

الدرس الاول
معدل التغير

تعريف:

اذا تغيرت قيمه متغير مثل س من س_١ الى س_٢ فان مقدار التغير في س هو س_٢ - س_١ ، وسنرمز للتغير في س بالرمز Δ س وتقرأ (دلتا س)

مثال : جد Δ س اذا تغيرت س من ٣,٤٥ الى ٣,٨٠ ؟

مثال : جد Δ س في الحالات الاتيه :

(١) س_١ = ٤ ، س_٢ = ٢,٤

(٢) اذا تغيرت س من س_١ = ن الى س_٢ = ن + ١

تعريف:

التغير في س يصاحبه التغير في ق(س)

$$\Delta ق(س) = ق(س_٢) - ق(س_١)$$

$$\Delta ص = ص_٢ - ص_١$$

مثال : احسب مقدار التغير في ق(س) = س^٢ + ٤ س عندما :

(١) تتغير س من ١ الى ٣

(٢) اذا تغيرت س من ن الى ن - ١

مثال : اذا كان ق(س) = (س^٢ + س) - ١ ، وكان مقدار التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ الى س_٢ يساوي $\frac{١٠}{٣}$

(، فجد قيمه س_٢)

تعريف :

اذا كان $v = f(s)$ فان المقدار $\frac{\Delta v}{\Delta s}$ يسمى معدل التغير في v عندما تتغير s من s_1 الى s_2 حيث:

$$\frac{v(s_1) - v(s_2)}{s_1 - s_2} = \frac{v_1 - v_2}{s_1 - s_2} = \frac{\Delta v}{\Delta s} \left[\frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_2} \right]$$

حيث $s_2 = s_1 + \Delta s$

مثال : اذا كان $v = f(s) = s^2 + s$ وتغيرت s من ١ الى ٥ جد معدل التغير ؟

مثال : اذا كان $v = f(s) = 2s^2 + 3s$ فجد معدل التغير عندما تتغير s من ١ الى ٢ ؟

مثال : اذا كان $v = f(s) = 5 - s^2$ ، فجد معدل التغير في الاقتران v اذا تغيرت s من ٢ الى ١ ، ٢ ؟

مثال : اذا كان $v = f(s) = s^3 - 2s$ وتغيرت s حسب الفتره [٢ ، ٤] جد معدل التغير في v ؟

مثال : اذا كان $v = f(s) = \left[\frac{s}{2} \right] + |s|$ وتغيرت s من ١ الى ٤ جد $\frac{\Delta v}{\Delta s}$

مثال : اذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٢س٢ + ١س - ٢ \\ ١ + ٢س \end{array} \right\}$ ، $٥ \leq س$ ،
 ، $٥ > س$ ، وتغيرت س من ٣ الى ٦ جد معدل التغير

مثال : اذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٣س - ٢س \\ ١ + ٢س \end{array} \right\}$ ، $٣ \leq س$ ،
 ، $٣ > س$ ، وتغيرت س من ٤ بمقدار ٢ جد $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$

مثال : اذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٢س - ه(س) \\ ه(س) \end{array} \right\}$ ، $٠ < س < \pi$ ،
 ، $س \leq \pi$ ، وتغيرت س من $\frac{\pi}{٢}$ بمقدار $\frac{\pi}{٢}$ جد $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$

مثال : اذا كان ق(س) = $٥ + ٢س$ وكان معدل تغير ق(س) عندما تتغير س من س_١ الى س_٢ ، يساوي ١٢ فما قيمه س_١ ؟

مثال : اذا كان ق(س) = $\left[\begin{array}{l} |3 - 2س| \\ [س + 1] \end{array} \right]$ ، $٠ \leq س < ٢$ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ الى ٤

مثال : اذا كان ق(س) = $س^٣$ س $\in [١ ، ٤]$ وكان $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ١٣$ جد أ ؟

مثال : اذا كان ق(س) = $س^٢ + س$ وكانت $س_١ = ٣$ ، $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ١٠$ جد $\Delta س$ ؟

مثال : اذا كان ق(س) = $٢س$ $\in [٣ ، ٥]$ جد معدل التغير ؟

مثال : اذا كان ق(س) = $س^٢ - ٣س$ ب ، س $\in [-١ ، ٢]$ وكان $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ٦$ ، جد أ ؟

مثال : اذا كان $\xi = \frac{\Delta \cup (س)}{\Delta س}$ في الفتره [١ ، ٦] ، $\eta = \frac{\Delta \cup (س)}{\Delta س}$ في الفتره [١ ، ٣] جد $\frac{\Delta \cup (س)}{\Delta س}$ في الفتره [٦ ، ٣] ؟

مثال : اذا كان معدل التغير في ق على الفتره [١ ، ٤] يساوي ٣ ، وكان ق(١) + ق(٤) = ٢ فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = ق^٢(س) على الفتره [١ ، ٤] ؟

مثال : اذا كان ق(س) = س^٣ - ٢ هـ (س) س \exists [١ ، ٣] ، $\frac{\Delta هـ (س)}{\Delta س} = \frac{٥}{٢}$ ، في [١ ، ٣] جد $\frac{\Delta \cup (س)}{\Delta س}$ في [٣ ، ١]

مثال : اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفتره [٢ ، ٥] يساوي ٧ ، وكان معدل التغيره على الفتره [٥ ، ٩] يساوي ١٤ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق على الفتره [٢ ، ٩] ؟

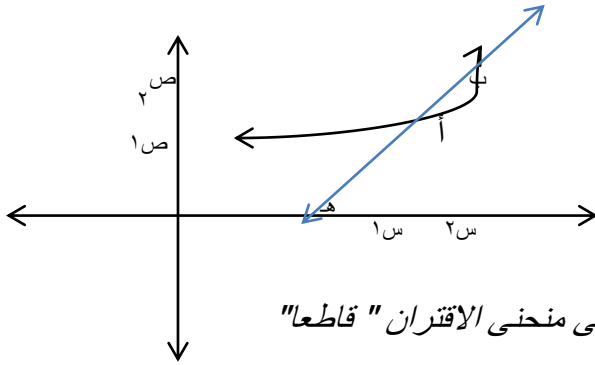
مثال : اذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفتره [١ ، ٦] يساوي ١٢ ، وكان هـ = ٢س - ٣ق (س) ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفتره [١ ، ٦] ؟

مثال : اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفتره [١- ، ٢] يساوي ٥ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ = ٤س^٢ - ٣ق (س) ، على الفتره نفسها ؟

مثال : اذا كان $\frac{2}{h(s)} = (s)$ س $\exists [٥ ، ٢]$ هـ $\times (٢) = (٥) = ٢$ وكان ق $(٢) = ١ -$ جد $\frac{\Delta u(s)}{\Delta s}$ في $[٥ ، ٢]$ ؟

مثال : اذا كان معدل التغير للاقتران ق $(س) = ٢س + ٣س$ في الفتره [٣ ، ١] يساوي ١١ فما قيمه أ ؟

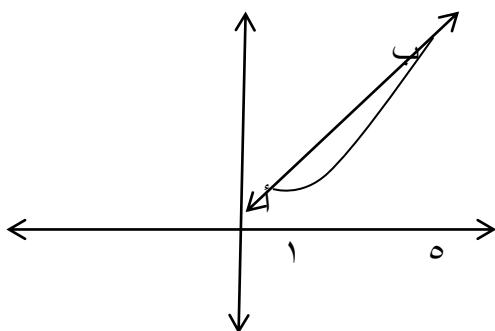
التفسير الهندسي لمعدل التغير :



يسمى الخط المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب الواقعين على منحنى الاقتران " قاطعا "

ميل القاطع أب = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ " ظا هـ " هي الزاويه المحصوره بين أب والاتجاه الموجب لمحور السيناتمثال: جد ميل القاطع بين النقطتين (٢ ، ق) ، (٥ ، ق) الواقعين على منحنى الاقتران ق حيث ق(س) = س^٣ - س؟

مثال : اذا كان القاطع المار بالنقطتين (٢ ، ق) ، (٣ ، ق) يصنع زاويه قياسها ١٢٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد متوسط التغير [٣ ، ٢] ؟

مثال : اذا كان القاطع الواصل بين النقطتين (٣ ، ٧) ، (٥ ، ق) يصنع زاويه قياسها (٤٥) مع الاتجاه السالب لمحور السينات جد (١) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ ق (٥)

مثال: يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران ق على الفتره [٥ ، ١] جد ميل العمودي على القاطع أب

التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير:

تعريف:

$$\text{السرعه المتوسطه} = \bar{v} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}$$

مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقه $f(t) = t^2 + 1$ حيث ، ن : الزمن بالثواني ، ف : المسافه بالامتار احسب السرعه المتوسطه في الفتره [٣ ، ٥] ؟

مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يكون بعده بالامتار عن نقطه ثابتة $f(t) = 2t^2 - 20t + 20$ جد السرعه المتوسطه في الفتره [٢ ، ٦] ؟

مثال : قذف جسم راسيا للاعلى بحيث بعده ف بالامتار عن سطح الارض ومعطى بالعلاقه : $f(t) = 40t - 5t^2$ جد

- (١) السرعه المتوسطه في الفتره [١ ، ٤]
- (٢) السرعه المتوسطه اذا تغيرت ن من صفر الى Δt بدلاله Δt
- (٣) هل السرعه ثابتة أم متغيره ؟ ولماذا ؟

امثله عمليه:

(١) يتغير طول ضلع مكعب من ٥ سم الى ٣ سم احسب مقدار التغير في حجم المكعب

(٢) اذا كان ق(س) = ظاس اثبت ان معدل التغير للاقتران يساوي $\frac{قاسهظاه}{ه(١-ظاسهظاه)}$ اذا تغيرت س من س الى س+ه؟

(٣) صفيحه معدنيه مربعه الشكل تتمدد بالحراره محافظه على شكلها ، اذا زاد طول ضلعها من ٦ سم ال ٦,١ سم ، فجد معدل التغير في مساحه الصفيحه بالنسبه الى طولها ؟

نمارين:

- (١) اذا كان ق(س) = س^٢ - س ، فجد مقدار التغير في قيمه الاقتران ق اذا تغيرت س من ٢ الى ٢ + هـ
- (٢) اذا كان القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٢ ، ٤) الواقعين على منحنى الاقتران ق يصنع زاويه قياسها $(\frac{\pi}{٤})$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد ق(١)
- (٣) اذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفتره [١ ، ٤] يساوي ٦ ، وكان هـ(س) = ٣س - ق(س) + ٢ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفتره [١ ، ٤]
- (٤) اذا كان ق(س) = $[\frac{١}{٣}س - ١]$ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفتره [٣ ، ٥]
- (٥) اذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ ، حيث تغيرت س من ١ الى ٩ جد ميل القاطع
- (٦) اذا كان ق(س) = $س^٢ - ٣س + ٤$ وكان متوسط التغير للاقتران ق في الفتره [١ ، ٣] يساوي ٣ فجد قيمه أ

الدرس الثاني

المشتقه الاولى

** يرمز لها بالرمز $s^2 - \frac{e}{s} = (s)'$ و $\frac{e}{s} = (s)'$

$$(s)' = \frac{(s+h) - s}{h} = \frac{s+h-s}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$(s)' = \frac{(s-e) - s}{-e} = \frac{s-e-s}{-e} = \frac{-e}{-e} = 1$$

مثال : جد $(s)'$ باستخدام التعريف العام للمشتقه لكل مما يلي :

$$(1) \quad (s) = s^2$$

$$(2) \quad (s) = s^2 - 1$$

$$(3) \quad (s) = \sqrt{s}$$

$$(4) \quad (s) = s^2 + \frac{2}{s}$$

$$(٥) \text{ ق(س) = } \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

$$(٦) \text{ ق(س) = } \text{س}^٢ + \text{س}^٣$$

$$(٧) \text{ ق(س) = } \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - \text{س}}$$

$$(٨) \text{ ق(س) = } \text{س}^٢ \text{ جنا } \text{س}^٢$$

$$(٩) \text{ ق(س) = } \text{ظاس}$$

$$u'(f) = \frac{u(s) - u(f)}{s - f} \text{ ، لحساب المشتقه عند عدد مثلا أ}$$

$$u'(f) = \frac{u(f) - u(h)}{f - h} \text{ ، عند هـ}$$

مثال : استخدم تعريف العام للمشتقه الاولى ازاء كل من الاقترانات الاتيه عند قيمه س المبينه ازاء كل منها :

$$(1) \text{ ق(س) = } 6 - 2\text{س} \text{ ، عند س = } 3$$

$$(2) \text{ ق(س) = } 3\text{س}^2 + 3\text{س} \text{ ، عند س = } 2$$

$$(3) \text{ ق(س) = } 5\text{س} - \sqrt{\text{س}} \text{ ، عند س = } 9$$

$$(4) \text{ ق(س) = } 5\text{س}^2 - \frac{5}{\text{س}} \text{ ، عند س = } 1$$

$$(5) \text{ ق(س) = } 3\text{س}^2 - 2\text{س} + 3\text{س} \text{ ، عند س = } 2$$

فكره جديده :

مثال : اذا كان $٥ = (٣)'$ فجد نها $\frac{٥(٣) - (٣+٤)٥}{٥}$

مثال : اذا كان $٦ = (٠)'$ فجد نها $\frac{٦(٠) - (٠)٥}{٥}$

مثال : اذا كان $٦ = (٢)'$ فجد :

(١) نها $\frac{٦(٢) - (٢+٥)٥}{٥}$ (٢) نها $\frac{٥(٢) - (٢+٥)٥}{٥}$

مثال : اذا كان $٣ = (٣)'$ فان (١) نها $\frac{٣(٣) - (٣)٥}{٣}$ (٢) نها $\frac{٣(٣) - (٣)٥}{٣}$ (٣) نها $\frac{٣(٣) - (٣)٥}{٣}$

مثال : باستخدام تعريف المشتقه لايجاد $(\frac{x}{3})'$ علما ان $ق(س) = ٣س$

مثال : استخدم تعريف المشتقه لايجاد المشتقه الاولى للاقتران $قاس$

مثال : استخدم تعريف المشتقه لايجاد المشتقه الاولى للاقتران $\frac{طاس}{س}$

مثال : اذا كان $ق(س) = (س - أ) ل(س)$ ، حيث $ل(س)$ اقتران متصل عند $س = أ$ ، اثبت باستخدام تعريف المشتقه أن

$$ل'(أ) = ل(أ)$$

تعريف : ليكن الاقتران ق معرفا عند العدد س = أ :

(١) اذا كانت $u'_+ (f) = \frac{u(f) - u(s)}{s - 1}$ موجوده ، فان $u'_+ (f)$ تسمى المشتقه الاولى للاقتران ق من اليمين عند س = أ

(٢) اذا كانت $u'_- (f) = \frac{u(f) - u(s)}{s - 1}$ موجوده ، فان $u'_- (f)$ تسمى المشتقه الاولى للاقتران ق من اليسار عند س = أ

(٣) اذا كان $u'_+ (f) = u'_- (f)$ فان $u'_ (f)$ موجوده وغير ذلك فان $u'_ (f)$ غير موجوده او ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = أ

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} 1 - s^2 , & s \geq 1 \\ s^2 , & s < 1 \end{cases}$

ابحث في قابليه الاشتقاق للاقتران ق عند س = ١

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} 1 + s^4 , & 1 \geq s \geq 3 \\ 3 + s^2 , & s > 3 \end{cases}$

جد $u'_- (1-)$ ، $u'_+ (1)$ ان وجدت

مثال : اذا كان ق(س) = $|s - 3|$ | ابحث في قابليه اشتقاق ق عند س = ٣

مثال : اذا كان ق(س) = $\left[2 + \frac{س}{2} \right]$ جد المشتقه الاولى عند س = ٤

مثال : اذا كان ق(س) = س [س] جد المشتقه الاولى عند س = ٠

مثال : اذا كان ع(س) = $\left. \begin{array}{l} س^٢ - س ، \quad ٠ < س < ٣ \\ ٩ - س ، \quad ٣ < س < ٦ \end{array} \right\}$ جد المشتقه الاولى عند س = ٠ ، س = ٣ ، س = ٦

مثال : اذا كان ق(س) = $|س^٢ - ٤|$ جد المشتقه الاولى عند س = ٢

اذا كان الاقتران ق معرفا على [أ ، ب] فان $U(1)$ ، $U(b)$ غير موجودتين لان ق غير معرف على يسار العدد أ وغير معرف ايضا على يمين العدد ب

مثال : ليكن ق(س) = $s^2 + 2$ ، $s \in [2, 5]$ احسب

$$(1) \quad U(s) \quad (2) \quad U(3) \quad (3) \quad U(3) \quad (4) \quad U(4)$$

مثال : اذا كان ق(س) = $s^2 + s$ ، $0 \leq s \leq 1$ ، $s^3 - 1$ ، $s > 1$ ، $s \geq 5$

جد المشتقه الاولى باستخدام التعريف العام عند $s = 0$ ، $s = 1$ ، $s = 5$

$$\text{مثال : اثبت ان } \frac{u(s+h) - u(s-h)}{h} = 2u'(s)$$

$$\text{مثال : اثبت ان } \frac{u(s+e) - u(s-e)}{e} = u'(s)$$

$$\text{مثال : اثبت ان } \frac{u(s+e^3) - u(s-e^3)}{e^3} = 3e^3 u'(s)$$

$$\text{مثال : اذا كان ق قابلا للاشتقاق اثبت ان } \frac{u(s+h^2) - u(s-h^2)}{h^2} = 2hu'(s)$$

أمثله عمليه :

(١) صفيحه معدنيه مربعه الشكل تتمدد بانتظام ، جد معدل التغير في مساحه هذه الصفيحه بالنسبه الى طولها عندما يكون طولها يساوي (٥) سم

(٢) اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) يساوي $٥س^٢ - ٨س + ٥$ فجد $ق'(٢)$

(٣) اثبت ان معدل تغير مساحه الدائره بالنسبه الى طول نصف قطرها (عند اي قيمه) يساوي محيط الدائره .

(٤) أثبت ان معدل تغير حجم الكره بالنسبه الى طول نصف قطرها (عند اي قيمه) يساوي مساحه سطحها

٥) أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطره بقاعدته بمقدار وحدتين ، سخن الأنبوب بالحراره فبدأ بالتمدد محافظا على شكله ، جد معدل تغير مساحته الجانبيه بالنسبه الى طول نصف قطره قاعدته ٦ سم

تمارين:

$$(١) \text{ اذا كان ق(س) = } \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ٨} \text{ فجد و'(س)}$$

$$(٢) \text{ اذا كان ق(س) = } \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} \text{ فجد و'(س)}$$

$$(٣) \text{ اذا كان ق(س) = } |\text{س}^٢ - \text{س}| \text{ فجد و'(١)}$$

$$(٤) \text{ اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) يساوي (س}^٢ \text{ع} - \text{ع}^٢ \text{س) فان و'(س) يساوي}$$

$$(٥) \text{ فجد و'(س) للاقتران ق(س) = } \sqrt{\text{س} - ١}$$

$$(٦) \text{ فجد } \frac{\text{و}}{\text{س}} \text{ للاقتران ص = } \text{س}^٢ - \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

الدرس الثالث

الاتصال والاشتقاق

نظريه :

اذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق عند س = أ فانه يكون متصلا عند س = أ

البرهان :

$$\text{مثال : اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} ٢ - \frac{٥}{س} \\ ٤ - س - ١ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{١} \text{ ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = } ١ \\ \text{٢} \text{ ابحث في قابليه الاشتقاق ق عند س = } ١ \end{array}$$

$$\text{مثال : اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} ٢س + أ \\ ٣س^٢ + ٢س - ٣ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{٠} < س ، \\ \text{٠} \geq س ، \end{array} \text{ قابلا للاشتقاق عند س = } ٠ \text{ فجد قيمه الثابت أ}$$

$$\text{مثال : اذا كان ق(س) = } |س|^٢ \text{ [س] ابحث في قابليه الاشتقاق عند س = } ٠$$

نظريه :

اذا كان ق(س) غير متصل عند س = أ فان ق(س) يكون غير قابل للاشتقاق عند س = أ

$$\text{مثال : ابحت في قابليه اشتقاق الاقتران ق(س) = } \frac{[٥ + س]}{|٢ - س|} \text{ عند س = } \epsilon$$

$$\text{مثال : ابحت في قابليه اشتقاق الاقتران ق(س) = } \frac{س}{٣ - س} \text{ عند س = } ٣$$

$$\text{مثال : اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} ١ + س^٢ ، س \geq \epsilon \\ ١ - س^٣ ، س < \epsilon \end{array} \right\} \text{ ابحت في اتصال ق(س) عند س = } \epsilon$$

$$\text{مثال : ابحت في قابليه اشتقاق ق(س) عند س = } \epsilon$$

$$\text{مثال : اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} \sqrt{١ + س} ، ٠ \leq س < ٢ \\ ١ - س^٢ ، ٢ \leq س \leq ٥ \end{array} \right\} \text{ ابحت في قابليه الاقتران ق للاشتقاق عند س = } ٢ ، س = \epsilon$$

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٠ ، & س \geq ٠ \\ ٥ - س ، & ٠ < س < ٤ \\ \frac{١}{س - ٥} ، & س \leq ٤ \end{cases}$ ابحث في قابليه الاقتران ق للاشتقاق على مجاله واكتب قاعده و(س)

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} [س] ، & ١ \leq س < ٢ \\ |س - ٣| ، & ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ ابحث في قابليه الاشتقاق على مجاله ، واكتب قاعده و(س)

مثال : اذا كانت و(٥) = ٢ ، ق(٥) = ١- جد $\frac{س^٢ و(س) - ٢ و(٥)}{س - ٥}$

تمارين :

١) اذا كان ق(س) = (س - ٢) [س] ، ابحث في قابليه الاشتقاق عند س = ٢

٢) اذا كان ل(س) = [٣ - ٢ س] ابحث في قابليه الاشتقاق عند س = ١- ، س = ١/٤

٣) اذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{٩-س}{٣-س} \\ ٦ \end{array} \right\}$ ، س ≠ ٩ ،
 ، س = ٩ ، جد ل(٩) ان وجدت

٤) ليكن ق(س) = $\left. \begin{array}{l} (١ + س) \\ (١ - س) \end{array} \right\}$ ، س ≥ ٠ ،
 ، س < ٠ ، بين ان ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

٥) ليكن ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٢ + س \\ ٢ + س \end{array} \right\}$ ، ٠ ≤ س ≤ ١ ،
 ، ١ ≤ س ≤ ٣ ، جد

$$ل(س) = \frac{ل(س) - ل(ع)}{س - ع} = \frac{ج - ج}{س - ع} = ٠$$

الدرس الرابع

قواعد الاشتقاق (١)

قاعدة : اذا كان ق(س) = ج - حيث ج: ثابت فإن ق'(س) = صفر

$$\text{البرهان : } ق'(س) = \lim_{\Delta س \rightarrow 0} \frac{ق(س + \Delta س) - ق(س)}{\Delta س} = \frac{ج - ج}{\Delta س} = ٠$$

أمثله:

(١) ق(س) = ٤

(٢) ق(س) = ٣ -

(٣) ق(س) = $\frac{\pi}{4}$

قاعدة: اذا كان ق(س) = س^ن حيث ن عدد صحيح فان ق'(س) = ن س^{ن-١}

البرهان :

امثله: جد مشتقه كل من الاقترانات :

(١٢) ق(س) = $\sqrt[3]{س}$

(١٣) ق(س) = $\sqrt[3]{س^2}$

(١) ق(س) = س^٢

(٢) ق(س) = س

(٣) ق(س) = س^٨

(٤) ق(س) = س^{-٥}

(٥) ق(س) = س^{-٣}

(٦) ق(س) = س ^{$\frac{3}{2}$}

(٧) ق(س) = س ^{$\frac{1}{4}$}

(٨) ق(س) = س ^{$\frac{2}{5}$}

(٩) ق(س) = س ^{$\frac{4}{7}$}

(١١) ق(س) = $\frac{1}{س^6}$

(١٠) ق(س) = $\frac{1}{س^٥}$



$$\begin{aligned} س^{-٢} &= \frac{1}{س^2} \\ \sqrt[3]{س^2} &= س^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

قاعده : اذا كان ق(س) = ج هـ(س) فان ا و(س) = ج هـ'(س)

البرهان :

أمثله : جد المشتقه الاولى لكل من الاقترانات :

$$(1) \text{ ق(س) = } 3 \text{ س}^{\circ}$$

$$(2) \text{ ق(س) = } - \text{ س}^{\circ}$$

$$(3) \text{ ق(س) = } \frac{\text{س}^3}{2}$$

$$(4) \text{ ق(س) = } \frac{\text{س}^7}{\text{س}^{\circ}}$$

$$(5) \text{ ق(س) = } \sqrt{\text{س}}$$

(6) اذا كان ل(س) = ٤ ق(س) وكان ق(س) قابلا للاشتقاق ، و(س) = ٢ = ل(س) فجد ل(س)

(7) اذا كان ق(س) = س^٣ | س | فجد ل(س)

قاعده :

اذا كان ق(س) = ل(س) ± هـ(س) فان و(س) = ل(س) ± هـ'(س)

البرهان :

امثله : جد المشتقه الاولى لكل من الاقترانات

$$(1) \text{ ق(س) = } 3س^{\circ} - 6س^{\wedge} + 7س + 6$$

$$(2) \text{ ق(س) = } 5 - 2س + \frac{4}{3س}$$

$$(3) \text{ ق(س) = } \sqrt[3]{س} - 7س + 1$$

$$(4) \text{ ق(س) = } 2س^{\wedge} (س - 2) \text{ جد } \text{ق(س)}$$

نتيجه:

$$\frac{\text{ق(س)}}{\text{ج}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ فان } \frac{\text{ق(س)}}{\text{ج}} = \text{ص اذا كان ص}$$

امثله: جد المشتقه الاولى لكل من الاقترانات :

$$(1) \text{ ق(س) = } \frac{3س^{\wedge} - 4س}{8}$$

$$(2) \text{ ق(س) = } \frac{3س^{\wedge} - 6س + 1}{5}$$

مثال : اذا كان $ق(س) = س^٤ - ٦س^٢ + ٤$ فجد (١) $ق'(س)$ (٢) قيم التي يكون عندها لمنحنى الاقتران ق مماس افقي؟

مثال : اذا كان $ق(س) = ٤س^٢ - [١ + س^٢]$ فجد $ق'(٠.٦)$.

مثال : اذا كان $ق(س) = [١ + س^٣] + |س|$ فجد $ق'(٠.٤)$.

مثال : اذا كان $ق(س) = س + [٠,٢ + س] - |س|$ عند $س = ١ -$

مثال : اذا كان ل ، ه اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل $ق'(٢) = ٤$ ، ه $ق'(٢) = ٣$ فجد كلا مما يلي :

$$(١) ق(س) = ٦ل(س) - ٢ ه(س)$$

$$(٢) ق(س) = \frac{١}{٣}ل(س) + ه(س) + س^٣$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال : اذا كان ق(س) = ل(س) ،} \\ \text{س} \geq \text{ج} \end{array} \right\} \text{ل(ج)'}(س-ج) ، \text{س} < \text{ج}$$

وكان ق(س) اقترانا متصلًا عند $\text{س} = \text{ج}$ ، وكان ل(س) اقترانا قابلاً للاشتقاق عند $\text{س} = \text{ج}$ ، فاثبت ان الاقتران ق قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{ج}$ ، ثم جد $\text{ل(ج)}'$ ؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال : اذا كان ق(س) = أس}^2 + ب\text{س} ، \text{س} \geq ١ \\ \text{٤ - ب} \text{س}^2 + \text{أس} ، \text{س} < ١ \end{array} \right\} \text{وكان ل(١)'} \text{ موجوده ، فان قيمه كل من الثابتين أ ، ب ؟}$$

نمارين :

$$(١) \text{ اذا كان ق(س) = } \left[\frac{١}{٤} \text{س} + ٥ \right] - ٤\text{س}^2 \text{ جد المشتقه الاولى عند } \text{س} = ٢, ٤$$

$$(٢) \text{ اذا كان ق(س) = } ٥\text{س}^٤ - (٢\text{س} - \frac{٣}{\text{س}}) \text{ جد ل(١-)'}$$

الدرس الخامس

قواعد الاشتقاق (٢)

قاعده الضرب :

$$\text{اذا كان } ق(س) = ل(س) \times م(س) \text{ فإن}$$

$$ق'(س) = ل(س) \times م'(س) + ل'(س) \times م(س)$$

اي ان مشتقه حاصل ضرب اقترايين
الاقتران الاول \times مشتقه الثاني + الثاني \times مشتقه الاول

امثله : جد $ق'(س)$ لكل من الاقتران التاليه :

$$(١) ق(س) = (س^٢ - ٢) (٣س + س^٣)$$

$$(٢) ق(س) = (س^٣ - ٣س^٢) (س^٤ - ٣) \text{ عند } س = ١$$

$$(٣) ق(س) = (س^٣ - ٢س) (س^٣ - ٢) \text{ عند } س = \text{صفر}$$

قاعده: مشتقه القسمه

$$\text{اذا كان } ق(س) = \frac{ل(س)}{م(س)} \text{ فإن :}$$

$$ق'(س) = \frac{ل(س) \times م'(س) - ل'(س) \times م(س)}{(م(س))^٢}$$

امثله : جد $ق'(س)$ لكل من الاقتران :

$$(١) \text{ اذا كان } ق(س) = \frac{س^٢ - ٣}{س^٣ + ٤}$$

$$(٢) \text{ اذا كان } u(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{1 + 3s} \text{ عند } s = \text{صفر}$$

$$(٣) \text{ اذا كان } u(s) = \frac{1 + 3s}{1 + 2s} \text{ عند } s = 2$$

نتيجه :

$$\text{اذا كان } u(s) = \frac{ج}{(s)^2} \text{ فإن :}$$

$$u'(s) = \frac{-ج \times (s)^{-2}}{(s)^4} = \frac{-ج}{(s)^3}$$

أمثله : جد المشتقه الاولى لكل من الاقتران التاليه :

$$(١) \quad u(s) = \frac{1}{s}$$

$$(٢) \quad u(s) = \frac{4}{s^2 + 2s} \text{ عند } s = 2$$

$$(٣) \text{ اذا كان } u(s) = \frac{6}{s - ه} \text{ جد } u'(٠) \text{ حيث } ه = (٠)' = ٣ ، ق = (٠) = ٣-$$

$$(٤) \text{ اذا كان } u(s) = \frac{٧}{s} - \frac{٨}{s^٥}$$

٥) أثبت انه اذا كان $Q(s) = s^5$ حيث s : عدد صحيح سالب فإن $Q'(s) = 5s^4$

٦) اذا كان $Q(s) = \frac{5}{(3-s)}$ وكانت $Q'(2) = 10$ جد قيمه الثابت A

مشتقه الاقترانات المتشعبه :

**** عند اشتقاق اي اقتران متشعب يجب التأكد من إتصاله :**

$$\text{مثال : اذا كان } Q(s) = \left. \begin{array}{l} s^5 + s + 5, \quad s > 1 \\ s^3 + 2s + 4, \quad s \leq 1 \text{ جد } \frac{Q(s)}{s} \end{array} \right\}$$

$$\text{مثال : اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^٥ - \text{س}^٢ ، \text{س} > ٠ \\ \text{س}^٢ + \text{س} + ١ ، \text{س} \leq ٠ \end{array} \right\} \text{جد ق'(س)}$$

$$\text{مثال : اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^٥ + \text{س}^٢ ، \text{س} \geq ١ \\ \text{س}^٦ + ٦ ، \text{س} < ١ \end{array} \right\} \text{جد ق'_٠(س) ، ق'_١(س) ، ق'_٢(س)}$$

$$\text{مثال : اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} \frac{٢}{\text{س}} ، \text{س} \leq ١ \\ \text{س} + ١ ، \text{س} > ١ \end{array} \right\} \text{فجد ق'(س)}$$

- (١) اذا علمت ان هـ (س) قابل للاشتقاق وان هـ (٢) = ٣ ، هـ (٢) = ١ - فجد هـ (٢) في كل مما يأتي
- (أ) ق(س) = س هـ (س) (ب) ق(س) = س^٣ هـ (س) - س^٥
- (ج) ق(س) = هـ (س) - هـ (س) $\frac{1}{هـ(س)}$ (د) ق(س) = $\frac{١ + س٢}{هـ٣(س)}$

مشتقه الاقتران المتشعب على مجاله :

مثال : اذا كان ق(س) = $\left\{ \begin{array}{l} |س - ٢| س \\ س^٣ [س] - ١ \end{array} \right.$ ، $١ > س \geq ٠$ ، $٢ \geq س \geq ١$ ،

س ق [٠ ، ٢] جد هـ (س)

$$\text{مثال: إذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} 1 + \left[\frac{س}{٢} \right] + س^٢ \\ |س^٢| + |س^٣ - ٨| \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١ \leq س < ٢, \\ س \leq ٢, \end{array}$$

س ق [١ , ∞) جد ق'(س)

$$\text{مثال: ق(س) = } |س^٣ - ٥س - ٢| \text{ جد ق'(١) , ق'(٣)}$$

$$\text{مثال: ق(س) = } \frac{|س^٢ - ٤س + ٣|}{س(١-س)} \text{ س ق (١ , ٤) }$$

مثال: ق(س) = $\frac{1 + \frac{س}{٢}}{|١ - س٢|}$ جد و(٣)

مثال : اذا كان ق(س) = |س| (س^٢ + ٢س) ، فابحث في قابليه الاقتران ق للاشتقاق لجميع قيم س ∃ ح

الثوابت :

مثال: ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٢س - ٢س \\ ٢س + ٣س \end{array} \right\}$ ، س ≥ ٢ ، س < ٢

جد ١ ، ب اذا كان و(٢) موجودة

مثال : اذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٢س٣ \\ ١س + ب \end{array} \right\}$ ، س ≥ ١ ، س < ١

قابلا للاشتقاق عند س=١ فجد كلا من ١ ، ب

مثال : اذا كان هـ = (س) س^٢ ق(س) وكان ق(س) = ٦ ، و(س) = ٥ فجد هـ'(س)

مثال : اذا كان ل ، م ، هـ اقترانات قابله للاشتقاق عند س ، فاستخدم قاعده مشتقه حاصل ضرب اقترانين لاثبات :

$$((س) ل) = \frac{س}{س}$$

$$ل = (س) ل' + (س) ل' هـ + (س) هـ' ل + (س) هـ' ل' + (س) ل' هـ + (س) هـ' ل'$$

الحالات التي يكون عندها الاقتران غير قابل للاشتقاق :

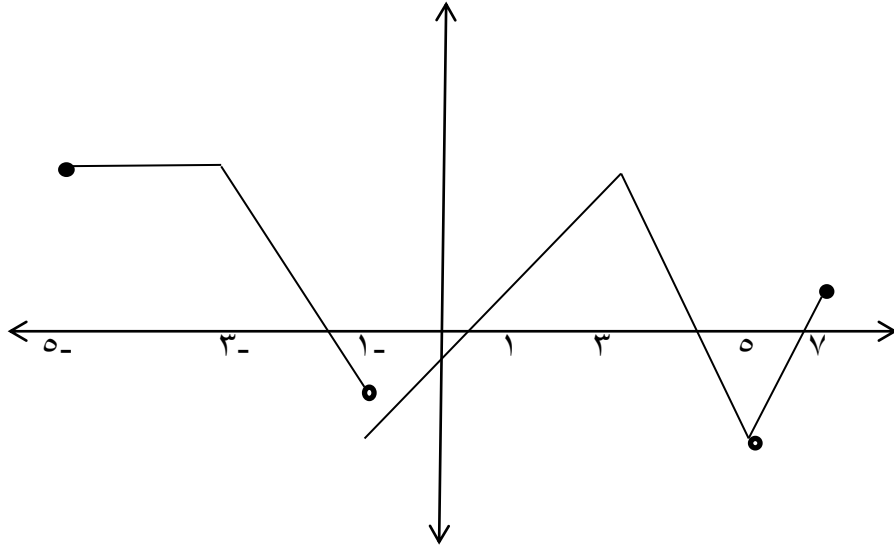
- (١) عند نقاط عدم الاتصال
- (٢) عند أطراف الفترات المغلقه
- (٣) من لرسم عند : عند الاطراف ونقاط عدم الاتصال وعن الرؤوس المدببه
ومن الامثله على الرأس المدبب : اقتران القيمه المطلقه الخطيه

مثال : جد قيم س التي يكون عندها ق(س) غير قابل للاشتقاق :

$$(١) ق(س) = \frac{س}{س-٢} \ni [٥,١]$$

$$(٢) ق(س) = |س^٢ - ٨س| س \in (٢, \infty)$$

مثال : من الشكل المجاور جد قيم س التي يكون عندها ق(س) غير قابل للاشتقاق مع ذكر السبب :



تمارين :

- (١) اذا كان ق(س) = $س^٢ - [١ + س^٢]$ ، عند $س = ١, ٤$ ،
 (٢) اذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل(٢-) = ٣ ، ل'(٢-) = ١- ، هـ(٢-) = ٤ ، هـ'(٢-) = ٦- ،
 فجد هـ'(٢-) = ٦- ، في كل مما يأتي :

$$(أ) ق(س) = ل(س) \times هـ(س) ، (ب) ق(س) = \frac{هـ(س)}{١ + ل(س)}$$

$$(٣) اذا كان ق(س) = \left. \begin{array}{l} ١ \geq س ، \\ \frac{٤}{١ + س} \end{array} \right\}$$

فابحث في قابليه الاقتران ق للاشتقاق على ح

الدرس السادس

المشتقات العليا

$$(1) \quad u'(s) = v = \frac{v}{s} = \frac{v}{s} \leftarrow \text{جميعها تعني المشتقه الاولى}$$

$$(2) \quad u''(s) = v'' = \frac{v''}{s} = \frac{v''}{s} \leftarrow \text{جميعها تعني المشتقه الثانيه}$$

$$(3) \quad u'''(s) = v''' = \frac{v'''}{s} = \frac{v'''}{s} \leftarrow \text{جميعها تعني المشتقه الثالثه وهكذا}$$

مثال : اذا كان $u(s) = s^2 - s^4$ جد $u''(s)$

مثال : اذا كان $u(s) = s^4 + s^3 + s^2$ جد $u''(s)$ ؟

مثال : اذا كانت $v = s^3 - 2s^2$ هـ $u'(s)$ جد $\frac{v}{s} \Big|_{s=3} =$ حيث هـ $u'''(3) = 2$

مثال : اذا كان $u(s) = (s^2 - s^3 + 1)(s^2 + 7)$ جد $u''(s)$

مثال : اذا كان $u(s) = \frac{1}{s^2}$ ، وكان $\exists [2, \infty)$ $u'''(s) = s^2$ فجد قيمه الثابت أ

مثال : اذا كان $ق(س) = ٣س^٢$ ، $ق(٣) = ٤$ أس^٢ جد قيمه أ ، ن

مثال : اذا كان $ق(س) = ٤س^٢ + \frac{١٦}{س}$ ، أ ثابت ، وكان $ق(٢) = ٩٠$ فجد قيمه الثابت أ

مثال : اذا كان $ق(س) = ٨س - ٤(٣-م)س^٢$ ، فجد قيم الثابت م التي تجعل $ق(س) > ٠$

مثال : جد قاعده كثير حدود ق من الدرجه الثانيه الذي فيه $ق(١) = ٣$ ، $ق'(١) = ٢$ ، $ق''(١) = ٤$

مثال : اذا كان ق(س) = $s^4 + s^3 - s^2 - s$ ، فجد قيم س التي تحقق ما يأتي :

أ) $ق(س) = ٠$ ب) $ق(س) \leq ٠$ ج) $ق(س) > ٠$

مثال : اذا كان $ص = \frac{٢}{س}$ فأثبت ان $ص = \frac{١}{٣}$ ص^٣

مثال : اذا كان ق(س) = $|س^٣|$ جد $ق(٠)$ ، $ق(٠)$ ، $ق(٠)$

ملحوظه : اذا كان $Q^n(A)$ موجوده فان جميع المشتقات الادنى منها موجوده عند $s = A$
 اذا كان $Q^n(A)$ غير موجوده فان جميع المشتقات الاعلى منها تكون غير موجوده عند $s = A$
 مثال : اذا كان $Q(s) = (s^3 + 2s^2 - 3s + 1) \times (s - 1)' \times (s - 1)'' = 210$

$$\text{مثال : اذا كان } Q(s) = s^3 + 2s^2 + 2 \text{ جد } \frac{Q(s) - (s+2)'Q(s)}{s} \leftarrow$$

$$\text{مثال : اذا كان } Q(s) = s^4 + 2s^2 + 1 \text{ جد } \frac{Q(s) - (s+1)'Q(s)}{s} \leftarrow$$

$$\text{مثال : اذا كان } Q(s) = s^3 - 2s^2 + 3 \text{ وكانت } \frac{Q(s) - (s+2)'Q(s)}{s} = 6$$

مثال : اذا كان $ك$ من الاقترانين $ل$ ، هـ قابلا للاشتقاق مرتين فأثبت أن :

$$(ل \times هـ)''(س) = (ل \times هـ)'(س) + (ل \times هـ)''(س) + (ل \times هـ)'(س)$$

مثال : اذا كان كل من الاقترانين $ل$ ، هـ قابلا للاشتقاق مرتين فأثبت ان :

$$ل(س) هـ''(س) - ل''(س) هـ(س) = \frac{س}{س} (ل(س) هـ'(س) - ل'(س) هـ(س))$$

مثال : اذا كان $ق(س) = \left. \begin{array}{l} أس^٢ + ب س + ج ، س < ١ \\ س^٣ ، س \geq ١ \end{array} \right\}$ جد أ ، ب ، ج التي تجعل $ق''(١)$ موجوده

مثال : اذا كان $ق(٥) = ٣$ ، $ه(٥) = ١-$ ، $و(٥) = ٢$ ، $ه'(٥) = ٤$ جد :

$$(١) (٥)'(ه٣ + و٢)$$

$$(٢) (٥)'(و٨ - ٤)$$

$$(٣) (٥)'(و٢ - (١)')و٣ + (١)ه$$

$$(٤) (٥)'\left(\frac{٧}{و}\right)$$

$$(٥) (٥)'\left(\frac{٢}{و} + \frac{و}{٢}\right)$$

$$(٦) (٥)'\left(\frac{و}{ه}\right)$$

$$(٧) (٥)'(ه \times و٣)$$

$$(٨) (٥)'((٥)(ه \times و))$$

تمارين :

$$(١) \text{ اذا كان } q(s) = \frac{2}{s} \text{ أثبت أن } u'(1) = u''(2)$$

$$(٢) \text{ اذا كان } v = |s| (s^2 + s) \text{ جد المشتقه الثانيه}$$

$$(٣) \text{ اذا كان كل من } l' \text{ و } l'' \text{، قابلا للاشتقاق عند } s \text{ وكان } q(s) = s^2 l(s) \text{ فجد } u'''(s)$$

$$(٤) \text{ اذا كانت } l, q, \text{ و } h \text{ اقترانات قابله للاشتقاق حتى المشتقه الثالثه وكان}$$

$$h(s) = l(s) \times q(s), \quad h'(s) = l'(s) \times q(s) + l(s) \times q'(s) \text{ حيث } j \text{ عدد ثابت اثبت ان:}$$

$$h'''(s) = l'''(s) \times q(s) + l''(s) \times q'(s) + l'(s) \times q''(s) + l(s) \times q'''(s)$$

الدرس السابع مشتقه الاقترانات الدائريه

قاعده :

اذا كان ق(س) = جاس ، س ق ح فان و (٧) ' و (س) = جتاس

البرهان :

قاعده :

اذا كان ق(س) = جتاس ، س ق ح فان و (س) = -جاس

البرهان :

نتيجه :

اذا كان ق(س) = ظاس فان و (س) = قاس

البرهان :

نتيجه :

اذا كان قاس = ظاس فان و (س) = قاس-ظاس

البرهان :

ق(س)	و (س)
جاس	جتاس
جتاس	-جاس
ظاس	قاس
ظتاس	-قتاس
قاس	قاس-ظاس
قتاس	-قتاس-ظتاس

مثال : جد π (س) لكل من الاقترانات :

$$(1) \text{ ق(س) = } 2 \text{ جاس} + 4 \text{ جتاس}$$

$$(2) \text{ ق(س) = } 4\pi^2 \text{ جاس} - 3 \text{ س} - 4 \text{ قتاس} + \frac{\pi}{9} \text{ جا}^2$$

$$(3) \text{ ق(س) = } 5\pi^2 \text{ جاس} + 9 \text{ ظاس} + 5 \text{ جتا}^2 \text{ س}$$

$$(4) \text{ ق(س) = } 5 \text{ ظاس} + 3 \text{ جاس} + 4 \text{ قتاس} \text{ لكل س } \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$$

$$(5) \text{ ق(س) = } 5 \text{ جاس} + 3 \text{ ظاس}$$

$$(6) \text{ ق(س) = } 5 \text{ س} + 3 \text{ ظتاس}$$

$$(7) \text{ اذا كان ق(س) = } \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} \text{ جد } \pi' \text{ (س)}$$

$$(8) \text{ اذا كان ق(س) = } 5 \text{ قاس} + 3 \text{ ظاس} \text{ فجد } \pi' \text{ (س)}$$

$$(9) \text{ ق(س) = } \frac{\text{ظاس} + \text{س}}{\text{جاس}} \text{ فجد } \pi' \text{ (س)}$$

$$(10) \text{ ق(س) = } 5 \text{ جاس} - 3 \text{ س} + 4 \text{ جتا}^2 \text{ س} \text{ فجد } \pi' \text{ (س)}$$

مثال : اذا كان ق(س) = |س| × |جتاس| جد و(π)

مثال : اذا كان ق(س) = س جاس + جتاس جد و(π)

مثال : اذا كان ق(س) = |جاس| ، ابحت في قابليه الاقتران ق للاشتقاق عند س = π

مثال : اذا كان ق(س) = (|س| + [س + ١]) جاس جد و(π)

مثال : اذا كان ص = جاس + √٣ جتاس س ∈ [π, ٠] جد أصفار و(س)؟

مثال : اذا كان ق(س) = جاس - ١/٣ س س ∈ [π, ٠] فجد قيم س التي تجعل المماس لمنحنى ق افقيا؟

مثال : جد قيم s في الفترة $[-\pi/2, \pi/2]$ التي تحقق المعادله $\cos(s) = 0$ في كل مما يأتي :

$$(1) \cos(s) = s + \sin(s) \quad (2) \cos(s) = \sin(s)$$

مثال : اذا كان $\cos(s) = \sin(s + \frac{\pi}{4})$ بين أن s من حلول المعادله $\cos(s) = \sin(s) + \frac{\pi}{4}$.

$$\text{مثال : اذا كان } \cos(s) = \frac{\sin(s) + \cos(s)}{1 + \sin(s)} \text{ أثبت أن } \cos(s) = \frac{\sin(s)}{\cos(s)}$$

$$\text{مثال : اذا كان } \cos(s) = \frac{\sin(s) - \cos(s)}{\sin(s) + \cos(s)} \text{ أثبت أن } \cos(s) - \sin(s) = 1$$

مثال : اذا كان $v = u^2 + 2u$ ، أثبت أن $(v)' = 2u + 2$.

مثال : اذا كان $v = u^2 + 2u$ بدلاله v ؟

مثال : اذا كان $v = u^2 + 2u$ ، جتاس ، $v \leq 0$ ،

أس + ب ، $v > 0$. فجد قيمه كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل ق قابلا للاشتقاق عند $v = 0$.

نمارين :

(١) اذا علمت أن $v = u^2 + 2u$ ، فأثبت أن : $(v)' = 2u + 2$.

(٢) اذا كان $v = u^2 + 2u$ جتاس جد المشتقه الثانيه

(٣) اذا كان $v = u^2 + 2u$ جتاس جد المشتقه الاولى

(٤) اذا كان $v = u^2 + 2u$ جتاس - س ظتاس جد المشتقه الاولى

الدرس الثامن

قاعدة السلسلة

إذا كان هـ (س) قابل للاشتقاق عند س وكان ق (س) قابل للاشتقاق عند هـ (س) فإن:

$$(هـ \circ ق)'(س) = (هـ)'(ق(س)) \times ق'(س)$$

تطبيق:

$$(١) (هـ \circ ق)'(س) = (هـ)'(ق(س)) \times ق'(س)$$

$$(٢) (هـ \circ ق)'(س) = (هـ)'(ق(س)) \times ق'(س)$$

$$(٣) (هـ \circ ق)'(س) = (هـ)'(ق(س)) \times ق'(س)$$

$$(٤) (هـ \circ ق)'(س) = (هـ)'(ق(س)) \times ق'(س)$$

مثال: إذا كانت ق(٧) = ٩ ، هـ'(٩) = ٣ ، ق'(٧) = ٤ جد (هـ \circ ق)'(٧) ؟

مثال: إذا كانت ق(٦) = ٥ ، هـ'(٥) = ٣/٢ ، ق'(٦) = ٨ جد (هـ \circ ق)'(٦) ؟

مثال: إذا كانت ق(١) = ٩ ، هـ'(٩) = ١/٢ ، ق'(١) = ٤ جد (هـ \circ ق)'(١) ؟

مثال: إذا كانت ق(١) = ٣٢ ، هـ'(٣٢) = ٢ ، ق'(١) = ١/٢ جد (هـ \circ ق)'(١) ؟

مثال: إذا كانت $(\cup \circ ه) = (١)'$ ، $ه = (١)''$ ، $ه = (١)'$ ، $٣ = (١)'$ جد $\cup (٣)'$ ؟

مثال: إذا كانت $(ه \circ \cup) = (٣)'$ ، $١٨ = (٣)'$ ، $\cup = (٣)'$ ، $ه = (س)'$ ، $٥ = (س)'$ ، جد $ق(٣)'$ ؟

مثال: إذا كان $(ه \circ \cup) = (س)'$ ، $س = (س)'$ ، $س = (س)'$ ، $س = (س)'$ ؟

مثال : إذا كان $ق(س) = س^٢ + ٥$ ، $ه = (س) = \frac{١}{س}$ أوجد $(ه \circ \cup) = (س)'$ ، $١٦ = (ه \circ \cup) = (س)'$

مثال : إذا كانت $(ه \circ \cup) = (س) = س^٤$ ، $ه = (س) = س^٢$ ، جد $\cup (٨)'$

مثال : اذا كان ق(س) = $س^٢ + ١$ ، هـ (س) = أظتاس ، جد مجموعه قيم أ التي تجعل (س) هـ = $(\frac{\pi}{٤})$ = ١٦ -

قاعده: اذا كان ق، هـ قابلين للاشتقاق وكانت ص = ق(ع) ، ع = هـ (س) فإن :

$$\frac{ص}{س} \times \frac{س}{ع} = \frac{ص}{س} = ٢ص + ٢ (ص')$$

مثال : اذا كان ص = ع^٦ ، ع = س^٢ + ١ جد $\frac{ص}{س}$

مثال : اذا كانت ص = هـ^٣ + ١ ، هـ = س^٢ + ٢ جد $\frac{ص}{س}$

مثال : اذا كان ص = ٢ن^٤ + ٣ن ، ن = س^٢ - ٢س + ١ جد $\frac{ص}{س}$

مثال : اذا كان ص = ظاع ، ع = ٤س^٣ + ١ جد $\frac{ص}{س}$

مثال : اذا كان ص = ن^٢ ، ن = س^٢ جد $\frac{ص}{س}$ عند س = ٣

مثال : اذا كان $v = m^2 + m$ ، $s = m^3 - 1$ جد $\frac{ds}{dv}$ عند $m = 2$

مثال : اذا كانت $v = m^2 + 2$ ، $m = s^2$ ، $l = \frac{s}{2}$ جد $\frac{dl}{dv}$

مثال : اذا كان $v = \pi \tan$ ، $n = 2s$ ، عندما $s = \frac{\pi}{6}$

مثال : اذا كان $s = \pi \tan$ ، $\frac{\pi^5}{2} = \frac{vs}{ns}$ ، $\frac{1}{2} = \frac{vs}{s}$ عندما $s = \pi$ جد أ

مثال : اذا كانت $v = n^3$ ، $s = 2n$ جد $\frac{ds}{v^2}$ | $3=n$

مثال : اذا كان $v = m + 7$ ، $\frac{v}{s} = 2$ جد $\frac{v^2}{s}$

مثال : اذا كانت $v = (s^2 + 1)$ فاستخدم قاعده السلسله لايجاد $\frac{v}{s}$

مثال : اذا كان $v = (s^2 - s + 1)$ فجد $\frac{v}{s}$ باستخدام قاعده السلسله

مثال : استخدم قاعده السلسله لحساب $\frac{v}{s}$ للاقتران $v = (s^2 + 2s + 1)$

مثال : استخدم قاعده السلسله لحساب $\frac{v}{s}$ للاقتران $v = (s^2 + 2s)$

نتيجه : اذا كان هـ (س) قابلا للاشتقاق عند س وكان ص = (هـ (س))^ن حيث ن: عدد صحيح

$$\frac{ص}{س} = ن (هـ (س))^{ن-١} \times هـ'(س)$$

البرهان :

أمثله : جد $\frac{ص}{س}$ لكل من الاقترانات :

$$(١) ص = (س^٥ - س^٩)^٤$$

$$(٢) ص = (س^٢ + ظاس)^٦$$

$$(٣) ص = (هـ (س))^٥$$

$$(٤) ص = (جتاس)^٧$$

$$(٥) ص = قاء (س)$$

قاعده : اذا كان ص = جاك (هـ(س)) حيث ن عدد صحيح موجب فإن :

$$\frac{ص}{س} = ن جاك^{ن-١} هـ'(س) \times جتاه (س) \times هـ'(س)$$

البرهان :

أمثله : جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي :

$$(١) ص = ظتا^١(س٧)^٢$$

$$(٢) ص = جا^٣ق(س٥)$$

$$(٣) ص = ظا^١(ظاءس)$$

$$(٤) ص = قا^٢(س ق(س))$$

$$(٥) ص = (س ظاس + ٥)^٣$$

$$(٦) ص = \left(\frac{٥٧}{٧ + ٢س}\right)^٩$$

$$(٧) ص = (جا^٢س + ٧)^١٢$$

$$(٨) ص = \frac{(س٤)٧}{جا٢س}$$

$$(٩) ص = ق^٢(س) \times ق(س)^٣$$

أمثله : جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي :

(١) ص = جا هس + جتا ٩س

(٢) ص = ظتا(س^٢ + ٤)

(٣) ص = ق(هـ (س^٢))

(٤) اذا كان ص = س^٢ × ق^٥ (س^٢) جد $\frac{ص}{س}$ | حيث ق(١) = ١ ، ص'(١) = ١

(٥) اذا كان ق(س) = | هـ س^٢ - ٩ | جد (ص^٢)'(١)

(٦) اذا كان ص = (أس + ب)^٢ جد أ ، ب التي تجعل ص = ٨٤س + ٢٤

(٧) اذا كان ص = (قاس + ظاس)^٣ حيث ن : عدد صحيح موجب أثبت أن $\frac{ص}{س} = ن × ص × قاس$

مثال: اذا كان ق(س^٣) = س^٢ + ٦س جد و(٨)

مثال: اذا كان ق(س^٤) = $\frac{س}{س}$ (س^٢ + ٢س) فجد و(٤)

مثال: اذا كان ص = $\sqrt{س^٢ + ٣س}$ جد $\frac{س}{س}$

مثال: اذا كان ص = ظس + ١ظا^٣س أثبت أن $\frac{س}{س} = قاس$

مثال: ص = جاس - جتا^٢س جد $\frac{س}{س}$

مثال: اذا كان ص = قاس + ظاس ، أثبت ان $\frac{س^٢}{س} = قاس \times ص^٢$

مثال : اذا كان ص = ٣ جاهس + ٢ جتاهس جد $\frac{ص^٢}{س^٢}$ عندما ص = ٦

مثال : يقال للاقتران ق بأنه زوجي اذا كان ق(-س) = ق(س) لجميع قيم س ، وأنه فردي اذا كان ق(-س) = -ق(س) لجميع قيم س أثبت أن :

(١) اذا كان ق(س) اقترانا فرديا قابلا للاشتقاق ، فإن ق'(س) اقتران زوجي

(٢) اذا كان ق(س) اقترانا زوجيا قابلا للاشتقاق ، فإن ق'(س) اقتران فردي

نمارين :

(١) اذا كان ق(س) = س^٢ + س^٣ ، هـ (س) = ٣س^٢ فجد كلا مما يأتي :

أ) (١)'(هـ٠) (ب) (٢)'(هـ٠)

ج) (٣)''(هـ٠)

(٢) اذا كان ص = جتاه(س) + $\frac{\pi}{٢}$ أثبت أن ص + ص = ٠

(٣) استخدم قاعده السلسله لايجاد $\frac{ص^٤}{س^٤} = ص$ (١-س^٣)^٤

(٤) اذا كان ق ، هـ اقترانين معرفين على ح وقابلين للاشتقاق على مجاليهما وكان هـ(٢) = ٣ ، ق'(٣) = ٤

هـ(٢) = ٦- فجد كلا مما يلي :

أ) (٢)'(هـ٠)

ب) ق'(س^٢) عند س = $\sqrt[٣]{٣}$

(٥) اذا كان ق ، هـ اقترانين قابليت للاشتقاق بحيث كان هـ'(س) = ق(س) ، ق'(س) = هـ(س) وكان

ل(س) = (هـ(س))^٢ + (ق(س))^٢ ، فجد ل'(س)

الدرس التاسع

الاشتقاق الضمني

العلاقة نوعان :

(١) صريحة : يمكن فصل السينات عن الصادات بسهولة ، مثال : $ص = س^٢ - ٣ص$ (٢) ضمنية : لا يمكن فصل السينات عن الصادات بسهولة ، مثال : $س^٣ + ٤س^٢ص = ٥س + ٦ص^٣$ مع الاشتقاق الضمني وعند حساب $\frac{ص}{س}$ = صَ نضع مع كل اشتقاق ص الرمز $\frac{ص}{س}$ أو صَ

خطوات الحل :

(١) نشتق جميع الحدود وعند وجود ص نشتقه مع $\frac{ص}{س}$ (٢) تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{ص}{س}$ على طرف والتي لا تحتويه على الطرف الآخر(٣) نقسم على المقدار المطلوب مع $\frac{ص}{س}$

أمثلة :

جد $\frac{ص}{س}$ لكل من الاقترانات التالية :

(١) $٨ = س^٢ + ٣ص^٢$

(٢) $٣ = ص^٦ + ص^٨ - ص^٥$

(٣) $ص = ٣ص^٢ + جا^٢ص$

(٤) اذا كان $س^٥ص^٢ - س^٣ = ٣$ جد $\frac{ص}{س}$ عند النقطة (١ ، ٢)

$$(5) \text{ جا(س ص)} = \text{ص عند النقطة } \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(6) \text{ س} + \text{ص}^2 = \text{س ص عند النقطة } (2, 8)$$

$$(7) \text{ إذا كان (جا ص + جتا ص)}^2 = \text{س ج د } \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ عند النقطة } (0, 1)$$

$$(8) \text{ و(ص}^2) = \text{س وكان و(1)}' = 3 \text{ عند ص} = 1$$

$$(9) \text{ س} = \text{و(ص}^2 + 1) \text{ وكان و(5)}' = 4 \text{ عند ص} = 2$$

$$(10) \sqrt{\text{س ص}} = 1 \text{ عند س} = 2$$

$$(11) \text{ ص}^2 = \text{و(2س}^2 - \text{س)}, \text{ و(6)}' = 4, \text{ س} = 2$$

$$(12) \quad \cup (ص+1) = س^3, \quad \cup (٥) = \xi, \quad \cup (٥) = ٨ \text{ عند } ص = \xi$$

$$(13) \quad \text{اذا كان } ص = ق(س), \quad ص^3 = ق(٢س^2 - س), \quad \cup (٦) = \xi, \quad ق(٦) = ٨, \quad \text{فجد } \frac{ص}{س} \text{ عند } س = ٢$$

نظرية : إذا كان $ص = س^{\frac{ك}{ن}}$ حيث $\frac{ك}{ن}$ عدد نسبي فإن

$$\frac{ص}{س} = \frac{س^{\frac{ك}{ن}}}{س} = س^{\frac{ك}{ن} - 1}$$

البرهان:

تعميم : إذا كان $ص = (هـ(س))^{\frac{ك}{ن}}$ حيث $ن$ عدد نسبي فإن :

$$\frac{ص}{س} = \frac{(هـ(س))^{\frac{ك}{ن}}}{س} = (هـ(س))^{\frac{ك}{ن} - 1} \times هـ'(س) \text{ شرط تحول الجذور إلى أسس}$$

أمثلة: جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي:

$$(1) \quad ص = \sqrt[3]{س} + \sqrt[4]{س^9}$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{(س^2 + جاسه)^9} = ص$$

$$(3) \quad \sqrt[3]{س^2 + ٤س^2} = ص^2$$

$$(4) \quad ٣ = \frac{٢}{ص} + \frac{٤}{س} \quad \text{عند } (١, ٤)$$

$$(5) \quad (س ص)^3 = ٤س$$

$$(6) \quad \text{ص جتا } ٢س = س جتا ٢ص \quad , \quad \text{فجد } \frac{س}{ص} \quad \text{عند النقطة } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

مثال : اذا كان $\sqrt[3]{س^2 + جاسه} = ص$ أثبت أن $٢صص'' + (ص')^2 = ٢ + ص = ٢$

مثال : اذا كان $v - s = \text{جاس} = \text{أثبت أن } v + s = \frac{2v}{s-1}$ $s \neq 1$

مثال : اذا كان $v = \sqrt{s+s} = \text{أثبت أن } v = \sqrt{(2-v)^2 - 3}$

حاله خاصه للجذر التربيعي :

$$v = \sqrt{h(s)} \quad \text{فإن } v' = \frac{h'(s)}{2\sqrt{h(s)}}$$

مثال : جد النقطه على المنحنى العلاقه $v = \sqrt{s} + \sqrt{3-v}$ التي يكون عندها المماس أفقيا

مثال : اذا كان $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ، $\sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ، جد $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ عندما $\sqrt{3} = 1$

مثال : اذا كان $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ، $\sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ، جد $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ عندما $(1, 1)$

مثال : اذا كان $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ، فاثبت أن $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3}$

مثال : اذا كان $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ، فاثبت أن $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3}$

نمارين :

$$(١) \text{ اذا كان جاص} = \text{ظاس أثبت أن ظاص} = \frac{\text{ص}^{\prime\prime}}{٢\text{ق}^٢\text{ا}^٢\text{س} + (\text{ص}')^٢}$$

$$(٢) \text{ اذا كان ص} = \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}}} \text{ أثبت أن } \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}}} \times \text{ص}' = \text{ص}$$

$$(٣) \text{ اذا كان جتاص} - \text{س} = \text{ص} = ٢ \text{ س} ، \text{ فأثبت أن ص}''(\text{س} + \text{جاص}) + \text{ص}'(\text{ص} + ٢) = ٠$$

$$(٤) \text{ اذا كانت ص} = \text{أجاس} - \text{ب جتاس} ، \text{ أ ، ب ثابتان فأثبت أن :}$$

$$(\text{ص}')^٢ + \text{ص}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢$$

