب}}{|\text{س}-٥|}+٣}{\sqrt{\text{س}+٦}-٢}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to -٢} \dfrac{\text{س}^{٢}-(٥-\text{س})+٣}{\sqrt{\text{س}+٦}-٢} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+٦}+٢}{\sqrt{\text{س}+٦}+٢} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to -٢} \dfrac{٤(\text{س}^{٢}+\text{س}-٢)}{(\text{س}+٦)-٤} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to -٢} \dfrac{٤\cancel{(\text{س}+٢)}(\text{س}-١)}{\cancel{(\text{س}+٢)}} = -١٢$

$$\text{٣٤)}\quad \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\overset{\text{صفر}}{\text{س}^٣ + |\text{س}-٣| - ٢٧}}{\text{س}^٣ - ٢٧}$$

$$☜\ \lim_{\text{س}\to ٣^+} \frac{\text{س}^٣+\text{س}-٣-٢٧}{\text{س}^٣-٢٧} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٣^+} \frac{\text{س}^٣+\text{س}-٣٠}{\text{س}^٣-٢٧} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٣^+} \frac{\cancel{(\text{س}-٣)}\left(\text{س}^٢+٣\text{س}+١٠\right)}{\cancel{(\text{س}-٣)}\left(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩\right)} \Leftarrow \frac{٢٨}{٢٧}$$

$$☜\ \lim_{\text{س}\to ٣^-} \frac{\text{س}^٣-\text{س}+٣-٢٧}{\text{س}^٣-٢٧} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٣^-} \frac{\text{س}^٣-\text{س}-٢٤}{\text{س}^٣-٢٧} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٣^-} \frac{\cancel{(\text{س}-٣)}\left(\text{س}^٢+٣\text{س}+٨\right)}{\cancel{(\text{س}-٣)}\left(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩\right)} \Leftarrow \frac{٢٦}{٢٧}$$

$\lim_{\text{س}\to ٣^+} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س}\to ٣^-} \text{ق(س)} \longleftarrow \lim_{\text{س}\to ٣} \text{ق(س)}$ **غير موجودة.**

$$\text{٣٥)}\quad \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\sqrt{\text{س}^٤-٢\text{س}^٢+١}}{١-\text{س}^٣}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\sqrt{\left(\text{س}^٢-١\right)^٢}}{(١-\text{س})\left(١+\text{س}+\text{س}^٢\right)} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\overset{\text{صفر}}{|\text{س}^٢-١|}}{(١-\text{س})\left(١+\text{س}+\text{س}^٢\right)}$$

$$☜\ \lim_{\text{س}\to ١^+} \frac{\text{س}^٢-١}{(١-\text{س})\left(١+\text{س}+\text{س}^٢\right)} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١^+} \frac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}{\cancel{(١-\text{س})}\left(١+\text{س}+\text{س}^٢\right)} \Leftarrow -\frac{٢}{٣}$$

$$☜\ \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{١-\text{س}^٢}{(١-\text{س})\left(١+\text{س}+\text{س}^٢\right)} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{\cancel{(١-\text{س})}(\text{س}+١)}{\cancel{(١-\text{س})}\left(١+\text{س}+\text{س}^٢\right)} \Leftarrow \frac{٢}{٣}$$

$\lim_{\text{س}\to ١^+} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س}\to ١^-} \text{ق(س)} \longleftarrow \lim_{\text{س}\to ١} \text{ق(س)}$ **غير موجودة.**

$$\text{٣٦)}\quad \lim_{\text{س}\to ٠} \text{س}\sqrt{\frac{١}{\text{س}^٢}+١} \longleftarrow ٠\times\infty$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \text{س}\sqrt{\frac{١+\text{س}^٢}{\text{س}^٢}} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٠} \text{س}\times\frac{\sqrt{١+\text{س}^٢}}{\sqrt{\text{س}^٢}} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}\sqrt{١+\text{س}^٢}}{|\text{س}|}$$

صفر

$$☜\ \lim_{\text{س}\to ٠^+} \frac{\cancel{\text{س}}\sqrt{١+\text{س}^٢}}{\cancel{\text{س}}} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٠^+} \sqrt{١+\text{س}^٢} \Leftarrow ١$$

$$☜\ \lim_{\text{س}\to ٠^-} \frac{\cancel{\text{س}}\sqrt{١+\text{س}^٢}}{-\cancel{\text{س}}} \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٠^-} -\left(\sqrt{١+\text{س}^٢}\right) \Leftarrow -١$$

$$\underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \neq \underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \leftarrow \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$$ **غير موجودة.**

---

٣٧) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2\text{س}}{[\text{س}]+|\text{س}|}$

☜ $\underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{2\text{س}}{[\text{س}]+\text{س}} \Leftarrow \underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{2\text{س}}{0+\text{س}} \Leftarrow \underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{2\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} \Leftarrow 2$

☜ $\underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{2\text{س}}{[\text{س}]-\text{س}} \Leftarrow \underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{2\text{س}}{-1-\text{س}} \Leftarrow -\dfrac{0}{1} = 0$

$$\underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \neq \underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \leftarrow \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$$ **غير موجودة.**

---

٣٨) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2+\left[\frac{2\text{س}-1}{3}\right]+\text{س}-2}{\text{س}-1}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2+0+\text{س}-2}{\text{س}-1} \Leftarrow \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-1)}(\text{س}+2)}{\cancel{(\text{س}-1)}} \Leftarrow 3$

---

٣٩) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[4]{\text{س}+13}-2}{\text{س}-3}$

نفرض أن ص = $\sqrt[4]{\text{س}+13} \leftarrow \text{ص}^4 = \text{س}+13 \leftarrow \text{س} = \text{ص}^4-13$

وعندما س ← ٣ ، فإن ص ← ٢

$\therefore \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ص}-2}{\text{ص}^4-16} \Leftarrow \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{ص}-2)}}{\cancel{(\text{ص}-2)}(\text{ص}+2)(\text{ص}^2+4)} \Leftarrow \dfrac{1}{32}$

---

٤٠) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-\sqrt[3]{\text{س}}}{\sqrt[4]{\text{س}}-1}$

نجد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد (٢ ، ٣ ، ٤) وهو العدد ١٢

والآن نفرض أن ص = $\sqrt[12]{\text{س}}$ ← ص^{12} = س ، وعندما س ← ١ ، فإن ص ← ١

$$\therefore \underset{\text{ص}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ص}^{12}} - \sqrt[4]{\text{ص}^{12}}}{\sqrt[4]{\text{ص}^{12}} - 1} \Leftarrow \underset{\text{ص}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^{6} - \text{ص}^{4}}{\text{ص}^{3} - 1} \Leftarrow \underset{\text{ص}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^{4}(\text{ص}^{2} - 1)}{\text{ص}^{3} - 1} \Leftarrow \underset{\text{ص}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^{4}(\text{ص}+1)\cancel{(\text{ص}-1)}}{\cancel{(\text{ص}-1)}\left(\text{ص}^{2}+\text{ص}+1\right)} \Leftarrow \frac{2}{3}$$

---

٤١) إذا كان $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{3}+\text{م}\,\text{س}+\text{ب}}{\text{س}-1} = 7$ ، فجد قيمة كل من الثابتين م ، ب ؟

✍ **الحل:** بما أن النهاية موجودة والمقام يساوي صفر ، إذن البسط أيضاً يساوي صفر

$\therefore \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} (\text{س}^{3}+\text{م}\,\text{س}+\text{ب}) = 0$ ← ١+م+ب = ٠ ← م+ب = −١ ......(*)

	س^{3}	س^{2}	س	س^{0}
	١	٠	م	ب
		١	١	م+١
١	١	١	م+١	م+ب+١ = ٠

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{س}-1)}\left(\text{س}^{2}+\text{س}+(\text{م}+1)\right)}{\cancel{(\text{س}-1)}} = 7$$

⇐ ٢ + م + ١ = ٧ ⇐ $\boxed{\text{م} = 4}$ ، ومن معادلة (*) ينتج أن : ٤+ب = −١ ⇐ $\boxed{\text{ب} = -5}$

---

٤٢) إذا كان $\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{م}}}{\text{س} - \text{م}} = \frac{1}{6}$ ، فجد قيمة الثابت (م) ؟

✍ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{م}}}{\text{س} - \text{م}} = \underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{م}})}}{\cancel{(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{م}})}(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{م}})} = \frac{1}{6} \Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{\text{م}}} = \frac{1}{6} \Leftarrow \sqrt{\text{م}} = 3 \Leftarrow \text{م} = 9$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس الرابع: نهاية الاقترانات الدائرية

➢ **نظرية:** $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$

➢ **البرهان:**

مساحة المثلث (أم ب) < مساحة القطاع (أم ب) < مساحة المثلث (أم ج)

⇐ $(\frac{١}{٢} \times \text{أم} \times \text{م ب} \times \text{جاس}) < (\frac{١}{٢} \times \text{نق}^{٢} \times \text{س}) < (\frac{١}{٢} \times \text{أم} \times \text{أ ج})$

⇐ $(\text{أم} \times \text{م ب} \times \text{جاس}) < (\text{نق}^{٢} \times \text{س}) < (\text{أم} \times \text{أ ج})$

⇐ $(١ \times ١ \times \text{جاس}) < (١^{٢} \times \text{س}) < (١ \times \text{ظاس})$

⇐ جاس < س < ظاس

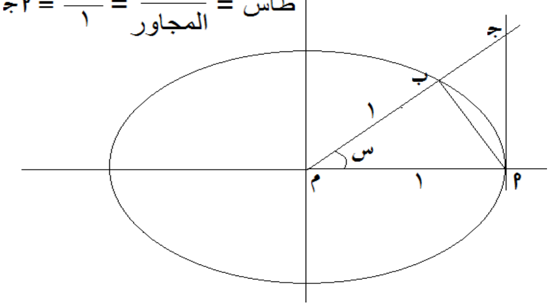
⇐ $١ < \frac{\text{س}}{\text{جاس}} < \frac{١}{\text{جتاس}}$

⇐ $١ > \frac{\text{جاس}}{\text{س}} > \text{جتاس}$

⇐ $\lim\limits_{س\to ٠} ١ > \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} > \lim\limits_{س\to ٠} \text{جتاس}$

⇐ $١ > \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} > ١$ ⇐ $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$

$\text{ظاس} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أج}}{١} = \text{أج}$



➊ **نتائج:**

١. $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{س}}{\text{جاس}} = ١$

٢. $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{أ س}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٣. $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا أس}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

➢ **نظرية:** $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{س}}{\text{ظاس}} = ١$

➢ **البرهان:** $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س جتاس}} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \lim\limits_{س\to ٠} \frac{١}{\text{جتاس}} = ١ \times ١ = ١$

📖 **مثال:** أوجد $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا٩س}}{\text{٣س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا٩س}}{\text{٣س}} = \frac{٩}{٣} = ٣$

📖 **مثال٢:** أوجد $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا٥س} + \text{جا٢س}}{\text{٣س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا٥س+جا٢س}}{\text{٣س}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا٥س}}{\text{٣س}} + \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا٢س}}{\text{٣س}} = \dfrac{\text{٥}}{\text{٣}} + \dfrac{\text{٢}}{\text{٣}} = \dfrac{\text{٧}}{\text{٣}}$

📖 **مثال٣:** أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا٦س − جا٣س}}{\text{جا٤س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا٦س − جا٣س}}{\text{جا٤س}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا٦س}}{\text{جا٤س}} - \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا٣س}}{\text{جا٤س}} = \dfrac{\text{٦}}{\text{٤}} - \dfrac{\text{٣}}{\text{٤}} = \dfrac{\text{٣}}{\text{٤}}$

📖 **مثال٤:** أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\sqrt{\text{٥س}}}{\text{٣س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\sqrt{\text{٥س}}}{\text{٣س}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا}\sqrt{\text{٥س}}\times\text{جا}\sqrt{\text{٥س}}}{\text{٣س}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\dfrac{\text{جا}\sqrt{\text{٥س}}}{\sqrt{\text{٥س}}}\times\sqrt{\text{٥س}}\times\dfrac{\text{جا}\sqrt{\text{٥س}}}{\sqrt{\text{٥س}}}\times\sqrt{\text{٥س}}}{\text{٣س}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{٥س}}{\text{٣س}} = \dfrac{\text{٥}}{\text{٣}}$

📖 **مثال٥:** أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})}{(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})^{\text{٢}}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})}{(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})^{\text{٢}}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \left(\dfrac{\text{جا}(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})}{(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})}\right)^{\text{٢}} = \text{١}^{\text{٢}} = \text{١}$

📖 **مثال٦:** أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا١١س−جا٣س}}{\text{جا٣س − ٧س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا١١س−جا٣س}}{\text{جا٣س − ٧س}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{٢ جتا}\frac{\text{١٤س}}{\text{٢}}\times\text{جا}\frac{\text{٨س}}{\text{٢}}}{\frac{\text{جا٣س}}{\text{٣س}}\times\text{٣س − ٧س}} \Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{٢ جتا٧س}\times\text{جا٤س}}{\text{٣س − ٧س}} \Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{٢}\times\text{١}\times\frac{\text{جا٤س}}{\text{٤س}}\times\text{٤س}}{-\text{٤س}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{٨س}}{-\text{٤س}} = -\text{٢}$

📖 **مثال٧:** أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}$ (جأ(جا٦س-٣س))×قتا٥س ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}$ (جأ(جا٦س-٣س))×قتا٥س

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا(جا٦س−٣س)}}{\text{جا٦س−٣س}}\times(\text{جا٦س − ٣س})\times\dfrac{\text{جا(جا٦س−٣س)}}{\text{جا٦س−٣س}}\times(\text{جا٦س − ٣س})\times\dfrac{\text{١}}{\frac{\text{جا٥س}}{\text{٥س}}\times\text{٥س}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ (\text{جا٦س − ٣س})\times(\text{جا٦س − ٣س})\times\dfrac{\text{١}}{\text{٥س}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \left(\dfrac{\text{جا٦س}}{\text{٦س}}\times\text{٦س}\right)-\text{٣س}\times\left(\dfrac{\text{جا٦س}}{\text{٦س}}\times\text{٦س}\right)-\text{٣س}\times\dfrac{\text{١}}{\text{٥س}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ (\text{١}\times\text{٦س} - \text{٣س}\times(\text{١}\times\text{٦س}) - \tfrac{\text{٣}}{\text{٥}}) = \text{٠}$

مثال٨: أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{ظا}\left(\text{س}^{٢}-٤\right)}{٢\text{س}-٤}$ ؟

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{ظا}\left(\text{س}^{٢}-٤\right)}{٢\text{س}-٤} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\dfrac{\text{ظا}\left(\text{س}^{٢}-٤\right)}{\left(\text{س}^{٢}-٤\right)}\times\left(\text{س}^{٢}-٤\right)}{٢\left(\text{س}-٢\right)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\left(\text{س}+٢\right)\left(\text{س}-٢\right)}{٢\left(\text{س}-٢\right)} = ٢$

مثال٩: أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{ظا}\left(\text{جا}\left(|٢\text{س}|-٧\text{س}\right)\right)}{\text{جا}\,٣\text{س}}$ ؟

الحل:

☜ $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \dfrac{\text{ظا}\left(\text{جا}\left(٢\text{س}-٧\text{س}\right)\right)}{\text{جا}\,٣\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \dfrac{\text{ظا}\left(\text{جا}\left(-٥\text{س}\right)\right)}{\text{جا}\,٣\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \dfrac{-\text{ظا}\left(\text{جا}\left(٥\text{س}\right)\right)}{\text{جا}\,٣\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \dfrac{-\dfrac{\text{ظا}\left(\text{جا}\,٥\text{س}\right)}{\text{جا}\,٥\text{س}}\times\text{جا}\,٥\text{س}}{\dfrac{\text{جا}\,٣\text{س}}{٣\text{س}}\times ٣\text{س}}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \dfrac{-\text{جا}\,٥\text{س}}{٣\text{س}} = -\dfrac{٥}{٣}$

☜ $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} \dfrac{\text{ظا}\left(\text{جا}\left(-٢\text{س}-٧\text{س}\right)\right)}{\text{جا}\,٣\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} \dfrac{\text{ظا}\left(\text{جا}\left(-٩\text{س}\right)\right)}{\text{جا}\,٣\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} \dfrac{-\text{ظا}\left(\text{جا}\left(٩\text{س}\right)\right)}{\text{جا}\,٣\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} \dfrac{-\dfrac{\text{ظا}\left(\text{جا}\,٩\text{س}\right)}{\text{جا}\,٩\text{س}}\times\text{جا}\,٩\text{س}}{\dfrac{\text{جا}\,٣\text{س}}{٣\text{س}}\times ٣\text{س}}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} \dfrac{-\text{جا}\,٩\text{س}}{٣\text{س}} = -\dfrac{٩}{٣} = \mathbf{-٣}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{ق}(\text{س}) \neq \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} \text{ق}(\text{س}) \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س})$ **غير موجودة.**

مثال١٠: أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\sqrt{١٦+\text{جا}\,٢\text{س}} - \sqrt{١٦+\text{جا}\,٣\text{س}}}{٤\text{س}}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\sqrt{١٦+\text{جا}\,٢\text{س}} - \sqrt{١٦+\text{جا}\,٣\text{س}}}{٤\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{١٦+\text{جا}\,٢\text{س}} + \sqrt{١٦+\text{جا}\,٣\text{س}}}{\sqrt{١٦+\text{جا}\,٢\text{س}} + \sqrt{١٦+\text{جا}\,٣\text{س}}}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\left(١٦+\text{جا}\,٢\text{س}\right)-\left(١٦+\text{جا}\,٣\text{س}\right)}{٤\text{س}\times ٨} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}\,٢\text{س}-\text{جا}\,٣\text{س}}{٣٢\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}\,٢\text{س}}{٣٢\text{س}} - \dfrac{\text{جا}\,٣\text{س}}{٣٢\text{س}}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{٢\text{س}}{٣٢\text{س}} - \dfrac{٣\text{س}}{٣٢\text{س}} = \dfrac{٢}{٣٢} - \dfrac{٣}{٣٢} = -\dfrac{١}{٣٢}$

مثال١١: أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{١٣\text{س}}{١-\sqrt{١-\text{جا}\,٦\text{س}}}$ ؟

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{١٣\text{س}}{١-\sqrt{١-\text{جا}\,٦\text{س}}} \times \dfrac{١+\sqrt{١-\text{جا}\,٦\text{س}}}{١+\sqrt{١-\text{جا}\,٦\text{س}}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{١٣\text{س}\left(٢\right)}{١-\left(١-\text{جا}\,٦\text{س}\right)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{٢٦\text{س}}{\text{جا}\,٦\text{س}} = \dfrac{٢٦}{٦}$

📖 **مثال١٢:** أوجد $\text{نهـا}_{\text{س}\to\pi} \dfrac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٣\text{س}+١}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{\text{س}\to\pi} \dfrac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٣\text{س}+١} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\pi} \dfrac{١-\text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٣\text{س}+١} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\pi} \dfrac{(١-\text{جتا س})(١+\text{جتا س})}{(\text{جتا س}+١)(\text{جتا}^٢\text{س}-\text{جتا س}+١)} \Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س}\to\pi} \dfrac{(١-\text{جتا س})}{(\text{جتا}^٢\text{س}-\text{جتا س}+١)} = \dfrac{٢}{٣}$

📖 **مثال١٣:** أوجد $\text{نهـا}_{\text{س}\to-\frac{\pi}{٤}} \dfrac{١+\text{جا ٢س}}{\text{جا س}+\text{جتا س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{\text{س}\to-\frac{\pi}{٤}} \dfrac{١+\text{جا ٢س}}{\text{جا س}+\text{جتا س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to-\frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{جا}^٢\text{س}+\text{جتا}^٢\text{س}+٢\,\text{جا س جتا س}}{\text{جا س}+\text{جتا س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to-\frac{\pi}{٤}} \dfrac{(\text{جا س}+\text{جتا س})^٢}{(\text{جا س}+\text{جتا س})}$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س}\to-\frac{\pi}{٤}} (\text{جاس} + \text{جتاس}) \Leftarrow -\dfrac{١}{\sqrt{٢}} + \dfrac{١}{\sqrt{٢}} = ٠$

📖 **مثال١٤:** أوجد $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\text{ظا}^٢(\text{جا ١٠س})}{\text{جتا ٧س}-\text{جتا ٣س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\text{ظا}^٢(\text{جا ١٠س})}{\text{جتا ٧س}-\text{جتا ٣س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\frac{\text{ظا(جا ١٠س)}}{\text{جا ١٠س}}\times\text{جا ١٠س}\times\frac{\text{ظا(جا ١٠س)}}{\text{جا ١٠س}}\times\text{جا ١٠س}}{-٢\,\text{جا ٥س}\times\text{جا ٢س}} \Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\frac{\text{جا ١٠س}}{١٠\text{س}}\times١٠\text{س}\times\frac{\text{جا ١٠س}}{١٠\text{س}}\times١٠\text{س}}{-٢\,\frac{\text{جا ٥س}}{٥\text{س}}\times٥\text{س}\times\frac{\text{جا ٢س}}{٢\text{س}}\times٢\text{س}}$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{١٠٠\text{س}^٢}{-٢٠\text{س}^٢} = -٥$

📖 **مثال١٥:** أوجد $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\text{قا ٢س}-١}{٢\,\text{ظا}^٢\text{س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\text{قا ٢س}-١}{٢\,\text{ظا}^٢\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\frac{١}{\text{جتا ٢س}}-١}{٢\frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{١-\text{جتا ٢س}}{\text{جتا ٢س}}\times\dfrac{\text{جتا}^٢\text{س}}{٢\text{جا}^٢\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{٢\text{جا}^٢\text{س}}{١}\times\dfrac{١}{٢\text{جا}^٢\text{س}} = ١$

📖 **مثال١٦:** أوجد $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\text{جتا ٢س}-١}{\text{جا ١٣س}-\text{جا ٧س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\text{جتا ٢س}-١}{\text{جا ١٣س}-\text{جا ٧س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{-٢\text{جا}^٢\text{س}}{٢\text{جتا ١٠س}\times\text{جا ٦س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{-\text{جاس}}{\text{جا ٦س}} \times \text{جاس} = -\dfrac{١}{٦} \times ٠ = ٠$

📖 **مثال١٧:** أوجد $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتا٢س}}}{\sqrt{٢}\,\text{جاس}}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتا٢س}}}{\sqrt{٢}\,\text{جاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\sqrt{٢\text{جا}^٢\text{س}}}{\sqrt{٢}\,\text{جاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{\sqrt{٢}\sqrt{\text{جا}^٢\text{س}}}{\sqrt{٢}\,\text{جاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠} \dfrac{|\text{جا س}|}{\text{جا س}}$

☜ $\text{نهـا}_{\text{س}\to٠^+} \dfrac{|\text{جا س}|}{\text{جا س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to٠^+} \dfrac{\text{جا س}}{\text{جا س}} = ١$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

☜ $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{|\text{جا}س|}{\text{جا}س} = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} - \frac{\text{جا}س}{\text{جا}س} = -١$

$\underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}} و(س) \neq \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} و(س) \leftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} و(س)$ غير موجودة.

📖 **مثال١٨:** أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا}(١-\text{جتا}\,٦س)}{س^٤}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا}(١-\text{جتا}\,٦س)}{س^٤} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا}(٢\text{جا}^٢ ٣س)}{س^٤} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جا}^٢(\text{جا}^٢ ٣س)}{س^٤}$

$\Leftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جا}^٢(\frac{\text{جا}\,٣س}{٣س} \times ٣س \times \frac{\text{جا}\,٣س}{٣س} \times ٣س)}{س^٤}$

$\Leftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جا}^٢(٩س^٢)}{س^٤} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\frac{\text{جا}\,٩س^٢}{٩س^٢} \times ٩س^٢ \times \frac{\text{جا}\,٩س^٢}{٩س^٢} \times ٩س^٢}{س^٤} = ١٦٢$

📖 **مثال١٩:** أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٩\,\text{جا}س - ٣\,\text{جا}\,٣س}{س^٣}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٩\,\text{جا}س - ٣\,\text{جا}\,٣س}{س^٣} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣(٣\frac{\text{جا}س}{س} \times س - \frac{\text{جا}\,٣س}{٣س} \times ٣س)}{س^٣} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣(٣س-٣س)}{س^٣} = ٠$

📖 **مثال٢٠:** أوجد $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س-١}{\frac{س}{٢}-\frac{\pi}{٤}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س-١}{\frac{س}{٢}-\frac{\pi}{٤}} = \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س-\text{جا}\frac{\pi}{٢}}{\frac{س}{٢}-\frac{\pi}{٤}} = \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{جتا}\left(\frac{س+\frac{\pi}{٢}}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{س-\frac{\pi}{٢}}{٢}\right)}{\frac{س}{٢}-\frac{\pi}{٤}} \Leftarrow \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}\right) \times \frac{\text{جا}\left(\frac{س}{٢}-\frac{\pi}{٢}\right)}{(\frac{س}{٢}-\frac{\pi}{٢})} \times \left(\frac{س}{٢}-\frac{\pi}{٢}\right)}{(\frac{س}{٢}-\frac{\pi}{٢})} = ٠$

📖 **مثال٢١:** أوجد $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س-\text{جتا}س}{٤س-\pi}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س-\text{جتا}س}{٤س-\pi} \times \frac{\text{جا}س+\text{جتا}س}{\text{جا}س+\text{جتا}س} = \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\text{جا}^٢س-\text{جتا}^٢س}{٤س-\pi}$

$\Leftarrow \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{-\text{جتا}\,٢س}{٤س-\pi} = \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} -\frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\text{جتا}\,٢س-\text{جتا}\frac{\pi}{٢}}{٤س-\pi}$

$\Leftarrow \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} -\frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{-٢\,\text{جا}(س+\frac{\pi}{٤})\text{جا}(س-\frac{\pi}{٤})}{٤س-\pi}$

$\Leftarrow \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \sqrt{٢} \times \frac{\frac{\text{جا}(س-\frac{\pi}{٤})}{(س-\frac{\pi}{٤})} \times (س-\frac{\pi}{٤})}{٤(س-\frac{\pi}{٤})} = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٢٢:** أوجد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}^2\text{س}-1}{\text{قاس}-1}$ ؟

✍ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^2\text{س}-1}{\text{قاس}-1} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^2\text{س}-1}{\frac{1}{\text{جتاس}}-1} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^2\text{س}-1}{\frac{1-\text{جتاس}}{\text{جتاس}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}(\text{جتاس}-1)(\text{جتاس}+1)}{(1-\text{جتاس})}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} -(\text{جتاس})(\text{جتاس}+1) = -2$$

📖 **مثال٢٣:** أوجد $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظاس}-\text{ظتاس}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}$ ؟

✍ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}-\text{ظتاس}}{\text{جاس}-\text{جتاس}} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}-\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}}{\text{جاس}-\text{جتاس}} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^2\text{س}-\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس جتاس}(\text{جاس}-\text{جتاس})}$$

$$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{جاس}-\text{جتاس})(\text{جاس}+\text{جتاس})}{\text{جاس جتاس}(\text{جاس}-\text{جتاس})} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

📖 **مثال٢٤:** أوجد $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(1-\sqrt{\text{س}})}{\text{س}-1}$ ؟

✍ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(1-\sqrt{\text{س}})}{\text{س}-1} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}(1-\sqrt{\text{س}})}{(1-\sqrt{\text{س}})}\times(1-\sqrt{\text{س}})}{(1+\sqrt{\text{س}})(\sqrt{\text{س}}-1)} = -\frac{1}{2}$$

📖 **مثال٢٥:** أوجد $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{6}}{\text{نهـا}} \dfrac{2\,\text{جاس}-1}{4\,\text{جتا}^2\text{س}-3}$ ؟

✍ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{6}}{\text{نهـا}} \frac{2\,\text{جاس}-1}{4\,\text{جتا}^2\text{س}-3} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{6}}{\text{نهـا}} \frac{2\,\text{جاس}-1}{4(1-\text{جا}^2\text{س})-3} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{6}}{\text{نهـا}} \frac{(2\,\text{جاس}-1)}{(1-2\,\text{جاس})(1+2\,\text{جاس})} = -\frac{1}{2}$$

📖 **مثال٢٦:** أوجد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{قاس}-1}$ ؟

✍ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{قاس}-1} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\frac{1}{\text{جتاس}}-1} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\frac{1-\text{جتاس}}{\text{جتاس}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{(1-\text{جتا}^2\text{س})\times\text{جتاس}}{(1-\text{جتاس})}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{(1-\text{جتاس})(1+\text{جتاس})\text{جتاس}}{(1-\text{جتاس})} = 2$$

📖 **مثال٢٧:** أوجد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2\text{س}\times\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}+\text{س}\right)}{\text{ظا}5\text{س}}$ ؟

✍ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2\text{س}\times\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}+\text{س}\right)}{\text{ظا}5\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2\text{س}\times\text{جتاس}}{\text{ظا}5\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2\text{س}\times\text{جتاس}}{\frac{\text{ظا}5\text{س}}{\text{س}}\times 5\text{س}} = \frac{2}{5}$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٢٨:** أوجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}(\pi+١٤\text{س})+١}{\text{جتا}(٢\text{س}-٢\pi)-١}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}(\pi+١٤\text{س})+١}{\text{جتا}(٢\text{س}-٢\pi)-١} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جتا}١٤\text{س}+١}{\text{جتا}٢\text{س}-١} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{جا}^٢ ٧\text{س}}{-٢\text{جا}^٢\text{س}} = -٤٩$

📖 **مثال٢٩:** أوجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\left(\frac{٣\pi}{٢}+١٨\text{س}\right)}{\text{جتا}\left(\frac{٣\pi}{٢}-٤\text{س}\right)}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\left(\frac{٣\pi}{٢}+١٨\text{س}\right)}{\text{جتا}\left(\frac{٣\pi}{٢}-٤\text{س}\right)} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}١٨\text{س}}{-\text{جا}٤\text{س}} = -\dfrac{١٨}{٤} = -\dfrac{٩}{٢}$

📖 **مثال٣٠:** أوجد $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\pi^٢-\text{س}^٢}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\pi^٢-\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}-\text{جا}\pi}{\pi^٢-\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{جتا}\left(\frac{\text{س}+\pi}{٢}\right)\times\text{جا}\left(\frac{\text{س}-\pi}{٢}\right)}{(\pi-\text{س})(\pi+\text{س})} \Leftarrow \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢\,\dfrac{\text{جا}\left(\frac{\text{س}-\pi}{٢}\right)}{\frac{\text{س}-\pi}{٢}}\times\frac{١}{٢}(\text{س}-\pi)}{(\pi-\text{س})(\pi+\text{س})} = \dfrac{١}{٢\pi}$

📖 **مثال٣١:** أوجد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\pi\text{س}}{\text{س}^٢-٤}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\pi\text{س}}{\text{س}^٢-٤} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\pi\text{س}-\text{جا}٢\pi}{\text{س}^٢-٤} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{جتا}\left(\frac{\pi\text{س}+٢\pi}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{\pi\text{س}-٢\pi}{٢}\right)}{\text{س}^٢-٤} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{جا}\dfrac{\left(\frac{\pi\text{س}-٢\pi}{٢}\right)}{\frac{\pi\text{س}-٢\pi}{٢}}\times\frac{\pi}{٢}(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$

$= \dfrac{\pi}{٤}$

📖 **مثال٣٢:** أوجد $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١+\text{جتا}٢\text{س}}{\frac{\pi}{٢}-\text{س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١+\text{جتا}٢\text{س}}{\frac{\pi}{٢}-\text{س}} \Leftarrow \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١+\left(١-٢\text{جا}^٢\text{س}\right)}{\text{جاس}-١} \Leftarrow \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢-٢\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جاس}-١} \Leftarrow \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢(١-\text{جا}^٢\text{س})}{\text{جاس}-١}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢(١-\text{جاس})(١+\text{جاس})}{\text{جاس}-١} = -٤$

📖 **مثال٣٣:** أوجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^٣\text{س}}{\text{جاس}-\text{ظاس}}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{جا^{٣}س}{جاس-ظاس}\Leftarrow\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{جا^{٣}س}{جاس-\frac{جاس}{جتاس}}=\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{جا^{٣}س}{\frac{جتاس\,جاس-جاس}{جتاس}}=\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{جا^{٣}س\times جتاس}{جاس(جتاس-١)}=\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{جا^{٢}س}{(جتاس-١)}$

$$\Leftarrow\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{١-جتا^{٢}س}{جتاس-١}=\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{(١-جتاس)(١+جتاس)}{جتاس-١}=-٢$$

📖 **مثال ٣٤:** أوجد $\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{ظتا\left(\frac{\pi}{٢}-٦س\right)}{١٢س}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{ظتا\left(\frac{\pi}{٢}-٦س\right)}{١٢س}=\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{ظا٦س}{١٢س}=\frac{٦}{١٢}=\frac{١}{٢}$

📖 **مثال ٣٥:** أوجد $\text{نهـا}_{س\to١}(١-س)\times ظا\frac{\pi}{٢}س$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{س\to١}(١-س)\times ظا\frac{\pi}{٢}س=\text{نهـا}_{س\to١}(١-س)\times ظتا\left(\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{٢}س\right)$

$=\text{نهـا}_{س\to١}(١-س)\times ظتا\frac{\pi}{٢}(١-س)$

ص = ١ − س ← س = ١ − ص .... **(ملاحظة هامة جداً: لا يجوز فرض الزاوية إلا إذا كان ناتج تعويضها صفر)**

وعندما س ← ١ ، فإن ص ← ٠

$\therefore\ \text{نهـا}_{ص\to٠}ص\times ظتا\frac{\pi}{٢}ص\Leftarrow\text{نهـا}_{ص\to٠}ص\times\frac{جتا\frac{\pi}{٢}ص}{جا\frac{\pi}{٢}ص}\Leftarrow\text{نهـا}_{ص\to٠}\frac{ص}{جا\frac{\pi}{٢}ص}\times جتا\frac{\pi}{٢}ص=\frac{١}{\frac{\pi}{٢}}=\frac{٢}{\pi}$

📖 **مثال ٣٦:** أوجد $\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{ظا(\pi-٨س)}{٤س}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{ظا(\pi-٨س)}{٤س}=\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{-ظا٨س}{٤س}=-\frac{٨}{٤}=-٢$

📖 **مثال ٣٧:** أوجد $\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{ظا(\pi\,قا٤س)}{س\,ظا٢س}$ ؟

✍ **الحل:** $\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{ظا(\pi\,قا٤س)}{س\,ظا٢س}=\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{ظا(\pi-\pi\,قا٤س)}{س\,ظا٢س}=\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{\frac{ظا(\pi-\pi\,قا٤س)}{(\pi-\pi\,قا٤س)}\times(\pi-\pi\,قا٤س)}{س\frac{ظا٢س}{٢س}\times٢س}$

$$\Leftarrow\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{\pi(١-قا٤س)}{٢س^{٢}}=\frac{\pi}{٢}\times\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{١-\frac{١}{جتا٤س}}{س^{٢}}$$

$$=\frac{\pi}{٢}\times\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{\frac{جتا٤س-١}{جتا٤س}}{س^{٢}}=\frac{\pi}{٢}\times\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{جتا٤س-١}{س^{٢}\times جتا٤س}\Leftarrow\frac{\pi}{٢}\times\text{نهـا}_{س\to٠}\frac{-٢جا^{٢}٢س}{س^{٢}}$$

$$=-\pi\times\text{نهـا}_{س\to٠}\left(\frac{جا٢س}{س}\right)^{٢}$$

$$=-\pi\times\left(\frac{٢}{١}\right)^{٢}=-٤\pi$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٣٨:** إذا كان $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جا}^{2}\text{أ}+\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{س}-\text{أ}}$ موجودة فأثبت أن نهايته تساوي ٢جتا٢م

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جا}^{2}\text{أ}+\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{س}-\text{أ}} = \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \dfrac{2\,\text{جتا}\left(\frac{2\text{س}+2\text{أ}}{2}\right)\times\text{جا}\left(\frac{2\text{س}-2\text{أ}}{2}\right)}{\text{س}-\text{أ}} = \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \dfrac{2\,\text{جتا}(\text{س}+\text{أ})\times\text{جا}(\text{س}-\text{أ})}{\text{س}-\text{أ}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}-\text{أ})}{\text{س}-\text{أ}} \times 2\,\text{جتا}(\text{س}+\text{م}) = 1\times 2\,\text{جتا}2\text{م}$

$= 2\,\text{جتا}2\text{م}$

📖 **مثال٣٩:** إذا كان $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{4\text{س}^{2}-\text{جا أس}}{\text{أس}-\text{ظا }4\text{س}} = \frac{1}{4}$ ، فجد قيمة الثابت (م)؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{4\text{س}^{2}-\text{جا أس}}{\text{أس}-\text{ظا }4\text{س}} = \frac{1}{4} \Leftarrow \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{4\text{س}^{2}-\frac{\text{جا أس}}{\text{أس}}\times\text{أس}}{\text{أس}-\frac{\text{ظا }4\text{س}}{4\text{س}}\times 4\text{س}} = \frac{1}{4} \Leftarrow \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{4\text{س}^{2}-\text{أس}}{\text{أس}-4\text{س}} = \frac{1}{4}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}(4\text{س}-\text{أ})}{\text{س}(\text{أ}-4)} = \frac{1}{4} \Leftarrow -4\text{م} = \text{م}-4$

$\Leftarrow -5\text{م} = -4$

$\Leftarrow \text{م} = \frac{4}{5}$

📖 **مثال٤٠:** أوجد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}}$ س٢×ظتا٣س×قتاس ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \text{س}^{2}\times\text{ظتا}3\text{س}\times\text{قتاس} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \text{س}^{2}\times\dfrac{\text{جتا }3\text{س}}{\text{جا }3\text{س}}\times\dfrac{1}{\text{جا س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \text{جتا}3\text{س}\times\dfrac{\text{س}}{\text{جا }3\text{س}}\times\dfrac{\text{س}}{\text{جا س}} \Leftarrow 1\times\frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$

📖 **مثال٤١:** أوجد $\underset{\text{س}\to 0^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{2}\sqrt{3\text{س}}}{\text{س}}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to 0^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{2}\sqrt{3\text{س}}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\sqrt{3\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\times\dfrac{\text{جا}\sqrt{3\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} = \dfrac{\sqrt{3\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\times\dfrac{\sqrt{3\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} = \dfrac{3\text{س}}{\text{س}} = 3$

📖 **مثال٤٢:** أوجد $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{2}\pi\text{س}}{\text{س}^{2}-2\text{س}+1}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{2}\pi\text{س}}{\text{س}^{2}-2\text{س}+1} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{2}\pi\text{س}}{(\text{س}-1)^{2}} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{جا}\pi\text{س}}{\text{س}-1}\right)^{2} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{جا}(\pi-\pi\text{س})}{\text{س}-1}\right)^{2}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\frac{\text{جا}(\pi-\pi\text{س})}{\pi-\pi\text{س}}\times\pi(1-\text{س})}{\text{س}-1}\right)^{2} = \pi^{2}$

📖 **مثال٤٣[واجب]:** أوجد $\underset{\text{س}\to 0^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{قا س}-1}}{\text{س}}$ ؟...... $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

مثال٤٤: أوجد $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \text{جتا}2س} - \sqrt{2}\,\text{جا}5س}{س}$

الحل: $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \text{جتا}2س} - \sqrt{2}\,\text{جا}5س}{س} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\sqrt{2\text{جا}^2س} - \sqrt{2}\,\text{جا}5س}{س} \Leftarrow \lim\limits_{س \to 0} \sqrt{2} \times \dfrac{|\text{جا}س| - \text{جا}5س}{س}$

$\lim\limits_{س \to 0^+} \sqrt{2} \times \dfrac{\text{جا}س - \text{جا}5س}{س} = \sqrt{2} \times \left(\dfrac{\text{جا}س}{س} - \dfrac{\text{جا}5س}{س} \right) = \sqrt{2}\,(1-5) = -4\sqrt{2}$

$\lim\limits_{س \to 0^-} \sqrt{2} \times \dfrac{-\text{جا}س - \text{جا}5س}{س} = -\sqrt{2} \times \left(\dfrac{\text{جا}س}{س} + \dfrac{\text{جا}5س}{س} \right) = -\sqrt{2}\,(1+5) = -6\sqrt{2}$

$\lim\limits_{س \to 0^+} ق(س) \neq \lim\limits_{س \to 0^-} ق(س) \longrightarrow \lim\limits_{س \to 0} ق(س)$ **غير موجودة.**

الدرس الخامس: الاتصال عند نقطة

➢ **تعريف:** يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند النقطة (أ) إذا تحققت الشروط الآتية:

١. الصورة موجودة (ق(أ) = جـ).
٢. النهاية موجودة ($\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ب).
٣. النهاية تساوي الصورة($\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ) ← ب = جـ).

➢ **الحالات الجبرية الغير معرفة دائماً:**

١) الاقترانات النسبية غير معرفة دائماً عند جذور المقام.
٢) عدم وجود إشارة المساواة(=) عند نقطة مثل (أ) في الاقتران المتشعب.
٣) في الجذور الزوجية ، القيم التي تجعل ما تحت الجذر قيمة سالبة يكون الاقتران غير معرفاً عندها.

➢ **الحالات الجبرية المعرفة دائماً:**

١) كثيرات الحدود (معرفة ومتصلة دائماً).
٢) الاقترانات الدائرية.
٣) اقتران القيمة المطلقة إلا إذا كان ما داخله غير معرفاً.
٤) الجذور الفردية إلا إذا كان ما داخلها غير معرفاً.

مثال: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^2+5س &، س \neq 2 \\ 11 &، س = 2 \end{cases}$ ابحث في اتصال ق(س) عندما س = ٢؟

الحل: نبحث شروط الاتصال:

① ق(٢) = ١١
② $\lim_{س \to 2}$ ق(س) = $\lim_{س \to 2}$ (س^2+٥س) = ١٤
③ $\lim_{س \to 2}$ ق(س) ≠ ق(٢)

∴ ق(س) غير متصل عندما س = ٢

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٢:** إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}}{\text{س}^2-4} &، \text{س} \neq 2 \\ \dfrac{\pi}{4} &، \text{س} = 2 \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق(س) عند س =٢؟

✍ **الحل:**

① ق(٢) = $\frac{\pi}{4}$

② $\lim\limits_{\text{س}\to 2}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \left(\dfrac{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}}{\text{س}^2-4}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to 2} \left(\dfrac{-\text{ظا}(2\pi-\pi\,\text{س})}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to 2} \left(\dfrac{\dfrac{-\text{ظا}(2\pi-\pi\,\text{س})}{(2\pi-\pi\,\text{س})}\times\pi(2-\text{س})}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\right) \Leftarrow \frac{\pi}{4}$

③ ق(٢) = $\lim\limits_{\text{س}\to 2}$ ق(س)

∴ ق(س) متصل عندما س = ٢

📖 **مثال٣:** إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^2+5\text{س}-a}{\text{س}-3} &، \text{س} \neq 3 \\ 2a + 4b &، \text{س} = 3 \end{cases}$ ، وكان ق(س) متصلاً عند س = ٣ ،

جد قيمة كل من الثابتين ﻫ ، ب ؟

✍ **الحل:** بما أن ق(س) متصلاً عند س = ٣ ⟵ النهاية موجودة وتساوي الصورة.

∴ ق(٣) = $\lim\limits_{\text{س}\to 3}$ ق(س) ، وبما أن النهاية موجودة والمقام يساوي صفر ، إذن البسط يساوي صفر

$\lim\limits_{\text{س}\to 3}(\text{س}^2+5\text{س}-a) = 0 \longleftarrow 9+15-a = 0 \longleftarrow \boxed{a = 24}$

لكن ق(٣) = $\lim\limits_{\text{س}\to 3}$ ق(س) $\Leftarrow 48+4b = \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\text{س}^2+5\text{س}-24}{\text{س}-3} \Leftarrow 48+4b = \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{(\text{س}-3)(\text{س}+8)}{(\text{س}-3)}$

$\Leftarrow 48+4b = 11 \longleftarrow \boxed{b = -\frac{37}{4}}$

📖 **مثال٤:** إذا كان ق(س) = $\begin{cases} 2\text{س}^2-\text{س} &، \text{س} > 2 \\ 9 &، \text{س} = 2 \\ \text{س}^3 - 2 &، \text{س} < 2 \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق(س) عندما س = ٢؟

✍ **الحل:**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

① $ق(٢) = ٩$

② $\lim_{س \to ٢^+} (٢س^٢ - س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢^-} (س^٣ - ٢) = ٦$ ، $\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) = ٦$

③ $\lim_{س \to ٢} ق(س) \neq ق(٢)$

$\therefore$ ق(س) **غير متصل عندما** $س = ٢$

📖 **مثال٥:** إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ظا٢س & ، س < \frac{\pi}{٤} \\ ٢جاس & ، س \geqslant \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ ، **ابحث في اتصال** ق(س) **عند** $س = \frac{\pi}{٤}$ ؟

✍ **الحل:**

① $ق(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

② $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}^+} (٢جاس) = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ ، $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}^-} (ظا٢س) \to \infty$

③ $ق(\frac{\pi}{٤}) \neq \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} ق(س)$ ← ق(س) **غير متصل عندما** $س = \frac{\pi}{٤}$

📖 **مثال٦:** ليكن $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥س & ، |س| \leqslant ٢ \\ \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} + ٨ & ، |س| > ٢ \end{cases}$ ، **فابحث في اتصال** ق(س) **عند** $س = ٢$ ، -٢؟

✍ **الحل:**

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥س & ، -٢ \leqslant س \leqslant ٢ \\ \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} + ٨ & ، ٢ < س < -٢ \end{cases}$$

☜ **عندما** $س = -٢$:

① $ق(-٢) = -٦$

② $\lim_{س \to ٢^+} (س^٢ + ٥س) = -٦$ ، $\lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} + ٨ = ٠ + ٨ = ٨$ ، $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ **غير موجودة.**

③ $\lim_{س \to ٢} ق(س) \neq ق(-٢)$ ← ق(س) **غير متصل عندما** $س = -٢$

☜ **عندما** $س = ٢$:

① $\text{ق}(٢) = ١٤$

② $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^-} (\text{س}^٢ + ٥\text{س}) = ١٤$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^+} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢} + ٨ = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^+} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)} + ٨ = ١٢$

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{ق}(\text{س})$ **غير موجودة.**

③ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{ق}(\text{س}) \neq \text{ق}(٢)$ ← ق(س) **غير متصل عندما س = ٢**

📖 **مثال٧:** ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س}}{\text{س}} + \text{أ} & ، \text{س} < ٠ \\ ٣\text{أ} + ٢\text{ب} & ، \text{س} = ٠ \\ \frac{١ - \text{جتا } ٨\text{س}}{\text{س جا } ٢\text{س}} + ٢\text{أ} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

وكان ق(س) متصلاً عندما س = ٠ ، فجد قيمة كل من أ ، ب ؟

✍ **الحل:** بما أن ق(س) متصلاً عندما س = ٠ ⇐ $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \left(\frac{١ - \text{جتا } ٨\text{س}}{\text{س جا } ٢\text{س}} + ٢\text{أ}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \left(\frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س}}{\text{س}} + \text{أ}\right)$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \left(\frac{٢\text{جا}^٢ ٤\text{س}}{\frac{\text{س جا } ٢\text{س}}{\text{س}^٢} \times \text{س}^٢} + ٢\text{أ}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \left(\frac{\text{س}(\text{س}-٦)}{\text{س}} + \text{أ}\right)$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \left(\frac{\frac{\text{جا } ٤\text{س}}{٤\text{س}} \times ٤\text{س} \times \frac{\text{جا } ٤\text{س}}{٤\text{س}} \times ٤\text{س}}{\text{س} \times \text{س}} + ٢\text{أ}\right) = \text{أ} - ٦$

$\Leftarrow ١٦ + ٢\text{أ} = \text{أ} - ٦ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -٢٢}$

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س}}{\text{س}} - ٢٢ = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \left(\frac{\text{س}(\text{س}-٦)}{\text{س}} - ٢٢\right) = -٢٨$

ولأن ق(س) متصلاً عندما س = ٠

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٠) \Leftarrow -٢٨ = -٦٦ + ٢\text{ب} \Leftarrow ٢\text{ب} = ٣٨ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ١٩}$

✪ **ملاحظة:** إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\text{أ س} + \text{ب}]$ ، ب ∈ ص ، فإن نقاط الانفصال (نقاط عدم الاتصال) هي مضاعفات مقلوب معامل س.

📖 **مثال٨:** اكتب نقاط عدم الاتصال للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = [\frac{\text{س}}{٤} + ٢]$ على ح؟

✍ **الحل:** جميع مضاعفات مقلوب معامل س هي نقاط انفصال

ب = ٢ ∈ ص ، ∴ نقاط عدم الاتصال هي: س = { ٠ ، ± ٤ ، ± ٨ ، ± ١٢ ، ... }

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس السادس: الاتصال على فترة

➢ **تعريف:** يكون الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة (أ،ب) إذا كان:

① ق(أ) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س)

② ق(ب) = $\lim_{س \to ب^-}$ ق(س)

كما نبحث الاتصال للاقتران دائماً على النحو الآتي:

① اتصال الاقتران بين القواعد.

② اتصال الاقتران عند أطراف الفترة.

③ اتصال الاقتران عند نقاط التشعب.

➢ **نظريات:**

١) إذا كان ق(س) كثير حدود فإنه متصلاً على ح.

٢) إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند النقطة س=أ فإن:

أ. ق(س) ± هـ(س) ← اقتراناً متصلاً عند أ.

ب. ق(س) × هـ(س) ← اقتراناً متصلاً عند أ.

ت. ق(س) ÷ هـ(س) ← اقراناً متصلاً عند أ.

٣) إذا كان ق(س) متصلاً عند النقطة أ حيث ق(س) ≥ صفر فإن $\sqrt[ن]{ق(س)}$ متصلاً عند أ.

📖 **مثال:** إذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٧ & ، س = ١ \\ ٢س^٢+١ & ، ١ < س < ٣ \\ س^٢+س & ، ٣ \leq س < ٥ \\ ٣ & ، س = ٥ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق(س) على مجاله؟

✍ **الحل:** مجال ق(س) هو كل قيم س ∈ [١ ، ٥]

☜ بين القواعد:

- (١ ، ٣) : ق(س) كثير حدود متصل.
- [٣ ، ٥): ق(س) كثير حدود متصل.

☜ نقاط التشعب:

- عندما س = ٣:

① ق(٣) = ٣^٢+٣ = ٩+٣=١٢

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

② $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا}$ (س^٢+س) = ١٢ ، $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا}$ (٢س^٢+١) = ١٩

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا}$ ق(س) $\neq$ $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا}$ ق(س) ⇐ ق(س) **غير متصل عند س = ٣:**

☜ **الأطراف:**

- **عندما س = ١:**

$\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا}$ (٢س^٢+١) = ٣ ، ق(١) = ٧ ، **لاحظ أن** $\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا}$ ق(س) $\neq$ ق(١) ← ق **غير متصل عند س = ١**

- **عندما س = ٥:**

$\underset{س \leftarrow ٥^-}{نهـا}$ (س^٢+س) = ٣٠ ، ق(٥) = ٣، **لاحظ أن** $\underset{س \leftarrow ٥^-}{نهـا}$ ق(س) $\neq$ ق(٥) ← ق **غير متصل عند س=٥**

📖 **مثال٢: إذا كان ق(س) =**

$$ق(س) = \begin{cases} ١٥ & ، س = ٢ \\ س^٢+٥س+١ & ، ٢ < س \leqslant ٣ \\ \frac{س^٢-٩}{س-٣}+١٩ & ، ٣ < س < ٥ \\ س^٢+س & ، س = ٥ \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق(س) على مجاله؟

✍ **الحل:**

☜ **بين القواعد:**

- (٢،٣] : ق(س) = س^٢+٥س+١ ، **كثير حدود متصل**
- (٣،٥) : ق(س) = $\frac{س^٢-٩}{س-٣}$+١٩ ، **متصل إلا عند جذور المقام** (س-٣=٠ ← س=٣ $\notin$(٣،٥))

∴ ق(س) **متصل على الفترة** (٣،٥)

☜ **الأطراف:**

- س = ٢: $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ (س^٢+٥س+١) = ١٥ ،ق(٢) = ١٥ ،ق(٢) = $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ ق(س) = ١٥ ← ق **متصل عند** س = ٢
- س =٥: $\underset{س \leftarrow ٥^-}{نهـا}$ ($\frac{س^٢-٩}{س-٣}$+١٩) = $\frac{١٦}{٢}$ + ١٩ = ٢٧ ، ق(٥) = ٥^٢+٥ = ٣٠

$\underset{س \leftarrow ٥^-}{نهـا}$ ق(س) $\neq$ ق(٥) ← ق **غير متصل عند س = ٢**

☜ **نقاط التشعب:**

- **س = ٣:**

① ق(٣) = ٣^٢+٥×٣+١ = ٢٥

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

② $\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهــا}} \left(\frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} + ١٩\right) = \underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهــا}} \left(\frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{(\text{س}-٣)} + ١٩\right) = ٢٥$ ، $\underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نهــا}} (\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ١) = ٢٥$

$\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) \longleftarrow \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) = ٢٥$

③ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٣) = ٢٥$

∴ ق متصل عند س = ٣

📖 **مثال٣:** إذا كان ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + \frac{\text{ب}}{\text{س}} &، \quad ٠ < \text{س} \leqslant ٢ \\ [\text{س}] + ٣ &، \quad ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ &، \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

وكان ق متصلاً عند س = ٢ فأجب عن الأسئلة الآتية:

١. جد قيمة الثابت ب.

٢. ابحث في اتصال ق(س) على الفترة (٠ ، ٣].

✍ **الحل:** **نعيد التعريف:**

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + \frac{\text{ب}}{\text{س}} &، \quad ٠ < \text{س} \leqslant ٢ \\ ٥ &، \quad ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ &، \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

بما أن ق متصلاً عند س = ٢ فإن :

$\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) \Leftarrow \underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهــا}} (٥) = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} (\frac{\text{ب}}{\text{س}} + \text{س}^٢) \Leftarrow ٥ = \frac{\text{ب}}{٢} - ٤ \Leftarrow \frac{\text{ب}}{٢} = ٩ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ١٨}$

☜ **بين القواعد:**

- **(٠،٢] : ق(س) = $\frac{١٨}{\text{س}}$ + س^٢ ، متصل إلا عند س = ٠ ∉(٠،٢] ، ∴ ق متصل على الفترة (٠،٢]**
- **(٢،٣): ق(س) = ٥ ، كثير حدود متصل على الفترة (٢،٣)**

☜ **نقاط التشعب:**

- **س = ٢:**

① $\text{ق}(٢) = \frac{١٨}{٢} + ٤ = ٩ + ٤ = ١٣$

② $\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهــا}} (٥) = ٥$ ، $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} (\frac{١٨}{\text{س}} + \text{س}^٢) = ٩ + ٤ = ١٣$

$\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) \neq \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) \longleftarrow \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س})$ **غير موجودة ← ق(س) غير متصل عند س = ٢**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الأطراف:

- س = ٠: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \left(\frac{١٨}{\text{س}} + \text{س}^٢\right) = \frac{١٨}{٠^+} \to \infty$ ، ∴ ق غير متصل عند س = ٠
- س = ٣: $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^-} (٥) = ٥$ ، ق(٣) = ٧

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣^-}$ ق(س) ≠ ق(٣) ← ق غير متصل عند س =٣

مثال٤: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |\text{س}| + \sqrt[٣]{\text{س}} & ، \ -٢ \leqslant \text{س} < ٠ \\ ٦ & ، \ \text{س} = ٣ \\ \frac{٤}{\text{س}+١} & ، \ ٠ \leqslant \text{س} < ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) على الفترة [-٢،٣]

الحل: نعيد التعريف: |س| = ٠ ⇐ س = ٠

∴ ق(س) = $\begin{cases} -\text{س} + \sqrt[٣]{\text{س}} & ، \ -٢ \leqslant \text{س} < ٠ \\ ٦ & ، \ \text{س} = ٣ \\ \frac{٤}{\text{س}+١} & ، \ ٠ \leqslant \text{س} < ٣ \end{cases}$

−س ‏ ‏ ‏ ‏ +س
−−−− ٠ ++++

بين القواعد:

- [-٢،٠) : ق(س) = −س + $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ، متصل على هذه الفترة.
- [٠،٣): ق(س) = $\frac{٤}{\text{س}+١}$ ، وهو متصل إلا عندما س=-١ ∉ [٠،٣) ← ق متصل على [٠،٣)

نقاط التشعب:

- س = ٠:

① ق(٠) = $\frac{٤}{١}$ = ٤

② $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \left(\frac{٤}{\text{س}+١}\right) = ٤$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \left(-\text{س} + \sqrt[٣]{\text{س}}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} (-٠ + ٠) = ٠$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٠^+}$ ق(س) ≠ $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^-}$ ق(س) ← $\lim\limits_{\text{س}\to ٠}$ ق(س) غير موجودة ← ق(س) غير متصل عند س = ٠

الأطراف:

- س=-٢:

$\lim\limits_{\text{س}\to -٢^+} \left(-\text{س} + \sqrt[٣]{\text{س}}\right) = ٢ + \sqrt[٣]{-٢}$ ، ق(-٢) = $٢ + \sqrt[٣]{-٢}$

$\lim\limits_{\text{س}\to -٢^+}$ ق(س) = ق(-٢) ← ق متصل عند س = -٢

- س = ٣:

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣^-} \left(\frac{٤}{\text{س}+١}\right) = \frac{٤}{٤} = ١$ ، ق(٣) = ٦ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^-}$ ق(س) ≠ ق(٣) ← ق غير متصل عند س = ٣

📖 **مثال٥:** إذا كان ق(س) متصلاً عندما س = ٤ ، وكان ٣ق(٤)=٦ ، وكان $\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)=٤ب ، **فجد قيمة (ب) ؟**

✍ **الحل:** ٣ق(٤)=٦ ← ق(٤) = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ ، ولأن ق متصل عند س = ٤ فإن: $\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٤) ⇐ ٤ب = ٢

⇐ ب = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

📖 **مثال٦:** إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢+\sqrt{-\text{س}} & ، \ -١ \leqslant \text{س} < ٠ \\ [\text{س}]+٥\text{س}-٢ & ، \ ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق على الفترة [-١،١] ؟

✍ **الحل:** نعيد التعريف للاقتران:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢+\sqrt{-\text{س}} & ، \ -١ \leqslant \text{س} < ٠ \\ ٥\text{س}-٢ & ، \ ٠ \leqslant \text{س} < ١ \\ ٥\text{س}-١ & ، \ \text{س} = ١ \end{cases}$$

☜ **بين القواعد:**

- [-١،٠): ق(س) = س²+$\sqrt{-\text{س}}$ ، **وهو غير متصل عندما** –س < ٠ ← س > ٠

  ⇐ س ∈(٠،∞) ⊅ [-١ ، ٠) ← **ق متصل على الفترة [-١ ، ٠)**

- [٠،١) : ق(س) = ٥س-٢ ، **كثير حدود متصل على الفترة [٠ ، ١)**

☜ **الأطراف:**

- س= -١:

  $\underset{\text{س}\to -١^{+}}{\text{نهـا}}$ (س²+$\sqrt{-\text{س}}$) = ١+١ = ٢ ، ق(-١) = ٢ ، ∴ ق **متصل عند س =-١**

- س=١:

  $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$(٥س-١) = ٥-٢=٣ ، ق(١) = ٤ ، ∴ ق **غير متصل عند س =١**

☜ **نقاط التشعب:**

- س = ٠ :

① ق(٠) = ٠-٢ = -٢

② $\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$(٥س-٢) = -٢ ، $\underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$(س²+$\sqrt{-\text{س}}$) = ٠

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$\lim_{س \leftarrow \cdot^+}$ ق(س) $\neq$ $\lim_{س \leftarrow \cdot^-}$ ق(س) ← $\lim_{س \leftarrow \cdot}$ ق(س) غير موجودة ⇐ ق غير متصل عند س = ٠

📖 **مثال٧:** إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٣ &، س < ١ \\ ٢س \sqrt{س} - ١ &، س \geqslant ١ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق على مجاله؟

✍ **الحل:**

☜ **بين القواعد:**

- (−∞ ، ١): ق(س) = س^٣ ، كثير حدود متصل.
- [١ ، ∞): ق(س) = ٢س $\sqrt{س}$ − ١ ← $\sqrt{س}$ يكون متصلاً إذا كان س ⩾ ٠

⇐ س ∈[٠ ، ∞) ، والفترة [١ ، ∞) ⊂ [٠ ، ∞) ، ∴ ق متصل على هذه الفترة.

☜ **نقاط التشعب:**

- س = ١ :

① ق(١) = ٢ × ١ × ١ − ١ = ٢ − ١ = ١

② $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ (٢س $\sqrt{س}$ − ١) = ١ ، $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ (س^٣) = ١ ، $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = ١

⇐ $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ١

③ $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ق(١) = ١ ، ∴ ق متصل عند س = ١

☜ **لاحظ عدم وجود أطراف فترة.**

📖 **مثال٨:** إذا كان ق(س) = $\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ − جـ س + ١}$ ، فجد قيمة الثابت (جـ) التي تجعل الاقتران ق متصلاً دائماً على مجموعة الأعداد الحقيقية؟

✍ **الحل:** الاقتران النسبي يكون غير متصل دائماً عند جذور المقام ، ومنه سيكون متصلاً دائماً فقط في حال المقام لا يحلل (ليس له جذور) ، ويكون هذا في حالة أن يكون المميز < ٠

ب^٢ − ٤أجـ < ٠ ⇐ جـ^٢ − ٤ × ١ × ١ < ٠ ⇐ جـ^٢ − ٤ < ٠ ⇐ (جـ−٢)(جـ+٢) < ٠

⇐ جـ < ٢ ، جـ > −٢ ← −٢ < جـ < ٢

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٩:** إذا كان $ق(س) = \frac{س-٢}{|س|-٢}$ ، فجد قيم س التي تجعل ق غير متصل؟

✍ **الحل:** دائماً الاقتران النسبي يكون غير متصل عند جذور المقام أي أن:

$|س|-٢ = ٠ \longleftarrow |س| = ٢ \longleftarrow س = ٢ ، -٢$

📖 **مثال١٠:** أوجد مجموعة الأعداد التي يكون عندها الاقتران $ق(س) = \sqrt{٣-|س|}$ ، متصلاً عند كل نقطة تنتمي إليها؟

✍ **الحل:** الجذور الزوجية تكون متصلة عندما يكون $\sqrt{ق(س)} \geqslant ٠$

$\therefore \sqrt{٣-|س|} \geqslant ٠ \Leftarrow ٣-|س| \geqslant ٠ \Leftarrow |س| \leqslant ٣ \longleftarrow س \leqslant ٣ ، س \geqslant -٣ \Leftarrow -٣ \leqslant س \leqslant ٣$

📖 **مثال١١:** إذا كان $ق(س) = \begin{cases} |٢س-١٢| ، & ١ \leqslant س < ٦ \\ [\frac{١}{٢}س+٧] ، & ٦ \leqslant س < ١٠ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران على مجاله؟

✍ **الحل:** نعيد التعريف لكل من الاقترانين:

على الفترة [١ ، ٦) فإن الاقتران $|٢س-١٢| = ١٢-٢س$ ، وفي الاقتران $[\frac{١}{٢}س+٧]$ فإن مقلوب معامل س = ٢

$\therefore ق(س) = \begin{cases} ١٢-٢س ، & ١ \leqslant س < ٦ \\ ١٠ ، & ٦ \leqslant س < ٨ \\ ١١ ، & ٨ \leqslant س < ١١ \end{cases}$

☜ **بين القواعد:**

- $[١،٦)$: $ق(س) = ١٢-٢س$ ، كثير حدود متصل.
- $[٦،٨)$: $ق(س) = ١٠$ ، كثير حدود متصل.
- $[٨،١٠)$: $ق(س) = ١١$ ، كثير حدود متصل.

☜ **نقاط التشعب:**

- $س=٦$:

① $ق(٦) = ١٠$

② $\lim_{س \leftarrow ٦^+} (١٠) = ١٠$ ، $\lim_{س \leftarrow ٦^-} (١٢-٢س) = ٠$

$\lim_{س \leftarrow ٦^+} ق(س) \neq \lim_{س \leftarrow ٦^-} ق(س) \Leftarrow \lim_{س \leftarrow ٦} ق(س)$ **غير موجودة ← ق غير متصل.**

- $س = ٨$:

① $ق(٨) = ١١$

② $\lim_{س \leftarrow ٨^-} (١٠) = ١٠$ ، $\lim_{س \leftarrow ٨^+} (١١) = ١١$

$\lim_{س \leftarrow ٨^+} ق(س) \neq \lim_{س \leftarrow ٨^-} ق(س) \Leftarrow \lim_{س \leftarrow ٨} ق(س)$ **غير موجودة ← ق غير متصل.**

الأطراف:

- $س=١$:

$ق(١) = ١٠$ ، $\lim_{س \leftarrow ١^+} (١٢-٢س) = ١٠$ ، $ق(١) = \lim_{س \leftarrow ١^+} ق(س)$ ← **ق متصل عند س =١**

مثال١٢: ليكن $ق(س) = \begin{cases} أس+ب & ، س \leqslant ١ \\ ٣س & ، ١ < س < ٢ \\ بس^٢-أ & ، س \geqslant ٢ \end{cases}$

وكان ق متصلاً على ح ، جد قيمة كل من أ،ب ؟

الحل: بما أن ق متصل إذن:

$\lim_{س \leftarrow ١^+} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ١^-} ق(س) \leftarrow \lim_{س \leftarrow ١^+} (٣س) = \lim_{س \leftarrow ١^-} (أس+ب) \leftarrow ٣ = أ+ب$ ....①

وكذلك : $\lim_{س \leftarrow ٢^+} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^-} ق(س) \leftarrow \lim_{س \leftarrow ٢^+} (بس^٢-أ) = \lim_{س \leftarrow ٢^-} (٣س) \leftarrow ٤ب - أ = ٦$.....②

$٤ب - أ = ٦$.....②

$ب + أ = ٣$ ....①

$٥ب = ٩ \leftarrow \boxed{ب = \frac{٩}{٥}}$

ومن المعادلة ① $\Leftarrow ٣ = أ + \frac{٩}{٥} \leftarrow \boxed{أ = \frac{٦}{٥}}$

مثال١٣: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢-٢س+١}{س-١} & ، ٠ \leqslant س < ٣ \\ \frac{س^٣-١}{س^٢-٤} & ، ٣ \leqslant س \leqslant ٦ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال ق على مجاله؟

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

✍ **الحل:**

☜ **بين القواعد:**

- **[٠،٣) : ق(س) = $\frac{س^٢ - ٢س + ١}{س - ١}$ ، س − ١ = ٠ ← س = ١ ∈ [٠،٣) ، إذن النقطة س = ١ تشكل نقطة عدم اتصال ومنه فإن الاقتران غير متصل على الفترة [٠،٣)**

- **[٣،٦]: ق(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٤}$ ، س^٢ − ٤ = ٠ ← س = ±٢ ∉ [٣،٦] ، ومنه فإن الاقتران متصل على الفترة [٣،٦]**

☜ **الأطراف:**

- **س = ٠:**

$\lim_{س \to ٠^+} \left(\frac{س^٢ - ٢س + ١}{س - ١}\right) = -١$ ، ق(٠) = −١ ، ق(٠) = $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) ← **ق متصل عند س = ٠**

- **س = ٦:**

$\lim_{س \to ٦^-} \left(\frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٤}\right) = \frac{٢١٥}{١٢}$ ، ق(٦) = $\frac{٢١٥}{١٢}$ ، ق(٦) = $\lim_{س \to ٦^-}$ ق(س) ← **ق متصل عند س = ٦**

☜ **نقاط التشعب:**

- **س = ٣:**

① ق(٣) = $\frac{٢٦}{٥}$

② $\lim_{س \to ٣^-} \left(\frac{س^٢ - ٢س + ١}{س - ١}\right) = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $\lim_{س \to ٣^+} \left(\frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٤}\right) = \frac{٢٦}{٥}$

$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) ← $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) **غير موجودة ← ق غير متصل عند س = ٣**

📖 **مثال١٤:** إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} ظتا(\frac{س}{٢}) ، & ٠ \leqslant س < \frac{\pi}{٣} \\ ظا س ، & \frac{\pi}{٣} \leqslant س \leqslant \frac{٣\pi}{٤} \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق على مجاله؟

✍ **الحل:**

☜ **بين القواعد:**

- $[\cdot،\frac{\pi}{٣})$: ق(س) = ظتا$(\frac{س}{٢})$ = $\frac{جتا\frac{س}{٢}}{جا\frac{س}{٢}}$ ، جا $\frac{س}{٢}$ = ٠ ⟵ $\frac{س}{٢}$ = ٠ ، π ، ٢π ، ...

لكن صفر ∋ $[\cdot،\frac{\pi}{٣})$ ⟵ ق غير متصل على الفترة $[\cdot،\frac{\pi}{٣})$

- $[\frac{\pi}{٣}،\frac{٣\pi}{٤}]$: ق(س) = ظا س = $\frac{جا س}{جتا س}$ ، جتاس = ٠ ⟵ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ...

لكن $\frac{\pi}{٢}$ ∋ $[\frac{\pi}{٣}،\frac{٣\pi}{٤}]$ ⟵ ق غير متصل على الفترة $[\frac{\pi}{٣}،\frac{٣\pi}{٤}]$

☜ **الأطراف:**

- س = ٠:

$\lim_{س \to ٠^+}$ ظتا$(\frac{س}{٢})$ ⟵ ∞ ⟸ **ق غير متصل عند س = ٠**

- س = $\frac{٣\pi}{٤}$:

$\lim_{س \to \frac{٣\pi}{٤}^-}$ (ظا س) = $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}^-}$ (– ظا س) = –١ ، ق$(\frac{٣\pi}{٤})$ = –١

∴ **ق متصل عند س** = $\frac{٣\pi}{٤}$

☜ **نقاط التشعب:**

- س = $\frac{\pi}{٣}$:

① ق$(\frac{\pi}{٣})$ = $\sqrt{٣}$

② $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}^+}$ (ظا س) = $\sqrt{٣}$ ، $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}^-}$ (ظتا$(\frac{س}{٢})$) = $\sqrt{٣}$

③ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}}$ ق(س) = ق$(\frac{\pi}{٣})$

∴ **ق متصل عند س** = $\frac{\pi}{٣}$

📖 **مثال١٥: إذا كان**

ق(س) = س٢+٦س ، هـ(س) = $\begin{cases} ٥ - س^٢ ، & س \leqslant ١ \\ ٢س+٢ ، & س > ١ \end{cases}$

بين أن $(ق \times هـ)_س$ متصلاً عندما س = ١ ؟

✍ **الحل:**

☜ **الطريقة الأولى (اختبار النظرية):**

$ع(س) = س^٢+٦س$ ، وهو كثير حدود متصل عندما س = ١

$هـ(١) = ٥ - ١ = ٤$

$\lim_{س \leftarrow ١^+}(٢س+٢) = ٢+٢ = ٤$ ، $\lim_{س \leftarrow ١^-}(٥-س^٢) = ٥ - ١ = ٤$

$\lim_{س \leftarrow ١^+}هـ(س) = \lim_{س \leftarrow ١^-}هـ(س) \leftarrow \lim_{س \leftarrow ١}هـ(س) = ٤ = هـ(١)$

$\therefore$ هـ(س) متصل عندما س =١

وحسب النظرية فإن $(ع \times هـ)_{س}$ متصلاً أيضاً.

☜ **الطريقة الثانية: نضرب ع(س) × هـ(س) ونبحث الاتصال (حاول ذلك).**

📖 **مثال١٦: إذا كان $ع(س)=(س-٢)^٣$ ، $هـ(س)= [س+١]$ ، فابحث في اتصال $(ع \times هـ)_{س}$ عندما س = ١ ؟**

✍ **الحل: نعيد التعريف للاقتران هـ(س) حيث طول الدرجة فيه تساوي ١:**

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢ & ، ١ \leqslant س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \leqslant س < ٣ \end{cases}$$

ع(س) كثير حدود متصل عند س=٢ ، لكن هـ(س) غير متصل عند س = ٢ ، إذن يفشل اختبار النظرية:

$$(ع \times هـ) = م(س) = \begin{cases} ٢(س-٢)^٣ & ، ١ \leqslant س < ٢ \\ ٣(س-٢)^٣ & ، ٢ \leqslant س < ٣ \end{cases}$$

① $م(٢) = ٣ \times ٠ = ٠$

② $\lim_{س \leftarrow ٢^+}(٣(س-٢)^٣) = ٠ = \lim_{س \leftarrow ٢^-}(٣(س-٢)^٣) \leftarrow \lim_{س \leftarrow ٢}م(س) = ٠$

③ $\lim_{س \leftarrow ٢}م(س) = م(٢)$

$\therefore$ $م(س) = (ع \times هـ)_{س}$ متصل عند س = ٢

الوحدة الثانية : حساب التفاضل

الدرس الأول: متوسط التغير

➢ **تعريف(مقدار التغير):** إذا تغيرت الكمية (س) من ($س_١$) إلى ($س_٢$) فإن مقدار التغير بين هاتين الكميتين يُرمز إليه بالرمز Δ س = $س_٢$ − $س_١$.

☜ **ملاحظة:** مقدار التغير نوعان:

① مقدار التغير بين العناصر (س): Δ س = $س_٢$ − $س_١$.

② مقدار التغير بين صور العناصر (مقدار التغير في الاقتران) : Δ ص = $ص_٢$ − $ص_١$

= ق($س_٢$) − ق($س_١$)

📖 **مثال:** إذا تغيرت درجة الحرارة من (٢٠) نهاراً إلى (ـ ١٥) ليلاً فإن مقدار التغير بين درجتي الحرارة يساوي : ـ١٥ − ٢٠ = ـ ٣٥

📖 **مثال٢:** إذا كان ق(س) = ٢س^٢−٣ ، وتغيرت س من ٢ إلى −٢ ، فجد:

١. مقدار التغير السيني.
٢. مقدار التغير الصادي (مقدار التغير في الاقتران).

✍ **الحل:**

١) Δ س = $س_٢$ − $س_١$ = −٢ − ٢ = −٤

٢) Δ ص = $ص_٢$ − $ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) = ق(−٢) − ق(٢) = ٥ − ٥ = ٠

📖 **مثال٣:** إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س)=أس^٢ يساوي ١٠٠، فجد قيمة (أ) إذا تغيرت س من ٢ إلى ٣؟

✍ **الحل:** Δ ص = $ص_٢$ − $ص_١$ = ١٠٠

⇐ ق($س_٢$) − ق($س_١$) = ١٠٠

⇐ ق(٣) − ق(٢) = ١٠٠

⇐ ٩أ − ٤أ = ١٠٠ ⇐ ٥أ = ١٠٠ ⇐ أ = ٢٠

📖 **مثال٤:** مربع ، تغير طول ضلعه من ٢سم إلى ٤سم ، جد مقدار التغير في مساحته؟

✍ **الحل:** مساحة المربع = س^٢ ⟵ ق(س) = س^٢

∴ Δ ص = $ص_٢$ − $ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) = ق(٤) − ق(٢) = ١٦ − ٤ = ١٢سم^٢

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

➢ تعريف(<u>متوسط التغير</u>): إذا تغيرت س من س ١ إلى س ٢ وتغيرت ص من ص ١ إلى ص ٢ فإن متوسط التغير

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ =ميل المماس الذي يمر بالنقطتين(س١،ص١)،(س٢،ص٢)

📖 **مثال١:** إذا كان ق(س) = س^٢+٥س+٧ ، وكانت س ١ = Δ س = س ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) يساوي ١٧ ، فجد قيمة س؟

✍ **الحل:** Δ س = س ٢ − س ١ ⟵ س ٢ = Δ س + س ١ = س + س = ٢س

∴ س ١ = س ، س ٢ = ٢س

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق(٢س)} - \text{ق(س)}}{\text{٢س} - \text{س}} = ١٧$

$\Leftarrow \frac{\text{٤س}^٢ + \text{١٠س} + ٧ - \text{س}^٢ - \text{٥س} - ٧}{\text{س}} = ١٧$

$\Leftarrow \frac{\text{س(٣س+٥)}}{\text{س}} = ١٧ \Leftarrow \text{٣س} + ٥ = ١٧ \Leftarrow \text{٣س} = ١٢ \Leftarrow \text{س} = ٤$

📖 **مثال٢:** إذا كان ق(س) = جتا٢س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ، فجد متوسط التغير للاقتران؟

✍ **الحل:** $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق}\left(\frac{\pi}{٤}\right) - \text{ق(٠)}}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٠ - ١}{\frac{\pi}{٤}} = -\frac{٤}{\pi}$

📖 **مثال٣:** إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) على الفترة [−٢ ، ٢] يساوي ٦ ، أوجد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ق(س)×س^٢ في الفترة [−٢ ، ٢] ؟

✍ **الحل:**

$\frac{\Delta \text{ق}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(٢)} - \text{ق(−٢)}}{٤} = ٦ \Leftarrow \text{ق(٢)} - \text{ق(−٢)} = ٢٤$

$\frac{\Delta \text{هـ}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ(٢)} - \text{هـ(−٢)}}{٤} = \frac{\text{٤ ق(٢)} - \text{٤ ق(−٢)}}{٤} = \text{ق(٢)} - \text{ق(−٢)} = ٢٤$

📖 **مثال٤:** إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{٢س} + ١}$ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) على الفترة [٠،ب] يساوي $\frac{١}{٢}$ ، فجد قيمة الثابت ب ؟

✍ **الحل:** $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(ب)} - \text{ق(٠)}}{\text{ب}} = \frac{\sqrt{\text{٢ب} + ١} - ١}{\text{ب}} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٢\sqrt{\text{٢ب} + ١} - ٢ = \text{ب}$

$\Leftarrow ٢\sqrt{\text{٢ب} + ١} = \text{ب} + ٢ \Leftarrow \left(٢\sqrt{\text{٢ب} + ١}\right)^٢ = (\text{ب} + ٢)^٢ \Leftarrow ٤(\text{٢ب} + ١) = \text{ب}^٢ + \text{٤ب} + ٤$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$\Leftarrow$ ٨ب + ٤ = ب^{٢}+٤ب+٤ $\Leftarrow$ ب^{٢}−٤ب = ٠ $\Leftarrow$ ب(ب − ٤) = ٠ $\Leftarrow$ ب = ٠ ، ٤ $\longleftarrow$ ب = ٤

مثال٥: إذا كان ق(س) = ٣هـ(س) + ٦س^{٢} ، وكان متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة [-١، ٤] يساوي ٩ ، فجد متوسط التغير للاقتران ق(س) على الفترة [-١، ٤] ؟

الحل:

☜ $\frac{\Delta \text{هـ}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ}(٤)-\text{هـ}(-١)}{٥} = ٩ \longleftarrow \text{هـ}(٤)-\text{هـ}(-١) = ٤٥$

☜ $\frac{\Delta \text{ق}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٤)-\text{ق}(-١)}{٥} = \frac{(٣\text{هـ}(٤)+٩٦)-(٣\text{هـ}(-١)+٦)}{٥} = \frac{٣\text{هـ}(٤)-٣\text{هـ}(-١)+٩٠}{٥} = \frac{٣(\text{هـ}(٤)-\text{هـ}(-١)+٣٠)}{٥}$

$= \frac{٣(٤٥+٣٠)}{٥} = ٤٥$

مثال٦: إذا كان ق(س) = س^{٣}+م س+٧ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق يساوي ١٣ حيث س ∈[١،٦] ، فجد قيمة م ؟

الحل: $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٦)-\text{ق}(١)}{٥} = \frac{(٢١٦+٦\text{م}+٧)-(١+\text{م}+٧)}{٥} = ١٣ \longleftarrow ٢١٥+٥\text{م} = ٦٥ \longleftarrow \text{م} = -٣٠$

مثال٧: إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١،٤] يساوي ١٣ ، وكان متوسط التغير له على الفترة [٤،٦] يساوي ١٧ ، فجد متوسط التغير له في الفترة [١،٦]؟

الحل:

☜متوسط التغيرعلى الفترة [١،٤] : $\frac{\Delta \text{ق}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٤)-\text{ق}(١)}{٣} = ١٣ \Leftarrow \text{ق}(٤)-\text{ق}(١) = ٣٩$ ......(١)

☜ متوسط التغيرعلى الفترة [٤،٦] : $\frac{\Delta \text{ق}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٦)-\text{ق}(٤)}{٢} = ١٧ \Leftarrow \text{ق}(٦)-\text{ق}(٤) = ٣٤$ ......(٢)

(١) + (٢) $\Leftarrow$ ق(٦) − ق(١) = ٧٣

∴ متوسط التغير على الفترة [١،٦]: $\frac{\Delta \text{ق}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٦)-\text{ق}(١)}{٥} = \frac{٧٣}{٥}$

مثال٨: إذا كان ق(س) = ظاس ، أثبت ان متوسط التغير للاقتران ق(س) هو $\frac{\text{ظا هـ}\times\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{هـ}(١-\text{ظاس ظا هـ})}$ علماً أن س تتغير بمقدار (هـ)؟

الحل: $\frac{\Delta \text{ق}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢)-\text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢-\text{س}_١}$ ، لكن س تتغير بمقدار هـ $\Leftarrow \Delta$ س = هـ = س$_٢$ − س$_١$

$\Leftarrow$ هـ = س$_٢$ − س $\Leftarrow$ س$_٢$= هـ + س

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$$\therefore \frac{\text{ق}(\text{س}_٢)-\text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢-\text{س}_١} = \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{س}+\text{هـ}-\text{س}} = \frac{\text{ظا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ظا س}}{\text{هـ}} = \frac{\frac{\text{ظا س}+\text{ظا هـ}}{١-\text{ظا س ظا هـ}}-\text{ظا س}}{\text{هـ}}$$

$$\Leftarrow \frac{(\text{ظا س}+\text{ظا هـ})-\text{ظا س}(١-\text{ظا س ظا هـ})}{\text{هـ}(١-\text{ظا س ظا هـ})} = \frac{\text{ظا س}+\text{ظا هـ}-\text{ظا س}+\text{ظا}^٢\text{س ظا هـ}}{\text{هـ}(١-\text{ظا س ظا هـ})}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{ظا هـ}(١+\text{ظا}^٢\text{س})}{\text{هـ}(١-\text{ظا س ظا هـ})} = \frac{\text{ظا هـ}\times\text{قا}^٢\text{س}}{\text{هـ}(١-\text{ظا س ظا هـ})}$$

مثال٩: إذا كان ق(س) = $\text{س}^٢-١$ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [−٣،س] يساوي $-\frac{١}{٤}$ ، فجد قيمة س؟

الحل: $\frac{\Delta \text{ق}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(-٣)}{\text{س}+٣} = \frac{\text{س}^٢-١-٨}{\text{س}+٣} = \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٣)}{(\text{س}+٣)} = -\frac{١}{٤} \Leftarrow ٤\text{س}-١٢ = -١ \Leftarrow ٤\text{س} = ١١ \longleftarrow \text{س} = \frac{١١}{٤}$

مثال١٠: إذا كان ق(س)=٢س−٣ ، فجد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين (٢،ق(٢)) ، (١،ق(١))؟

الحل: ميل القاطع = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢-\text{ص}_١}{\text{س}_٢-\text{س}_١} = \frac{\text{ق}(١)-\text{ق}(٢)}{٣} = \frac{-١-١}{٣} = -\frac{٢}{٣}$

مثال١١: إذا كان ق(س)= $\begin{cases} [\text{س}+٣٫٠] & ، \text{س} > ٠ \\ |\text{س}-٢| & ، \text{س} \leq ٠ \end{cases}$

فجد $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ ، س ∈ [−٢،٥] ؟

الحل: $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢)-\text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢-\text{س}_١} = \frac{\text{ق}(٥)-\text{ق}(-٢)}{٧} = \frac{٥-٤}{٧} = \frac{١}{٧}$

الدرس الثاني: المشتقة الأولى

➢ **تعريف: المشتقة الأولى هي نهاية متوسط التغير عندما تكون Δ س $\leftarrow$ ٠ حيث:**

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

، ويعرف هذا القانون بـ "التعريف العام للمشتقة" ويرمز إليها بالرموز الآتية: ق'(س) ، ص' ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$

☜ **التعريف العام للمشتقة الأولى:** $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

☜ **التعريف العام للمشتقة الثانية:** $\text{ق}''(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}'(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}}$

وهكذا.....

☜ **التعريف العام للمشتقة عند نقطة معلومة:** $\text{ق}'(\text{أ}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{س}-\text{أ}}$

📖 **مثال: إذا كان ق(س) = ٢س^{٢}+١ ، فجد ق'(س) باستخدام التعريف العام للمشتقة؟**

✍ **الحل:** $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(٢(\text{س}+\text{هـ})^{٢}+١)-\left(٢\text{س}^{٢}+١\right)}{\text{هـ}}$

$\Leftarrow \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٢\text{س}^{٢}+٤\text{س}\,\text{هـ}+٢\text{هـ}^{٢}+١-٢\text{س}^{٢}-١}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٤\text{س}\,\text{هـ}+٢\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٤\text{س}+٢\text{هـ})}{\text{هـ}} = ٤\text{س}$

📖 **مثال٢: إذا كان ق(س) = س^{٣}−٢س^{٢}+٣ ، فجد ق'(−٢) باستخدام التعريف العام للمشتقة؟**

✍ **الحل:** $\text{ق}'(-٢) = \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(-٢)}{\text{س}+٢} = \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{٣}-٢\text{س}^{٢}+٣-١٣}{\text{س}+٢} = \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{٣}-٢\text{س}^{٢}-١٦}{\text{س}+٢}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{(\text{س}+٢)\left(\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٨\right)}{\text{س}+٢} = ٢٠$

📖 **مثال٣: إذا كان ق(س)=(س − أ) هـ(س) ، مستخدماً التعريف العام للمشتقة ، أثبت أن ق'(أ)= هـ (أ)**

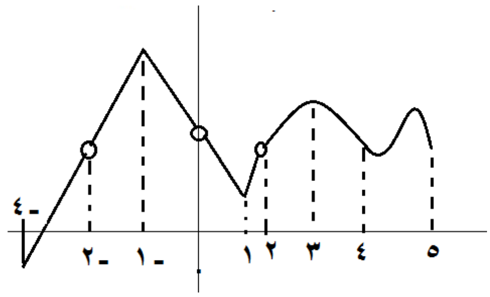
✍ **الحل:** $\text{ق}'(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{س}-\text{أ}} = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{(\text{س}-\text{أ})\times \text{هـ}(\text{س})-٠}{\text{س}-\text{أ}} = \text{هـ}(\text{أ})$

تأليف الأستاذ: أحمد فهمي
0779 909 516

❶ ملاحظة هامة: المشتقة غير موجودة عند:

١. الرؤوس المدببة (أصفار اقتران القيمة المطلقة (بشرط أن يكون الاقتران خطياً) ، وفي الرسم البياني).
٢. نقاط الانفصال (أصفار المقام في الاقتران النسبي ،والقيم التي تجعل ما تحت الجذر الزوجي سالباً ، الدوائر المفرغة في الرسم البياني).
٣. أطراف الفترة المغلقة.

📖 **مثال٥:** بناءً على الشكل التالي ، اكتب قيم س التي تجعل المشتقة غير موجودة:



✍ **الحل:** س = {-٤ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٥}

📖 **مثال٦:** باستخدام تعريف المشتقة ، أوجد قَ(س) للاقتران ق(س) = ٣س^{٢}+٧س-١ ؟

✍ **الحل:** $قَ(س) = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ} = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٣(س+هـ)^{٢}+٧(س+هـ)-١)-(٣س^{٢}+٧س-١)}{هـ}$

$\Leftarrow \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{٣س^{٢}+٦سهـ+٣هـ^{٢}+٧س+٧هـ-١-٣س^{٢}-٧س+١}{هـ} = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٦س+٣هـ+٧)}{هـ} = ٦س+٧$

📖 **مثال٧:** إذا كان ق(س) = ٢جتا٥س ، فجد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) باستخدام التعريف العام للمشتقة؟

✍ **الحل:** $قَ(س) = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ} = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{٢جتا٥(س+هـ)-٢جتا٥س}{هـ}$

$\Leftarrow ٢\times\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{جتا(٥س+٥هـ)-جتا٥س}{هـ} = ٢\times\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{-٢جا\left(\frac{٥س+٥س+٥هـ}{٢}\right)\times جا\left(\frac{٥هـ}{٢}\right)}{هـ}$

$\Leftarrow -٤\times\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{جا\left(\frac{١٠س+٥هـ}{٢}\right)\times\frac{جا\left(\frac{٥هـ}{٢}\right)}{\frac{٥هـ}{٢}}\times\frac{٥هـ}{٢}}{هـ} = -٢\times جا٥س \times ٥ = -١٠جا٥س$

📖 **مثال٨:** إذا كان $ق(س) = \frac{-٢س}{س^{٢}+١}$ ، فجد قَ(س) باستخدام التعريف العام للمشتقة؟

✍ **الحل:** $قَ(س) = \lim\limits_{ع \to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س} = \lim\limits_{ع \to س} \frac{\frac{-٢ع}{ع^{٢}+١}-\frac{-٢س}{س^{٢}+١}}{ع-س}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$$\Leftarrow \lim_{ع \to س} \frac{-٢ع(س^٢+١)+٢س(ع^٢+١)}{(س^٢+١)(ع^٢+١)(س-ع)} = \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع^٢س+س-عس^٢-ع)}{(س^٢+١)(ع^٢+١)(س-ع)}$$

$$\Leftarrow \lim_{ع \to س} \frac{٢(عس(ع-س)+س-ع)}{(س^٢+١)(ع^٢+١)(س-ع)} = \lim_{ع \to س} \frac{٢(س-ع)(-عس+١)}{(س^٢+١)(ع^٢+١)(س-ع)} = \frac{٢-٢س^٢}{(س^٢+١)^٢}$$

📖 **مثال٩:** ليكن ق(س)=|٥س−١٠| ، أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ باستخدام التعريف العام للمشتقة؟

✍ **الحل:** ٥س−١٠ = ٠ ⇐ ٥س = ١٠ ⇐ س = ٢

$$ق(س) = \begin{cases} ٥س-١٠ ، & س \geqslant ٢ \\ ١٠-٥س ، & س < ٢ \end{cases}$$

☜ ق(س) = ٥س − ١٠ ، س ⩾ ٢ :

$$قَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٥(س+هـ)-١٠)-(٥س-١٠)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥س+٥هـ-١٠-٥س+١٠}{هـ}$$

$$\Leftarrow \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥هـ}{هـ} = ٥$$

☜ ق(س) = ١٠ − ٥س ، س < ٢:

$$قَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(١٠-٥(س+هـ))-(١٠-٥س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١٠-٥س-٥هـ-١٠+٥س}{هـ}$$

$$\Leftarrow \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٥هـ}{هـ} = -٥$$

$$\therefore قَ(س) = \begin{cases} ٥ ، & س > ٢ \\ \text{غير موجودة} ، & س = ٢ \\ -٥ ، & س < ٢ \end{cases}$$

📖 **مثال١٠:** مستطيل طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه ، أوجد معدل تغير مساحته بالنسبة إلى طوله باستخدام المبادئ الأولية؟

✍ **الحل:** ع = ٣س ، لكن مساحة المستطيل = ع × س = ٣س × س = ٣س²

∴ ق(س) = ٣س²

$$\lim_{ع \to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س} = \lim_{ع \to س} \frac{٣ع^٢-٣س^٢}{ع-س} = \lim_{ع \to س} \frac{٣(ع-س)(ع+س)}{ع-س} = ٣(٢س) = ٦س$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال١١:** أثبت أن $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+م هـ)-ق(س)}{ب هـ} = \frac{م}{ب} قَ(س)$

✍ **الحل:** ع = م هـ ⇐ هـ = $\frac{ع}{م}$ ، هـ ⟵ ٠ ⇐ ع ⟵ ٠

$\therefore \lim_{ع \to 0} \frac{ق(س+ع)-ق(س)}{ب \times \frac{ع}{م}} = \frac{م}{ب} \lim_{ع \to 0} \frac{ق(س+ع)-ق(س)}{ع} = \frac{م}{ب} قَ(س)$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس الثالث: الاتصال والاشتقاق

➢ **نظرية:** إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند النقطة س = ﻫ فإن ق(س) متصلاً عند النقطة س = ﻫ.

➢ **نظرية:** إذا كان ق(س) غير متصل عند النقطة س = ﻫ فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند النقطة س = ﻫ.

✪ **نتائج:**

١) كل قابل للاشتقاق فهو متصل.

٢) كل متصل ليس بالضرورة أن يكون قابلاً للاشتقاق.

٣) كل غير متصل غير قابل للاشتقاق.

مثال: إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} س^{٢}+٣ &، س \neq ١ \\ ٤ &، س = ١ \end{cases}$$

فابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق(س) عند النقطة س = ﻫ ؟

الحل: دائماً نبحث الاتصال أولاً:

$\lim\limits_{س \to ١}(س^{٢}+٣) = ٤$ ، ق(١) = ٤ ⇐ ق(س) متصلاً عند س = ١

لاحظ أن $\bar{ق}(١)^{+} = ٢\times١ = ٢ = \bar{ق}(١)^{-} \longrightarrow \bar{ق}(١) = ٢$

$$\therefore \bar{ق}(س) = \begin{cases} ٢س &، س \neq ١ \\ ٢ &، س = ١ \end{cases}$$

مثال٢: ابحث في قابلية الاشتقاق عند س = ٢ للاقتران :

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢}-٣س+١ &، س \neq ٢ \\ \frac{١}{٢} &، س = ٢ \end{cases}$$

الحل:

نبحث الاتصال:

ق(٢) = $\frac{١}{٢}$ ، $\lim\limits_{س \to ٢}(٢س^{٢}-٣س+١) = ٣$ ⇐ ق(س) غير متصل عند س = ٢ ⟵ $\bar{ق}(٢)$ غير موجودة

$$\therefore \bar{ق}(س) = \begin{cases} ٤س-٣ &، س \neq ٢ \\ \text{غير موجودة} &، س = ٢ \end{cases}$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٣:** إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} |\text{٦س}-\text{١٢}| \text{ ، } & \text{س} < \text{٢} \\ \text{٢س} \text{ ، } & \text{س} \geq \text{٢} \end{cases}$$

فابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق(س) عند س = ٢ ؟

✍ **الحل:** **نعيد التعريف أولاً ونبحث الاتصال:**

٦س−١٢ = ٠ ⟵ ٦س = ١٢ ⟵ س = ٢ ، ∴ |٦س−١٢| = ١٢−٦س ، س < ٢

$$\therefore \text{ق(س)} = \begin{cases} \text{١٢}-\text{٦س} \text{ ، } & \text{س} < \text{٢} \\ \text{٢س} \text{ ، } & \text{س} \geq \text{٢} \end{cases}$$

① ق(٢) = ٤

② $\lim_{\text{س} \to \text{٢}^+} (\text{٢س}) = \text{٤}$ ، $\lim_{\text{س} \to \text{٢}^-} (\text{١٢}-\text{٦س}) = \text{٠}$ ، $\lim_{\text{س} \to \text{٢}^+} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س} \to \text{٢}^-} \text{ق(س)} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to \text{٢}} \text{ق(س)}$ غ.م

⇐ **ق(س) غير متصل عند س = ٢ ⟵ قَ(٢) غير موجودة.**

$$\therefore \text{قَ(س)} = \begin{cases} -\text{٦} \text{ ، } & \text{س} < \text{٢} \\ \text{غ . م} \text{ ، } & \text{س} = \text{٢} \\ \text{٢} \text{ ، } & \text{س} > \text{٢} \end{cases}$$

📖 **مثال٤:** إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^{\text{٢}}+\text{٦س} \text{ ، } & \text{س} \leq \text{١} \\ \text{٤س}^{\text{٢}}+\text{س} \text{ ، } & \text{س} > \text{١} \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق عند النقطة س = ١ ؟

✍ **الحل:**

① ق(١) = ١+٦ = ٧

② $\lim_{\text{س} \to \text{١}^+} (\text{٤س}^{\text{٢}}+\text{س}) = \text{٤}+\text{١} = \text{٥}$ ، $\lim_{\text{س} \to \text{١}^-} (\text{س}^{\text{٢}}+\text{٦س}) = \text{١}+\text{٦} = \text{٧}$

$\lim_{\text{س} \to \text{١}^+} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س} \to \text{١}^-} \text{ق(س)} \longleftarrow \lim_{\text{س} \to \text{١}} \text{ق(س)}$ غ . م ⇐ **ق(س) غير متصل عند س = ١**

$$\therefore \text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢س}+\text{٦} \text{ ، } & \text{س} < \text{٢} \\ \text{غ . م} \text{ ، } & \text{س} = \text{٢} \\ \text{٨س}+\text{١} \text{ ، } & \text{س} > \text{٢} \end{cases}$$

📖 **مثال٥:** إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} [\text{س}+\text{١}] \text{ ، } & \text{١} \leq \text{س} < \text{٢} \\ |\text{س}-\text{٣}| \text{ ، } & \text{٢} \leq \text{س} \leq \text{٤} \end{cases}$$

فابحث قابلية الاشتقاق على الفترة [١،٤] ؟

الحل: نعد تعريف الاقتران ور(س) :

$$ور(س) = \begin{cases} ٢ &، ١ \leqslant س < ٢ \\ ٣ - س &، ٢ \leqslant س < ٣ \\ س - ٣ &، ٣ \leqslant س \leqslant ٤ \end{cases}$$

بين القواعد:

- $[١ ، ٢)$: ور(س) = ٢ **كثير حدود متصل.**
- $[٢ ، ٣)$: ور(س) = ٣ − س **كثير حدود متصل.**
- $[٣ ، ٤]$: ور(س) = س − ٣ **كثير حدود متصل.**

نقاط التشعب:

- س = ٢ :

① ور(٢) = ١

② $\lim_{س \to ٢^+}$ (٣ − س) = ١ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ (٢) = ٢

ور غير متصل عند س = ٢ ← ور غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

- س = ٣:

① ور(٣) = ٠

② $\lim_{س \to ٣^+}$ ور(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ور(س) = ٠

③ $\lim_{س \to ٣}$ ور(س) = ور(٣)

∴ ور(س) **متصل**

الأطراف:

- س = ١:

$\lim_{س \to ١^+}$ (٢) = ٢ ، ور(١) = ٢ ← **ور متصل.**

- س = ٤:

$\lim_{س \to ٤^-}$ (س − ٣) = ١ ، ور(٤) = ١ ← **ور متصل.**

$$ور'(س) = \begin{cases} ٠ &، ١ < س < ٢ \\ -١ &، ٢ < س < ٣ \\ ١ &، ٣ < س < ٤ \\ غ . م &، س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \end{cases}$$

ور′(٣)$^+$ ≠ ور′(٣)$^-$ ← ور′(٣) غ.م

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس الرابع: قواعد الاشتقاق

قاعدة (١): إذا كان ق(س) = جـ ، جـ ∈ ح فإن قَ(س) = ٠ **(مشتقة الثابت تساوي صفر).**

مثال: أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتي:

① ص = −٥

② ص = ١٠

③ ق(س) = ٠

الحل:

① $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

② $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

③ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

قاعدة(٢): إذا كان ق(س) = أ س^{ن} ، فإن قَ(س) = أ ن س$^{ن-١}$ ، أ ، ن ∈ ح

مثال: أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتي:

① ص = س

② ص = ٤س − ٣

③ ص = $\frac{١}{س^{-٤}}$ + س$^{-٥}$ − ٦

④ ص = ٨س^{٣} − ٩س^{٢} + ٤س + ١

⑤ ص = −٢س$^{-٢}$ − $\frac{٢}{س^{٤}}$ +٩

الحل:

① $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

② $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤

③ ص = س^{٤}+ س$^{-٥}$ − ٦ ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤س^{٣} − ٥س$^{-٦}$

④ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢٤س^{٢} − ١٨س + ٤

⑤ ص = −٢س$^{-٢}$ − ٢س$^{-٤}$ + ٩ ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤س$^{-٣}$ + ٨س$^{-٥}$

قاعدة(٣): إذا كان ق(س) = $\sqrt{م(س)}$ فإن قَ(س) = $\frac{مَ}{٢\sqrt{م}}$ = $\frac{\text{مشتقة داخل ما الجذر}}{\text{٢×الجذر نفسه}}$

هذه القاعدة تستخدم فقط مع الجذر التربيعي وأما بقية الجذور نكتبها على الصورة الأسية ونجد المشتقة ،

حيث أن: $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

📖 **مثال:** أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتي:

① ص = $\sqrt{س}$

② ص = $\sqrt{س^{٢} - ٣س + ١}$

③ ص = $\sqrt[٥]{س^{٧}} + ١٠س - ٢$

④ ص = $\sqrt[-٤]{س^{-٣}} + \frac{٧}{س^{-٣}}$

⑤ ص = $\sqrt[٤]{س}\,[\,س - ١١س^{٢}\,]$

✍ **الحل:**

① $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

② $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س - ٣}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س + ١}}$

③ ص = $س^{\frac{٧}{٥}} + ١٠س - ٢$ ⇐ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٧}{٥} \times س^{\frac{٢}{٥}} + ١٠$

④ ص = $س^{\frac{-٣}{-٤}} + ٧س^{٣} = س^{\frac{٣}{٤}} + ٧س^{٣}$ ⇐ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣}{٤} \times س^{\frac{-١}{٤}} + ٢١س^{٢}$

⑤ ص = $س^{\frac{١}{٤}}\,(س - ١١س^{٢}) = س^{\frac{٥}{٤}} - ١١س^{\frac{٩}{٤}}$ ⇐ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥}{٤} \times س^{\frac{١}{٤}} - \frac{٩٩}{٤} \times س^{\frac{٥}{٤}}$

قاعدة(٤): إذا كان:

١. ص = **جا**(م(س)) ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س) × **جتا**(م(س))
٢. ص = **جتا**(م(س)) ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س) × − **جا**(م(س))
٣. ص = **ظا**(م(س)) ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س) × **قا**^{٢}(م(س))
٤. ص = **ظتا**(م(س)) ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س) × − **قتا**^{٢}(م(س))
٥. ص = **قا**(م(س)) ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س) × **قا**(م(س)) **ظا**(م(س))
٦. ص = **قتا**(م(س)) ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س) × − **ظتا**(م(س)) **قتا**(م(س))

📖 **مثال:** أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتي:

① ص = جا٣س

② ص = ٥ ٣قا($٦س^{٢} - ٣$)+٤س− ظتا٧س

③ ص = ١ − جتا($\sqrt{٢س}$) + قتا(١٠+١٢س)

④ ص = ٦ظا(جا٥س)

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

⑤ ص = ٣٣$س^{٢}$ − ١١س + ٨ جتا ($\frac{١}{س^{-٢}}$)

✍ **الحل:**

① $\frac{دص}{دس}$ = ٣ جتا٣س

② $\frac{دص}{دس}$ = ٣٥ × ١٢س × قا (٦$س^{٢}$−٣) ظا (٦$س^{٢}$−٣) + ٤ + ٧ $قتا^{٢}$ ٧س

③ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ جا($2\sqrt{س}$) −٢ قتا (١٠+١٢س) × ظتا (١٠+١٢س)

④ $\frac{دص}{دس}$ = ٦ × ٥ × جتا٥س × $قا^{٢}$(جا ٥س) = ٣٠جتا٥س $قا^{٢}$(جا ٥س)

⑤ ص = ٣٣$س^{٢}$ − ١١س + ٨ جتا $س^{٢}$ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٦٦س − ١١ − ١٦س × جا $س^{٢}$

قاعدة(٥): إذا كان ص = $(م(س))^{ن}$ ⟵ $\frac{دص}{دس}$ = ن×م َ(س) × $(م(س))^{ن - ١}$

📖 **مثال:** أوجد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي:

① ص = $(جا ٦س)^{٤}$

② ص = $(٨س^{٢}−٩س^{٣}+٣س−١١)^{١٠}$

③ ص = $ظتا^{٧}$(١ − $س^{٢}$)

④ ص = ٣ − $قا^{٣}$س

⑤ ص = $(\sqrt{س} + جا ٣س)^{٥}$

✍ **الحل:**

① $\frac{دص}{دس}$ = ٤×٦×جتا٦س × $(جا٦س)^{٣}$

② $\frac{دص}{دس}$ = ١٠(١٦س−٢٧$س^{٢}$+٣) $(٨س^{٢}−٩س^{٣}+٣س−١١)^{٩}$

③ $\frac{دص}{دس}$ = ٧×(−٢س)×− $قتا^{٢}$(١ − $س^{٢}$) × $ظتا^{٦}$(١ − $س^{٢}$)

④ $\frac{دص}{دس}$ = −٣ × قا س ظا س × $قا^{٢}$س

⑤ $\frac{دص}{دس}$ = ٥($\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ + ٣ جتا٣س) $(\sqrt{س} + جا ٣س)^{٤}$

قاعدة(٦): إذا كان ص = هـ (س) × م (س) ⟵ $\frac{دص}{دس}$ = هـ(س) × م َ(س) + م(س) × هـ َ(س)

= الأول × م. الثاني + الثاني × م. الأول

📖 **مثال:** أوجد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي:

① ص = س جا س

② ص = (س− ٩) جتا $س^{٢}$

③ ص = $\sqrt[3]{س}$ (١ − ٢ قا ٦س)

④ ص = ٤س ($\sqrt{س}$ − ٦)

⑤ $\text{ص} = \text{جا س قتا ٨س}$

✍ الحل:

① $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \times \text{جتاس} + \text{جاس}$

② $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س}-٩) \times -٢\text{س جاس}^{٢} + \text{جتاس}^{٢}$

③ $\text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{٣}}(١-٢\ \text{قا٦س}) \longleftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{\frac{١}{٣}}(-٢ \times ٦\ \text{قا٦س ظا٦س}) + (١-٢\ \text{قا٦س}) \times \frac{١}{٣} \times \text{س}^{\frac{-٢}{٣}}$

④ $\text{ص} = ٤\text{س}(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٦) = ٤\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٢٤\text{س} \longleftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ \times \frac{٣}{٢} \times \text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢٤ = ٦\sqrt{\text{س}} - ٢٤$

⑤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جاس} \times -٨\ \text{قتا٨س ظتا٨س} + \text{قتا٨س} \times \text{جتاس}$

قاعدة(٧): إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{ك(س)}}{\text{م(س)}} \longleftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{م(س)} \times \text{ك}'\text{(س)} - \text{ك(س)} \times \text{م}'\text{(س)}}{(\text{م(س)})^{٢}}$

$= \frac{\text{المقام} \times \text{م. البسط} - \text{البسط} \times \text{م. المقام}}{\text{مربع المقام}}$

📖 **مثال:** أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل مما يأتي:

① $\text{ص} = \frac{\text{٢ جا س}}{١-\text{س}}$

② $\text{ص} = \frac{٣\text{س}^{٣} - ٢\text{س}}{٨\text{س} - \text{ظا س}}$

③ $\text{ص} = \frac{\text{س}}{١+\text{س}}$

④ $\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}^{٢} - ٦}$

✍ الحل:

① $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١-\text{س})(\text{٢ جتا س}) - (\text{٢ جا س})(-١)}{(١-\text{س})^{٢}} = \frac{\text{٢ جتا س} - \text{٢ س جتا س} + \text{٢ جا س}}{(١-\text{س})^{٢}}$

② $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(٨\text{س} - \text{ظا س})(٩\text{س}^{٢} - ٢) - (٣\text{س}^{٣} - ٢\text{س})(٨ - \text{قا}^{٢}\text{س})}{(٨\text{س} - \text{ظا س})^{٢}}$

③ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١-\text{س})(١) - (\text{س})(١)}{(١+\text{س})^{٢}} = \frac{١-٢\text{س}}{(١+\text{س})^{٢}}$

④ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س}^{٢} - ٦) \times ٠ - ٣ \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} - ٦)^{٢}} = \frac{-٦\text{س}}{(\text{س}^{٢} - ٦)^{٢}}$

نتيجة: إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{م(س)}} \longleftarrow \text{ص}' = \frac{-\text{أ} \times \text{م}'\text{(س)}}{(\text{م(س)})^{٢}} = \frac{-\text{الثابت} \times \text{م. المقام}}{\text{مربع المقام}}$

📖 **مثال:** ليكن ق(س) = $\begin{cases} |\text{س}-٣| & ، \text{س} \geqslant ٣ \\ \dfrac{[\text{س}]}{\text{س}} & ، ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} & ، \text{س} \leqslant ١ \end{cases}$

فابحث قابلية الاشتقاق للاقتران ق على مجاله؟

✍ **الحل: نعيد التعريف: مقلوب معامل س هو ١ :** ٢ ، ١ ، ٠

∴ ق(س) = $\begin{cases} \text{س}-٣ & ، \text{س} \geqslant ٣ \\ \frac{١}{\text{س}} & ، ١ < \text{س} < ٢ \\ \frac{٢}{\text{س}} & ، ٢ \leqslant \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} & ، \text{س} \leqslant ١ \end{cases}$

والآن نبحث الاتصال:

☜ **بين القواعد:**

- [٣ ، ∞): ق(س) = س − ٣ ، **كثير حدود متصل.**
- (١ ، ٢): ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س = ٠ ∌ (١ ، ٢) ، ∴ ق(س) **متصل.**
- [٢ ، ٣): ق(س) = $\frac{٢}{\text{س}}$ ، س = ٠ ∌ [٢ ، ٣) ، ∴ ق(س) **متصل.**
- (− ∞ ، ١]: ق(س) = س^{٢} ، **كثير حدود متصل.**

☜ **نقاط التشعب:**

- س = ١:

① ق(١) = ١

② $\lim_{\text{س} \to ١^{+}}$ ق(س) = $\lim_{\text{س} \to ١^{-}}$ ق(س) = ١ ← $\lim_{\text{س} \to ١}$ ق(س) = ١ ⇐ ق **متصل عند س = ١**

- س = ٢:

① ق(٢) = ١

② $\lim_{\text{س} \to ٢^{+}}$ ق(س) ≠ $\lim_{\text{س} \to ٢^{-}}$ ق(س) ← ق **غير متصل عند س = ٢** ⇐ قَ(٢) **غير موجودة.**

- س = ٣:

① ق(٣) = ٠

② $\lim_{\text{س} \to ٣^{+}}$ ق(س) ≠ $\lim_{\text{س} \to ٣^{-}}$ ق(س) ← ق **غير متصل** ← قَ(٣) **غير موجودة.**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$$\therefore \bar{ق}(س) = \begin{cases} ١ & ، س > ٣ \\ \frac{-١}{س^{٢}} & ، ١ < س < ٢ \\ \frac{-٢}{س^{٢}} & ، ٢ < س < ٣ \\ ٢س & ، س < ١ \\ غ.م & ، س = ١ ، ٢ ، ٣ \end{cases}$$

$\bar{ق}(١)^{+} = -١$ ، $\bar{ق}(١)^{-} = ٢ \Leftarrow \bar{ق}(١)$ غ.م

📖 **مثال:** إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣س & ، س \neq أ \\ ٤ & ، س = أ \end{cases}$

وكان ق قابلاً للاشتقاق عند أ ، فجد قيمة أ؟

✍ **الحل:** بما أن ق قابلاً للاشتقاق عند أ إذن ق متصل عند أ

$\therefore \lim_{س \to أ} (س^{٢} + ٣س) = ق(أ) \Leftarrow أ^{٢}+٣أ=٤ \Leftarrow أ^{٢}+٣أ-٤=٠ \Leftarrow (أ-١)(أ+٤)=٠ \longrightarrow أ=١ ، -٤$

📖 **مثال:** ليكن $ق(س) = س - |٢س - ٣|$ ، **فجد** $\bar{ق}(-١)$ ؟

✍ **الحل:** نعيد التعريف: $٢س - ٣ = ٠ \longrightarrow ٢س = ٣ \longrightarrow س = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ق(س) = \begin{cases} ٣ - س & ، س > \frac{٣}{٢} \\ ٣س - ٣ & ، س \leq \frac{٣}{٢} \end{cases} \Leftarrow \bar{ق}(س) = \begin{cases} -١ & ، س > \frac{٣}{٢} \\ ٣ & ، س < \frac{٣}{٢} \end{cases} \Leftarrow \bar{ق}(-١) = ٣$

📖 **مثال:** إذا كان $ق(س) = |س-١|+|س|$ ، **فجد** $\bar{ق}(س)$ ؟

✍ **الحل:** نعيد التعريف لكلا الاقترانين: $س-١=٠ \longrightarrow س=١$ ، $س=٠$

$\therefore ق(س) = \begin{cases} ٢س-١ & ، س \geq ١ \\ ١ & ، ٠ < س < ١ \\ ١-٢س & ، س \leq ٠ \end{cases}$

س - ١		١ - س
+++++	١	-----
س		− س
+++++	٠	-----

والآن نبحث الاتصال:

☜ بين القواعد:

- $[١ ، \infty)$: $ق(س) = ٢س-١$ ، **كثير حدود متصل.**
- $(٠ ، ١)$: $ق(س) = ١$ ، **كثير حدود متصل.**
- $(-\infty ، ٠]$: $ق(س) = ١-٢س$ ، **كثير حدود متصل.**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

☜ **نقاط التشعب:**

- س = ٠:

① ق(٠) = ١

② نهـا س←٠⁺ (١) = ١ = نهـا س←٠⁻ (١ – ٢س) ⇐ نهـا س←٠ ق(س) = ١

③ نهـا س←٠ ق(س) = ق(٠)

∴ ق(س) **متصل عند س** = ٠

- س = ١:

① ق(١) = ١

② نهـا س←١⁺ (٢س – ١) = ١ = نهـا س←١⁻ (١) ⇐ نهـا س←١ ق(س) = ١

③ نهـا س←١ ق(س) = ق(١)

∴ ق(س) **متصل عند س** = ١

قَ(س) = {
٢ ، س > ١
٠ ، ٠ < س < ١
–٢ ، س < ٠
غ . م ، س = ٠ ، ١

☜ قَ(٠)⁺ = ٠ ، قَ(٠)⁻ = –٢ ⟵ قَ(٠)⁺ ≠ قَ(٠)⁻ ⇐ قَ(٠) غ . م

☜ قَ(١)⁺ = ٢ ، قَ(١)⁻ = ٠ ⟵ قَ(١)⁺ ≠ قَ(١)⁻ ⇐ قَ(١) غ . م

📖 **مثال:** إذا كان ق(س) = |٣س – ٢| ، **فجد قيم س التي تجعل المشتقة عندها غير موجودة؟**

✍ **الحل: لأن ما داخل القيمة المطلقة اقتراناً خطياً ، إذن فإن المشتقة غير موجودة عند أصفاره:**

٣س – ٢ = ٠ ⟵ ٣س = ٢ ⇐ س = ٢/٣

📖 **مثال:** إذا كان ق(س) = [١/٣ س + ٧] + ٢س² ، **فجد** قَ(٣) ، قَ(٨) ؟

✍ **الحل: نعيد التعريف : مقلوب معامل س هو ٣ :** ٠ ، ٣ ، ٦ ، ٩

∴ ق(س) = {
٧ + ٢س² ، ٠ ≤ س < ٣
٨ + ٢س² ، ٣ ≤ س < ٦
٩ + ٢س² ، ٦ ≤ س < ٩

⇐ قَ(س) = {
٤س ، ٠ < س < ٣
٤س ، ٣ < س < ٦
٤س ، ٦ < س < ٩

لكن لاحظ أن ق(س) **غير متصل عند س** = ٣ ⟵ قَ(٣) غ . م

قَ(٨) = ٤ × ٨ = ٣٢

📖 **مثال:** إذا كان ق(س) = [١/٢ س + ٣] / |س – ٥| ، **فجد** قَ(٣) ؟

✍ **الحل:** طول الدرجة = ٢

∴ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٤}{٥-\text{س}}$ ، $٢ \leqslant \text{س} < ٤$ ⇐ $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{٤}{(٥-\text{س})^{٢}}$ ، $٢ < \text{س} < ٤$ ⇐ $\text{قَ}(٣) = \frac{٤}{٤} = ١$

📖 **مثال:** إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ س}^{٣} + \text{ب} & ، \text{س} > ١ \\ \text{جـ س}^{٢} + ٤ & ، \text{س} < ١ \\ ٦\text{س} & ، \text{س} = ١ \end{cases}$$

فجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ التي تجعل قَ(١) موجودة؟

✍ **الحل:** لأن قَ(١) موجودة فإن ق متصل عند س = ١

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to ١^{+}} (\text{أ س}^{٣} + \text{ب}) = \lim\limits_{\text{س}\to ١^{-}} (\text{جـ س}^{٢} + ٤)$ ⇐ أ + ب = جـ + ٤

لكن $\text{ق}(١) = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \text{ق}(\text{س})$ ⟵ ٦ = جـ + ٤ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٢}$

∴ أ + ب = ٦ .... ①

ولكن

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{أ س}^{٢} & ، \text{س} > ١ \\ ٤\text{س} & ، \text{س} < ١ \end{cases}$$

وبما أن قَ(١) موجودة فإن $\text{قَ}(١)^{+} = \text{قَ}(١)^{-}$ ⇐ ٣أ = ٤ ⇐ $\boxed{\text{أ} = \frac{٤}{٣}}$

ومن معادلة ① ينتج أن: $\frac{٤}{٣}$ + ب = ٦ ⇐ $\boxed{\text{ب} = \frac{١٤}{٣}}$

📖 **مثال:** إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ س}^{٢} - \text{ب س} & ، \text{س} \leqslant ٢ \\ ٤ - \text{ب س}^{٣} + \text{أ س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$$

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب الذان يجعلان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = ٢ ؟

✍ **الحل:** بما أن قَ(٢) موجودة ⟵ ق متصل عند س = ٢ ⇐ $\text{ق}(٢) = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{ق}(\text{س})$

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} (٤ - \text{ب س}^{٣} + \text{أ س}) = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} (\text{أ س}^{٢} - \text{ب س})$ ⇐ ٤ − ٨ب + ٢أ = ٤أ − ٢ب

⇐ ٤ − ٦ب − ٢أ = ٠ ⇐ ٢أ + ٦ب = ٤ ..... ①

لكن

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أ س} - \text{ب} & ، \text{س} < ٢ \\ \text{أ} - ٣\text{ب س}^{٢} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$$

وبما أن قَ(٢) موجودة فإن $\text{قَ}(٢)^{+} = \text{قَ}(٢)^{-}$ ⇐ أ − ١٢ب = ٤أ − ب ⇐ −١١ب = ٣أ

⇐ ٣أ + ١١ب = ٠ .... ②

وبضرب المعادلة ① بالعدد (٣) وضرب المعادلة ② بالعدد (٢) وطرح المعادلتين ينتج أن:

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

٦أ + ١٨ب = ١٢ .... ①

٦أ + ٢٢ب = ٠ .... ②

−٤ب = ١٢ ⟵ $\boxed{\text{ب} = -٣}$

وبالتعويض في المعادلة ② ⟸ ٣أ = −١١ × −٣ ⟸ ٣أ = ٣٣ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ١١}$

نتيجة: إذا كان ص = ق(م(س)) فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = مَ(س) × قَ(م(س))

مثال: إذا كان ص = ق(س^{٣}−٨س^{٢}+١) فجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل: $\frac{ءص}{ءس}$ = (س^{٣}−٨س^{٢}+١)َ × قَ(س^{٣}−٨س^{٢}+١) = (٣س^{٢}−١٦س)×قَ(س^{٣}−٨س^{٢}+١)

مثال: ليكن ق(٣س) = ٣س^{٢} − ٤س ، فجد قَ(٦) ؟

الحل: ٣قَ(٣س) = ٦س−٤ ، لكن قَ(٦) = قَ(٣س) ⟵ ٦ = ٣س ⟵ س = ٢

∴ ٣قَ(٦) = ١٢−٤ ⟸ ٣قَ(٦) = ٨ ⟸ قَ(٦) = $\frac{٨}{٣}$

مثال: إذا كان ق(س^{٢}) = (٣س−١)^{٢} ، فجد قَ(٤) ، س < ٠

الحل: ٢س×قَ(س^{٢}) = ٢(٣س−١) ⟸ س قَ(س^{٢}) = ٣س − ١

لكن قَ(٤) = قَ(س^{٢}) ⟵ س^{٢} = ٤ ⟵ س = ±٢ ، ولأن س < ٠ ، فإن س = −٢

∴ −٢قَ(٤) = −٦−١ ⟸ −٢قَ(٤) = −٧ ⟸ قَ(٤) = $\frac{٧}{٢}$

مثال: إذا كان ص = ق(ق(٢س+١)) ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ حيث أن ق(٣)=٥ ، قَ(٣)=−٢ ، قَ(٥)=−١ ؟

الحل: $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢×قَ(٢س+١)×قَ(ق(٢س+١)) ⟸ $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س=١}$ = ٢قَ(٣)×قَ(ق(٣))

= ٢×−٢×قَ(٥)

= −٤×−١ = ٤

مثال: إذا كان ص = ق(س^{٣}+س) وكان قَ(−١٠) = ٢ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س=-٢}$؟

الحل: $\frac{ءص}{ءس}$ = (٣س^{٢}+١)×قَ(س^{٣}+س) ⟸ $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س=-٢}$ = ١٣×قَ(−١٠) = ١٣ × ٢ = ٢٦

مثال: إذا كان ق(س) = $\frac{|س^{٢}-٣|}{س}$ ، فجد قَ(١)؟

الحل: نعوض بالنقطة داخل القيمة المطلقة فيكون الناتج عدداً سالباً:

∴ ق(س) = $\frac{٣-س^{٢}}{س}$ ⟵ قَ(س) = $\frac{(س)(-٢س)-\left(٣-س^{٢}\right)(١)}{س^{٢}}$ ⟸ قَ(١) = $\frac{-٢-٢}{١}$ = −٤

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال:** ليكن ق(س) = $\frac{٤}{س^٣}$ ، **فجد** قَ(−١) ؟

✍ **الحل:** قَ(س) = $\frac{-٤\times٣س^٢}{س^٦}$ ⇐ قَ(−١) = $\frac{-١٢}{١}$ = −١٢

📖 **مثال:** إذا كان ق(س) = ⟦٢س+٥⟧ ، **فجد** قَ(−$\frac{١}{٢}$) ؟

✍ **الحل:** مقلوب معامل س (طول الدرجة) = $\frac{١}{٢}$ ٠ ، −$\frac{١}{٢}$ ، −١

∴ ق(س) = { ٣ ، −١ ⩽ س < −$\frac{١}{٢}$ ؛ ٤ ، −$\frac{١}{٢}$ ⩽ س < ٠ }

لأن ق(س) غير متصل عند س = −$\frac{١}{٢}$ ، فإن قَ(−$\frac{١}{٢}$) غير موجودة.

📖 **مثال:** إذا كان ق(س) = ⟦ ٤ − س − ٥س^٢ ⟧ ، **فجد قيم س التي تجعل الاقتران غير قابل للاشتقاق؟**

✍ **الحل:** أصفار ما داخل أكبر عدد صحيح تمثل نقاط انفصال وبالتالي يكون عندها الاقتران غير قابل للاشتقاق.

٤ − س − ٥س^٢ = ٠ ⇐ ٥س^٢ + س − ٤ = ٠ ⇐ (س − $\frac{٤}{٥}$) (س + ١) = ٠ ⟵ س = −١ ، $\frac{٤}{٥}$

📖 **مثال:** إذا كان نهـا$_{س\to\pi}$ (٢جتاق(س)) = −٢ ، **فجد** ق(س) ؟

✍ **الحل:** نهـا$_{س\to\pi}$ (جتاق(س)) = −١ ⇐ ق(س) = ن س ، بشرط أن (ن) عدداً فردياً صحيحاً.

📖 **مثال:** إذا كان ق(س) = ٢س^٥−٣س^٤+٥س^٢ ، **فجد المشتقة الرابعة للاقتران** ق(س) ؟

✍ **الحل:** قَ(س) = ١٠س^٤−١٢س^٣+١٠س

قً(س) = ٤٠س^٣−٣٦س^٢+١٠

ق$^{(٣)}$(س) = ١٢٠س^٢−٧٢س

ق$^{(٤)}$(س) = ٢٤٠س − ٧٢

📖 **مثال:** إذا كان ق(س) = س^٤−م س^٣+١٥، فما قيمة م إذا علمت أن نهـا$_{هـ\to٠}$ $\frac{قً(٢+هـ)-قً(٢)}{٥هـ}$ = ٨ ؟

✍ **الحل:** نهـا$_{هـ\to٠}$ $\frac{قً(٢+هـ)-قً(٢)}{٥هـ}$ = $\frac{١}{٥}$ × ق$^{(٣)}$(٢) = ٨ ⇐ ق$^{(٣)}$(٢) = ٤٠

لكن قَ(س) = ٤س^٣ − ٣م س^٢

قً(س) = ١٢س^٢ − ٦م س

ق$^{(٣)}$(س) = ٢٤س − ٦م ⇐ ق$^{(٣)}$(٢) = ٢٤×٢−٦م = ٤٨−٦م

∴ ٤٨ − ٦م = ٤٠ ⇐ ٦م = ٨ ⇐ م = $\frac{٨}{٦}$ = $\frac{٤}{٣}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال:** أوجد $\underset{ع \leftarrow س}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا ٦ع} - \text{جتا ٦س}}{ع - س}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{ع \leftarrow س}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا ٦ع} - \text{جتا ٦س}}{ع - س} = \text{ق}(\text{جتا ٦س}) = -٦\text{جا٦س}$

📖 **مثال:** ليكن $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(س)+٥}{س} = \frac{١}{٢}$ ، وكان $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (\text{هـ}(س) - ٥ + ٣ب) = ٢$ ، فإذا علمت أن هـ(س) كثير حدود فجد قيمة الثابت ب ؟

✍ **الحل:** بما أن النهاية موجودة والمقام يساوي صفر ، إذن البسط يساوي صفر أيضاً:

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{هـ}(س) + ٥ = ٠ \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{هـ}(س) = -٥$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (\text{هـ}(س) - ٥ + ٣ب) = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{هـ}(س) - ٥ + ٣ب = ٢$

$= -٥ - ٥ + ٣ب = ٢ \Leftarrow ٣ب = ١٢ \Leftarrow ب = ٤$

📖 **مثال:** إذا كان $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س) - ٩}{س - ٣} = ٤$ ، فجد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س) - س^٢}{س - ٣}$ ؟

✍ **الحل:** واضح عند مقارنة المعطى بالمطلوب بأننا سنقوم بإضافة وطرح العدد ٩

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س) - ٩ + ٩ - س^٢}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س) - ٩}{س - ٣} + \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{٩ - س^٢}{س - ٣} = ٤ + \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٣ - س)(٣ + س)}{(س - ٣)} \Leftarrow ٤ - ٦ = -٢$

📖 **مثال:** ليكن $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س)+٥}{س+٢} = ٩$ ، فجد $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} (\text{ق}(س) + ٢س)$ ؟

✍ **الحل:** بما أن النهاية موجودة والمقام يساوي صفر إذن البسط يساوي صفر

$\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} [\text{ق}(س) + ٥] = ٠ \Leftarrow \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(س) = -٥$

$\therefore \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} (\text{ق}(س) + ٢س) = \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(س) - ٤ = -٥ - ٤ = -٩$

📖 **مثال:** إذا كان $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ ، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{\text{ق}(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$ ، فجد قيمة الثابت ب ؟

✍ **الحل:** نقسم كل من البسط والمقام على (س-١)

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}}{\frac{\text{ق}(س) - ٦}{س - ١}} + ب = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{(س-١)(س+٣)}{(س-١)}}{٨} + ب = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \frac{٤}{٨} + ب = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ب = ١$

📖 **مثال:** أوجد $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ٦س} - \text{ظا}(٦س + ٦هـ)}{٥هـ}$ ؟

✍ **الحل:** $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ٦س} - \text{ظا}(٦س + ٦هـ)}{٥هـ} = -\frac{١}{٥} \times \text{ق}(\text{ظا٦س}) = -\frac{٦}{٥} \text{قا}^٢ ٦س$

مثال: إذا كان ص = ٥س^{٢} ظا٢س ، **فجد** صَ(π) ؟

الحل: صَ(س) = (٥س^{٢}) (٢قا^{٢}٢س) + (ظا٢س) (١٠س)

$$صَ(\pi) = ٥\pi^{٢} \times ٢ \frac{١}{جتا^{٢}\,٢\pi} + ٠ = ١٠\pi^{٢}$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس الخامس: قاعدة السلسلة

إذا كان ص = ق(ع) ، ع = هـ(س) ، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ **ويسمى هذا الشكل بـِ "قاعدة السلسلة".**

لاحظ أن ص = ق(ع) = ق(هـ(س)) = (ق ٥ هـ)$_{\text{س}}$ وتقرأ " ق بعد هـ" ويسمى هذا الشكل بـِ "تركيب الاقترانات"

قواعد:

- (ق ٥ هـ)$_{\text{س}}$ = ق(هـ(س))
- (ق ٥ هـ)$'_{\text{س}}$ = قَ(ع) × هـَ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)
- (ق ٥ هـ)$''_{\text{س}}$ = (قَ ٥ هـَ)$'_{\text{س}}$ = قً(هـَ(س)) × هـً(س)
- (ق ٥ هـ ٥ ع)$'_{\text{س}}$ = قَ(هـ ٥ ع) × هـَ(ع(س)) × عَ(س)
- **بشكل عام فإن:** (ق ٥ هـ)$_{\text{س}}$ ≠ (هـ ٥ ق)$_{\text{س}}$

مثال١: باستخدام التعريف العام للمشتقة الأولى أثبت أن (ق ٥ هـ)$'_{\text{س}}$ = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

الحل: (ق ٥ هـ)$'_{\text{س}}$ = $\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ق}\circ\text{هـ})_{\text{ع}} - (\text{ق}\circ\text{هـ})_{\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{هـ}(\text{ع})) - \text{ق}(\text{هـ}(\text{س}))}{\text{ع}-\text{س}}$

$\Leftarrow \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{هـ}(\text{ع})) - \text{ق}(\text{هـ}(\text{س}))}{\text{ع}-\text{س}} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{هـ}(\text{ع})) - \text{ق}(\text{هـ}(\text{س}))}{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})} \times \frac{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$\Leftarrow$ قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

مثال٢: إذا كان ص = ٢ع+٣ ، ع = ٣س^{٢}−١ ، **فجد** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = (٢) (٦س) = ١٢س

مثال٣: إذا كان ع = ٥هـ^{٢}−٦هـ+٨ ، هـ = ٢ك+٦ ، **فجد** $\frac{\text{ءع}}{\text{ءك}}$ ؟

الحل: $\frac{\text{ءع}}{\text{ءك}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءهـ}} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءك}}$ = (١٠هـ−٦) (٢) = ٢٠هـ−١٢ = ٢٠(٢ك+٦)−١٢ = ٤٠ك + ١٠٨

مثال٤: ليكن م = $\sqrt{\text{ص}}$ + ٤ص ، ص = ٢هـ^{٣}−٢هـ ، **فجد** $\frac{\text{ءم}}{\text{ءهـ}}$ ؟

الحل: $\frac{\text{ءم}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{ءم}}{\text{ءص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءهـ}} = \left(\frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} + ٤\right)(٦\text{هـ}^{٢}-٢) = \frac{٦\text{هـ}^{٢}-٢}{٢\sqrt{٢\text{هـ}^{٣}-٢\text{هـ}}} + ٢٤\text{هـ}^{٢}-٨$

مثال٥: إذا كان ص = ع^{٢}−٣ع ، ع = س^{٢}+٧س ، **فجد** $\left.\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right|_{\text{س}=٠}$ ؟

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

✍ **الحل:** $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = (٢ع-٣)(٢س+٧) = (٢[س^٢+٧س]-٣)(٢س+٧)$

$\Leftarrow (٢س^٢+١٤س-٣)(٢س+٧) = ٤س^٣+٤٢س^٢+٩٢س-٢١$

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ١٢س^٢+٨٤س+٩٢ \longrightarrow \frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\Big|_{س=٠} = ٩٢$

📖 **مثال٦:** إذا كان $ق(س) = س^٣+س$ ، $هـ(س) = س^٣+٢س^٢$ ، **أوجد كل مما يلي:**

① $(ق \circ هـ)'_{١}$

② $(هـ \circ ق)'_{١}$

③ $(ق \circ ق)'_{١}$

④ $(ق' \circ هـ)'_{١}$

✍ **الحل:**

$ق(١) = ٢$ ، $هـ(١) = ٣$

$ق'(س) = ٣س^٢+١ \longrightarrow ق'(١) = ٤$ ، $ق''(س) = ٦س \longrightarrow ق''(١) = ٦$

$هـ'(س) = ٣س^٢+٤س \longrightarrow هـ'(١) = ٧$ ، $هـ''(س) = ٦س+٤ \longrightarrow هـ''(١) = ١٠$

① $(ق \circ هـ)'_{١} = ق'(هـ(١)) \times هـ'(١) = ق'(٣) \times ٧ = ٢٨\times٧ = ١٩٦$

② $(هـ \circ ق)'_{١} = هـ'(ق(١)) \times ق'(١) = هـ'(٢) \times ٤ = ٢٠\times٤ = ٨٠$

③ $(ق \circ ق)'_{١} = ق'(ق(١)) \times ق'(١) = ق'(٢) \times ٤ = ١٣\times٤ = ٥٢$

④ $(ق' \circ هـ')'_{١} = ق''(هـ'(١)) \times هـ''(١) = ق''(٧) \times ١٠ = ٤٢\times١٠ = ٤٢٠$

📖 **مثال٧:** إذا كان $ق(ع) = \frac{ع^٢+٥ع}{٣ع-٢}$ ، $ع = هـ(س) = س^٣+٤س+١$ ، **فجد** $(ق \circ هـ)'_{٠}$ ؟

✍ **الحل:** $(ق \circ هـ)'_{٠} = ق'(هـ(٠)) \times هـ'(٠) = ق'(١) \times هـ'(٠)$

لكن $ق'(ع) = \frac{(٣ع-٢)(٢ع+٥) - ٣\left(ع^٢+٥ع\right)}{(٣ع-٢)^٢}$ ، $هـ'(س) = ٣س^٢+٤$

$\therefore ق'(١) \times هـ'(٠) = -١١ \times ٤ = -٤٤$

📖 **مثال٨:** إذا كان $هـ(١)=٥$ ، $هـ'(١)=٨$ ، $ق(٥)=١٧$ ، $ق'(٥)=١٠$ ، **فجد** $\underset{س\to١}{نهـا} \frac{(ق \circ هـ)-١٧}{س^٢+٥س-٦}$ ؟

✍ **الحل:** $(ق \circ هـ)_{١} = ق(هـ(١)) = ق(٥) = ١٧$ ، $\therefore \underset{س\to١}{نهـا} \frac{(ق \circ هـ)-١٧}{س^٢+٥س-٦} = \underset{س\to١}{نهـا} \frac{(ق \circ هـ)-ق(٥)}{س^٢+٥س-٦}$

$\Leftarrow (ق \circ هـ)'_{١} = ق'(هـ(١)) \times هـ'(١) = ق'(٥) \times ٨ = ١٠ \times ٨ = ٨٠$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٩:** إذا علمت أن ه(١) = ٤ ، هَ(١)=٥ ، هً(١)=٦ ، وَ(٤)=٧ ، وً(٥) = ١٠ ، **فجد** (و ∘ ه)ً(١) ؟

✍ **الحل:** (و ∘ ه)ً(١) = وً(هَ(١)) × هً(١) = وً(٥) × ٦ = ١٠ × ٦ = ٦٠

📖 **مثال١٠:** إذا كان و(س^٢^+٣س) = ه(٥س^٣^+|٢س−١٣|) ، هَ(١٦)=٤ ، **فجد** وَ(٤)|~س=١~ ؟

✍ **الحل:** عند س = ١ فإن |٢س−١٣| = ١٣−٢س

∴ و(س^٢^+٣س) = ه(٥س^٣^ + ١٣ − ٢س)

(٢س+٣) × وَ(س^٢^+٣س) = (١٥س^٢^−٢) × هَ(٥س^٣^−٢س+١٣)

٥ × وَ(٤) = ١٣ × هَ(١٦) ⟸ وَ(٤) = $\frac{١٣}{٥}$ × ٤ = $\frac{٥٢}{٥}$

📖 **مثال١١:** ليكن ص= ن^٢^−٤ن ، س = $\frac{١}{٢}$ن^٢^−٢ن ، **فجد** $\frac{ءص}{ءس}$|~س=٠~ ؟

✍ **الحل:** $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءن}$ × $\frac{ءن}{ءس}$ ، لكن $\frac{ءس}{ءن}$ = ن−٢ ⟵ $\frac{ءن}{ءس}$ = $\frac{١}{ن−٢}$

= (٢ن−٤) × $\frac{١}{ن−٢}$ = ٢(ن−٢) × $\frac{١}{ن−٢}$ = ٢ ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$|~س=٠~ = ٢

📖 **مثال١٢:** إذا كان و(س^٢^+٥) = س^٣^+٤س^٢^−١٩ ، س > ٠ ، **فجد** وَ(٩) ؟

✍ **الحل:** ٢س×وَ(س^٢^+٥) = ٣س^٢^+٨س ⟸ ٢وَ(س^٢^+٥) = ٣س+٨

لكن وَ(س^٢^+٥) = وَ(٩) ⟸ س^٢^+٥=٩ ⟸ س^٢^=٤ ⟸ س=±٢ ، س=−٢ (س > ٠)

∴ ٢وَ(س^٢^+٥) =٢وَ(٩) = ٣س+٨ ⟸ ٢وَ(٩) = ٢ وَ(٩) = ١

📖 **مثال١٣:** إذا كان ص = ن^٣^+٢ن ، $\frac{ءس}{ءن}$ =٤ن ، **فجد** $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$|~ن=١~ ؟

✍ **الحل:** $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءن}$ × $\frac{ءن}{ءس}$ = (٣ن^٢^+٢) × $\frac{١}{٤ن}$ = $\frac{٣ن+٢}{٤ن}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(٤ن)(٣)-(٣ن+٢)(٤)}{(٤ن)^٢}$ ⟸ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$|~ن=١~ = −$\frac{١}{٢}$

الدرس السادس: الاشتقاق الضمني

طريقة الحل:

١) نشتق السينات اشتقاق عادي.

٢) نشتق الاقتران ص اشتقاق عادي مع ضربه بـِ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ وذلك لأن ص اقتراناً مجهولاً كما أن س×ص حاصل ضرب اقترانين.

٣) نفصل الحدود التي تحتوي على $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في طرف والبقية في الطرف الآخر من المعادلة.

٤) نجد قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

مدلولات: نستدل على الاشتقاق الضمني إذا كان المطلوب مشتقة لمعادلة ما ، وكذلك وجود مزيج من الاقترانات س،ص.

مثال١: إذا كان $\text{س}^{٣} + ٤\text{ص}^{٢} = ١٨\text{س} - ٣\text{ص} + ١$ ، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

الحل: $٣\text{س}^{٢} + ٨\text{ص}\,\text{ص}' = ١٨ - ٣\text{ص}'$

$\Leftarrow ٣\text{س}^{٢} - ١٨ = -٣\text{ص}' - ٨\text{ص}\,\text{ص}'$

$\Leftarrow ٣\text{س}^{٢} - ١٨ = \text{ص}'(-٣ - ٨\text{ص}) \Leftarrow \text{ص}' = \frac{٣\text{س}^{٢} - ١٨}{-٣ - ٨\text{ص}}$

مثال٢: إذا كان $٦\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣} = ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{ص} - ٩$ ، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

الحل:

$$٢٤\text{س}^{٣} - \left[٥\text{س}^{٢} \times ٣\text{ص}^{٢}\,\text{ص}' + ١٠\text{س}\,\text{ص}^{٣}\right] = ٦\text{س} + ٩\text{ص}'$$

$\Leftarrow ٢٤\text{س}^{٣} - ١٥\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}\text{ص}' - ١٠\text{س}\,\text{ص}^{٣} = ٦\text{س} + ٩\text{ص}'$

$\Leftarrow ٢٤\text{س}^{٣} - ١٠\text{س}\,\text{ص}^{٣} - ٦\text{س} = ٩\text{ص}' + ١٥\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}\text{ص}'$

$\Leftarrow ٢٤\text{س}^{٣} - ١٠\text{س}\,\text{ص}^{٣} - ٦\text{س} = \text{ص}'(٩ + ١٥\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢})$

$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{٢٤\text{س}^{٣} - ١٠\text{س}\,\text{ص}^{٣} - ٦\text{س}}{٩ + ١٥\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}}$

مثال٣: إذا كان $(\text{س} - \text{ص})^{٤} + (\text{ص} - \text{س})^{٤} = ٣٢$ ، أثبت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$.

الحل: لاحظ أن $(\text{س} - \text{ص})^{٤} = (\text{ص} - \text{س})^{٤}$

$\therefore (\text{س} - \text{ص})^{٤} + (\text{س} - \text{ص})^{٤} = ٣٢ \Leftarrow ٢(\text{س} - \text{ص})^{٤} = ٣٢ \Leftarrow (\text{س} - \text{ص})^{٤} = ١٦$

$\Leftarrow \text{س} - \text{ص} = ٢ \Leftarrow ١ - \text{ص}' = ٠ \Leftarrow \text{ص}' = ١$

مثال٤: إذا كان $\text{س} = (١ - \text{ص}^{٢})^{٦}$ ، أثبت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^{٢} - ١}{١٢\text{س}\,\text{ص}}$.

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

✍ **الحل:**

١ = ٦(١ – ص^{٢})^{٥} × –٢ص صَ ، نضرب المعادلة بـِ (١ – ص^{٢}) للحفاظ على القوة.

⇐ (١ – ص^{٢}) = –١٢ ص صَ ×(١ – ص^{٢})^{٦}

⇐ (١ – ص^{٢}) = –١٢ صَ ×ص س

⇐ صَ = $\frac{١ - ص^{٢}}{-١٢ \text{ ص س}}$ = $\frac{ص^{٢} - ١}{١٢ \text{ ص س}}$

➤ <u>ملاحظة هامة:</u> **في أسئلة الإثبات ، إذا كانت المعادلة مرفوعة لقوة فيجب الحفاظ على القوة بعد الاشتقاق.**

📖 **مثال٥:** إذا كان ص^{م} = (١ + س)^{ن} ، أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ن \text{ ص}}{م(١+س)}$.

✍ **الحل:** م ص$^{م - ١}$ × صَ = ن(١ + س)$^{ن - ١}$ ..... **نضرب المعادلة بـ ص للحفاظ على الأس.**

⇐ م ص^{م} صَ = ن ص (١ + س)$^{ن - ١}$

⇐ م (١ + س) × (١ + س)$^{ن-١}$ × صَ = ن ص (١ + س)$^{ن - ١}$

⇐ م (١ + س) صَ = ن ص

⇐ صَ = $\frac{ن \text{ ص}}{م(١+س)}$

📖 **مثال٦:** إذا علمت أن (س + ص)^{٥} = س^{٢} ص^{٣} ، أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص}{س}$.

✍ **الحل:** ٥(س+ص)^{٤} (١+صَ) = س^{٢}×٣ص^{٢} صَ + ٢س ص^{٣}

⇐ ٥(س+ص)^{٥} (١+صَ) = (س+ص)[٣س^{٢} ص^{٢} صَ + ٢س ص^{٣}]

⇐ ٥س^{٢} ص^{٣}(١+صَ) = ٣س^{٣} ص^{٢} صَ + ٢س^{٢} ص^{٣} +٣س^{٢} ص^{٣} صَ + ٢س ص^{٤}

⇐ ٥س^{٢} ص^{٣} + ٥س^{٢} ص^{٣} صَ = ٣س^{٣} ص^{٢} صَ + ٢س^{٢} ص^{٣} +٣س^{٢} ص^{٣} صَ + ٢س ص^{٤}

⇐ ٥س^{٢} ص^{٣} –٢س^{٢} ص^{٣} – ٢س ص^{٤} = صَ(٣س^{٣} ص^{٢} + ٣س^{٢} ص^{٣} – ٥س^{٢} ص^{٣})

⇐ ٣س^{٢} ص^{٣} – ٢س ص^{٤} = صَ(٣س^{٣} ص^{٢} – ٢س^{٢} ص^{٣})

⇐ س ص^{٣}(٣س – ٢ص) = س^{٢} ص^{٢} صَ(٣س – ٢ص)

⇐ ص = س صَ ⇐ صَ = $\frac{ص}{س}$

📖 **مثال٧:** إذا كان جا(٥س ص) = ٦س^{٢}+٣ص–٦ ، **فجد** $\frac{ءص}{ءس}$ **عند النقطة** (١، ٠) ؟

✍ **الحل:** (٥س صَ + ٥ص) (**جتا** ٥س ص) = ١٢س+٣ صَ

⇐ (٥×١×صَ + ٥×٠) (**جتا** ٥×١×٠) = ١٢×١ + ٣ صَ

⇐ ٥صَ × ١ = ١٢ + ٣صَ

⇐ ٥صَ – ٣صَ = ١٢

⇐ ٢صَ = ١٢ ⇐ صَ = ٦

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٨:** إذا كان ص = $\sqrt{\text{هـ(س)}}$ ، مستخدماً الاشتقاق الضمني ،أثبت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـَ(س)}}{\sqrt{\text{هـ(س)}}}$

✍ **الحل:** ص = $(\text{هـ}(\text{س}))^{\frac{1}{2}}$ ⇐ صَ = $\frac{1}{2}$ × $(\text{هـ}(\text{س}))^{\frac{-1}{2}}$ × هـَ(س) = $\frac{\text{هـَ(س)}}{2\sqrt{\text{هـ(س)}}}$

📖 **مثال٩:** إذا كان ص = $\sqrt{\text{٤+٣جاس}}$ ، أثبت أن ٢ص صً + ٢(صَ)^2 + ص^2 = ٤

✍ **الحل:** ص = $\sqrt{\text{٤+٣جاس}}$

⇐ ص^2 = ٤+٣جاس

⇐ ٢ص صَ = ٣جتاس

⇐ ٢ص صً + صَ(٢صَ) = –٣جاس

⇐ ٢ص صً + ٢(صَ)^2 = –٣جاس .... بإضافة ص^2 لطرفي المعادلة:

⇐ ٢ص صً + ٢(صَ)^2 + ص^2 = –٣جاس + ص^2

⇐ ٢ص صً + ٢(صَ)^2 + ص^2 = –٣جاس + ٤+٣جاس

⇐ ٢ص صً + ٢(صَ)^2 + ص^2 = ٤

📖 **مثال١٠:** إذا كان ص – س = جتاص ، أثبت أن (صَ)^2 = –صً (قاص + ظاص)

✍ **الحل:** صَ – ١ = – جاص × صَ

⇐ صَ + صَ جاص = ١

⇐ صَ(١+ جاص) = ١

⇐ صَ(جتاص × صَ) + (١+ جاص) × صً = ٠

⇐ (صَ)^2 جتاص + صً + صً جاص = ٠ ....بقسمة المعادلة على جتاس:

⇐ (صَ)^2 + صً قاص + صً ظاص = ٠

⇐ (صَ)^2 = – صً (قاص + ظاص)

📖 **مثال١١:** إذا كان س = جاص ، أثبت أن صً = ظاص قا^{2}ص

✍ **الحل:** ١ = جتاص × صَ

⇐ صَ = $\frac{1}{\text{جتا ص}}$ = قاص

⇐ صً = قاص ظاص × صَ = قاص ظاص قاص

⇐ صً = ظاص قا^{2}ص

📖 **مثال١٢:** إذا كان ص = س ظاس ، أثبت أن صً = ٢ص قا^{2}س + ٢ قا^{2}س

✍ **الحل:** صَ = س × قا^{2}س + ظاس

⇐ صً = س×٢قاس قاس ظاس + قا^{2}س + قا^{2}س

⇐ صً = ٢س قا^{2}س ظاس + ٢ قا^{2}س

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

⇐ صً = ٢س ظاس قا^{٢}س + ٢ قا^{٢}س = ٢ص قا^{٢}س + ٢ قا^{٢}س

📖 **مثال١٣:** إذا كان س = ظاص ، **أثبت أن** ص ً (١+س^{٢}) = – جا٢ص

✍ **الحل:** ١ = قا^{٢}ص × صَ

⇐ صَ = $\frac{١}{\text{قا}^{٢}\text{ص}}$ = **جتا^{٢}ص**

⇐ صً = ٢**جتاص** × – **جاص** × صَ

⇐ صً = –٢**جاص جتاص** × **جتا^{٢}ص**

⇐ صً = – **جا٢ص جتا^{٢}ص** ....**نضرب المعادلة بـ " ١ + س"** :

لكن س = **ظاص** ⇐ س^{٢} = **ظا^{٢}ص** ⇐ ١+ س^{٢} = ١+ **ظا^{٢}ص** = **قا^{٢}ص**

⇐ صً (١+ س^{٢}) = – **جا٢ص جتا^{٢}ص قا^{٢}ص** = – **جا٢ص**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس الأول: التطبيقات الهندسية

☜ ميل المماس = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = ظا هـ ، هـ > ٠

= قَ(س) ، س = ء

☜ ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{قَ(س)}$

☜ معادلة المماس هي: ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

☜ معادلة العمودي هي: ص − ص$_١$ = $\frac{-١}{م}$ (س − س$_١$)

حيث : م = قَ(س)|$_{س=ء}$ هو ميل المماس ، (س$_١$،ص$_١$) هي نقطة التماس.

ملاحظات هامة لإيجاد نقطة التماس:

١. إذا كان ق(س) يقطع أو يمس محور السينات فإن ق(س) = ٠
٢. إذا كان ق(س) يقطع أو يمس محور الصادات فإن س = ٠
٣. إذا كان ق(س) يقطع أو يمس هـ(س) عند س=ء فإن ق(ء) = هـ(ء) ، قَ(ء) = هـَ(ء)
٤. إذا كان ق(س) // هـ(س) فإن قَ(س) = هـَ(س) أي أن **(ميل الأول = ميل الثاني)**
٥. إذا كان ق(س)⊥هـ(س) فإن قَ(س) × هـَ(س) = −١
٦. إذا كان ق(س) يوازي محور السينات فإن قَ(س) = ٠

مثال١: إذا كان ق(س) = ٦س^٢+٣س+١ ، أوجد ميل منحنى الاقتران ق(س) عند س=٢؟

الحل: ميل المنحنى = قَ(س)|$_{س=٢}$ = (١٢س+٣)|$_{س=٢}$ = ٢٤+٣ = ٢٧

مثال٢: إذا كان ميل العمودي لمنحنى الاقتران ق(س) = س^٣−م س+١١ يساوي −$\frac{١١}{٣}$ فجد قيمة م عندس= ١؟

الحل: ميل العمودي = $\frac{-١}{قَ(س)}$

∴ $\frac{-١}{قَ(س)}$ = −$\frac{١١}{٣}$ ⇐ ٣ = ١١×قَ(س)|$_{س=١}$ ⇐ ٣ = ١١(٣س^٢−م)|$_{س=١}$ ⇐ ٣ = ١١(٣−م)

⇐ ٣ = ٣٣ − ١١م ⇐ ١١م = ٣٠ ⇐ م = $\frac{٣٠}{١١}$

مثال٣: أوجد قيم س للاقتران ق(س)=س^٢−٦س+١٢ إذا علمت أن مماسه يوازي المستقيم ص=٤س+١٠؟

الحل: لأن المماس يوازي المستقيم ص فإن قَ(س) = صَ

⇐ ٢س−٦=٤ ⇐ ٢س=١٠ ⇐ س=٥

مثال٤: أوجد قيم س للاقتران ق(س)=س^٢−٧س+١٣ ،إذا كان العمودي يصنع زاوية مقدارها $\frac{\pi}{٤}$ باتجاه

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

محور السينات السالب؟

✍ **الحل:** أولاً يجب تحويل اتجاه الزاوية إلى موجب: $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

لكن ميل العمودي = $\frac{-1}{ق(س)} = \frac{-1}{ظا\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1}{-1} = 1 \Leftarrow قَ(س) = -1 \Leftarrow 2س - 7 = -1 \Leftarrow س = 3$

📖 **مثال5:** أوجد قيم س للاقتران ق(س)=٤س−٣س^٢+١٨ ، علماً بأن مماسه يعامد المستقيم ص=٧س−٥؟

✍ **الحل:** $قَ(س) \times صَ = -1 \Leftarrow (4 - 6س) \times 7 = -1 \Leftarrow 28 - 42س = -1 \Leftarrow س = \frac{29}{42}$

📖 **مثال6:** إذا كان ق(س)=أس^٢−٦س+ ب ، يمس منحنى الاقتران هـ(س)=٢س^٢+جـ عند النقطة (٢،١٢) ، أوجد قيمة كل من أ،ب،جـ؟

✍ **الحل:** $قَ(س) = هـَ(س) \Leftarrow 2أس - 6 = 4س \Leftarrow س(2أ - 4) - 6 = 0$ .... ①

لكن النقطة (٢،١٢) تحقق المعادلة ① : إذن $2(2أ - 4) - 6 = 0 \Leftarrow 2أ = 7 \Leftarrow \boxed{أ = \frac{7}{2}}$

لكن ص=١٢ ⟵ $12 = \frac{7}{2}س^2 - 6س + ب \Leftarrow 12 = \frac{7}{2}(4) - 12 + ب \Leftarrow \boxed{ب = 10}$

وكذلك $12 = 2 \times 4 + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = 4}$

📖 **مثال7:** إذا كان المستقيم ص=٤س+٦ مماساً لمنحنى الاقتران هـ(س) عند النقطة س=١ وكان هـ(س)=س^٣×ق(س)−٧س^٢ ، فجد قَ(١)؟

✍ **الحل:** $هـَ(س) = صَ \Leftarrow س^3قَ(س) + 3س^2ق(س) - 14س = 4$ ، وبتعويض س = ١ ينتج:

$\Leftarrow قَ(1) + 3ق(1) - 14 = 4$ ، لكن $ق(1) = 4 \times 1 + 6 = 10$

$\Leftarrow قَ(1) + 3 \times 10 - 14 = 4 \Leftarrow قَ(1) = -12$

📖 **مثال8:** إذا كان المستقيم ص=٧س−٤ مماساً لمنحنى الاقتران ق(س) عند س=٢ ، فجد $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(2+هـ) - 10}{3هـ}$ ؟

✍ **الحل:** بما أن ص مماساً لمنحنى الاقتران ق عند س=٢ فإن ص=ق عند س=٢

$\therefore ق(2) = 7 \times 2 - 4 \Leftarrow ق(2) = 10$

$\therefore \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(2+هـ) - 10}{3هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(2+هـ) - ق(2)}{3هـ} = \frac{1}{3} \times قَ(2) = \frac{1}{3} \times 7 = \frac{7}{3}$

📖 **مثال9:** أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الاقتران ق(س)=٣س^٢−٩س+١ عند النقطة س=٢؟

✍ **الحل:** $م = قَ(س)|_{س=2} = (6س - 9)|_{س=2} = 12 - 9 = 3$

نقطة التماس: $(2، ق(2)) = (2، -5)$

☜ معادلة المماس: $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$\Leftarrow ص + 5 = 3(س - 2) \Leftarrow ص + 5 = 3س - 6 \Leftarrow ص = 3س - 11$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

☜ معادلة العمودي: $ص - ص_1 = \frac{-1}{م}(س - س_1)$

⇐ $ص+٥=-\frac{1}{٢}(س-٢)$ ⇐ $ص = -\frac{1}{٢}(س+١٣)$

📖 **مثال١٠:** اكتب معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الاقتران $ق(س)=س^2-٤س-٥$ عند نقطة تقاطعه مع محور السينات؟

✍ **الحل:** لأن ق يقطع محور السينات فإن ص=٠ ⇐ ق(س)=٠

$س^2-٤س-٥=٠$ ⇐ $(س-٥)(س+١)=٠$ ⇐ س = ٥، -١

∴ هناك نقطتي تماس:

➲ (٥،٠): $قَ(س)|_{س=٥} = (٢س-٤)|_{س=٥} = ١٠-٤=٦$

☜ **معادلة المماس:** $ص - ص_1 = م(س - س_1)$ ⇐ $ص=٦(س-٥)$ ⇐ $ص=٦س-٣٠$

☜ **معادلة العمودي:** $ص - ص_1 = \frac{-1}{م}(س - س_1)$ ⇐ $ص=-\frac{1}{٦}(س-٥)$

➲ (-١،٠): $قَ(س)|_{س=-١} = (٢س-٤)|_{س=-١} = -٦$

☜ **معادلة المماس:** $ص - ص_1 = م(س - س_1)$ ⇐ $ص=-٦(س+١)$ ⇐ $ص=-٦س-٦$

☜ **معادلة العمودي:** $ص - ص_1 = \frac{-1}{م}(س - س_1)$ ⇐ $ص=\frac{1}{٦}(س+١)$

📖 **مثال١١:** إذا كان $ق(س)=س^3-٥س-٤$ ، جد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الاقتران ق(س) عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات؟

✍ **الحل:** لأن ق يقطع محور الصادات إذن س = ٠

$م = قَ(س)|_{س=٠} = (٣س^2-٥)|_{س=٠} = -٥$ ، ونقطة التماس هي: (٠،ق(٠)) = (٠،-٤)

☜ **معادلة المماس:** $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

⇐ $ص+٤=-٥(س)$ ⇐ $ص=-٥س-٤$

☜ **معادلة العمودي:** $ص - ص_1 = \frac{-1}{م}(س - س_1)$ ⇐ $ص+٤=\frac{1}{٥}(س)$

📖 **مثال١٢:** أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الاقتران $ق(س)=س^2$ عند نقطة تقاطعه مع منحنى الاقتران هـ(س)=٢س+٣؟

✍ **الحل:** ق(س) = هـ(س) ⇐ $س^2 = ٢س+٣$ ⇐ $س^2-٢س-٣=٠$ ⇐ $(س-٣)(س+١)=٠$ ⇐ س=٣، -١

➲ **النقطة الأولى** (٣،٩): $قَ(س) = ٢س|_{س=٣} = ٦$

☜ **معادلة المماس:** $ص - ص_1 = م(س - س_1)$ ⇐ $ص-٩=٦(س-٣)$ ⇐ $ص-٩=٦س-١٨$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$\Leftarrow$ ص=٦س−٩

☜ معادلة العمودي: ص − ص١ = $\frac{-1}{م}$ (س − س١) ⇐ ص−٩=−$\frac{1}{6}$(س−٣) ⇐ ص−٩=−$\frac{1}{6}$ س + $\frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ ص=−$\frac{1}{6}$س + $\frac{19}{2}$

⊃ النقطة الثانية (−١،١): قَ(س) = ٢س|س=−١ = −٢

☜ معادلة المماس: ص − ص١ = م (س − س١) ⇐ ص−١=−٢(س+١) ⇐ ص=−٢س−١

☜ معادلة العمودي: ص − ص١ = $\frac{-1}{م}$ (س − س١) ⇐ ص−١=$\frac{1}{2}$(س+١) ⇐ ص=$\frac{1}{2}$ س+$\frac{3}{2}$

📖 **مثال١٣:** أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الاقتران ق(س)=س٢−٥س+١٧ علماً بأن مماسه يوازي المستقيم ص=٣س+١١؟

✍ **الحل:** قَ(س) = صَ ⇐ ٢س−٥ = ٣ ⇐ ٢س = ٨ ⇐ س = ٤

نقطة التماس: (٤،١٣) ، م = قَ(س)|س=٤ = (٢س−٥)|س=٤ = ٣

☜ معادلة المماس: ص − ص١ = م (س − س١) ⇐ ص−١٣=٣(س−٤) ⇐ ص=٣س−٩

☜ معادلة العمودي: ص − ص١ = $\frac{-1}{م}$ (س − س١) ⇐ ص−١٣=−$\frac{1}{3}$(س−٤) ⇐ ص=−$\frac{1}{3}$ س + $\frac{43}{3}$

📖 **مثال١٤:** أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى العلاقة ٥س٣+٦س ص٢−٣ص٢=١٢س−٦ عند نقطة تقاطعها مع محور الصادات؟

✍ **الحل:** التقاطع مع محور الصادات يعني س =٠

∴ −٣ص=−٦ ⇐ ص=٢ ، ∴ نقطة التماس هي (٠،٢)

م = ١٥س٢+٦(٢س ص صَ+ص٢)−٣صَ=١٢ ، وبتعويض نقطة التماس في المعادلة ينتج أن:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ = م

☜ معادلة المماس: ص − ص١ = م (س − س١) ⇐ ص−٢=٤س ⇐ ص=٤س+٢

☜ معادلة العمودي: ص − ص١ = $\frac{-1}{م}$ (س − س١) ⇐ ص−٢=−$\frac{1}{4}$س ⇐ ص=−$\frac{1}{4}$ س +٢

📖 **مثال١٥:** أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الاقتران ق(س)=س٢−١ ، إذا علمت أن مماسه يصنع زاوية مقدارها $\frac{3\pi}{4}$ باتجاه محور السينات الموجب؟

✍ **الحل:** م = ظا$\frac{3\pi}{4}$ = −١ ، قَ(س) = ٢س = −١ ⇐ س = −$\frac{1}{2}$ ⟵ النقطة (−$\frac{1}{2}$ ، −$\frac{3}{4}$)

☜ معادلة المماس: ص − ص١ = م (س − س١) ⇐ ص+$\frac{3}{4}$ =−(س+$\frac{1}{2}$) ⇐ ص=−س−$\frac{5}{4}$

☜ معادلة العمودي: ص − ص١= $\frac{-1}{م}$ (س − س١) ⇐ ص+$\frac{3}{4}$ =(س+$\frac{1}{2}$) ⇐ ص= س + $\frac{1}{4}$

📖 **مثال١٦:** أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الاقتران ق(س) = س٢−٨س+١٣ إذا علمت أن مماسه

يعامد المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ س؟

الحل: قَ × صَ = −١ ⇐ (٢س−٨) × $\frac{١}{٢}$ = −١ ⇐ س−٤=−١ ⇐ س=٣

∴ النقطة (٣،−٢) ، م = قَ(س)|$_{س=٣}$ = ٦−٨ = −٢

☜ **معادلة المماس:** ص − ص١ = م (س − س١) ⇐ ص+٢=−٢(س−٣) ⇐ ص=−٢س+٤

☜ **معادلة العمودي:** ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س − س١) ⇐ ص+٢=$\frac{١}{٢}$(س−٣) ⇐ ص=$\frac{١}{٢}$س−$\frac{٧}{٢}$

مثال١٧: أوجد معادلتي المماس والعمودي للعلاقة (س+ص)^{٥}=٩+٢س−٣ص عند نقطة تقاطعها مع العلاقة س+ص=١؟

الحل: س+ص=١ ⟵ (١)^{٥} = ٩+٢س−٣ص ⇐ ٢س−٣ص=١−٩ ⇐ ٢س−٣ص=−٨ ...... ⊛

⇐ ٢−٣$\frac{دص}{دس}$ = ٠ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٢}{٣}$

لكن س+ص=١ ⟵ ص=١ − س

∴ **من معادلة** ⊛ **:** ٢س−٣(١ − س)=−٨ ⇐ ٥س−٣=−٨ ⇐ ٥س=−٥ ⇐ س=−١ ، ∴ ص=٢

النقطة هي: (−١،٢) ، م=$\frac{٢}{٣}$

☜ **معادلة المماس:** ص − ص١ = م (س − س١) ⇐ ص−٢=$\frac{٢}{٣}$(س+١) ⇐ ص=$\frac{٢}{٣}$س+$\frac{١١}{٣}$

☜ **معادلة العمودي:** ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س − س١) ⇐ ص−٢=−$\frac{٣}{٢}$(س+١) ⇐ ص=−$\frac{٣}{٢}$س+$\frac{١}{٢}$

مثال١٨: أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى العلاقة س^{٢}−س ص+ص^{٢}=١٢ إذا علمت أن مماسها عمودياً على محور السينات؟

الحل: ٢س−(س صَ+ص)+٢ص صَ=٠ ⇐ ٢س−س صَ−ص+٢ص صَ=٠ ⇐ صَ=$\frac{ص−٢س}{٢ص−س}$

لكن المماس يوازي محور الصادات ⇐ صَ ⟵ ∞ ⇐ ٢ص− س=٠ ⇐ ص=$\frac{١}{٢}$ س

وبتعويض قيمة ص في العلاقة الأصلية ينتج أن:

س^{٢}−س($\frac{١}{٢}$ س)+($\frac{١}{٢}$ س)^{٢}=١٢ ⇐ س^{٢}−$\frac{١}{٢}$س^{٢}+$\frac{١}{٤}$س^{٢}=١٢ ⇐ س^{٢}−$\frac{١}{٤}$س^{٢}=١٢ ⇐ $\frac{٣}{٤}$س^{٢}=١٢ ⇐ ٣س^{٢}=٤٨

⇐ س^{٢}=١٦ ⇐ س=±٤

∴ س=٤ ⟵ ص=٢ ⇐ (٤،٢)

∴ **معادلة المماس:** ص=٢ ، **ومعادلة العمودي:** س=٤

مثال١٩: إذا كان ق(١)=٥ ، قَ(١)=٣ ، **فجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الاقتران** ق(س)؟

الحل: م=قَ(س)|$_{س=١}$ =قَ(١) =٣

ونقطة التماس هي: (١،ق(١)) = (١،٥)

☜ **معادلة المماس:** ص − ص١ = م (س − س١) ⇐ ص−٥=٣(س−١) ⇐ ص=٣س+٢

☜ **معادلة العمودي:** ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س − س١) ⇐ ص−٥= −$\frac{١}{٣}$(س−١) ⇐ ص=−$\frac{١}{٣}$س+$\frac{١٦}{٣}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٢٠:** أوجد قيم س للاقتران ق(س)= $س^2 - ٤س + ٥$ إذا كان مماسه يمر بالنقطة (٠،٤) ؟

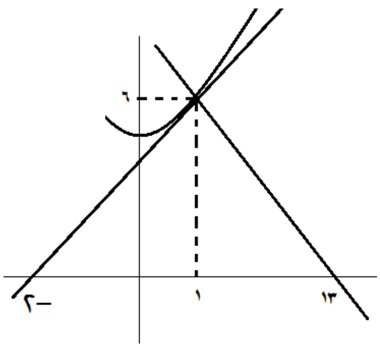
✍ **الحل:** نفرض أن نقطة التماس هي $(س_٢ ، ص_٢)$ فيكون ميل المماس:

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_٢ - ٤}{س_٢ - ٠} = \frac{ص - ٤}{س}$$ ، ولكن $م = \bar{ق}(س) = ٢س - ٤$

$$\therefore ٢س - ٤ = \frac{ص - ٤}{س} = \frac{س^٢ - ٤س + ٥ - ٤}{س} \Leftarrow س^٢ - ٤س + ١ = ٢س^٢ - ٤س \Leftarrow س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$$

📖 **مثال٢١:** احسب مساحة المثلث الناتج عن تقاطع المماس والعمودي للاقتران ق(س)=$س^٢+٥$ مع محور السينات عند النقطة (١،٦) ؟

✍ **الحل:** مساحة المثلث =$\frac{١}{٢}$× القاعدة×الارتفاع ، ولكن يجب إيجاد نقطة التقاطع بين كل من المماس ومحور السينات ، والعمودي ومحور السينات.



$م = \bar{ق}(س)|_{س=١} = ٢س|_{س=١} = ٢$ ، النقطة (١،٦)

☜ **معادلة المماس:** $ص - ٦ = ٢(س - ١) \Leftarrow ص = ٢س + ٤$

لكن عندما يقطع محور السينات فإن ص=٠

$\Leftarrow ٢س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = -٢$

☜ **معادلة العمودي:** $ص - ٦ = -\frac{١}{٢}(س - ١) \Leftarrow ص = \frac{١٣}{٢} - \frac{١}{٢}س$

لكن عندما يقطع محور السينات فإن ص=٠

$\therefore \frac{١٣}{٢} - \frac{١}{٢}س = ٠ \Leftarrow س = ١٣$

$\therefore$ **مساحة المثلث** $= \frac{١}{٢} \times (١٣ - (-٢)) \times ٦ = ٣ \times ١٥ = ٤٥$

📖 **مثال٢٢:** إذا كان $ص = ل^٣ + ٥ل - ٧$ ، $ل = س^٢ + ٣س + ٢$ ، **فجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة س،ص عندما س= صفر؟**

✍ **الحل:** $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءل} \times \frac{ءل}{ءس} = (٣ل^٢ + ٥)(٢س + ٣) = (٣(س^٢ + ٣س + ٢)^٢ + ٥)(٢س + ٣)$

$\frac{ءص}{ءس}|_{س=٠} = (٣(٠ + ٠ + ٢)^٢ + ٥)(٠ + ٣) = ١٧ \times ٣ = ٥١$

نقطة التماس: $س = ٠ \longleftarrow ل = ٢ \longleftarrow ص = ١١$ ، (٠،١١)

☜ **معادلة المماس هي:** $ص - ١١ = ٥١س \Leftarrow ص = ٥١س + ١١$

📖 **مثال٢٣:** إذا رُسم من النقطة (٠،١) مماساً لمنحنى الاقتران ق(س)=$س^٣+٣$، **فجد معادلة هذا المماس؟**

✍ **الحل:** $م = \bar{ق}(س)|_{س=س.} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_٢ - ١}{س_٢ - ٠}$

لكن $\bar{ق}(س) = ٣س^٢ \Leftarrow ٣س^٢ = \frac{ص - ١}{س} = \frac{س^٣ + ٣ - ١}{س} \Leftarrow ٣س^٢ = \frac{س^٣ + ٢}{س}$

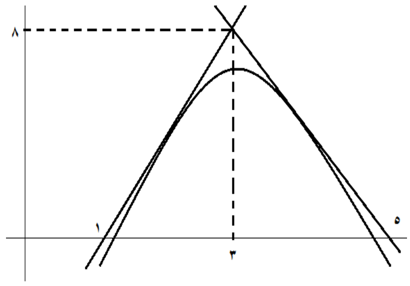
$\Leftarrow ٣س^٣ = س^٣ + ٢ \Leftarrow ٢س^٣ = ٢ \Leftarrow س^٣ = ١ \Leftarrow س = ١$

$\therefore ص = ق(١) = ١ + ٣ = ٤$ ، إذن النقطة هي: (١،٤)

☜ معادلة المماس: ص−٤=٣(س−١) ⇐ ص = ٣س+١

📖 **مثال٤٢:** أوجد مساحة المثلث الناتج من تقاطع مماسي منحنى الاقتران ق(س)=٦س−٥−س^٢ عند جذراه مع محور السينات؟

✍ **الحل:** ٦س−٥−س^٢=س^٢−٦س+٥=٠ ⇐ (س−٥) (س−١)=٠ ⇐ س=١، ٥



ولإيجاد نقطة التماس يجب إيجاد معادلة كل من المماسين.

م = قَ(س)|$_{س=١}$ = (−٢س+٦)|$_{س=١}$ =٤

∴ م = ٤ ، (١،٠)

☜ معادلة المماس الأول: ص−٠=٤(س−١) ⇐ ص=٤س−٤

م = قَ(س)|$_{س=٥}$ = (−٢س+٦)|$_{س=٥}$ = −٤

∴ م=−٤ ، (٥،٠)

☜ معادلة المماس الثاني: ص−٠=−٤(س−٥) ⇐ ص=−٤س+٢٠

ومن تساوي المعادلتين: ٤س−٤ = −٤س+٢٠ ⇐ ٨س = ٢٤ ⇐ س = ٣

لكن ص=٤س−٤ ⇐ ص=٤×٣−٤=١٢−٤=٨ = |٨| = ٨

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × (٥−١) × ٨ = ٤×٤ = ١٦

الدرس الثاني: التطبيقات الفيزيائية للمشتقة

♣ **بعض الرموز والقوانين:**

- **المسافة ← ف(ن)**
- **السرعة اللحظية ← ع(ن) = ف َ(ن) =** $\frac{دف}{دن}$
- **السرعة المتوسطة** $\overline{ع}$(ن) = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(ن_٢)-ف(ن_١)}{ن_٢-ن_١}$
- **التسارع اللحظي ← ت(ن) = ع َ(ن) =** $\frac{ءع}{ءن}$
- **التسارع المتوسط ←** $\overline{ت}$ (ن) = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$ = $\frac{ع(ن_٢)-ع(ن_١)}{ن_٢-ن_١}$

♣ **ملاحظات هامة :**

- **أقصى ارتفاع ← ع =٠**
- **يبدأ بالعودة ← ع = ٠**
- **تنعدم السرعة ← ع = ٠**
- **ينعدم التسارع ← ت = ٠**
- **السرعة الابتدائية ← ن = ٠**
- **التسارع الابتدائي ← ن = ٠**
- **بداية الحركة ← ن = ٠**
- **السرعة الموجبة ← ع > ٠**
- **السرعة السالبة ← ع < ٠**
- **يمكن لكل من المسافة والسرعة والتسارع أن تأخذ قيماً سالبة أما الزمن فلا يجوز أن يأخذ قيمة سالبة أبداً.**

📖 **مثال: جسم يتحرك وفق معادلة الحركة ف(ن) = ن^٣+٥ن+٦، حيث ف المسافة بالأمتار، فجد كل مما يلي:**

١) المسافة بعد ٢ ثانية.

٢) السرعة بعد ٢ ثانية.

٣) التسارع بعد ٢ ثانية.

✍ **الحل:**

① ف(ن)$|_{ن=٢}$ = ٢^{٣}+٥×٢+٦ = ٨+١٠+٦=٢٤م

② ع(ن)$|_{ن=٢}$ = فَ(ن)$|_{ن=٢}$ = (٣ن^{٢}+٥)$|_{ن=٢}$ = ١٢+٥ = ١٧

③ ت(ن)$|_{ن=٢}$ = عَ(ن)$|_{ن=٢}$ = (٦ن)$|_{ن=٢}$ = ٦×٢ = ١٢

📖 **مثال٢:** جسم يتحرك وفق العلاقة بين السرعة والزمن ن^{٢}+٦ن−١٥، أوجد السرعة إذا كان التسارع يساوي ٢٠م/ث^{٢}؟

✍ **الحل:** ع(ن)=ن^{٢}+٦ن−١٥ ، ع$|_{ت=٢٠}$ = ؟؟

ت = عَ = ٢ن+٦ ⇐ ٢٠ = ٢ن+٦ ⇐ ٢ن=١٤ ⇐ ن=٧

∴ ع$|_{ت=٢٠}$ = ع$|_{ن=٧}$ = ٤٩+٤٢−١٥=٧٦

📖 **مثال٣:** جسم يتحرك وفق العلاقة ف(ن)=٣٠+٣٦ن−٣ن^{٢} ، أوجد:

① الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسم موجبة.

② أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم على الفترة الموجبة.

✍ **الحل:** معنى أن السرعة موجبة أي أن: ع$|_{ن=؟}$ > ٠

① ع= فَ= ٣٦−٦ن ⇐ ٣٦−٦ن=٠ ⇐ ٣٦=٦ن ⇐ ن=٦

∴ الفترة الموجبة: ن ∈ [٠،٦]

② أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم يعني أن: ع= ٠ ⟵ ن=٦

∴ ف$|_{ن=٦}$ = ٣٠+٣٦×٦−٣×٣٦=١٣٨

📖 **مثال٤:** جسم يتحرك وفق معادلة الحركة ف(ن)=ن^{٣}−٦ن^{٢}+١٢ن+١٥، أثبت أن الجسم في حالة ابتعاد مستمرة عن نقطة الإنطلاق وأنه يتوقف مرة واحد فقط.

✍ **الحل:** الجسم في حالة ابتعاد مستمرة يعني أن: ع > ٠

لكن ع= فَ= ٣ن^{٢}−١٢ن+١٢ ⇐ ن^{٢}−٤ن+٤=٠ ⇐ (ن−٢)^{٢}=٠ ⇐ ن=٢

إذن الجسم يتوقف عن الحركة عندما ن=٢

لكن ع$|_{ن=٣}$ = ٩−١٢+٤=(+)١ ، ع$|_{ن=١}$ = ١−٤+٤=(+)١ ،، ∴ الجسم في حالة ابتعاد مستمرة

📖 **مثال٥:** جسم يتحرك وفق معادلة الحركة ف(ن)=ك ن^{٢}−ن^{٣} ، إذا كان تسارع الجسم بعد ثانية واحدة

يساوي ١٠م/ث^{٢} ، أوجد سرعة الجسم بعد ثانيتين؟

✍ **الحل:** ع=٢ك ن−٣ن^{٢}

لكن ت$|_{ن=١}$ = ١٠ ⇐ ت=عَ=٢ك−٦ن ← ٢ك−٦ن=١٠ ، **إذن** ت$|_{ن=١}$ = ٢ك−٦=١٠

⇐ ٢ك=١٦ ⇐ ك=٨

∴ ع= ١٦ن−٣ن^{٢} ← ع$|_{ن=٢}$ = ٣٢−١٢ = ٢٠

📖 **مثال٦: يتحرك جسم على المستوى البياني ، بحيث تكون إحداثيات توقفه عن نقطة الأصل وفق العلاقة**

٢ن^{٣}−٦ن^{٢}+٦ن+١٠ ، **أوجد:**

(١) المسافة والسرعة بعد ثانيتين.

(٢) المسافة عندما تنعدم السرعة.

(٣) التسارع إذا كانت السرعة = ١٦م/ث.

(٤) السرعة إذا كان التسارع = ٤م/ث^{٢}.

(٥) معادلة حركة الجسم من نقطة انطلاقه.

✍ **الحل:**

(١) **ف**$|_{ن=٢}$ = ٢×٢^{٣}−٦×٤+١٢+١٠=١٤ ، ع$|_{ن=٢}$ = (٦ن^{٢}−١٢ن+٦)$|_{ن=٢}$ = ٦

(٢) **ف**$|_{ع=٠}$ = ؟؟

لكن عندما تنعدم السرعة فإن ع= ٦ن^{٢}−١٢ن+٦=٠ ⇐ ن^{٢}−٢ن+١=٠ ⇐ (ن−١)^{٢}=٠ ⇐ ن=١

∴ **ف**$|_{ع=٠}$ = **ف**$|_{ن=١}$ =٢−٦+٦+١٠=١٢

(٣) **ت**$|_{ع=١٦}$ =؟؟

لكن ع= ن^{٢}−٢ن+١ ⇐ ن^{٢}−٢ن+١=١٦ ⇐ ن^{٢}−٢ن−١٥=٠ ⇐ (ن−٥)(ن+٣)=٠ ⇐ ن=٥، −٣

ولأن الزمن لا يمكن أن يكون سالباً فإن ن=٥

∴ **ت**$|_{ع=١٦}$ = **ت**$|_{ن=٥}$ = (٢ن−٢)$|_{ن=٥}$ = ١٠−٢=٨

(٤) ع$|_{ت=٤}$ =؟؟

لكن ت=٢ن−٢ = ٤ ⇐ ٢ن=٦ ⇐ ن=٣

∴ ع$|_{ت=٤}$ = ع$|_{ن=٣}$ = ٩−٦+١=٤

(٥) **معادلة الحركة هي: ف**(ن)=ن^{٣}−٦ن^{٢}+١٢ن

📖 **مثال٧: قذف جسم عمودياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض وفق معادلة الحركة $ف(ن)=٢٤ن-٣ن^{٢}$**

أوجد:

① أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

② الوقت الذي يستغرقه الجسم حتى يرجع إلى الأرض.

③ السرعة التي قذف بها الجسم.

④ أثبت أن الجسم يسير بسرعتين متساويتين بالقيمة ومختلفتين بالإشارة عندما يكون الجسم على ارتفاع ٣٦م.

✍ **الحل:**

① أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم أي أن $ع=٠ \Leftarrow ٢٤-٦ن=٠ \Leftarrow ٦ن=٢٤ \Leftarrow ن=٤$

$\therefore ف(ن)\big|_{ن=٤} = ٢٤\times٤-٣\times١٦=١٢٠م$

② الوقت الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى الأرض = زمن الصعود + زمن الهبوط = $٤+٤=٨$

إذن الجسم يستغرق ٨ ثوان ليعود إلى سطح الأرض.

③ السرعة التي قذف بها الجسم يعني أن $(ن=٠)$ **، لكن** $ع= ٢٤-٦ن = ٢٤م/ث$

④ $ف=٣٦ \Leftarrow ٢٤ن-٣ن^{٢}=٣٦ \Leftarrow ن^{٢}-٨ن+١٢=٠ \Leftarrow (ن-٦)(ن-٢)=٠ \Leftarrow ن=٢، ٦$

$ع=ف' = ٢٤-٦ن$

☜ $ن=٢: ع\big|_{ن=٢} = (٢٤-٦ن)\big|_{ن=٢} = ٢٤-١٢ = ١٢$

☜ $ن=٦: ع\big|_{ن=٦} = (٢٤-٦ن)\big|_{ن=٦} = ٢٤-٣٦=-١٢$

إذن الجسم يسير بسرعتين متساويتين بالقيمة ومختلفتين بالإشارة عندما يكون الجسم على ارتفاع ٣٦م.

📖 **مثال٨: قذف جسم عمودياً للأعلى بسرعة ابتدائية ثابتة مقدارها $(ع_{٠})$ وفق معادلة الحركة**

$ف(ن)=(ع_{٠})ن-١٦ن^{٢}$ ، فإذا كان أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم هو ٤٩قدم،أوجد قيمة $(ع_{٠})$؟

✍ **الحل: لأن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم يعني أن $(ع > ٠)$ فإن :** $ع= ع_{٠}-٣٢ن=٠ \Leftarrow ع_{٠}=٣٢ن$

والتعويض في معادلة الحركة ينتج أن: $ف(ن)=٣٢ن^{٢}-١٦ن^{٢} = ١٦ن^{٢}$

لكن كان أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم هو٤٩: $\therefore ٤٩=١٦ن^{٢} \Leftarrow ن^{٢}=\frac{٤٩}{١٦} \Leftarrow ن=\frac{٧}{٤}$

$\therefore ع_{٠}=٣٢\times\frac{٧}{٤} = ٨\times٧ = ٥٦م/ث$

📖 **مثال٩: جسمان يتحركان بنفس الاتجاه وانطلقا من نفس النقطة وفق معادلتي الحركة**

$ف_{١}(ن)=ن^{٢}+٦ن-٧$، $ف_{٢}(ن)=ن^{٢}+٥$ ،أوجد سرعة كل منهما لحظة التقائهما وما هي المسافة

المقطوعة من قبل كل منهما؟

الحل: ف١(ن)=ف٢(ن) ⇐ ن^{٢}+٦ن−٧=ن^{٢}+٥ ⇐ ٦ن=١٢ ⇐ ن=٢

ع١|ن=٢ = فَ١|ن=٢ = (٢ن+٦)|ن=٢ = ٤+٦=١٠م/ث

ع٢|ن=٢ = فَ٢|ن=٢ = (٢ن)|ن=٢ = ٤م/ث

ف١|ن=٢ = ٤+١٢−٧=٩م ، ف٢|ن=٢ = ٤+٥=٩م

مثال١٠: قذف جسم عمودياً لأعلى من ارتفاع ٤٨م وفق معادلة الحركة ف(ن)=٣٦ن−٩ن^{٢}−٩، فجد:

① أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض.

② سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٣٠م من سطح الأرض.

③ سرعة الجسم لحظة ارتطامه بسطح الأرض.

④ معادلة حركة الجسم من سطح الأرض.

الحل:

① ع=٠ ⇐ ع=٣٦−١٨ن=٠ ⇐ ١٨ن=٣٦ ⇐ ن=٢

ف|ن=٢ = ٣٦×٢−٩×٤−٩ = ٢٧م ، إذن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض هو ٢٧+٤٨=٧٥م

② ف(ن)=٣٦ن−٩ن^{٢}−٩ = ٤ن−ن^{٢}−١ = ٠ ⇐ ن=٢+√٥

∴ ع|ن=٢+√٥ = ٣٦−١٨(٢+√٥) = −١٨√٥ م/ث

③ ف(ن)=−٤٨ ، ∴ ٣٦ن−٩ن^{٢}−٩=−٤٨ ⇐ ٣٦ن−٩ن^{٢}+٣٩=٠ ⇐ ٣ن^{٢}−١٢ن−١٣=٠

⇐ ن=٢+$\frac{٧}{٣}$ ، لكن ع=٣٦−١٨ن ⇐ ع|ن=٢+$\frac{٧}{٣}$ = ٣٦−١٨(٢+$\frac{٧}{٣}$)=−٤٢

④ معادلة الحركة من سطح الأرض: ف(ن)=٣٦ن−٩ن^{٢}−٩+٤٠ ⇐ ف(ن)=٣٦ن−٩ن^{٢}+٣١

مثال١١: قذف جسم عمودياً للأعلى وفق معادلة الحركة ف١(ن)=٥٠ن−٥ن^{٢}، وفي نفس اللحظة أُسقط جسم آخر من السكون ومن ارتفاع ١٠٠م وفق المعادلة ف٢(ن)=٥ن^{٢}، أوجد سرعة كل منهما لحظة التقائهما؟

الحل: ف١+ف٢=١٠٠ ⇐ ٥٠ن−٥ن^{٢}+٥ن^{٢}=١٠٠ ⇐ ن=٢

∴ ع١=فَ١|ن=٢ = (٥٠−١٠ن)|ن=٢ = ٥٠−٢٠=٣٠

ع٢=فَ٢|ن=٢ = (١٠ن)|ن=٢ = ٢٠

مثال١٢: جسم يتحرك وفق معادلة الحركة ف(ن)=$\sqrt{3}$ جا ن − جتا ن، أوجد السرعة عندما ينعدم التسارع بحيث أن ن زاوية في الربع الأول؟

الحل: ع |ت=٠ =؟؟

ع = فَ = $\sqrt{3}$ جتا ن + جا ن ، ت=عَ=−$\sqrt{3}$ جا ن + جتا ن =٠ ⇐ جتا ن = $\sqrt{3}$ جا ن

⇐ $\frac{\text{جتا ن}}{\text{جتا ن}}=\sqrt{3}\,\frac{\text{جا ن}}{\text{جتا ن}}$

⇐ $\sqrt{3}$ ظا ن = ١ ⇐ ظا ن = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⇐ ن= $\frac{\pi}{6}$

∴ ع |ن=$\frac{\pi}{6}$ = $\sqrt{3}$ جتا$\frac{\pi}{6}$ + جا $\frac{\pi}{6}$ ⇐ $\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{1}{2}$ = ٢

مثال١٣: قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض ، فإذا كانت المسافة التي يقطعها الجسم بالأقدام بعد ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة ف(ن)=٦٤ن−١٦ن^{2} ، أثبت أن الجسم يفقد نصف سرعته الابتدائية وهو على ارتفاع ٤٨ قدم؟

الحل: ف(ن)=٦٤ن−١٦ن^{2} = ٤٨ ⇐ ن^{2}−٤ن+٣=٠ ⇐ (ن−٣)(ن−١)=٠ ⇐ ن=١،٣

لكن السرعة الابتدائية: ع|ن=٠=(٦٤−٣٢ن)|ن=٠ = ٦٤ ⇐ ع٠=٦٤

☜ ع|ن=١ =(٦٤−٣٢ن)|ن=١ = ٣٢ =نصف السرعة الابتدائية

☜ ع|ن=٣ =(٦٤−٣٢ن)|ن=٣ = ٦٤−٩٦=−٣٢= نصف السرعة الابتدائية

إذن الجسم يفقد نصف سرعته عندما يكون على ارتفاع ٤٨ قدم.

مثال١٤: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن)=ن^{3}+ن+٢٠ ، أوجد:

① السرعة المتوسطة ، ن ∈ [٠ ، ١]

② السرعة عندما ن=٢

③ التسارع المتوسط ، ن ∈[٠,٢]

④ التسارع اللحظي عندما ن=٢

الحل:

① عَ = $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}}$ = $\frac{\text{ف}(1)-\text{ف}(0)}{1}$ = $\frac{22-20}{1}$ = ٢

② ع |ن=٢ = فَ |ن=٢ = (٣ن^{2}+١)|ن=٢ = ١٢+١ = ١٣

③ تَ = $\frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{ن}}$ = $\frac{\text{ع}(2)-\text{ع}(0)}{2}$ = $\frac{13-1}{2}$ = $\frac{12}{2}$ = ٦

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

④ ت = عَ = $(٦ن)|_{ن=٢}$ = ١٢

📖 **مثال١٥:** إذا كان ف(ن)=$(ن^٢+٢)^٣$ ، أوجد التسارع عندما ن = ١؟

✍ **الحل:** ع= ٣$(ن^٢+٢)^٢$×٢ن=٦ن$(ن^٢+٢)^٢$=٦ن$(ن^٤+٤ن^٢+٤)$=٦$ن^٥$+٢٤$ن^٣$+٢٤ن

ت = عَ = ٣٠$ن^٤$+٧٢$ن^٢$+٢٤ ⇐ ت$|_{ن=١}$ = ٣٠ +٧٢+٢٤ =١٢٦

📖 **مثال١٦:** يتحرك جسم وفقاً للعلاقة ف(ن)= $ن^٣$ ، إذا كانت السرعة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٢] تساوي سرعته اللحظية عندما ن=٢ ، أوجد قيمة الثابت ٢ ؟

✍ **الحل:** $\overline{ع}$ = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(أ)-ف(٠)}{أ}$ = $\frac{٢^٣}{٢}$ = $٢^٢$

لكن $\overline{ع}$ = ع$|_{ن=٢}$ ⇐ $٢^٢$=$(٣ن^٢)|_{ن=٢}$ ⇐ $٢^٢$=١٢ ⇐ ٢=$\sqrt{١٢}$=٢$\sqrt{٣}$

📖 **مثال١٧:** جسم يتحرك وفقاً لمعادلة الحركة ف(ن)= جا٢ن ،أوجد السرعة عندما ينعدم التسارع ، بحيث ٠ < ن ≤ $\frac{\pi}{٢}$؟

✍ **الحل:** ع=٢جان جتان=جا٢ن ⟵ ت = ٢جتا٢ن

لكن عندما ينعم التسارع يعني أن: ت=٠ ⇐ ٢جتا٢ن=٠ ⇐٢ن = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ ن = $\frac{\pi}{٤}$

∴ ع$|_{ن=\frac{\pi}{٤}}$ = جا٢×$\frac{\pi}{٤}$ = ١

📖 **مثال١٨:** يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن)= $جا^٤ن$ ، أوجد سرعة الجسم في اللحظة التي ينعدم فيها تسارعه لأول مرة بعد الحركة؟

✍ **الحل:** ع= ٤$جا^٣ن$ جتا ن ، ت = ٤$جا^٣ن$(-جان) + (جتان) (١٢$جا^٢ن$ جتان)

لكن عندما ينعدم التسارع فإن: ١٢$جا^٢ن$ $جتا^٢ن$-٤$جا^٤ن$ = ٠ ⇐ ١٢$جا^٢ن$ $جتا^٢ن$=٤$جا^٤ن$

⇐ $\frac{٤جا^٤ن}{٤جا^٢ن}$ = $\frac{١٢جا^٢ن×جتا^٢ن}{٤جا^٢ن}$ ⇐ ٣$جتا^٢ن$=$جا^٢ن$ ⇐ $\frac{٣جتا^٢ن}{جتا^٢ن}$ = $\frac{جا^٢ن}{جتا^٢ن}$ ⇐ ٣ = $ظا^٢ن$ ⇐ ظان= $\sqrt{٣}$ ⇐ ن = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ع$|_{ن=\frac{\pi}{٣}}$ = ٤$(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٣(\frac{١}{٢})$ = $\frac{٣}{٤}\sqrt{٣}$

📖 **مثال١٩:** يتحرك جسم على خط مستقيم وفقاً للمعادلة الزمنية ف(ن)=$ن^٣$-٩$ن^٢$+٢٦ن-٤ ، أوجد التسارع عندما يقطع الجسم مسافة ٢٠ متر؟

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

✍ **الحل:** ف(ن)=ن^{٣}−٩ن^{٢}+٢٦ن−٤ ⇐ ن^{٣}−٩ن^{٢}+٢٦ن−٤ = ٢٠ ⇐ ن^{٣}−٩ن^{٢}+٢٦ن−٢٤=٠

العدد ٣ يحقق المعادلة ، ومن خلال القسمة التركيبية ينتج أن:

ن^{٣}−٩ن^{٢}+٢٦ن−٢٤= (ن−٣)(ن^{٢}−٦ن+٨)=٠

⇐ (ن−٣)(ن−٢)(ن−٤)=٠ ⟵ ن=٢، ٣، ٤

ت =عَ ، لكن ع= فَ = ٣ن^{٢}−١٨ن+٢٦

ت = ٦ن−١٨

☜ ت|$_{ن=٢}$ = (٦ن−١٨)|$_{ن=٢}$ = ١٢ − ١٨= −٦

☜ ت|$_{ن=٣}$ =(٦ن−١٨)|$_{ن=٣}$ = ١٨−١٨=٠

☜ ت|$_{ن=٤}$ =(٦ن−١٨)|$_{ن=٤}$ = ٢٤−١٨ = ٦

📖 **مثال٢٠:** تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم وفق معادلة الحركة ف(ن)= √ن (٢٧ − ن) ، أثبت أن النقطة تبدأ بالعودة إلى النقطة التي بدأت منها الحركة بعد مرور ٩ ثوان؟

✍ **الحل:** عندما يبدأ الجسم بالعودة فإن ع= ٠

$$ع= \sqrt{ن}\times −١ + (٢٧ − ن) (\frac{١}{٢\sqrt{ن}}) ⇐ −\sqrt{ن} + (٢٧ − ن) (\frac{١}{٢\sqrt{ن}}) =٠ ⇐ ن = \frac{(٢٧−ن)^{٢}}{٤ن}$$

⇐ ٤ن^{٢}=(٢٧−ن)^{٢} ⇐ ٢ن=٢٧−ن ⇐ ٣ن=٢٧ ⇐ ن=٩

📖 **مثال٢١:** قذف جسم للأعلى حسب العلاقة ف(ن)= ص ن(٢ − ن) ، وكان أقصى بعد يصله الجسم هو ٨م أوجد قيمة ص؟

✍ **الحل:** أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم يعني: ع=٠ ، ف(ن)=٢ن ص − ص ن^{٢}

لكن ع= فَ = ٢ص−٢ن ص ⇐ ٢ص−٢ن ص=٠ ⇐ ٢ص=٢ن ص ⇐ ن=١

ف|$_{ن=١}$ = ٢ص−ص =٨ ⇐ ص=٨

📖 **مثال٢٢:** قذف جسم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢م/ث وفق معادلة الحركة ف(ن)=أن^{٢}+ب ن ، إذا كان تسارعه ٨م/ث^{٢}، أوجد المسافة بعد ٣ ثوان؟

✍ **الحل:** ع|$_{ن=٠}$=٢= (٢أن+ب)|$_{ن=٠}$ ⇐ ب =٢

∴ ع= ٢أن +٢ ، ت = ٢أ=٨ ⇐ أ=٤

∴ ف=٤ن^{٢}+٢ن ⇐ ف|$_{ن=٣}$ = ٣٦+٦=٤٢م

📖 **مثال٢٣:** إذا كان ف(ن)=ن^{٣}−٣ن^{٢}+٦، أوجد:

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

① الفترة التي تكون السرعة فيها موجبة.

② الفترة التي تكون السرعة فيها سالبة.

③ الفترة التي يكون فيها التسارع موجباً.

④ الفترة التي يكون فيها التسارع سالباً.

✍ **الحل:** ع = ٣ن٢ − ٦ن = ٠ ⇐ ٣ن(ن − ٢) = ٠ ⇐ ن = ٠ ، ٢

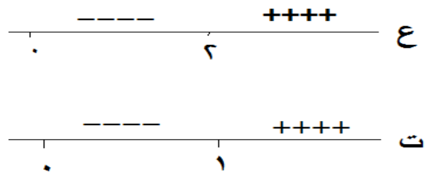
① ع > ٠ إذا كان ن > ٢

② ع < ٠ إذا كان ٠ < ن < ٢

ت = ٦ن − ٦ = ٠ ⇐ ن = ١

③ ت > ٠ إذا كان ن > ١

④ ت < ٠ إذا كان ٠ < ن < ١



📖 **مثال٢٤:** إذا كان ع٣ = ع**ف**+ن٢ ، أوجد التسارع عندما ع = ١ عند بداية الحركة؟

✍ **الحل:** بداية الحركة يعني (ن=٠) ، ١= **ف**+٠ ⇐ **ف** = ١

٣ع٢ × عَ = **ف**×عَ + ع×**فَ** + ٢ن ⇐ ٣(١)٢× ت = ١× ت + ١ × ع + ٢×٠ ⇐ ٣ت = ت+١ ⇐ ت= ½

📖 **مثال٢٥:** من سطح بناية ، فَلَتَ شخص جسم من السكون وفق العلاقة الزمنية ف١(ن)=١٦ن٢، وفي نفس اللحظة رمى شخص آخر جسم عمودياً للأسفل بسرعة ابتدائية تصل إلى ٢٠م/ث حسب العلاقة الزمنية ف٢(ن)=٢٠ن+١٦ن٢ إذا علمت أن الجسم الأول ارتطم بعد ٠,٥ ثانية من ارتطام الجسم الثاني بالأرض أوجد:

① سرعة كل من الجسمين لحظة ارتطامهما بالأرض.

② ارتفاع البناية.

✍ **الحل:** ف١(ن)=١٦ن٢ ⇐ ع١(ن)=٣٢ن ، **لكن ف١**(ن+½)=**ف٢**(ن) ⇐ ١٦(ن+½)٢=٢٠ن+١٦ن٢

⇐ ٤ن=٤ ⇐ ن=١

① ع١|ن=١ = ٣٢×١,٥=٤٨ ، ع٢|ن=١ = ٢٠+٣٢×١=٢٠+٣٢=٥٢

② ف١(١,٥)=١٦(١,٥)٢=٣٦ أو ف٢(١)=٢٠+١٦=٣٦

📖 **مثال٢٦:** قذف جسم إلى الأعلى حسب العلاقة ف(ن)=ن٣+٨ن٢+٦ن، أوجد:

① السرعة الابتدائية.

② التسارع الابتدائي.

✍ **الحل:** ع|ن=٠ =؟؟ ، ت|ن=٠ =؟؟

① ع(ن)=٣ن² +١٦ن+٦ ⟵ ع(ن)|ن=٠ = ٦

② ت(ن)=٦ن+١٦ ⟵ ت(ن)|ن=٠ =١٦

📖 **مثال٢٧:** إذا كان ع(ن) = √ف(ن)، حيث ع هي السرعة ، ف هي المسافة ، فجد التسارع؟

✍ **الحل:** ت =عَ : لكن عَ = $\frac{\frac{دف}{دن}}{٢\sqrt{ف}}$ = $\frac{ع}{٢ع}$ = $\frac{١}{٢}$ = ت(ن)

📖 **مثال٢٨:** قذف جسم إلى الأعلى من سطح الأرض وفقاً للمعادلة الزمنية ف(ن)=٣٠ن−٥ن²، أوجد سرعة الجسم عندما يكون على بعد ٢٥م من سطح الأرض؟

✍ **الحل:** ع=٣٠−١٠ن ، لكن ف(ن)=٢٥ ⇐ ٣٠ن−٥ن²=٢٥ ⇐ ن²−٦ن+٥=٠ ⇐ (ن−٥)(ن−١)=٠

⇐ ن=١،٥

∴ ع|ن=١ = ٣٠−١٠=٢٠ ، ع|ن=٥ = ٣٠−٥٠= −٢٠

📖 **مثال٢٩:** تحرك جسم حسب العلاقة ف(ن)=ن²−٤ن+٩، حدد متى تكون سرعته موجبة ومتى تكون سالبة؟

✍ **الحل:** ع= ٢ن−٤ ⇐ ٢ن−٤=٠ ⇐ ٢ن=٤ ⇐ ن=٢

ع|ن=٣ = ٦−٤=٢ > ٠ ⟵ تكون السرعة موجبة عندما يكون ن > ٢

ع|ن=١ = ٢−٤=−٢ < ٠ ⟵ تكون السرعة سالبة عندما يكون ن < ٢

📖 **مثال٣٠:** من عمارة ، قذف جسم للأعلى حسب العلاقة ف(ن)=٣٠ن−٥ن² ، وكانت سرعة الجسم عند وصوله الأرض تساوي ٦٠م/ث ، أوجد ارتفاع العمارة؟

✍ **الحل:** نفرض أن طول البناية هو ل فستكون معادلة الحركة هي: ف(ن)=٣٠ن−٥ن²+ل ، لكن وقت وصول الجسم إلى سطح الأرض يكون ف(ن)=٠ ⟵ ف(ن)=٣٠ن−٥ن²+ل=٠ ، لكن ع|ف=٠ = −٦٠

∴ ٣٠−١٠ن=−٦٠ ⇐ ٩٠=١٠ن ⇐ ن=٩

∴ ف(ن)|ن=٩ = ٠ ⇐ ٣٠×٩−٥×٩²+ل=٠ ⇐ ل=١٣٥

📖 **مثال٣١:** إذا كان $ع^2 = 1 - ف^3$، بين أن تسارع الجسم يساوي $-\frac{3}{2}$ عند انعدام السرعة.

✍ **الحل:** نشتق ضمني:

$(2ع)\ عَ = (-3ف^2)\ فَ \leftarrow 2ع \times ت = -3ف^2 \times ع \leftarrow 2ت = -3ف^2$

لكن $ع = 0 \Leftarrow ع^2 = 1 - ف^3 \Leftarrow 1 - ف^3 = 0 \Leftarrow ف^3 = 1 \Leftarrow ف = 1$

$\therefore 2ت = -3ف^2 \Leftarrow 2ت = -3 \times 1 \Leftarrow ت = -\frac{3}{2}$

📖 **مثال٣٢:** قذف جسم إلى الأعلى حسب العلاقة $ف(ن) = 16ن - ن^2$، أوجد الزمن الذي تكون فيه السرعة تساوي نصف السرعة التي قذف بها؟

✍ **الحل:** $ع = (\frac{1}{2} \times ع_.)\,|_{ن=.} \Leftarrow (16 - 2ن)\,|_{ن=.} = 16 \Leftarrow 16 \times \frac{1}{2} = 16 - 2ن \Leftarrow -2ن = -8 \Leftarrow ن = 4$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس الثالث: المعدّلات المرتبة بالزمن

📖 **مثال١: جسم يتحرك وفق المعادلة ع^{٢}= ف^{٣} أوجد التسارع إذا كانت السرعة ٨م/ث؟**

✍ **الحل:** ٢ع × عَ = ٣ف^{٢}× فَ ، لكن ع = ٨ ⇐ ٦٤ = ف^{٣} ⇐ ف = ٤

∴ ٢ع ت = ٣ف^{٢}ع ⇐ ٢ت = ٣ف^{٢} ⇐ ٢ت = ٣(٤)^{٢} ⇐ ٢ت = ٤٨ ⇐ ت = ٢٤

📖 **مثال٢: جسم يتحرك على منحنى ما بحيث تتناسب السرعة تناسباً طردياً مع الجذر التربيعي للمسافة ، أثبت أن الجسم يسير بتسارع ثابت.**

✍ **الحل:** السرعة تناسباً طردياً مع الجذر التربيعي للمسافة يعني أن: ع = م$\sqrt{\text{ف}}$

∴ ت = م × $\dfrac{\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{\text{ف}}}$ = م × $\dfrac{\text{ع}}{٢\sqrt{\text{ف}}}$ = م × $\dfrac{\text{م}\sqrt{\text{ف}}}{٢\sqrt{\text{ف}}}$ = $\frac{١}{٢}$م^{٢}

📖 **مثال٣: إناء على شكل مخروط قائم قاعدته للأعلى ورأسه للأسفل نصف قطر قاعدته ٨سم وارتفاعه ١٢سم تصب فيه حنفية بمعدل ٢٤سم^{٣}/ث أوجد:**

① معدل ارتفاع الماء في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع الماء ٦سم.

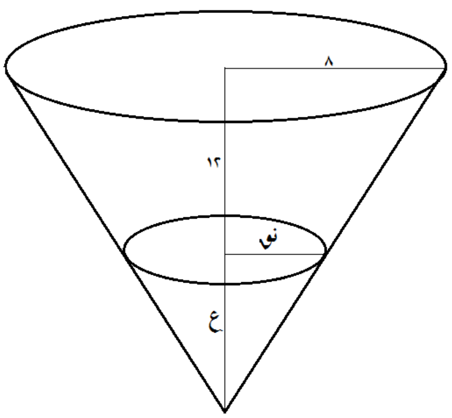
② معدل تغير مساحة سطح السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل ٦سم.

✍ **الحل:**

① $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ٢٤ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}\Big|_{\text{ع}=٦}$ = ؟؟

ح = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}\pi$($\frac{٢}{٣}$ع)^{٢}ع = $\frac{٤}{٢٧}\pi$ ع^{٣} ، **ومن تشابه المثلثين ينتج أن:**

$\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{\text{نق}}{\text{ع}}$ ⟵ $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{\text{نق}}{\text{ع}}$ ⟵ $\boxed{\text{نق} = \frac{٢}{٣}\text{ع}}$



ح = $\frac{٤}{٢٧}\pi$ ع^{٣}

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}\Big|_{\text{ع}=٦}$ = $\frac{٤}{٩}\pi$ × ع^{٢} × عَ

٢٤ = $\frac{٤}{٩}\pi$(٣٦)عَ ⇐ ٢٤ = ١٦π عَ ⇐ عَ = $\frac{٣}{٢\pi}$

② $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\Big|_{\text{نق}=٦}$ = ؟؟

لكن م = π نق^{٢} ⇐ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٢π نق $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

ولكن $\text{نق} = \frac{٢}{٣}\text{ع} \Leftarrow \text{ع} = \frac{٣}{٢}\text{نق}$

$$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} \Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{٢}{٣}\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}\left(\frac{٣}{٢}\text{نق}\right) = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \Leftarrow ٢٤ = ٣٦\pi\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \Leftarrow \boxed{\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{٤}{٦\pi} = \frac{٢}{٣\pi}}$$

$$\therefore \left.\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right|_{\text{نق}=٦} = ٢\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = ٢\pi\times٦\times\frac{٢}{٣\pi} = ٨$$

📖 **مثال٤:** إناء على شكل مخروط قائم قاعدته للأعلى ورأسه للأسفل وارتفاعه يساوي قطر قاعدته ، يتسرب منه السائل بحيث يكون معدل تغير نصف قطر السائل يساوي ١٠سم/٢د أوجد معدل خروج السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل يساوي ٦سم؟

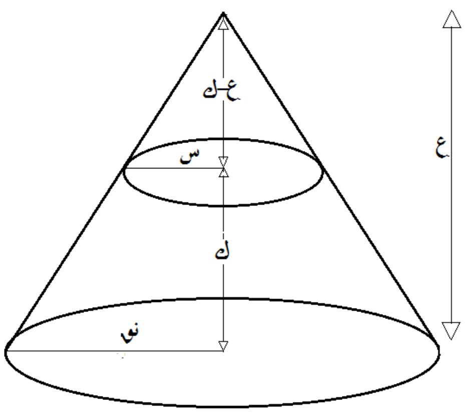
✍ **الحل:** $\text{ع} = \text{ق} = ٢\text{نق}$ ، $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = -١٠/\text{دقيقتين} \Leftarrow \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = -٥/\ \text{دقيقة}$ ، $\left.\frac{\text{دح}}{\text{دن}}\right|_{\text{نق}=٦} = ؟؟$

$$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} = \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}(٢\text{نق}) = \frac{٢}{٣}\pi\,\text{نق}^{٣}$$

$$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٢\pi\,\text{نق}^{٢}\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = ٢\pi\times٣٦\times-٥ = -٣٦٠\pi\,\text{سم}^{٣}/\text{د}$$

📖 **مثال٥:** مخروط قائم ارتفاعه يساوي قطر قاعدته ، صُبّ فيه الماء ، فإذا كانت النسبة بين معدل تغير حجم الماء إلى معدل تغير ارتفاعه هو $\pi\,\text{ك}^{٢}$ ، أثبت أن $\text{ع} = ٣\text{ك}$، حيث ك ارتفاع السائل؟

✍ **الحل:** $\dfrac{\frac{\text{دح}}{\text{دن}}}{\frac{\text{دك}}{\text{دن}}} = \pi\,\text{ك}^{٢}$ ، $\text{ع} = ٢\text{نق}$



ح = **حجم المخروط الكلي – حجم المخروط الفارغ**

$= \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} - \frac{١}{٣}\pi\,\text{س}^{٢}(\text{ع}-\text{ك})$ ، **ومن التشابه ينتج أن:**

$$\frac{\text{نق}}{\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ع}-\text{ك}} \Leftarrow \frac{\text{نق}}{٢\text{نق}} = \frac{\text{س}}{\text{ع}-\text{ك}} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}(\text{ع}-\text{ك})}$$

$$= \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} - \frac{١}{٣}\pi\left(\frac{\text{ع}-\text{ك}}{٢}\right)^{٢}(\text{ع}-\text{ك})$$

$$= \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} - \frac{١}{١٢}\pi(\text{ع}-\text{ك})^{٣}$$

$$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٠ - \frac{٣}{١٢}\pi(\text{ع}-\text{ك})^{٢}\times-\frac{\text{دك}}{\text{دن}} = \frac{١}{٤}\pi(\text{ع}-\text{ك})^{٢}\times\frac{\text{دك}}{\text{دن}}$$

$$\dfrac{\frac{\text{دح}}{\text{دن}}}{\frac{\text{دك}}{\text{دن}}} = \frac{١}{٤}\pi(\text{ع}-\text{ك})^{٢}$$

$\pi ك^2 = \frac{1}{4}\pi(ع-ك)^2 \Leftarrow ك = \frac{1}{2}(ع-ك) \Leftarrow ٢ك = ع-ك \Leftarrow ع = ٣ك$

📖 **مثال٦:** إناء على شكل مخروط قائم قاعدته للأعلى ورأسه للأسفل وزاوية رأسه ٩٠ تصب فيه حنفية بمعدل جـ م^3/ث فإذا كان معدل ارتفاع السائل ٦م/ث أوجد قيمة الثابت جـ في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع السائل ٤م؟

✍ **الحل:** $\frac{دح}{دن} = جـ$ ، $\frac{دع}{دن}\Big|_{ع=٤} = ٦$ ، جـ = ؟؟

$ح = \frac{1}{3}\pi نق^2 ع = \frac{1}{3}\pi ع^3$

لكن $\frac{نق}{ع} = \frac{س}{٤} =$ ظا٤٥ $= ١ \Leftarrow نق = ع$

$\frac{دح}{دن} = \pi ع^2 \frac{دع}{دن}$

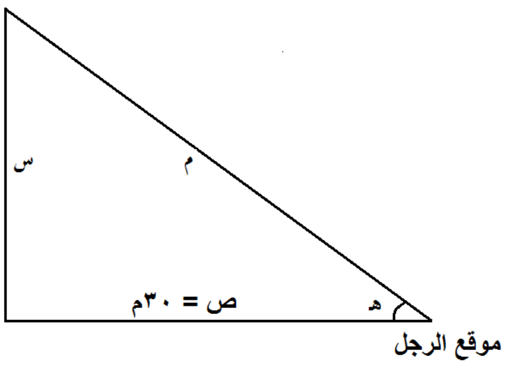
$جـ = \pi(١٦)(٦) \Leftarrow \boxed{جـ = ٩٦\pi}$

📖 **مثال٧:** جسم على بعد ٣٠م من رجل، بدأ بالارتفاع عمودياً للأعلى بسرعة ٤م/ث أوجد:

① معدل ابتعاد الجسم عن الرجل في اللحظة التي يكون ارتفاعه ٢٠م؟

② معدل تغير زاوية ارتفاع نظر الرجل في اللحظة التي يكون فيها الجسم على ارتفاع ٢٠م؟

✍ **الحل:**



① $\frac{دس}{دن} = ٤$ ، $\frac{دم}{دن}\Big|_{س=٢٠} =$ ؟؟

$م = \sqrt{س^2+ص^2}$

$م^2 = س^2+ص^2$

$٢م\frac{دم}{دن} = ٢س\frac{دس}{دن} + ٠$

$\sqrt{س^2+ص^2} \times \frac{دم}{دن} = ٢٠ \times ٤ \Leftarrow \sqrt{٤٠٠+٩٠٠} \times \frac{دم}{دن} = ٨٠ \quad \frac{٨٠}{\sqrt{١٣٠٠}}$

② $\frac{س}{ص} = \frac{س}{٣٠} =$ ظا هـ

$\Leftarrow$ س = ٣٠ظا هـ

$\Leftarrow \frac{دس}{دن} = ٣٠\underline{قا}^2هـ \times \frac{دهـ}{دن}$

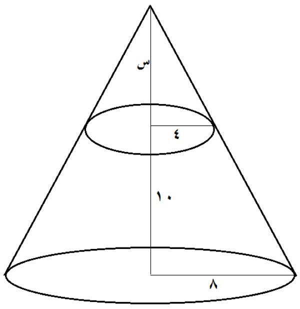
لكن س = ٢٠

∴ $\frac{س}{ص}$ = ظا هـ ⇐ ظا هـ = $\frac{٢٠}{٣٠}$ ⇐ ظا^{٢}هـ = $\frac{٤}{٩}$ ⇐ ظا^{٢}هـ + ١ = ١ + $\frac{٤}{٩}$ ⇐ $\boxed{قا^٢ هـ = \frac{١٣}{٩}}$

⇐ ٥ = ٣٠$(\frac{١٣}{٩})$ × $\frac{دهـ}{دن}$

⇐ $\frac{دهـ}{دن}$ = $\frac{٣}{٢٦}$

📖 **مثال٨: فنجان على شكل مخروط ناقص ارتفاعه ١٠سم ونصف قطر قاعدته الكبرى ٨سم والصغرى ٤سم ، صب فيه الماء بمعدل ٤٠سم^٣/ث أوجد معدل تغير ارتفاع السائل في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع السائل ٩سم؟**



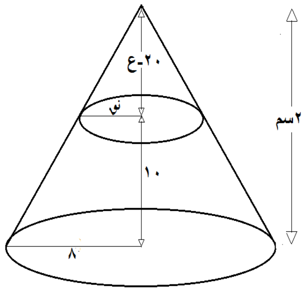
✍ **الحل: نكمل المخروط أولاً ومن ثم نجد حجمه:**

$\frac{٨}{١٠+س}$ = $\frac{٤}{س}$ ⇐ ٨س = ٤س+٤٠ ⇐ $\boxed{س = ١٠}$

∴ الارتفاع الكلي للمخروط = ١٠+١٠ = ٢٠

ح$_{سائل}$ = ح$_{كلي}$ − ح $_{فراغ}$

= $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢}ع − $\frac{١}{٣}\pi$ نَق^٢(٢٠−ع)



لكن $\frac{نَق}{٢٠-ع}$ = $\frac{٨}{٢٠}$ ⇐ ٥نَق = ٢(٢٠−ع) ⇐ $\boxed{نَق = \frac{٢}{٥}(٢٠-ع)}$

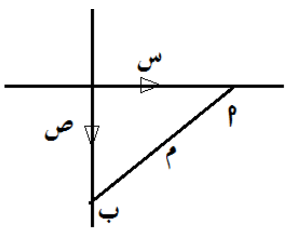
∴ ح = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢}ع − $\frac{٤}{٧٥}\pi$(٢٠−ع)^٣

$\frac{دح}{دن}$ = ٠ − $\frac{٤}{٢٥}\pi$(٢٠−ع)^٢ × − $\frac{دع}{دن}$

٤٠ = $\frac{٤}{٢٥}\pi$(٢٠−٩)^٢ × $\frac{دع}{دن}$ ⇐ $\frac{دع}{دن}$ = $\frac{٢٥٠}{١٢١\pi}$

📖 **مثال٩: نقطتان ٩،ب ابتدأتا بالحركة على المستوى الديكارتي من نقطة الأصل ، بحيث أن النقطة (٩) تحركت باتجاه محور السينات الموجب بسرعة ٤ وحدة/ث والنقطة (ب) تتحرك باتجاه محور الصادات السالب بسرعة ٣وحدة/ث ، أوجد معدل ابتعادهما عن بعض بعد ٢ث؟**

✍ **الحل:** $\frac{دس}{دن}$ = ٤ ، $\frac{دص}{دن}$ = ٣ ، $\frac{دم}{دن}|_{ن=٢}$ = ؟؟



م = $\sqrt{س^٢+ص^٢}$ ⟵ م^٢= س^٢+ص^٢

⇐ ٢م $\frac{دم}{دن}$ = ٢س $\frac{دس}{دن}$ + ٢ص $\frac{دص}{دن}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

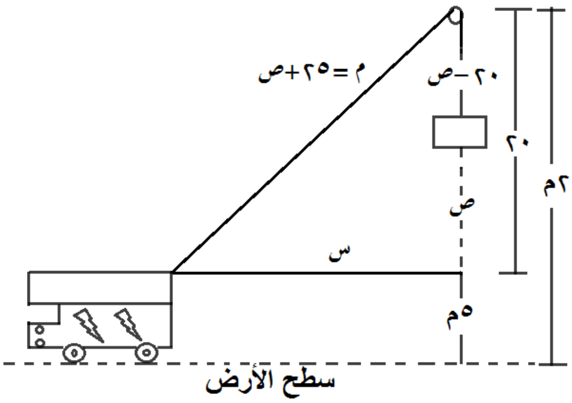
$\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} \left(\sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2}\right) = \text{س}\ \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

لكن $\text{س} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \text{ن} = ٤\times٢ = ٨$ ، $\text{ص} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \text{ن} = ٣\times٢ = ٦$

$\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} \left(\sqrt{٦٤+٣٦}\right) = ٨\times٤+٦\times٣ \Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{٥٠}{١٠} = ٥$

مثال١٠: بكرة على ارتفاع ٢٥م عن سطح الأرض حولها حبل طوله ٤٥م موصول بأحد طرفيه ثقل والطرف الآخر موصول بأعلى سيارة على ارتفاع ٥م ابتعدت السيارة عن أسفل البكرة بسرعة ٦م/ث ، أوجد معدل ارتفاع الثقل في اللحظة التي يكون فيها بعد السيارة عن أسفل البكرة ١٥م؟

الحل: $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٦$ ، م = طول الحبل – (٢٠–ص) = ٤٥ – (٢٠–ص) = ٢٥+ص



$\text{م} = \sqrt{\text{س}^2+(٢٠)^2}$

$\text{م}^2 = \text{س}^2+٤٠٠$

$٢\text{م} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = ٢\text{س} \left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right)$

$\sqrt{\text{س}^2+(٢٠)^2} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = \text{س} \left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right)$

$\sqrt{(١٥)^2+(٢٠)^2} \times \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٥\times٦$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{٩٠}{٢٥}$

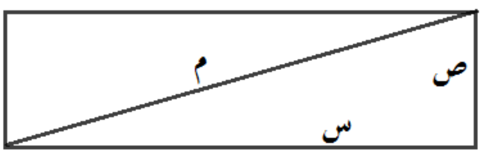
مثال١١: مستطيل يزداد أحد أبعاده بمعدل ٩سم/ث وينقص البعد الآخر بحيث يبقى المحيط ١٦سم ، أوجد معدل تغير قطره في اللحظة التي يكون فيها طول الضلع المتزايد ٥سم؟

الحل: $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٩$

المحيط = ١٦

$٢\text{ص}+٢\text{س}=١٦ \Leftarrow \text{س}+\text{ص}=٨ \longleftarrow \boxed{\text{ص}=٨-\text{س}}$

$\text{م} = \sqrt{\text{س}^2+(٨-\text{س})^2} = \sqrt{\text{س}^2+٦٤-١٦\text{س}+\text{س}^2} = \sqrt{٢\text{س}^2-١٦\text{س}+٦٤}$



$\Leftarrow \text{م}^2=٢\text{س}^2-١٦\text{س}+٦٤$

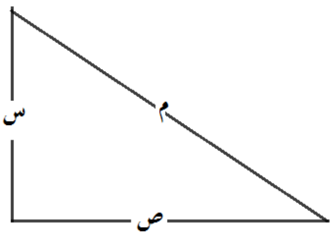
$\Leftarrow ٢\text{م} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = ٤\text{س}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) - ١٦\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right)$

$$\Leftarrow \sqrt{\text{س}^2+(8-\text{س})^2}\left(\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\right) = 2\times5\times9-8\times9$$

$$\Leftarrow \frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\sqrt{25+9} = 90-72 \Leftarrow \frac{d\text{م}}{d\text{ن}} = \frac{18}{\sqrt{34}}$$

📖 **مثال١٢:** أبحرت سفينة من أحد الشواطئ الساعة الثامنة صباحاً باتجاه الشمال بسرعة ٢٠كم/س وفي الساعة العاشرة أبحرت سفينة أخرى باتجاه الشرق بسرعة ٢٦كم/س ، أوجد معدل ابتعادهما عند الساعة الواحدة بعد الظهر؟

✍ **الحل:** $\frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = 20$ ، $\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 26$ ، $\left.\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\right|_{\text{الساعة الواحدة بعد الظهر}} = ؟؟$



لكن $\text{س} = \frac{d\text{س}}{d\text{ن}}\times\text{ن} = 20\times4 = 80$ ، $\text{ص} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}}\times\text{ن} = 26\times3 = 78$

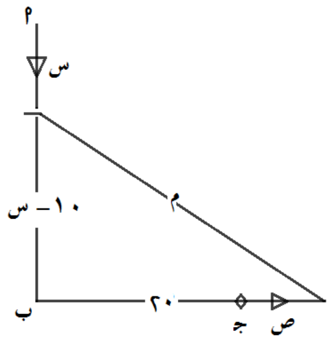
$$\text{م} = \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2} \Leftarrow \text{م}^2 = \text{س}^2+\text{ص}^2 \Leftarrow 2\text{م}\left(\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\right) = 2\text{س}\left(\frac{d\text{س}}{d\text{ن}}\right)+2\text{ص}\left(\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}}\right)$$

$$\Leftarrow \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2}\left(\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\right) = \text{س}\left(\frac{d\text{س}}{d\text{ن}}\right)+\text{ص}\left(\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}}\right)$$

$$\Leftarrow \sqrt{(80)^2+(78)^2}\times\frac{d\text{م}}{d\text{ن}} = 80\times20+78\times26 \Leftarrow \frac{d\text{م}}{d\text{ن}} \approx 3{,}5$$

📖 **مثال١٣:** ثلاثة مدن (م،ب،ج) على طريقين متعامدين في المدينة (ب)، بحيث أن المدينة (م) تبعد عن المدينة (ب) بمقدار ١٠كم ، والمدينة (ج) تبعد عن المدينة (ب) بمقدار ٢٠كم ، انطلقت سيارة من المدينة (م) باتجاه المدينة (ب) بسرعة ١٠كم/س ، وفي نفس اللحظة انطلقت سيارة أخرى من المدينة (ج) مبتعدة بسرعة ٤٠كم/س ، أوجد معدل ابتعادهما أو اقترابهما بعد ساعتين؟

✍ **الحل:** $\frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = 10$ ، $\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 40$ ، $\left.\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\right|_{\text{ن}=2} = ؟؟$



$\text{س} = \frac{d\text{س}}{d\text{ن}}\times\text{ن} = 10\times2 = 20$ ، $\text{ص} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}}\times\text{ن} = 40\times2 = 80$

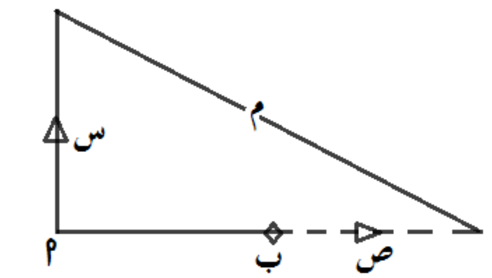
$$\text{م} = \sqrt{(10-\text{س})^2+(20+\text{ص})^2} \Leftarrow \text{م}^2 = (10-\text{س})^2+(20+\text{ص})^2$$

$$\Leftarrow 2\text{م}\left(\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\right) = 2(10-\text{س})\left(-\frac{d\text{س}}{d\text{ن}}\right)+2(20+\text{ص})\left(\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}}\right)$$

$$\Leftarrow \sqrt{(10-\text{س})^2+(20+\text{ص})^2}\times\frac{d\text{م}}{d\text{ن}} = (10-20)(-10)+(20+80)(40)$$

$\Leftarrow \frac{d\text{م}}{d\text{ن}} = \frac{410}{\sqrt{101}} \longleftarrow$ **السيارتان تبتعدان عن بعضهما**

📖 **مثال١٤:** سيارتان ، المسافة الأفقية بينهما ٣٠كم وكانت السيارة الأولى غرب السيارة الثانية وانطلقت الأولى باتجاه الشمال بسرعة ١٠كم/س والثانية باتجاه الشرق بسرعة ٥كم/س ، أوجد معدل ابتعادهما بعد ٤ساعات؟



✍ **الحل:** $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 10$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 5$

$\text{م} = \sqrt{\text{س}^2 + (30+\text{ص})^2}$

$\Leftarrow \text{م}^2 = \text{س}^2 + (30+\text{ص})^2$

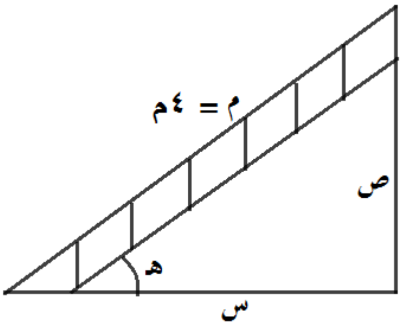
$\Leftarrow 2\text{م}\left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = 2\text{س}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) + 2(30+\text{ص})\left(\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right)$

$\Leftarrow \sqrt{\text{س}^2 + (30+\text{ص})^2} \times \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \text{س}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) + (30+\text{ص})\left(\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right)$

لكن $\text{س} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \text{ن} = 10 \times 4 = 40$ ، $\text{ص} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \text{ن} = 5 \times 4 = 20$

$\therefore \sqrt{1600 + 2500} \times \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 40 \times 10 + 50 \times 5 \Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{13}{5\sqrt{41}}$

📖 **مثال١٥:** سلم طوله ٤م يتكئ على حائط ، بدأ بالانزلاق على الأرض ، حدد الوقت الذي تتساوى سرعة انزلاقه فيه مع سرعة هبوطه وما هي زاوية ميلانه عن الأرض في تلك اللحظة؟



✍ **الحل:** $4 = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

$\Leftarrow 16 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$

$\Leftarrow 0 = 2\text{س}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) + 2\text{ص}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right) \Leftarrow \text{س}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) + \text{ص}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right) = 0$

لكن $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$\therefore \text{س}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) + \text{ص}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right) = 0 \Leftarrow \text{س}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) + \text{ص}\left(-\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) = 0 \Leftarrow \text{س}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) = \text{ص}\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) \Leftarrow \text{س} = \text{ص}$

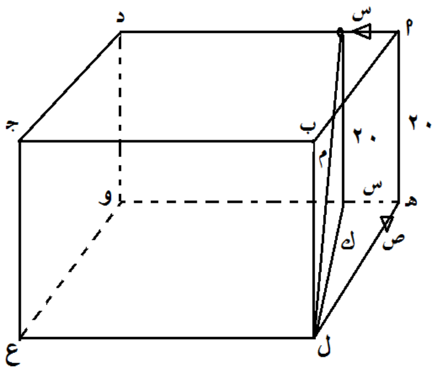
$\therefore 4 = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} \Leftarrow 4 = \sqrt{\text{س}^2 + \text{س}^2} = \sqrt{2\text{س}^2} \Leftarrow 16 = 2\text{س}^2 \Leftarrow \text{س}^2 = 8$

$\Leftarrow \text{س} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \text{ص}$

$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 1 \longrightarrow \text{هـ} = \frac{1}{4}\pi$

📖 **مثال١٦:** نملتان تحركتا على حافتي مكعب كما هو مبين في الشكل ، تحركت الأولى من (أ) باتجاه (د) بسرعة ٤وحدة/ث وتحركت الثانية من (هـ) باتجاه (ل) بسرعة ٣وحدة/ث ، أوجد معدل ابتعادهما بعد ثانيتين؟

✍ **الحل:** $\frac{ءس}{ءن} = ٤$ ، $\frac{ءص}{ءن} = ٣$ ، $\left.\frac{ءم}{ءن}\right|_{ن=٢} = ؟؟$



$م = \sqrt{(٢٠)^٢ + (ك)^٢}$ ، **لكن** $ك^٢ = س^٢ + ص^٢$

$\therefore م = \sqrt{٤٠٠ + س^٢ + ص^٢}$

$\Leftarrow م^٢ = ٤٠٠ + س^٢ + ص^٢$

$\Leftarrow ٢م\left(\frac{ءم}{ءن}\right) = ٢س\left(\frac{ءس}{ءن}\right) + ٢ص\left(\frac{ءص}{ءن}\right)$

$\Leftarrow \sqrt{٤٠٠ + س^٢ + ص^٢}\left(\frac{ءم}{ءن}\right) = س\left(\frac{ءس}{ءن}\right) + ص\left(\frac{ءص}{ءن}\right)$

لكن $س = \frac{ءس}{ءن} \times ن = ٤ \times ٢ = ٨$ ، $ص = \frac{ءص}{ءن} \times ن = ٣ \times ٢ = ٦$

$\therefore \sqrt{٤٠٠ + ٦٤ + ٣٦}\left(\frac{ءم}{ءن}\right) = ٨ \times ٤ + ٦ \times ٣ \Leftarrow \sqrt{٥٠٠} \times \left(\frac{ءم}{ءن}\right) = ٥٠$

$\Leftarrow ١٠\sqrt{٥}\left(\frac{ءم}{ءن}\right) = ٥٠ \Leftarrow \sqrt{٥}\left(\frac{ءم}{ءن}\right) = ٥ \Leftarrow \left(\frac{ءم}{ءن}\right) = \sqrt{٥}$

📖 **مثال١٧:** م ب جـ مثلث قائم الزاوية في (ب) أثرت عليه قوة أجبرته على التحرك في المستوى الديكارتي وفق الشروط التالية بحيث يبقى المثلث قائم الزاوية:

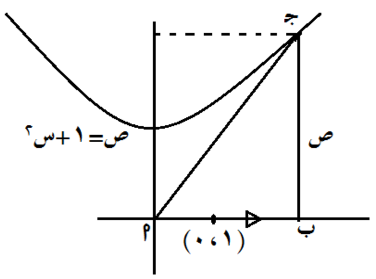
١) الرأس (م) في نقطة الأصل.

٢) الرأس (ب) بدأ الحركة من النقطة (١،٠) باتجاه محور السينات الموجب بسرعة ٣وحدة/ث.

٣) الرأس (جـ) يتحرك على منحنى الاقتران $ص = ١ + س^٢$

فجد معدل تغير مساحة المثلث بعد مضي ٥ثوان؟

✍ **الحل:** مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع ، $\frac{ءس}{ءن} = ٣$ ، $\left.\frac{ءم}{ءن}\right|_{ن=٥} = ؟؟$



$م = \frac{١}{٢} س ص = \frac{١}{٢} س (١ + س^٢) = \frac{١}{٢}(س + س^٣)$

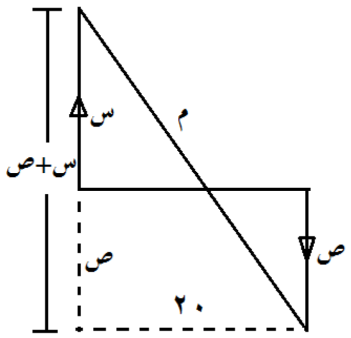
$\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢}(١ + ٣س^٢)$ ، **لكن** $س = \frac{ءس}{ءن} \times ن = ٣ \times ٥ = ١٥$

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢}(١ + ٣(١٥)^٢) = ٣٣٨$

📖 **مثال١٨:** سيارتان المسافة بينهما ٢٠كم حيث تقع الأولى غرب الثانية ، انطلقت الأولى شمالاً بسرعة ٦كم/س وانطلقت الثانية جنوباً بسرعة ١٠كم/س، أوجد معدل ابتعادهما بعد ٤ساعات من الانطلاق؟

الحل: $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٦$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ١٠$

$\text{م} = \sqrt{(٢٠)^٢ + (\text{س}+\text{ص})^٢}$ ، **لكن** $\text{س} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \times \text{ن} = ٦ \times ٤ = ٢٤$ ، $\text{ص} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \text{ن} = ١٠ \times ٤ = ٤٠$



$\Leftarrow \text{م}^٢ = ٤٠٠ + (\text{س}+\text{ص})^٢$

$\Leftarrow ٢\text{م} \left(\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right) = ٢(\text{س}+\text{ص})\left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right)$

$\Leftarrow \sqrt{(٢٠)^٢ + (\text{س}+\text{ص})^٢} \left(\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right) = (٢٤+٤٠)(٦+١٠)$

$\Leftarrow \sqrt{٤٠٠ + ٤٠٩٦} \left(\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right) = ١٠٢٤ \Leftarrow \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{٢٥٦}{\sqrt{٢٨١}}$

مثال١٩: شبه منحرف داخل دائرة ، إحدى قاعدتيه واقعة على القطر الأول والأخرى على المحيط تتمددان بانتظام بحيث يكون معدل تغير نصف قطر الدائرة ٧سم ، أوجد معدل تغير المساحة المحصورة بينهما في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر الدائرة ١٠سم وارتفاع شبه المنحرف ٥سم علماً بأن معدل تغير الارتفاع يساوي ٦سم/ث؟

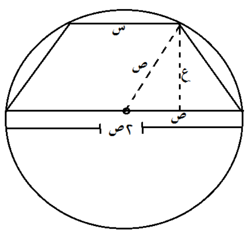
الحل: نفرض أن نصف القطر نق = ص = القاعدة السفلى لشبه المنحرف ، إذن القطر = ٢ص

المساحة المحصورة = مساحة الدائرة ـ مساحة شبه المنحرف

$= \pi \text{ص}^٢ - \frac{١}{٢}(\text{س}+٢\text{ص}) \times \text{ع}$

لكن $\text{ص}^٢ = \text{ع}^٢ + \frac{١}{٤}\text{س}^٢ \Leftarrow \text{ص}^٢ - \text{ع}^٢ = \frac{١}{٤}\text{س}^٢ \Leftarrow ٤(\text{ص}^٢ - \text{ع}^٢) = \text{س}^٢ \Leftarrow \text{س} = ٢\sqrt{\text{ص}^٢ - \text{ع}^٢}$

$\therefore \text{م} = \pi \text{ص}^٢ - \frac{١}{٢}\left(٢\sqrt{\text{ص}^٢ - \text{ع}^٢} + ٢\text{ص}\right) \times \text{ع} \Leftarrow \pi \text{ص}^٢ - \left(\sqrt{\text{ص}^٢ - \text{ع}^٢} + \text{ص}\right) \times \text{ع}$



$\Leftarrow \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٢\pi \text{ص} \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right) - \left[\left(\sqrt{\text{ص}^٢ - \text{ع}^٢} + \text{ص}\right)\left(\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}\right) + \frac{\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - \text{ع}\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}}{\sqrt{\text{ص}^٢ - \text{ع}^٢}}\right]$

$\Leftarrow ٢\pi(١٠)(٧) - \left[\left(\sqrt{١٠٠ - ٢٥} + ١٠\right)(٦) + ٥\left(\frac{٤٠}{٨}\right)\right]$

$\Leftarrow ١٤٠\pi - \left[٦٠ + ٦\sqrt{٧٥} + ٢٥\right]$

مثال٢٠: مستطيل يتزايد أحد بعديه بمعدل ٦سم/ث بينما يتناقص البعد الآخر بحيث تبقى مساحته ٨٠سم^٢ ، أوجد معدل التغير في محيطه في اللحظة التي يكون فيها طول الضلع المتزايد ٤سم؟

الحل: $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٦$ ، المساحة $= ٨٠ = \text{س ص} \Leftarrow \text{ص} = \frac{٨٠}{\text{س}}$

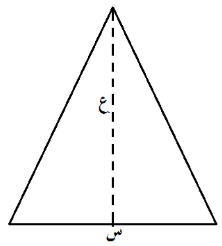
المحيط (ك) $= ٢\text{س} + ٢\text{ص} = ٢\text{س} + ٢\left(\frac{٨٠}{\text{س}}\right)$

$\Leftarrow \frac{\text{ءك}}{\text{ءن}} = ٢\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} - \frac{١٦٠}{\text{س}^٢}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$\left.\frac{\text{ءك}}{\text{ءن}}\right|_{\text{س}=4} = 2\times 6 - \frac{160}{16}\times 6 = -48$

📖 **مثال٢١: في لحظة ما كان ارتفاع مثلث ما ٢٢سم وطول قاعدته ١٠سم بدأ الارتفاع بالتناقص بمعدل ٤سم/ث والقاعدة بالازدياد بمعدل ٢سم/ث ، أوجد معدل تغير مساحة المثلث في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع مساوياً لقاعدة المثلث؟**



✍ **الحل:** $\text{ع} = 22$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -4$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 2$ ، $\left.\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right|_{\text{س}=\text{ع}} = ??$

مساحة المثلث $(\text{م}) = \frac{1}{2}\times\text{س}\times\text{ع}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{1}{2}\left((\text{س})\left(\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}\right) + \text{ع}\left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right)\right)$

لكن $\text{س} = 10 + 2\text{ن}$ ، $\text{ع} = 22 - 4\text{ن}$ ، **وعندما** $\text{س}=\text{ع} \longleftarrow 10+2\text{ن} = 22-4\text{ن} \Leftarrow 12 = 6\text{ن} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 2}$

$\therefore \text{س} = 10 + 2\times 2 = 14 = \text{ع}$

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{1}{2}\left(14\,(-4) + 14(2)\right) = -14$

📖 **مثال٢٢: نقطة تتحرك على منحنى العلاقة $\text{ص}^2 = \text{س}^3$ بحيث يزداد الإحداث السيني بمعدل ٨سم/ث، أوجد معدل التغير في الإحداث الصادي عندما ص=١؟**

✍ **الحل:** $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 8$ ، $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right|_{\text{ص}=1} = ??$

$\text{ص}^2 = \text{س}^3$ ، **ولأن** $\text{ص} = 1 \longleftarrow \text{س}^3 = 1 \Leftarrow \text{س} = 1$

$2\text{ص}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right) = 3\text{س}^2\left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right)$

$2\times 1\times\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 3\times 1\times 8 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 12$

📖 **مثال٢٣: أقلعت طائرة من المطار الساعة الثامنة صباحاً بزاوية مقدارها ٦٠ مع الأفق بسرعة ١٠كم/س وفي الساعة العاشرة أصبحت تسير بشكل أفقي بسرعة ٢٠كم/س ، أوجد معدل ابتعادها عن المطار عند تمام الساعة الواحدة بعد الظهر؟**

✍ **الحل:** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 10$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 20$ ، $\left.\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right|_{\text{الساعة الواحدة بعد الظهر}} = ??$

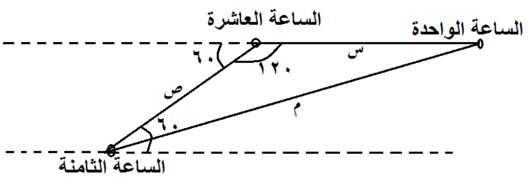
$\text{م}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\text{س ص}$ **جتا** $\text{هـ} = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\text{س ص}$ **جتا** $120 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\text{س ص} \times -1$

$\Leftarrow \text{س}^2 + 400 + 20\text{س}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$\text{م}^2 = \text{س}^2 + ٢٠\text{س} + ٤٠٠$ ، $\text{س} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \text{ن} = ٢٠ \times ٣ = ٦٠$ ، $\text{ص} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \text{ن} = ١٠ \times ٢ = ٢٠$

$٢\text{م} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = ٢\text{س} \left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right) + ٢٠ \left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right)$



$\Leftarrow \text{م} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} (\text{س} + ١٠)$

$\Leftarrow \sqrt{\text{س}^2 + ٢٠\text{س} + ٤٠٠} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = ٢٠(٦٠ + ١٠)$

$\Leftarrow \sqrt{٣٦٠٠ + ١٢٠٠ + ٤٠٠} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = ٢٠ \times ٧٠$

$\Leftarrow \sqrt{٥٢٠٠} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = ٢٠ \times ٧٠$

$\Leftarrow \sqrt{٤٠٠ \times ١٣} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = ٢٠ \times ٧٠$

$\Leftarrow ٢٠\sqrt{١٣} \left(\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right) = ٢٠ \times ٧٠$

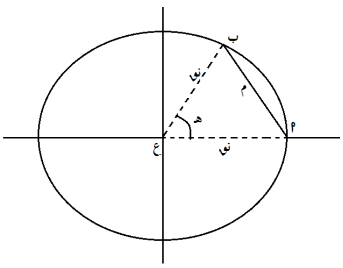
$\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{٧٠}{\sqrt{١٣}}$

📖 **مثال٢٤:** بدأت نقطة مثل (ب) بالحركة من النقطة (أ) عكس عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل، بحيث يزداد طول القوس بمقدار ٢سم/ث ، أوجد معدل ابتعادها عن النقطة (أ) في اللحظ التي تكون فيها الزاوية (ب ع أ) = ٦٠؟

✍ **الحل:** $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٢$ ، $\left.\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right|_{\text{هـ}=٦٠} = ؟؟$

$\text{م}^2 = ٢\text{نق}^2 - ٢\text{نق}^2 \text{جتا هـ} \Leftarrow \text{م} = \text{نق}\sqrt{٢ - ٢\text{جتا هـ}} = \text{نق}\sqrt{٢}\sqrt{١ - \text{جتا هـ}} = \sqrt{٢}\,\text{نق}\sqrt{٢\text{جا}^2 \tfrac{١}{٢}\text{هـ}} = ٢\text{نق جا} \tfrac{١}{٢}\text{هـ}$

$\therefore \text{م} = ٢\text{نق جا} \tfrac{١}{٢}\text{هـ}$



$\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\text{نق} \times \tfrac{١}{٢} \left(\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}\right) \text{جتا} \tfrac{١}{٢}\text{هـ}$ ، لكن ل = نق × هـ

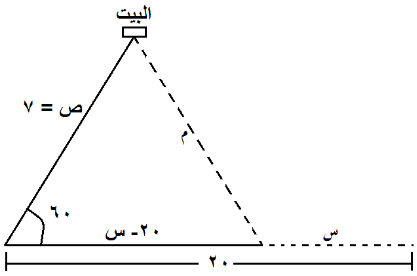
$\Leftarrow \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{نق} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} \Leftarrow ٢ = \text{نق} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} \Leftarrow \boxed{\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{٢}{\text{نق}}}$

$\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\text{نق} \times \tfrac{١}{٢} \left(\frac{٢}{\text{نق}}\right) \text{جتا} ٣٠$

$\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢ \times \tfrac{١}{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

📖 **مثال٢٥:** طريقان يحصران بينهما زاوية مقدارها ٦٠ يوجد على أحدهما بيت على بعد ٧كم انطلقت سيارة

على الطريق الآخر ومن مسافة ٢٠كم مقتربة بسرعة ٣٠كم/س ، أوجد معدل اقترابها من البيت بعد ٥ساعات من الانطلاق؟



الحل:

$$\text{م} = \sqrt{\text{ص}^2 + (20-\text{س})^2 - 2(20-\text{س})\text{ص}\ \text{جتا}\ 60}$$

$$= \sqrt{49 + 400 - 40\text{س} + \text{س}^2 - 140 + 7\text{س}}$$

$$= \sqrt{\text{س}^2 - 33\text{س} + 309}$$

$$\text{م}^2 = \text{س}^2 - 33\text{س} + 309$$

$$2\text{م}\left(\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\right) = 2\text{س}\left(\frac{d\text{س}}{d\text{ن}}\right) - 33\left(\frac{d\text{س}}{d\text{ن}}\right)\ ،\ \text{لكن س} = \frac{d\text{س}}{d\text{ن}} \times \text{ن} = 30 \times 5 = 150$$

$$\sqrt{\text{س}^2 - 33\text{س} + 309}\left(\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\right) = 2 \times 150 \times 30 - 33 \times 30 \Leftarrow \frac{d\text{م}}{d\text{ن}} \approx 30$$

مثال٢٦: اسطوانه، ارتفاعها يساوي ٣ أضعاف قطر قاعدتها أخذت تتمدد بالحرارة بحيث يزداد حجم المعدن بمعدل ١٠سم³/ث ، أوجد معدل تغير مساحة سطحها الكلي في اللحظة التي يكون فيها نصف قطرها ٢سم؟

الحل: $\text{ع} = 3\ ،\ \text{ع} = 6\text{نق}\ ،\ \frac{d\text{ح}}{d\text{ن}} = 10\ ،\ \frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\Big|_{\text{نق}=2} = ؟؟$

المساحة الكلية للاسطوانة = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$\text{م}_{\text{ك}} = 2\pi\,\text{نق}\,\text{ع} + 2\pi\,\text{نق}^2 = 2\pi\,\text{نق}(6\text{نق}) + 2\pi\,\text{نق}^2 = 14\pi\,\text{نق}^2$$

$$\text{لكن ح} = \pi\,\text{نق}^2\text{ع} = \pi\,\text{نق}^2(6\text{نق}) = 6\pi\,\text{نق}^3$$

$$\text{ح} = 6\pi\,\text{نق}^3$$

$$\frac{d\text{ح}}{d\text{ن}} = 18\pi\,\text{نق}^2 \times \frac{d\text{نق}}{d\text{ن}}\ ،\ \text{نق} = 2$$

$$10 = 72\pi \times \frac{d\text{نق}}{d\text{ن}} \Leftarrow \boxed{\frac{d\text{نق}}{d\text{ن}} = \frac{5}{36\pi}}$$

$$\text{م}_{\text{ك}} = 14\pi\,\text{نق}^2$$

$$\frac{d\text{م}}{d\text{ن}} = 28\pi\,\text{نق} \times \frac{d\text{نق}}{d\text{ن}}$$

$$\frac{d\text{م}}{d\text{ن}}\Big|_{\text{نق}=2} = 28\pi \times 2 \times \frac{5}{36\pi} = \frac{70}{9}$$

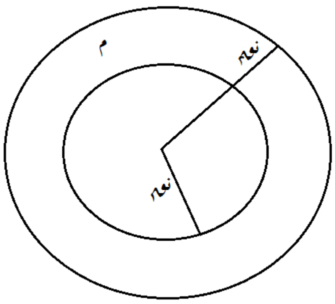
📖 مثال٢٧: دائرتان متحدتان بالمركز بحيث يزداد نصف قطر الداخلية بمعدل ٥سم/ث والخارجية بمعدل ٢سم/ث أوجد:

① معدل التغير في المساحة المحصورة بينهما في اللحظة التي يكون نصف قطر الداخلية ٦سم والخارجية ٨سم؟

② اللحظة التي تتوقف فيها المساحة المحصورة بينهما عن التغير؟

✍ **الحل:** $\frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}} = ٥$ ، $\frac{\text{ءنق}_2}{\text{ءن}} = ٢$ ، $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\Big|_{\text{نق}=٦،٨} = ؟؟$

① المساحة المحصورة = مساحة الدائرة الخارجية – مساحة الدائرة الداخلية



$$\text{م} = \pi(\text{نق}_2)^2 - \pi(\text{نق}_1)^2 = \pi(\text{نق}_2^2 - \text{نق}_1^2)$$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \pi\left[٢\text{نق}_2 \times \frac{\text{ءنق}_2}{\text{ءن}} - ٢\text{نق}_1 \times \frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}}\right]$$

$$= ٢\pi(٨\times٢ - ٦\times٥) = ٢\pi\times -١٤ = -٢٨\pi$$

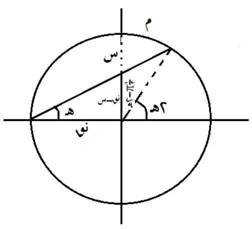
② تتوقف المساحة عن التمدد عندما يكون $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٠$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \pi\left[٢\text{نق}_2 \times \frac{\text{ءنق}_2}{\text{ءن}} - ٢\text{نق}_1 \times \frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}}\right] \Leftarrow ٢\pi\left(\text{نق}_2 \times \frac{\text{ءنق}_2}{\text{ءن}} - \text{نق}_1 \times \frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}}\right) = ٠$$

$$\Leftarrow \text{نق}_1 \times \frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}} = \text{نق}_2 \times \frac{\text{ءنق}_2}{\text{ءن}} \Leftarrow ٢\text{نق}_2 = ٥\text{نق}_1 \Leftarrow \text{نق}_1 = \tfrac{٢}{٥}\text{نق}_2$$

📖 مثال٢٨: مضمار سباق دائري الشكل يوجد على نهاية أحد أقطاره مصباحاً كهربائياً ، انطلق حصان من نهاية القطر الآخر عمودياً على القطر الأول مقترباً من المركز بسرعة ١٠م/ث ، أوجد معدل تغير ظل الحصان على المحيط الدائري في اللحظة التي يكون قد قطع نصف المسافة عن المركز؟

✍ **الحل:** $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ١٠$ ، $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\Big|_{\text{س}=\frac{١}{٢}\text{نق}} = ؟؟$



$$\text{م} = \text{نق}\left(\tfrac{١}{٢}\pi - ٢\text{هـ}\right)$$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = -٢\text{نق} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}}$$

لكن $\text{ظا هـ} = \frac{\text{نق}-\text{س}}{\text{نق}} = ١ - \frac{\text{س}}{\text{نق}} \Leftarrow \text{قا}^2\text{هـ} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{\text{نق}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{-١٠}{\text{نق}}$ ، $\therefore \text{قا}^2\text{هـ} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-١٠}{\text{نق}}$

$\therefore \text{ظا هـ} = ١ - \frac{\text{س}}{\text{نق}} = ١ - \frac{١}{\text{نق}} \times \tfrac{١}{٢}\text{نق} = ١ - \tfrac{١}{٢} = \tfrac{١}{٢} \longleftarrow \text{ظا}^2\text{هـ} = \tfrac{١}{٤} \longleftarrow \text{ظا}^2\text{هـ} + ١ = \tfrac{١}{٤} + ١ \longleftarrow \text{قا}^2\text{هـ} = \tfrac{٥}{٤}$

$\therefore \text{قا}^2\text{هـ} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-١٠}{\text{نق}} \Leftarrow \tfrac{٥}{٤} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-١٠}{\text{نق}} \Leftarrow \boxed{\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{٢\text{نق}}}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

ولكن $\frac{ءم}{ءن} = -٢نهـ \times \frac{ءهـ}{ءن} = -٢نهـ \times \frac{-١}{٢نهـ} = ١$ ، ∴ $\frac{ءم}{ءن} = ١$

📖 **مثال٢٩: تتحرك نقطة على منحنى الاقتران ق(س)=س^{٣}+٦س-٣ بحيث يزداد الاحداث السيني بمعدل ٩سم/ث أوجد معدل تغير ميل العمودي عندما س =١؟**

✍ **الحل:** $\frac{ءس}{ءن} = ٩$ ، $\frac{ءم}{ءن}\Big|_{س=١} = ؟؟$

ميل العمودي (م) = $-\frac{١}{٣س^{٢}+٦}$ ⇐ $\frac{ءم}{ءن} = \frac{٦س\frac{ءس}{ءن}}{(٣س^{٢}+٦)^{٢}}$ ⇐ $\frac{ءم}{ءن}\Big|_{س=١} = ٦ \times ٩ \times \frac{١}{٨١} = \frac{٢}{٣}$

📖 **مثال٣٠: نقطة تتحرك على منحنى العلاقة ص=س^{٢}-٦س+٨ بحيث يزداد الاحداث السيني بمعدل ٢سم/ث وينقص الاحداث الصادي بمعدل ١٠سم/ث أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران ص عند ذلك؟**

✍ **الحل:** $\frac{ءس}{ءن} = ٢$ ، $\frac{ءص}{ءن} = -١٠$

ص=س^{٢}-٦س+٨ ⇐ $\frac{ءص}{ءن} = ٢س \times \frac{ءس}{ءن} - ٦ \times \frac{ءس}{ءن}$

⇐ -١٠=٢س×٢-٦×٢ ⇐ -١٠=٤س-١٢ ⇐ ٤س=٢ ⇐ $\boxed{س=\frac{١}{٢}}$

∴ **نقطة التماس هي:** $(\frac{١}{٢}، \frac{٢١}{٤})$

م = ص$'$|$_{س=\frac{١}{٢}}$ = (٢س-٦)|$_{س=\frac{١}{٢}}$ = ١-٦=-٥

∴ **معادلة المماس:** ص - $\frac{٢١}{٤}$ =-٥(س-$\frac{١}{٢}$)

معادلة العمودي: ص - $\frac{٢١}{٤}$ = $\frac{١}{٥}$ (س-$\frac{١}{٢}$)

📖 **مثال٣١: كمية من الغاز المحصور أخذ بالتمدد بحيث يبقى محافظاً على العلاقة بين حجم الغاز وضغطه حسب القانون الفيزيائي للغازات (ح×ص=٢٠) فإذا كان معدل الزيادة في حجمه يساوي ٥ أضعاف معدل نقصان ضغطه أوجد حجم الغاز وضغطه؟**

✍ **الحل:** ح×ص=٢٠ ⇐ ح=$\frac{٢٠}{ص}$ ⇐ $\frac{ءح}{ءن} = \frac{-٢٠\frac{ءص}{ءن}}{ص^{٢}}$ ⇐ $-٥\frac{ءص}{ءن} = \frac{-٢٠\frac{ءص}{ءن}}{ص^{٢}}$ ⇐ ص^{٢}=٤ ⇐ ص=٢

لكن ح=$\frac{٢٠}{ص}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠

📖 **مثال٣٢:** كرة جليدية من المعدن قطرها ٤سم تذوب بانتظام بمعدل ٣٦سم^{3}/ث أوجد معدل تغير مساحة سطح الجليد في اللحظة التي يكون سُمك الجليد ١سم؟

✍ **الحل:** $\text{ق} = ٢\text{نق} = ٤ \Leftarrow \text{نق} = ٢$ ، $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -٣٦$ ، $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\Big|_{\text{س}=١} = ؟؟$

مساحة سطح الجليد $= (\text{حجم الكرة})' = (\frac{٤}{٣}\text{نق}^{3}\pi)' = ٤\pi\,\text{نق}^{2} = ٤\pi(\text{س}+٢)^{2}$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٤\pi\times٢(\text{س}+٢)\times\frac{\text{دس}}{\text{دن}} \Leftarrow -٣٦ = ٤\pi\times٢(\text{س}+٢)\times\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

لكن حجم الجليد = الحجم الكلي للكرة – حجم المعدن

$$= \frac{٤}{٣}\pi(\text{س}+٢)^{3} - \frac{٤}{٣}\pi\times٨$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{٤}{٣}\pi\left[(\text{س}+٢)^{3}-٨\right]$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٤\pi\times(\text{س}+٢)^{2}\times\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

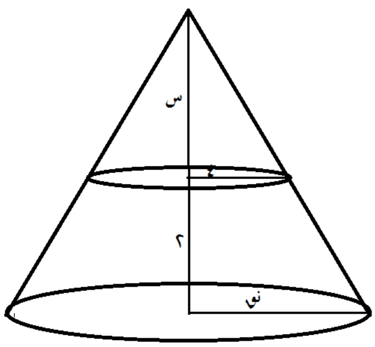
$$-٣٦ = ٤\pi\times٩\times\frac{\text{دس}}{\text{دن}} \Leftarrow \boxed{\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -\frac{١}{\pi}}$$

$$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٤\pi\times٢(\text{س}+٢)\times\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٨\pi\times٣\times-\frac{١}{\pi} = -٢٤$$

📖 **مثال٣٣:** طاولة مستديرة نصف قطرها ٤م وارتفاعها ٢م عن الأرض يوجد مصباح فوق مركزها مباشرة يتحرك مقترباً من المركز بسرعة ٢م/د أوجد معدل تغير ظل الكرة على الأرض في اللحظة التي يكون فيها بعد المصباح عن المركز ٨م؟

✍ **الحل:** ظل الطاولة يشكل دائرة

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٢$ ، $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\Big|_{\text{س}=٨} = ؟؟$



$\text{م} = \pi\,\text{نق}^{2}$ ، لكن $\frac{\text{نق}}{\text{س}+٢} = \frac{٤}{\text{س}} \Leftarrow \text{س نق} = ٤\text{س}+٨ \Leftarrow \text{نق} = \frac{٨}{\text{س}}+٤$

$$\text{م} = \pi(\frac{٨}{\text{س}}+٤)^{2}$$

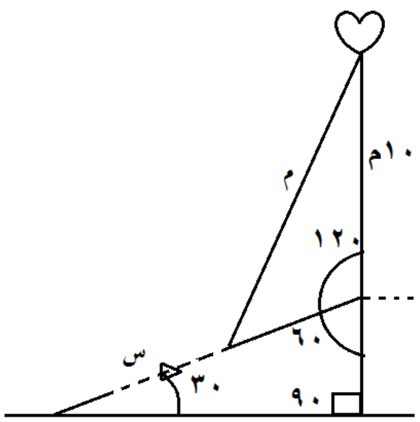
$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi\times-\frac{٨}{\text{س}^{2}}\times(\frac{٨}{\text{س}}+٤)$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\Big|_{\text{س}=٨} = ٢\pi\times-\frac{٨}{٦٤}\times(١+٤) = -\frac{٥}{٨}\pi$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال٣٤:** منارة على قمة جبل يميل على الأرض بزاوية ٣٠ بدأ رجل بالصعود مقترباً من قاعدة المنارة بسرعة ٢م/ث أوجد معدل اقترابه من قمة المنارة في اللحظة التي يكون بعده فيها عن قاعدة المنارة ٢٠م علماً بأن ارتفاع المنارة ١٠م؟

✍ **الحل:** $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢$ ، $\left.\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right|_{\text{س}=٢٠} = ؟؟$



$\text{م}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٢\text{س ص جتا}١٢٠ = \text{س}^٢ + ١٠\text{س} + ١٠٠$

$\Leftarrow \text{م} = \sqrt{\text{س}^٢ + ١٠\text{س} + ١٠٠}$

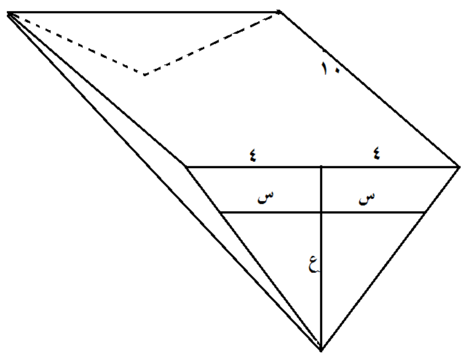
$٢\text{م} \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٢\text{س} \left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right) + ١٠ \left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right)$

$\Leftarrow \sqrt{\text{س}^٢ + ١٠\text{س} + ١٠٠} \left(\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right) = ٢٠(٢) + ٥(٢)$

$\Leftarrow ١٠\sqrt{٧} \times \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٤٠ + ١٠ \Leftarrow \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٢\sqrt{٧}}$

📖 **مثال٣٥:** وعاء على شكل منشور طول مقطعه العرضي ١٠م وارتفاعه ١٢م ، قاعدته على شكل مثلث متساوي الساقين طول القاعدة في المثلث ٨م ، صب به الماء بحيث يكون معدل تغير حجم الماء ١٠سم^٣/ث أوجد معدل ارتفاع الماء في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع الماء ٤م؟

✍ **الحل:** $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = ١٠$ ، $\left.\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}\right|_{\text{ع}=٤} = ؟؟$



حجم الماء = مساحة قاعدة السائل × طول الحوض

$\text{ح} = \frac{١}{٢}(٢\text{س})\text{ع} \times ١٠$

$\text{ح} = ١٠\text{س ع}$

لكن $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{٤}{١٢} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٣}\text{ع}$

$\therefore \text{ح} = \frac{١٠}{٣}\text{ع}^٢ \Leftarrow \frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \frac{٢٠}{٣}\text{ع} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} \Leftarrow ١٠ = \frac{٢٠}{٣} \times ٤ \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} \Leftarrow \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٨}$

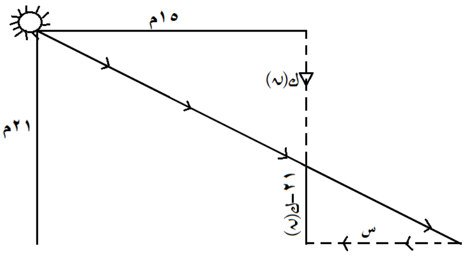
📖 **مثال٣٦:** مصباح على قمة برج على ارتفاع ٢١م أسقطت كرة من نفس المستوى وعلى بعد ١٥م وفق معادلة الحركة ل(ن)=٣ن^٢+٦ن ، أوجد معدل تغير ظل الكرة على الأرض بعد ثانية من السقوط؟

✍ **الحل:** من التشابه ينتج أن: $\frac{\text{س}}{١٥} = \frac{٢١-\text{ل}}{\text{ل}} \Leftarrow \frac{\text{س}}{١٥} = \frac{٢١}{\text{ل}} - ١ \Leftarrow \frac{\text{س}}{١٥} = \frac{٢١}{٣(\text{ن}^٢+٢\text{ن})} - ١ = \frac{٧}{(\text{ن}^٢+٢\text{ن})} - ١$

$\Leftarrow \frac{\text{س}}{١٥} = \frac{٧ - \left(\text{ن}^٢ + ٢\text{ن}\right)}{(\text{ن}^٢+٢\text{ن})} = \frac{٧ - \text{ن}^٢ - ٢\text{ن}}{(\text{ن}^٢+٢\text{ن})}$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

$\Leftarrow$ س$(ن^2+2ن) = 15(7-ن^2-2ن)$

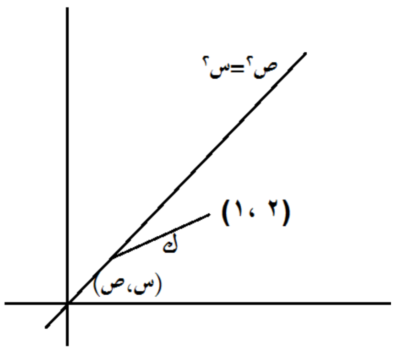


$$\Leftarrow \text{س} = \frac{15(7-ن^2-2ن)}{(ن^2+2ن)}$$

$$\therefore \frac{دس}{دن} = 15\left[\frac{(ن^2+2ن)(-2ن-2)-(7-ن^2-2ن)(2ن+2)}{(ن^2+2ن)^2}\right]$$

$$\Leftarrow \left.\frac{دس}{دن}\right|_{ن=1} = \frac{5}{3}(-28) = -\frac{140}{3}$$

📖 **مثال٣٧: نقطة تتحرك على منحنى العلاقة ص²=س² بحيث يزداد الإحداث السيني بمعدل ٨سم/ث أوجد معدل ابتعادها عن النقطة (٢,١) عند س=١؟**



✍ **الحل:** قانون المسافة بين نقطتين (ك) $= \sqrt{(س_2-س_1)^2+(ص_2-ص_1)^2}$

$\Leftarrow$ ك$^2 = ($س$-2)^2+($ص$-1)^2$

$\Leftarrow$ ك$^2 =$ س$^2-4$س$+4+$ص$^2-2$ص$+1$

$\Leftarrow$ ك$^2 =$ س$^2-4$س$+4+$س$^2-2$س$+1$

$\Leftarrow$ ك$^2 = 2$س$^2-6$س$+5$

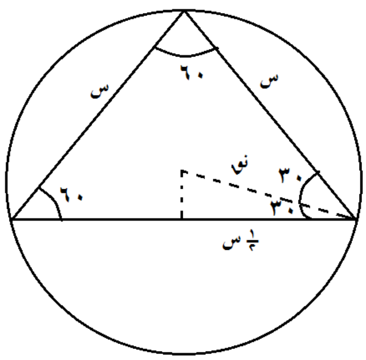
$\Leftarrow 2ك\times\frac{دك}{دن} = (4س-6)\times\frac{دس}{دن} \Leftarrow 2\sqrt{2س^2-6س+5}\times\frac{دك}{دن} = (4\times1-6)\times 8$

$\Leftarrow 2\sqrt{1}\times\frac{دك}{دن} = -16 \Leftarrow \frac{دك}{دن} = -8$

📖 **مثال٣٨: مثلث متساوي الأضلاع داخل دائرة يتمدد بانتظام بحيث يبقى ملامساً لسطح الدائرة أوجد معدل تغير المساحة المحصورة بينهما عندما يكون طول ضلع المثلث ٥سم علماً بأن معدل التغير في طول ضلعه ٢سم؟**

✍ **الحل:** $\frac{دس}{دن} = 2$ ، $\left.\frac{دم}{دن}\right|_{س=5} = ؟؟$

المساحة المحصورة = مساحة الدائرة ــ مساحة المثلث



م $= \pi$ نق$^2 - \frac{1}{2}$س^2 جا٦٠

$= \pi$ نق$^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}$س^2 ، لكن $\frac{1}{2}\frac{س}{نق} =$ جتا٣٠ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftarrow$ س$=\sqrt{3}$ نق $\Leftarrow$ نق$=\frac{س}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \text{م} = \pi\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٣}\right) - \frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{س}^{٢} = \text{س}^{٢}\left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\text{س} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}\right) \Leftarrow \left.\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right|_{\text{س}=٥} = ٢ \times ٥ \times ٢ \times \left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}\right) = ٢٠\left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}\right)$$

📖 مثال٣٩: اسطوانة من المعدن مفرغة من الداخل تتمدد بالحرارة بحيث يبقى حجم المعدن وارتفاعه ثابتين فإذا كان معدل تغير نصف قطرها الداخلي ٦سم/ث أوجد معدل تغير نصف قطرها الخارجي عندما يكون نصف قطرها الداخلي ٣سم والخارجي ٤سم؟

✍ الحل: $\frac{\text{دنق}_١}{\text{دن}} = ٦$ ، $\left.\frac{\text{دنق}_٢}{\text{دن}}\right|_{\text{نق}_١ ،\ \text{نق}_٢ = ٣،٤} = ؟؟$

حجم المعدن = الحجم الخارجي – الحجم الداخلي

$$\text{ح} = \pi\,\text{نق}_٢^{٢}\,\text{ع} - \pi\,\text{نق}_١^{٢}\,\text{ع}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{ح}}{\text{ع}\pi} = \text{نق}_٢^{٢} - \text{نق}_١^{٢}$$

$$\Leftarrow ٠ = ٢\text{نق}_٢ \times \frac{\text{دنق}_٢}{\text{دن}} - ٢\text{نق}_١ \times \frac{\text{دنق}_١}{\text{دن}} \Leftarrow \text{نق}_١ \times \frac{\text{دنق}_١}{\text{دن}} = \text{نق}_٢ \times \frac{\text{دنق}_٢}{\text{دن}} \Leftarrow ٣ \times ٦ = ٤ \times \frac{\text{دنق}_٢}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دنق}_٢}{\text{دن}} = \frac{٩}{٢}$$

📖 مثال٤٠: وعاء على شكل مقطع طولي لاسطوانة،نصف قطر قاعدته ٤م تصب فيه حنفية بمعدل ٢٠م^{٣}/س أوجد معدل ارتفاع السائل في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع السائل ٢م حيث أن طول المقطع ١٠م؟

✍ الحل: $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٢٠$ ، $\left.\frac{\text{دع}}{\text{دن}}\right|_{\text{ع}=٢} = ؟؟$

حجم الماء = مساحة قاعدة الماء × طول الحوض

= (مساحة القطاع الدائري – مساحة المثلث) × ١٠

$$\therefore \text{ح} = \left(\tfrac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢} \times ٢\text{هـ} - \tfrac{١}{٢} \times ١٦\,\text{جا}٢\text{هـ}\right) \times ١٠$$

$$= ١٠(١٦\text{هـ} - ٨\,\text{جا}٢\text{هـ})$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ١٠(١٦ - ١٦\,\text{جتا}٢\text{هـ}) \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$$

لكن $\frac{٤-\text{ع}}{٤} = \text{جتاهـ} \Leftarrow -\frac{١}{٤} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -\,\text{جا هـ} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$ **..... يجب إيجاد الزاوية هـ:**

$$\frac{٤-\text{ع}}{٤} = \text{جتاهـ} \Leftarrow \frac{٤-٢}{٤} = \text{جتاهـ} \Leftarrow \frac{١}{٢} = \text{جتاهـ} \Leftarrow \boxed{\text{هـ} = ٦٠}$$

$$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ١٠(١٦ - ١٦\,\text{جتا}٢\text{هـ}) \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} \Leftarrow ٢٠ = ١٠(١٦ - ١٦\,\text{جتا}١٢٠) \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$$

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

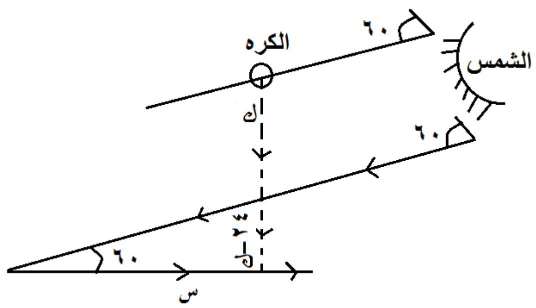
$\Leftarrow ٢ = (١٦+٨)\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} \Leftarrow \boxed{\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{١}{١٢}}$

الآن: $-\frac{١}{٤}\times\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -\text{جاهـ}\times\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} \Leftarrow \frac{١}{٤}\times\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \text{جا٦٠}\times\frac{١}{١٢} \Leftarrow \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٦}\sqrt{٣}$

مثال٤: أسقطت كرة من ارتفاع ٢٤م وفق معادلة الحركة ك(ن)=٦ن^٢+٦ ، **فإذا كانت أشعة الشمس تميل على الأفق بزاوية ٦٠ ، أوجد معدل تغير ظل الكرة على الأرض في لحظة وصولها سطح الأرض علماً بأن أشعة الزاوية دائما متساوية؟**

الحل: $\frac{٢٤-\text{ك}}{\text{س}} = \text{ظا٦٠} = \sqrt{٣} \Leftarrow \sqrt{٣}\,\text{س} = ٢٤-\text{ك} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{\sqrt{٣}}(٢٤-\text{ك}) = \frac{١}{\sqrt{٣}}(١٨-٦\text{ن}^٢)$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{\sqrt{٣}}(١٨-٦\text{ن}^٢)$



$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}(-١٢\text{ن})$

لكن لحظة وصول الكرة سطح الأرض يكون ك(ن)=٢٤

$\Leftarrow ٢٤ = ٦(\text{ن}^٢+١) \Leftarrow \text{ن}^٢+١ = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{ن} = \sqrt{٣}}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\Big|_{\text{ن}=\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}(-١٢\times\sqrt{٣}) = -١٢$

الدرس الرابع: التزايد والتناقص والقيم القصوى

تعريف: إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ،ب] وكان س١ ، س٢ ∈ [أ،ب] فإنه:

① إذا كان س٢ > س١ ، ق(س٢) > ق(س١) فإن ق(س) متزايد.

② إذا كان س٢ > س١ ، ق(س٢) < ق(س١) فإن ق(س) متناقص.

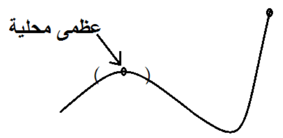
③ إذا كان س٢ > س١ ، ق(س٢) = ق(س١) فإن ق(س) ثابت (لا يوجد فترات تزايد وتناقص).

تعريف: تسمى النقطة (س،ص) نقطة حرجة إذا كان قَ(س) تساوي صفر أو غير موجودة (أصفار البسط والمقام للمشتقة الأولى).

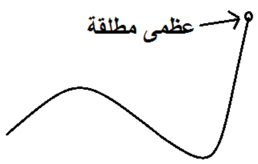
القيم القصوى: وتقسم إلى نوعين:

① قيم عظمى ، وتقسم إلى نوعين:

(أ) قيمة عظمى محلية: وهي القيمة الأكبر من بين جميع القيم المجاورة لها.

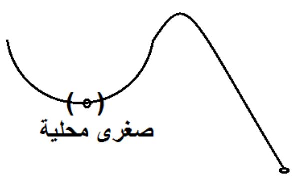


(ب) قيمة عظمى مطلقة: وهي القيمة الأكبر من بين جميع القيم على الإطلاق.



② قيم صغرى ، وتقسم إلى نوعين:

(أ) قيمة صغرى محلية: وهي القيمة الأصغر من بين جميع القيم المجاورة لها.

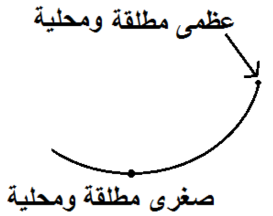


(ب) قيمة صغرى مطلقة: وهي القيمة الأصغر من بين جميع القيم على الإطلاق.

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

➢ ملاحظات:

① كل قيمة مطلقة قيمة محلية وتسمى في هذه الحالة " قيمة محلية ومطلقة"



② نجد فترات التزايد والتناقص والنقط الحرجة والقيم القصوى من خلال حل المشتقة الأولى(ق̃(س) = ٠).

♠ ملاحظات:

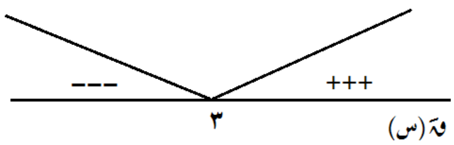
١) إذا جاءت القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة ضمن الفترة المعرف عليها الاقتران فإنها تسمى مطلقة ومحلية في آن واحد.

٢) القيم المحلية لا تكون في أطراف الفترة الكلية أبداً.

٣) المشتقة غير موجودة عند أطراف الفترة الكلية ونقط الإنفصال والرؤوس المدببة.

📖 **مثال:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٢}−٦س+٥؟

✍ **الحل:** ق̃(س) = ٢س−٦ = ٠ ⇐ ٢س=٦ ⇐ س = ٣



☜ ق(س) متزايد على الفترة]٣،∞)

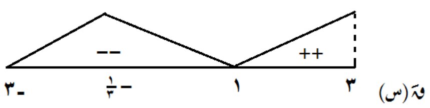
☜ ق(س) متناقص على الفترة (−∞،٣]

☜ القيم الحرجة: س = ٣

☜ القيم القصوى: س = ٣ ⟵ ق(٣) = −٤، قيمة صغرى مطلقة.

📖 **مثال٢:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٣}− س^{٢}− س على الفترة [−٣،٣]؟

✍ **الحل:** ق̃(س) = ٣س^{٢}−٢س−١=٠ ⇐ (٣س+١)(س−١)=٠ ⇐ س=−$\frac{١}{٣}$ ، ١



☜ ق(س) متزايد على الفترة [−٣،−$\frac{١}{٣}$]،[١،٣]

☜ ق(س) متناقص على الفترة [−$\frac{١}{٣}$ ، ١]

☜ القيم الحرجة: س=−$\frac{١}{٣}$ ، ١

☜ القيم القصوى:، س=١ ⟵ ق(١)=−١ **(صغرى محلية)** ، س=−٣ ⟵ ق(−٣) = −٣٣ **(صغرى مطلقة)**

ق(١) > ق(−٣) ⟵ ق(١) **محلية** ، ق(−٣) **مطلقة**

س = −$\frac{١}{٣}$ ⟵ ق(−$\frac{١}{٣}$) = $\frac{٥}{٢٧}$ **(عظمى محلية)** ، س=٣ ⟵ ق(٣) = ١٥ **(عظمى مطلقة).**

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

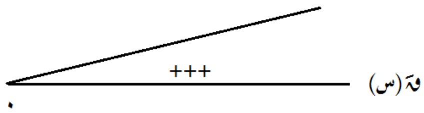
ق$(-\frac{١}{٢})$ > ق(٣) ⟵ ق$(-\frac{١}{٢})$ محلية ، ق(٣) مطلقة

مثال٣: أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س) = $\sqrt{س^٣}$ ؟

الحل: $س^٣ \geqslant ٠ \Leftarrow س \geqslant ٠$ ، ∴ س ∈ [٠ ، ∞)

$$ق'(س) = \frac{٣س^٢}{٢\sqrt{س^٣}} = \frac{٣س^٢}{٢س\sqrt{س}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{س} = ٠ \Leftarrow \sqrt{س} = ٠ \Leftarrow س=٠$$

☜ ق متزايد على الفترة [٠،∞) ، لا يوجد فترات تناقص



☜ القيم الحرجة: س=٠

☜ القيم القصوى: س=٠ ⟵ ق(٠)=٠ صغرى مطلقة.

مثال٤: أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س) = جاس − جتاس

س ∈ $[٠،٢\pi]$؟

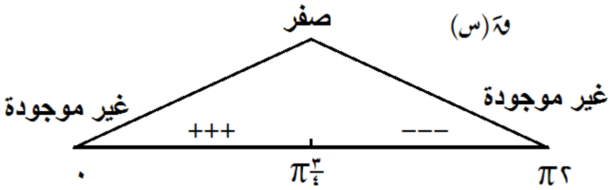
الحل: ق′(س)=جتاس+جاس=٠ ⟸ جاس = - جتاس

$\Leftarrow$ س = $\pi - \frac{١}{٤}\pi = \frac{٣}{٤}\pi \in [٠،٢\pi]$ ، $٢\pi - \frac{١}{٤}\pi = \frac{٧}{٤}\pi \notin [٠،٢\pi]$ ، ∴ س = $\frac{٣}{٤}\pi$

☜ ق متزايد على الفترة $[٠،\frac{٣}{٤}\pi]$ ، ومتناقص على الفترة $[\frac{٣}{٤}\pi،٢\pi]$

☜ القيم الحرجة: س=$\frac{٣}{٤}\pi$ ، ٠ ، ٢π

☜ القيم القصوى:



① س=٠ ⟵ ق(٠)=−١ (صغرى مطلقة)

② س=٢π ⟵ ق(٢π)=−١ (صغرى مطلقة)

③ س=$\frac{٣}{٤}\pi$ ⟵ ق$(\frac{٣}{٤}\pi)=\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ (عظمى مطلقة)

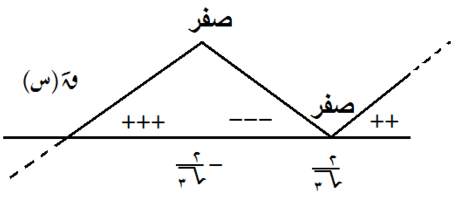
مثال٥: أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س) = $س^٣ - ٤س$ ، س ∈ ح ؟

الحل: ق′(س)=$٣س^٢-٤=٠$ ⟵ $٣س^٢=٤$ ⟵ $س^٢=\frac{٤}{٣}$ ⟵ س= $\pm\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

☜ ق متزايد على الفترة $(-\infty،-\frac{٢}{\sqrt{٣}}]$ ، $[\frac{٢}{\sqrt{٣}} ، \infty)$ ، ومتناقص على الفترة $[-\frac{٢}{\sqrt{٣}}،\frac{٢}{\sqrt{٣}}]$

☜ القيم الحرجة: س= $\pm\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

☜ القيم القصوى:



① س=$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ⟵ ق$(\frac{٢}{\sqrt{٣}})= -\frac{١٦}{٣\sqrt{٣}}$ (صغرى محلية)

② س=$-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ⟵ ق$(-\frac{٢}{\sqrt{٣}})=\frac{١٦}{٣\sqrt{٣}}$ (عظمى محلية)

📖 **مثال٦:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=٣س^{٢}− س^{٣}+١ ، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:** ق̄(س)=٦س−٣س^{٢}=٠ ⟵ ٣س(٢−س)=٠ ⟵ س=٠،٢

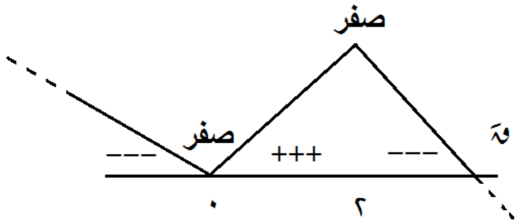
☜ ق متزايد على الفترة [٠،٢] ، ومتناقص على الفترة (−∞،٠] ، [٢،∞)

☜ القيم الحرجة: س = ٠ ، ٢

☜ القيم القصوى:

① س=٠ ⟵ ق(٠)=١ (صغرى محلية)

② س=٢ ⟵ ق(٢)=٥ (عظمى محلية)



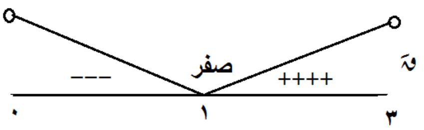
📖 **مثال٧:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=س^{٣}−٣س ،س ∈ (٠،٣) ؟

✍ **الحل:** ق̄(س)=٣س^{٢}−٣=٠ ⟵ ٣س^{٢}=٣ ⟵ س^{٢}=١ ⟵ س=±١ ⟸ س=١

☜ ق متزايد على الفترة [١،٣) ، ومتناقص على الفترة (٠،١]

☜ القيم الحرجة: س=١

☜ القيم القصوى: س=١ ⟵ ق(١)=−٢ (صغرى مطلقة محلية)



📖 **مثال٨:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=س^{٣}−٣س ،س ∈ [٠،٣) ؟

✍ **الحل:** ق̄(س)=٣س^{٢}−٣=٠ ⟵ س=١

☜ ق متزايد على الفترة [١،٣) ، ومتناقص على الفترة [٠،١]

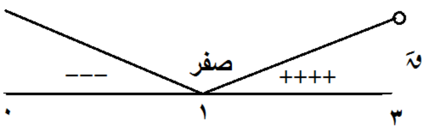
☜ القيم الحرجة: س = ٠،١ (لأن ق̄(١)=٠ ، ق̄(٠) ⟵ ∞)

☜ القيم القصوى:

① س=١ ⟵ ق(١)=−٢ (صغرى مطلقة)

② س=٠ ⟵ ق(٠)=٠ (عظمى محلية) ......تستخدم للمقارنة فقط.

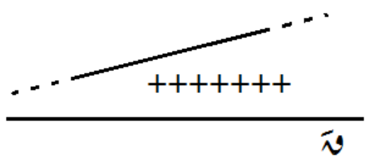
③ س=٣ ⟵ ق(٣)=١٨ (عظمى مطلقة)



📖 **مثال٩:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=س^{٣}+س+١ ،س ∈ ح ؟

✍ **الحل:** ق̄(س)=٣س^{٢}+١=٠ ⟵ ٣س^{٢}=−١ .....وهذا غير ممكن في الرياضيات

إذن لا يوجد قيم حرجة ⟸ لا يوجد قيم قصوى ، وكذلك ق(س) متزايد على جميع الأعداد الحقيقية.



تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

📖 **مثال١٠:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=س^{٥} − $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} ، س ∈ ح ؟

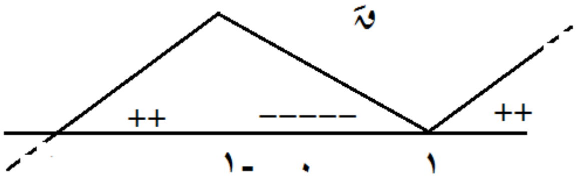
✍ **الحل:**

قَ(س)=٥س^{٤}−٥س^{٢}=٠ ⟵ ٥س^{٢}(س^{٢}−١)=٠ ⟵ س=٠ ، ±١

☜ ق متزايد على الفترة (−∞ ، −١] ، [١، ∞) ، ومتناقص على الفترة [−١، ٠]، [٠، ١]

☜ القيم الحرجة: س=٠ ، ±١

☜ القيم القصوى:



① س=−١ ⟵ ق(−١)=$\frac{٢}{٣}$ (عظمى محلية)

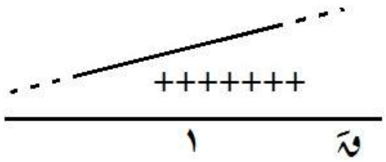
② س=١ ⟵ ق(١)= −$\frac{٢}{٣}$ (صغرى محلية)

لاحظ أن النقطة س=٠ ليس قيمة قصوى

نتيجة: كل قيمة قصوى قيمة حرجة ، ولك ليس كل قيمة حرجة قيمة قصوى.

📖 **مثال١١:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=(س−١)^{٥} ، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:**



قَ(س)=٥(س−١)^{٤}=٠ ⟵ س−١=٠ ⟵ س=١

☜ ق متزايد على ح

☜ القيم الحرجة: س=١

☜ لا يوجد قيم قصوى.

📖 **مثال١٢:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=(س+١)^{٣} (س−٢)^{٦}، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:**

قَ(س)=(س+١)^{٣}×٦(س−٢)^{٥} + (س−٢)^{٦}×٣(س+١)^{٢}=٠

⇐ ٣(س+١)^{٢} (س−٢)^{٥}[٢(س+١) + (س−٢)]=٠

⇐ ٣(س+١)^{٢} (س−٢)^{٥} = ٠ ، ٢(س+١) + (س−٢)=٠

⇐ س=−١، ٢ ، ٢س+٢+س−٢=٠ ⇐ ٣س=٠ ⇐ س=٠

☜ ق متزايد على الفترة (−∞، ٠]، [٢، ∞) ، ومتناقص على الفترة [٠، ٢]

☜ القيم الحرجة: س = −١، ٠، ٢

☜ القيم القصوى:

① س=٠ ⟵ ق(٠)=٦٤ **(عظمى محلية)**

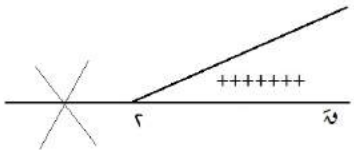
② س=٢ ⟵ ق(٢)=٠ **(صغرى محلية)**

📖 **مثال١٣:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)= √(٢س−٤) ، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:**

قَ(س)= ١ / √(٢س−٤) = ٠ ⇐ √(٢س−٤) = ٠ ⇐ ٢س−٤=٠ ⇐ س=٢

لكن مجال ق(س): ٢س−٤ ⩾ ٠ ⇐ ٢س ⩾ ٤ ⇐ س ⩾ ٢



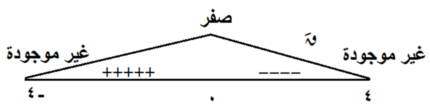
☜ ق متزايد على الفترة [٢،∞)

☜ **القيم الحرجة:** س=٢ ∈ [٢،∞)

☜ **القيم القصوى:** س=٢ ⟵ ق(٢)=٠ **(صغرى مطلقة)**

📖 **مثال١٤:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)= √(١٦−س²) ، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:**



قَ(س)= −س / √(١٦ − س²) = ٠

☜ **البسط** = ٠ : −س = ٠ ⇐ س=٠

☜ **المقام**=٠ : ١٦ − س²=٠ ⇐ س²=١٦ ⇐ س=±٤

لكن مجال ق(س): √(١٦ − س²) ⩾ ٠ ⇐ ١٦ − س² ⩾ ٠

⇐ س² ⩽ ١٦ ⇐ √س² ⩽ ٤ ⇐ |س| ⩽ ٤ ⇐ −٤ ⩽ س ⩽ ٤

☜ ق متزايد على الفترة [−٤،٠] ، ومتناقص على الفترة [٠،٤]

☜ **القيم الحرجة:** س = ٠،−٤،٤

☜ **القيم القصوى:**

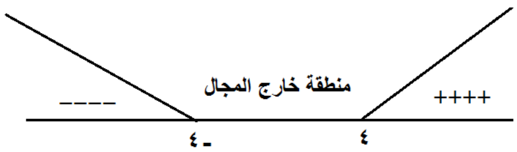
① س=٠ ⟵ ق(٠)=٤ **(عظمى مطلقة ومحلية)**

② س = −٤ ⟵ ق(−٤)=٠ **(صغرى مطلقة)**

③ س = ٤ ⟵ ق(٤)=٠ **(صغرى مطلقة)**

📖 **مثال١٥:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=√(س²−١٦) ، س ∈ ح ؟

✍ **الحل: مجال ق(س):** س²−١٦ ⩾ ٠ ⇐ س² ⩾ ١٦ ⇐ √س² ⩾ ٤ ⇐ |س| ⩾ ٤ ⇐ ٤ ⩽ س ⩽ −٤ = ح − (−٤،٤)



قَ(س)= س / √(س²−١٦) = ٠

☜ **البسط** = ٠ : س=٠ ∌ **مجال** ق(س)

☜ **المقام** = ٠ : س²−١٦=٠ ⇐ س=±٤ ∈ **مجال** ق(س)

☜ ق متزايد على الفترة [٤،∞) ، ومتناقص على الفترة (−∞،−٤]

☜ **القيم الحرجة:** س=−٤،٤

☜ القيم القصوى:

① س=−٤ ⟵ ق(−٤)=٠ (صغرى مطلقة)

② س=٤ ⟵ ق(٤)=٠ (صغرى مطلقة)

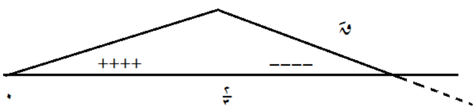
📖 **مثال١٦:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)= √س (٢ − س) ، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:**

ق̀(س)= −√س + $\frac{(٢-س)}{٢\sqrt{س}}$ =٠ ⇐ $\frac{(٢-س)-٢س}{٢\sqrt{س}}$ =٠ ⇐ $\frac{٢-٣س}{٢\sqrt{س}}$ =٠

لكن مجال ق(س): √س ⩾ ٠ ⇐ س ⩾ ٠ ، ٢ − س معرفاً على كل ح

∴ **لكن مجال** ق(س) = ح ∩ [٠،∞) = [٠،∞)



☟ **البسط** =٠ : ٢−٣س=٠ ⇐ س=$\frac{٢}{٣}$ ∈ [٠،∞)

☟ **المقام** =٠ : √س = ٠ ⇐ س=٠ ∈ [٠،∞)

☜ ق متزايد على الفترة [٠،$\frac{٢}{٣}$] ، ومتناقص على الفترة [$\frac{٢}{٣}$ ، ∞)

☜ القيم الحرجة: س = ٠ ، $\frac{٢}{٣}$

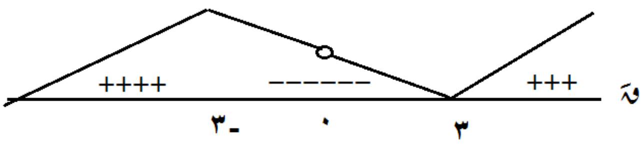
☜ القيم القصوى:

① س=٠ ⟵ ق(٠)=٠ (صغرى محلية) ...... للمقارنة فقط.

② س=$\frac{٢}{٣}$ ⟵ ق($\frac{٢}{٣}$)=$\frac{٤}{٣}$√$\frac{٢}{٣}$ (عظمى محلية ومطلقة)

📖 **مثال١٧:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)= س+$\frac{٩}{س}$، س ≠ ٠، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:** مجال ق(س): ح − {٠}



ق̀(س)= ١ − $\frac{٩}{س^٢}$ = ٠ ⇐ $\frac{س^٢-٩}{س^٢}$ = ٠

☟ س^٢−٩=٠ ⇐ س=±٣ ∈ ح−{٠}

☟ س^٢=٠ ⇐ س=٠ ∉ ح−{٠}

☜ ق متزايد على الفترة (−∞،−٣]،[٣،∞) ، ومتناقص على الفترة [−٣،٠) ، (٠،٣]

☜ القيم الحرجة: س = −٣،٣

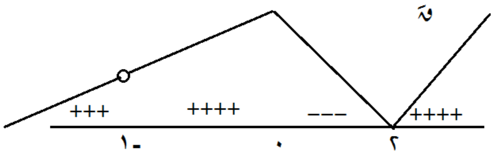
☜ القيم القصوى:

① س=−٣ ⟵ ق(−٣)=−٦ (عظمى محلية)

② س= ٣ ⟵ ق(٣)=٦ (صغرى محلية)

📖 **مثال١٨:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)= $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}+١}$ ، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:** مجال ق: س ∈ ح − {-١}



قَ(س) = $\frac{٢\text{س}(\text{س}+١)-\text{س}^{٢}}{(\text{س}+١)^{٢}}$ = ٠ ⇐ $\frac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}}$ = ٠

☜ س^٢−٢س=٠ ⇐ س(س−٢)=٠ ⇐ س=٠، ٢ ∈ ح − {-١}

☜ (س+١)^٢=٠ ⇐ س+١=٠ ⇐ س=−١ ∉ ح − {-١}

☜ ق متزايد على الفترة (− ∞،−١)،(−١،٠]،[٢،∞) ،ومتناقص على الفترة [٠،٢]

☜ القيم الحرجة: س= ٠،٢

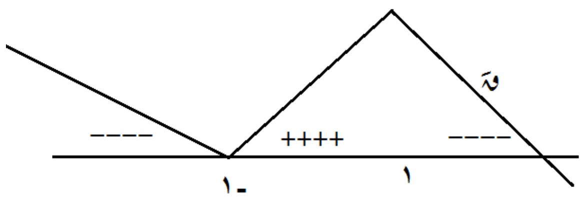
☜ القيم القصوى:

① س=٠ ⟵ ق(٠)=٠ **(عظمى محلية)**

② س=٢ ⟵ ق(٢)=$\frac{٤}{٣}$ **(صغرى محلية)**

📖 **مثال١٩:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)= $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$ ، س ∈ ح ؟

✍ **الحل:** مجال ق= ح



قَ(س) = $\frac{١-\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$ = ٠

☜ ١ − س^٢=٠ ⇐ س^٢=١ ⇐ س=±١ ∈ ح

☜ س^٢+١ ≠ ٠

☜ ق متزايد على الفترة [−١،١] ، ومتناقص على الفترة (− ∞،−١]،[١،∞)

☜ القيم الحرجة: س=١،−١

☜ القيم القصوى:

① س=−١ ⟵ ق(−١)= −$\frac{١}{٢}$ **(صغرى محلية)**

② س=١ ⟵ ق(١)=$\frac{١}{٢}$ **(عظمى محلية)**

📖 **مثال٢٠:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=٢جتاس ، [٠،٢π] ؟

✍ **الحل:**

قَ(س)= −٢جاس=٠ ⇐ جاس=٠ ⇐ س = ٠،π،٢π

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

☜ ق متزايد على الفترة [π، ٢π]، ومتناقص على الفترة [٠، π]

☜ القيم الحرجة: س = ٠، π، ٢π

☜ القيم القصوى:

① س=٠ ⟵ ق(٠)=٢ (عظمى مطلقة)

② س=π ⟵ ق(π)=-٢ (صغرى مطلقة ومحلية)

③ س=٢π ⟵ ق(٢π)=٢ (عظمى مطلقة)

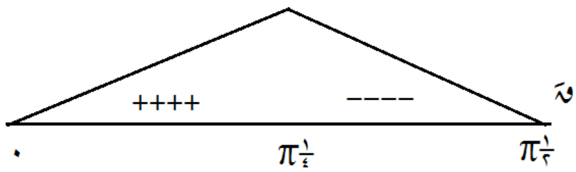
🕮 **مثال٢١:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=جا٢س ، [٠، $\frac{\pi}{2}$]؟

✍ **الحل:** قَ(س)=٢جتا٢س=٠ ⟸ جتا٢س=٠ ⟸ ٢س = $\frac{1}{2}\pi$ ، $\frac{3}{2}\pi$ ، لكن $\frac{3}{2}\pi$ ∌ [٠، $\frac{\pi}{2}$]

∴ ٢س=$\frac{1}{2}\pi$ ⟸ س = $\frac{1}{4}\pi$

☜ ق متزايد على الفترة [٠، $\frac{1}{4}\pi$] ، ومتناقص على الفترة [$\frac{1}{4}\pi$ ، $\frac{1}{2}\pi$]

☜ القيم الحرجة: س = ٠، $\frac{1}{4}\pi$ ، $\frac{1}{2}\pi$



☜ القيم القصوى:

① س=٠ ⟵ ق(٠)=٠ (صغرى مطلقة)

② س=$\frac{1}{2}\pi$ ⟵ ق($\frac{1}{2}\pi$)=٠ (صغرى مطلقة)

③ س=$\frac{1}{4}\pi$ ⟵ ق($\frac{1}{4}\pi$)=١ (عظمى مطلقة ومحلية)

🕮 **مثال٢٢:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=٧س+جاس ، س ∈ ح؟

✍ **الحل:** قَ(س)=٧+جتاس=٠ ⟸ جتاس=-٧ # (لا يجوز لأن -١ ⩽ س ⩽ ١)

☜ ق متزايد على ح.

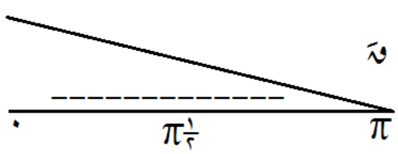
☜ لا يوجد قيم حرجة ⟵ لا يوجد قيم قصوى

🕮 **مثال٢٣:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س)=جتا°س ، [٠، π]؟

✍ **الحل:** قَ(س)=-٥ جتا⁴س جاس=٠

جاس=٠ ⟵ س = ٠، π ، جتا⁴س=٠ ⟸ جتاس=٠ ⟸ س = $\frac{1}{2}\pi$

☜ ق متناقص على الفترة [٠، π]



☜ القيم الحرجة: س = ٠، π ، $\frac{1}{2}\pi$

☜ القيم القصوى:

① س=٠ ⟵ ق(٠)=١ (عظمى مطلقة)

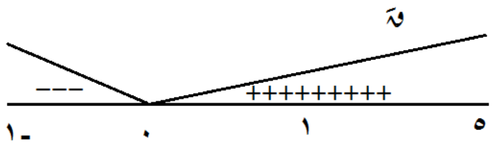
② س=π ← ق(π)=−١ **(صغرى مطلقة)**

📖 **مثال٢٤: أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران:**

ق(س)= { ٢س^٢−١ ، −١ ≤ س ≤ ١
        { ٢س^٢−س ، ١ ≤ س ≤ ٥

✍ **الحل:**

ق̄(س)= { ٤س ، −١ < س < ١
          { غ.م ، س=−١،١،٥
          { ٤س−١ ، ١ < س < ٥



٤س=٠ ← س = ٠ ∈ (−١،١)

٤س−١=٠ ← س=$\frac{١}{٤}$ ∉ (١،٥)

☜ ق متزايد على الفترة [٠،٥] ، ومتناقص على الفترة [−١،٠]

☜ **القيم الحرجة:** س =−١،٠،١،٥

☜ **القيم القصوى:**

① س=٠ ← ق(٠)=−١ **(صغرى مطلقة ومحلية)**

② س=−١ ← ق(−١)=١ **(عظمى محلية) .... للمقارنة فقط.**

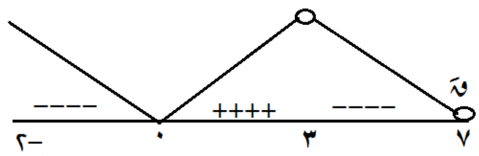
③ س=٥ ← ق(٥)=٤٥ **(عظمى مطلقة)**

📖 **مثال٢٥: أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران:**

ق(س)= { س^٢+٥ ، −٢ ≤ س < ٣
        { ١٠−٢س ، ٣ < س < ٧

✍ **الحل:**

ق̄(س)= { ٢س ، −٢ < س < ٣
          { غ.م ، س=−٢
          { −٢ ، ٣ < س < ٧



٢س=٠ ⇐ س=٠ ∈ (−٢،٣)

−٢ ≠ ٠

☜ ق متزايد على الفترة [٠،٣) ، ومتناقص على الفترة [-٢،٠] ، (٣،٧]

☜ القيم الحرجة: س=-٢،٠

☜ القيم القصوى:

① س=-٢ ⟵ ق(-٢)=٩ (عظمى محلية).....لأن نهــا ق(س) = ١٤ > ٩ (س ⟵ ٣)

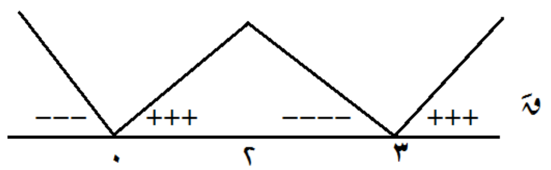
② س=٠ ⟵ ق(٠)=٥ (صغرى محلية)

📖 **مثال٢٦:** أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س)=س٢|س-٣| ؟

✍ **الحل:**

$$\text{ق(س)}=\begin{cases}\text{س}^2(\text{س}-3) \text{ ، س} \geqslant 3\\ \text{س}^2(3-\text{س}) \text{ ، س} < 3\end{cases} = \begin{cases}\text{س}^3-3\text{س}^2 \text{ ، س} \geqslant 3\\ 3\text{س}^2-\text{س}^3 \text{ ، س} < 3\end{cases}$$

$$\text{قَ(س)}=\begin{cases}3\text{س}^2-6\text{س} \text{ ، س} > 3\\ \text{غ.م} \text{ ، س} = 3\\ 6\text{س}-3\text{س}^2 \text{ ، س} < 3\end{cases}$$



⮋ ٣س٢-٦س=٠ ⟸ ٣س(س-٢)=٠ ⟸ س=٠،٢ ∌ (٣،∞)

⮋ ٦س-٣س٢=٠ ⟸ ٣س(٢-س)=٠ ⟸ س=٠،٢ ∈ (-∞،٣)

☜ ق متزايد على الفترات [٠،٢] ، [٣،∞) ، ومتناقص على الفترات (-∞،٠] ، [٢،٣]

☜ القيم الحرجة: س = ٠،٢،٣

☜ القيم القصوى:

① س=٠ ⟵ ق(٠)=٠ (صغرى محلية ومطلقة)

② س=٢ ⟵ ق(٢)=٤ (عظمى محلية)

③ س=٣ ⟵ ق(٣)=٠ (صغرى محلية ومطلقة)

📖 **مثال٢٧:** إذا كان ق(س)=أس٣+٣ب س٢ ، جد قيمة الثابتين أ،ب علماً بأن النقطة (٣،١٨) نقطة قصوى؟

✍ **الحل:** ق(٣)=١٨ ⟸ ٢٧أ+٢٧ب=١٨ ⟸ ٣أ+٣ب=٢ ....①

لكن قَ(٣)=٠ ⟵ قَ(س)= ٣أس٢+٦ب س ⟸ قَ(٣)=٢٧أ+١٨ب=٠ ⟸ ٣أ+٢ب=٠ ....②

① - ② ⟸ $\boxed{\text{ب}=2}$ ، ومن إحدى المعادلتين ينتج أن: $\boxed{\text{أ}=-\frac{4}{3}}$

⮪ **اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى (تستخدم إذا طُلبت من السؤال):**

⮪ **طريقة الحل:**

١. **نجد أصفار المشتقة الأولى (قَ(س)=٠).**

٢. **نجد قاعدة المشتقة الثانية للاقتران (قً(س)) ، ونفحص أصفار المشتقة الأولى فيها فإذا كانت القيمة ا قيمة حرجة وكان:**

- **قً(ا) > ٠ ، فإن (ا،ق(ا)) قيمة صغرى.**
- **قً(ا) < ٠ ، فإن (ا،ق(ا)) قيمة عظمى.**
- **قً(ا) = ٠ ، فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل ونلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.**

📖 **مثال: أوجد نقاط القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)=س٢– س٣+١ مستخدماً اختبار المشتقة الثانية؟**

✍ **الحل:** قَ(س)=٢س–٣س٢=٠ ← قَ(س) = س(٢–٣س)=٠ ← س=٠ ، $\frac{٢}{٣}$

قً(س)=٢–٦س

☜ قً(٠)=٢–٠=٢ > ٠ ← **(صغرى محلية)**

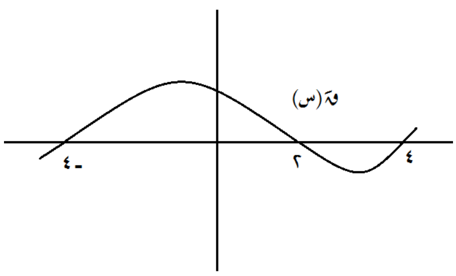
☜ قً($\frac{٢}{٣}$)=٢–٤=–٢ < ٠ ← **(عظمى محلية)**

- **إيجاد مجالات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى من خلال رسمة قَ(س):**

١. **نقاط تقاطع منحنى قَ(س) مع محور السينات قيم حرجة ، قيم قصوى.**

٢. **إذا كان المقطع من منحنى قَ(س) فوق محور السينات في فترة ما مثل [ا،ب] فإن ق(س) يكون متزايد على هذه الفترة ويكون متناقص إذا كان المقطع من منحنى قَ(س) أسفل محور السينات.**

📖 **مثال: بناءً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران قَ(س) ، أوجد:**



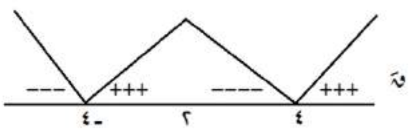
① **مجالات التزايد والتناقص.**

② **القيم الحرجة.**

③ **القيم القصوى.**

✍ **الحل:**

① **ق متزايد على [–٤،٢] ، [٤،∞) ، ومتناقص على (–∞،–٤]،[٢،٤]**



② **القيم الحرجة: س=–٤،٢،٤**

③ **القيم القصوى:**

☜ س=–٤ ⟵ ﻫ(–٤)   **(صغرى محلية)**

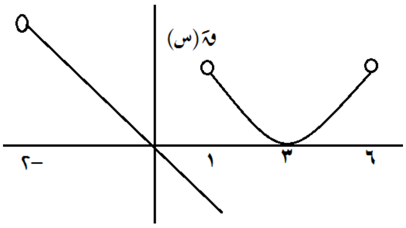
☜ س=٢ ⟵ ﻫ(٢)   **(عظمى محلية)**

☜ س=٤ ⟵ ﻫ(٤)   **(صغرى محلية)**

🕮 **مثال٢: إذا كان ﻫ(س) متصلاً على الفترة [–٢،٦] والشكل المجاور يمثل ﻫَ(س) على الفترة [–٢،٦] فجد:**

① مجالات التزايد والتناقص.

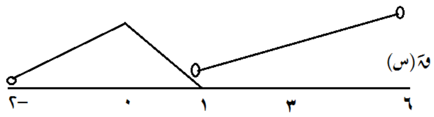
② القيم الحرجة.



✍ **الحل:**

① ﻫ متزايد على (–٢،٠] ، (١،٦) ، ومتناقص على [٠،١]

② القيم الحرجة: س=–٢،٠،٣،٦



تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516

الدرس الخامس: تطبيقات القيم القصوى

☜ **طريقة الحل:** دائماً المعلومة الأولى في السؤال هي المعادلة المساعدة ، والمعلومة الثانية (تأتي قبل جملة أكبر أو أقل ما يمكن مباشرة) تشكل قاعدة الاقتران الرئيسي.

📖 **مثال١:** ما العددان اللذان مجموعهما ٢٠ ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن؟

✍ **الحل:** نفرض أن العددان هما س ، ص

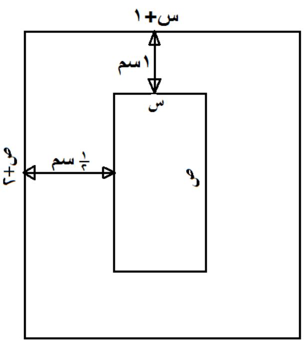
☜ **المعادلة المساعدة:** س+ص=٢٠ ← ص=٢٠− س

☜ **القاعدة:** ق(س)=س^{٢}+ص^{٢} = س^{٢}+(٢٠− س)^{٢} = س^{٢}−٤٠س+س^{٢}=٢س^{٢}−٤٠س

ق َ(س)=٤س−٤٠=٠ ← ٤س=٤٠ ← س=١٠ ، ومن المعادلة المساعدة فإن ص=٢٠−١٠=١٠

📖 **مثال٢:** قطعة ورق مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢سم^{٢} يراد طباعة إعلان عليها بحيث تترك الهوامش كالآتي: من الأعلى والأسفل ١سم ، ومن الجانبين ½ سم ، أوجد أبعاد الورقة بحيث تكون المساحة المستخدمة في الطباعة أكبر ما يمكن؟

✍ **الحل:**



☜ **المعادلة المساعدة:** (س+١)(ص+٢)=٣٢ ⇐ ص+٢ = $\frac{٣٢}{س+١}$ ⇐ ص= $\frac{٣٢}{س+١}$ −٢

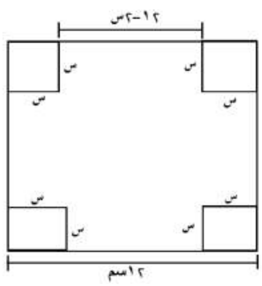
☜ **القاعدة:** ق(س)=س ص = س($\frac{٣٢}{س+١}$ −٢) = $\frac{٣٢س}{س+١}$ −٢س

ق َ(س)= $\frac{(س+١)(٣٢)-(٣٢س)(١)}{(س+١)^{٢}}$ −٢=٠ ⇐ $\frac{٣٢س+٣٢-٣٢س}{(س+١)^{٢}}$ =٢

⇐ ٣٢=٢(س+١)^{٢} ⇐ ١٦=(س+١)^{٢} ⇐ ٤=س+١ ⇐ س=٣ ، ومن المعادلة المساعدة فإن: ص=٨−٢=٦

∴ أبعاد الورقة هي: س+١ = ٣+١=٤ ، ص+٢=٦+٢=٨

📖 **مثال٣:** صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢سم ،قُصّ من زواياها الأربع أربعة مربعات متساوية طول ضلع كل منها س ، ثم طويت الجوانب بحيث أصبحت الصفيحة على شكل علبة مفتوحة من الأعلى ، أوجد قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن؟



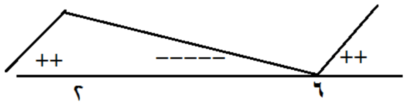
✍ **الحل:**

الحجم = الطول×العرض×الارتفاع

= (١٢−٢س)(١٢−٢س)(س)=٤س^{٣}−٤٨س^{٢}+١٤٤س

ح َ= ١٢س^{٢}−٩٦س+١٤٤=٠

تأليف الأستاذ : أحمد فهمي
0779 909 516



$\Leftarrow س^٢-٨س+١٢=٠ \Leftarrow (س-٢)(س-٦)=٠ \Leftarrow س=٢،٦$

لأن و(٢) قيمة عظمى (أكبر ما يمكن) إذن س=٢

📖 **مثال٤: إذا كان مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر يساوي ٦٠ فجد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟**

✍ **الحل:**

☜ **المساعدة:** $س+٣ص=٦٠ \Leftarrow س=٦٠-٣ص$

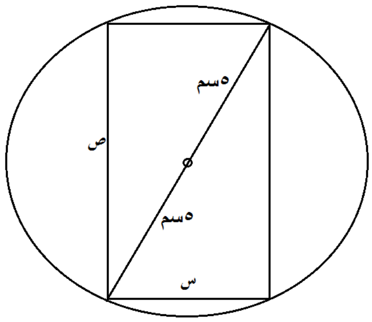
☜ **القاعدة:** $و(س)=س\times ص=(٦٠-٣ص)\times ص=٦٠ص-٣ص^٢$

$وَ(س)=٦٠-٦ص=٠ \Leftarrow ٦٠=٦ص \Leftarrow ص=١٠$ ، **ولكن** $س=٦٠-٣ص=٦٠-٣\times١٠=٦٠-٣٠=٣٠$

$س=٣٠$ ، $ص=١٠$

📖 **مثال٥: أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٥سم؟**

✍ **الحل:**



☜ **المعادلة المساعدة:** $س^٢+ص^٢=١٠٠$ .... **(فيثاغورس)**

$\Leftarrow ص^٢=١٠٠-س^٢ \longleftarrow ص=\sqrt{١٠٠-س^٢}$

$م = س\times ص= س\sqrt{١٠٠-س^٢} \Leftarrow م^٢=س^٢(١٠٠-س^٢)=١٠٠س^٢-س^٤$

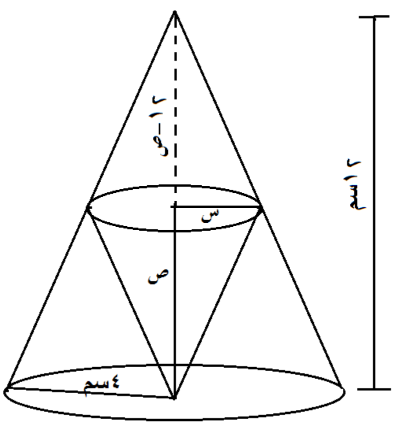
$\Leftarrow ٢م\times مَ = ٢٠٠س-٤س^٣ = ٠ \Leftarrow ٤س(٥٠-س^٢)=٠ \Leftarrow س=٠$ ، $٥\sqrt{٢}$

لكن $ص=\sqrt{١٠٠-س^٢} = \sqrt{١٠٠-٢٥\times٢} = ٥\sqrt{٢}$

$\therefore م = ٥\sqrt{٢}\times٥\sqrt{٢} = ٢٥\times٢=٥٠$

📖 **مثال٦: أوجد حجم أكبر مخروط يمكن رسمه داخل مخروط آخر بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على قاعدة المخروط الخارجي ، علماً بأن نصف قطر المخروط الأكبر ٤سم وارتفاعه ١٢سم؟**

✍ **الحل:**



☜ **المعادلة المساعدة:** $\frac{س}{١٢-ص} = \frac{٤}{١٢} \Leftarrow ٣س=١٢-ص \Leftarrow ص=١٢-٣س$

☜ **القاعدة:** $ح=\frac{١}{٣}\pi س^٢ ص = \frac{١}{٣}\pi س^٢(١٢-٣س)$

$ح=\pi س^٢(٤-س)=\pi(٤س^٢-س^٣)$

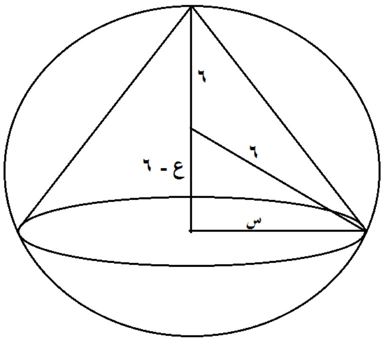
$حَ=\pi(٨س-٣س^٢)=٠ \longleftarrow \pi س(٨-٣س)=٠ \longleftarrow س=٠ ، \frac{٨}{٣}$

$\therefore ص=١٢-٣\times\frac{٨}{٣} = ١٢-٨=٤$

$\therefore ح=\frac{١}{٣}\pi\times\frac{٦٤}{٩}\times٤ = \frac{٢٥٦}{٢٧}\pi$

مثال٧: أوجد حجم أكبر مخروط يوضع داخل دائرة نصف قطرها ٦سم؟

الحل:



المعادلة المساعدة: (ع − ٦)^{٢} + س^{٢} = ٣٦ .... **فيثاغورس**

⇐ ع^{٢} − ١٢ع + ٣٦ + س^{٢} = ٣٦ ⇐ س^{٢} = ١٢ع − ع^{٢}

ح = $\frac{1}{3}\pi$ س^{٢} ع = $\frac{1}{3}\pi$(١٢ع − ع^{٢}) × ع = $\frac{1}{3}\pi$(١٢ع^{٢} − ع^{٣})

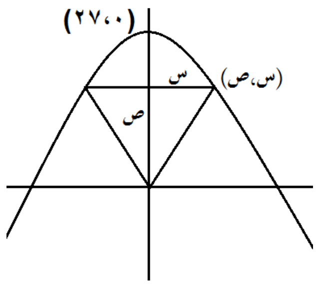
ح$'$ = $\frac{1}{3}\pi$(٢٤ع − ٣ع^{٢}) = ٠ ⟵ π ع(٨ − ع) = ٠ ⟵ ع = ٠ ، ٨

لكن س^{٢} = ١٢ع − ع^{٢} = ع(١٢ − ع) = ٨(١٢ − ٨) = ٨ × ٤ = ٣٢

∴ ح = $\frac{1}{3}\pi$ × ٣٢ × ٨ = $\frac{٢٥٦}{٣}\pi$

مثال٨: ما مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في نقطة الأصل والرأسين الآخرين على منحنى الاقتران ق(س) = ٢٧ − س^{٢}؟

الحل:



م = $\frac{1}{2}$(٢س)ص = س ص

لكن ص = ٢٧ − س^{٢} ⟵ م = س(٢٧ − س^{٢}) = ٢٧س − س^{٣}

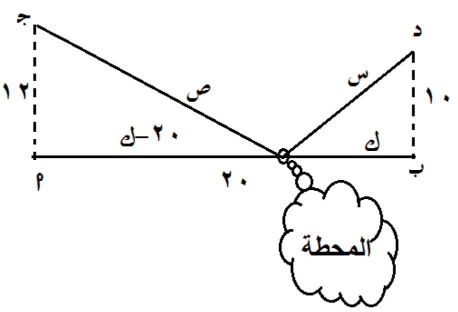
م$'$ = ٢٧ − ٣س^{٢} = ٠ ⟵ ٣س^{٢} = ٢٧ ⟵ س^{٢} = ٩ ⟵ س = ±٣ ⟵ س = ٣

∴ ص = ٢٧ − ٩ = ١٨

∴ م = ٣ × ١٨ = ٥٤

مثال٩: أب شارع مستقيم طوله ٢٠سم بحيث تقع المدينة (ج) شمال المدينة (أ) وتبتعد عنها مسافة ١٢كم ، وتقع المدينة (د) شمال المدينة (ب) وتبعد عنها مسافة ١٠كم ، حدد مكان محطة المحروقات التي تقع على الشارع أب بحيث يكون مجموع مربعي بعديها عن المدينتين أقل ما يمكن؟

الحل: س^{٢} = ١٠٠ + ك^{٢} ، ص^{٢} = ١٤٤ + (٢٠ − ك)^{٢}



المسافة (م) = س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ + ك^{٢} + ١٤٤ + (٢٠ − ك)^{٢}

⇐ ١٠٠ + ك^{٢} + ١٤٤ + ٤٠٠ − ٤٠ك + ك^{٢} = ٦٤٤ + ٢ك^{٢} − ٤٠ك

⇐ ك^{٢} − ٢٠ك + ٣٢٢

م$'$ = ٢ك − ٢٠ = ٠ ⟵ ٢ك = ٢٠ ⟵ ك = ١٠

مثال١٠: ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٦ − س^{٢} بحيث يكون أحد أضلاعه يوازي محور السينات؟

الحل:

المساحة (م)=٢س(هـ(س) – ق(س))=٢س(٦ – س^{٢}– س^{٢})=٢س(٦ –٢س^{٢})=١٢س – ٤س^{٣}

مَ=١٢ –١٢س^{٢}=٠ ⇐ ١٢س^{٢}=١٢ ⇐ س^{٢}=١ ⟵ س=١

∴ م = ١٢×١ – ٤×١=١٢ – ٤=٨